2007 普通高等学校招生考试 (安徽卷理)

一、选择题

1. 下列函数中, 反函数是其自身的函数为 ( )

(A) $f(x)=x^2$, $x\in[0,+\infty)$ (B) $f(x)=x^3$, $x\in(-\infty,+\infty)$

(C) $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ (D) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

2. 设 l, m, n 均为直线, 其中 m, n 在平面 α 内, "$l\perp\alpha$"是"$l\perp m$ 且 $l\perp n$"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $|x|\geqslant ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $a<-1$ (B) $|a|\leqslant 1$ (C) $|a|<1$ (D) $a\geqslant 1$

4. 若 a 为实数, $\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}\mathrm{i}}=-\sqrt{2}\mathrm{i}$, 则 a 等于 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $-2\sqrt{2}$

5. 若 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2\leqslant 2^{2-x}<8\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid |\log_2 x|>1\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

6. 函数 $f(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象为 C,

① 图象 C 关于直线 $x=\dfrac{11}{12}\pi$ 对称;

② 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数;

③ 由 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C.

以上三个论断中, 正确论断的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0,\\ x-2y+1\leqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0\end{cases}$ 上, 点 Q 在曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 上, 那么 $|PQ|$ 的最小值为 ( )

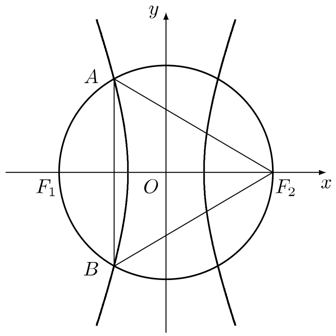
(A) $\sqrt{5}-1$ (B) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1$ (C) $2\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}-1$

8. 半径为 1 的球面上的四点 A, B, C, D 是正四面体的顶点, 则 A 与 B 两点间的球面距离为 ( )

(A) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (B) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

(C) $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ (D) $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

9. 如图, F_1 和 F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{r^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两个焦点, A 和 B 是以 O 为圆心, 以 $|OF_1|$ 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点, 且 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形, 则双曲线的离心率为 ( )



(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $1+\sqrt{3}$

10. 以 $\Phi(x)$ 表示标准正态总体在区间 $(-\infty,x)$ 内取值的概率, 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则概率 $P(|\xi-\mu|<\sigma)$ 等于 ( )

(A) $\Phi(\mu+\sigma)-\Phi(\mu-\sigma)$ (B) $\Phi(1)-\Phi(-1)$

(C) $\Phi\left(\dfrac{1-\mu}{\sigma}\right)$ (D) $2\Phi(\mu+\sigma)$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数, T 是它的一个正周期. 若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上的根的个数记为 n, 则 n 可能为 ( )

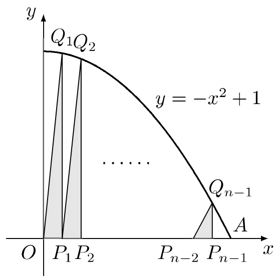
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5

二、填空题

12. 若 $\left(2x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中含有常数项, 则最小的正整数 n 等于______.

13. 在四面体 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{OE}=$______. (用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示)

14. 如图, 抛物线 $y=-x^2+1$ 与 x 轴的正半轴交于点 A, 将线段 OA 的 n 等分点从左至右依次记为 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$, 过这些分点分别作 x 轴的垂线, 与抛物线的交点依次为 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n-1}$, 从而得到 $n-1$ 个直角三角形 $\triangle Q_1OP_1$, $\triangle Q_2P_1P_2$, $\cdots$, $\triangle Q_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$. 当 $n\to\infty$ 时, 这些三角形的面积之和的极限为______.



15. 在正方体上任意选择 4 个顶点, 它们可能是如下各种几何形体的 4 个顶点, 这些几何形体是______. (写出所有正确结论的编号)

① 矩形;

② 不是矩形的平行四边形;

③ 有三个面为等腰直角三角形, 有一个面为等边三角形的四面体;

④ 每个面都是等边三角形的四面体;

⑤ 每个面都是直角三角形的四面体.

三、解答题

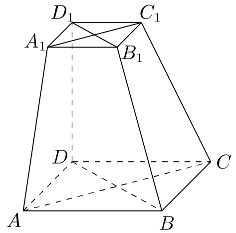
16. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, β 为 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的最小正周期, $\boldsymbol{a}=\left(\tan\left(\alpha+\dfrac{1}{4}\beta\right),-1\right)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$. 求 $\dfrac{2\cos^2\alpha+\sin 2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

17. 如图, 在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 1 的正方形, $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$, $DD_1=2$.

(1) 求证: A_1C_1 与 AC 共面, B_1D_1 与 BD 共面;

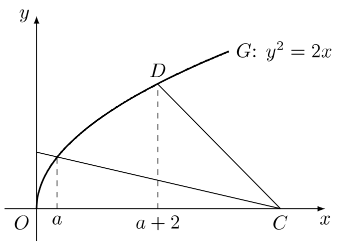
(2) 求证: 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BDD_1;

(3) 求二面角 $A-BB_1-C$ 的大小. (用反三角函数值表示)



18. 设 $a \geqslant 0$, $f(x)=x-1-\ln^2 x+2a\ln x\ (x>0)$.
(1) 令 $F(x)=xf'(x)$, 讨论 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值;
(2) 求证: 当 $x>1$ 时, 恒有 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$.

19. 如图, 曲线 G 的方程为 $y^2=2x\ (y \geqslant 0)$. 以原点为圆心, 以 $t\ (t>0)$ 为半径的圆分别与曲线 G 和 y 轴的正半轴相交于点 A 与点 B. 直线 AB 与 x 轴相交于点 C.
(1) 求点 A 的横坐标 a 与点 C 的横坐标 c 的关系式;
(2) 设曲线 G 上点 D 的横坐标为 $a+2$, 求证: 直线 CD 的斜率为定值.



20. 在医学生物学试验中, 经常以果蝇作为试验对象, 一个关有 6 只果蝇的笼子里, 不慎混入了两只苍蝇 (此时笼内共有 8 只蝇子: 6 只果蝇和 2 只苍蝇), 只好把笼子打开一个小孔, 让蝇子一只一只地往外飞, 直到两只苍蝇都飞出, 再关闭小孔. 以 ξ 表示笼内还剩下的果蝇的只数.
(1) 写出 ξ 的分布列 (不要求写出计算过程);
(2) 求数学期望 $E\xi$;
(3) 求概率 $P(\xi \geqslant E\xi)$.

21. 某国采用养老储备金制度. 公民在就业的第一年就交纳养老储备金, 数目为 a_1, 以后每年交纳的数目均比上一年增加 $d\ (d>0)$, 因此, 历年所交纳的储务金数目 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个公差为 d 的等差数列, 与此同时, 国家给予优惠的计息政策, 不仅采用固定利率, 而且计算复利. 这就是说, 如果固定年利率为 $r\ (r>0)$, 那么, 在第 n 年末, 第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$, 第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}, \cdots$. 以 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.
(1) 写出 T_n 与 $T_{n-1}\ (n \geqslant 2)$ 的递推关系式;
(2) 求证: $T_n=A_n+B_n$, 其中 $\{A_n\}$ 是一个等比数列, $\{B_n\}$ 是一个等差数列.

2007 普通高等学校招生考试 (安徽卷文)

一、选择题

1. 若 $A=\{x\mid x^2=1\}$, $B=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$, 则 $A\cap B=$ ( )
(A) $\{3\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\varnothing$ (D) $\{-1\}$

2. 椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的离心率为 ( )
(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

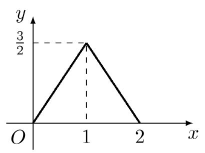
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_2=1$, $a_3=3$, $S_4=$ ( )
(A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 6

4. 下列函数中, 反函数是其自身的函数为 ( )
(A) $f(x)=x^2$, $x\in[0,+\infty)$ (B) $f(x)=x^3$, $x\in(-\infty,+\infty)$
(C) $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ (D) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

5. 若圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 的圆心到直线 $x-y+a=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 a 的值为 ( )
(A) -2 或 2 (B) $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$ (C) 2 或 0 (D) -2 或 0

6. 设 l, m, n 均为直线, 其中 m, n 在平面 α 内, "$l\perp\alpha$"是"$l\perp m$ 且 $l\perp n$"的 ( )
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 图中的图象所表示的函数的解析式为 ( )



(A) $y=\dfrac{3}{2}|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ (B) $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$
(C) $y=\dfrac{3}{2}-|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ (D) $y=1-|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

8. 设 $a>1$, 且 $m=\log_a(a^2+1)$, $n=\log_a(a-1)$, $p=\log_a(2a)$, 则 m, n, p 的大小关系为 ( )
(A) $n>m>p$ (B) $m>p>n$ (C) $m>n>p$ (D) $p>m>n$

9. 如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ 2y-1\geqslant 0\end{cases}$ 上, 点 Q 在曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 上, 那么 $|PQ|$ 的最小值为 ( )
(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1$ (C) $2\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}-1$

10. 把边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角, 折成直二面角后, 在 A, B, C, D 四点所在的球面上, B 与 D 两点之间的球面距离为 ( )
(A) $\sqrt{2}\pi$ (B) π (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数, T 是它的一个正周期. 若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上的根的个数记为 n, 则 n 可能为 ( )
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5

二、填空题

12. 已知 $(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 则 $(a_0+a_2+a_4)(a_1+a_3+a_5)$ 的值等于______.

13. 在四面体 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{OE}=$______. (用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示)

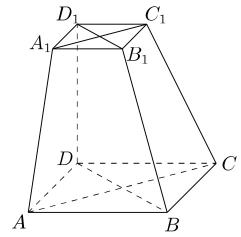
14. 在正方体上任意选择两条棱, 则这两条棱相互平行的概率为______.

15. 函数 $f(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象为 C, 如下结论中正确的是______. (写出所有正确结论的编号)
① 图象 C 关于直线 $x=\dfrac{11}{12}\pi$ 对称;
② 图象 C 关于点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right)$ 对称;
③ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数;
④ 由 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C.

三、解答题

16. 解不等式: $(|3x-1|-1)(\sin x-2)>0$.

17. 如图, 在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 1 的正方形, $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$, $DD_1=2$.
(1) 求证: A_1C_1 与 AC 共面, B_1D_1 与 BD 共面;
(2) 求证: 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BDD_1;
(3) 求二面角 $A-BB_1-C$ 的大小. (用反三角函数值表示)



18. 设 F 是抛物线 G: $x^2=4y$ 的焦点.
(1) 过点 $P(0,-4)$ 作抛物线 G 的切线, 求切线方程;
(2) 设 A, B 为抛物线 G 上异于原点的两点, 且满足 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$, 延长 AF, BF 分别交抛物线 G 于点 C, D, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

19. 在医学生物学试验中, 经常以果蝇作为试验对象, 一个关有 6 只果蝇的笼子里, 不慎混入了两只苍蝇 (此时笼内共有 8 只蝇子: 6 只果蝇和 2 只苍蝇), 只好把笼子打开一个小孔, 让蝇子一只一只地往外飞, 直到两只苍蝇都飞出, 再关闭小孔.
(1) 求笼内恰好剩下 1 只果蝇的概率;
(2) 求笼内至少剩下 5 只果蝇的概率.

20. 设函数 $f(x)=-\cos^2 x-4t\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+4t^3+t^2-3t+4$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $|t|\leqslant 1$. 将 $f(x)$ 的最小值记为 $g(t)$.
(1) 求 $g(t)$ 的表达式;
(2) 讨论 $g(t)$ 在区间 $(-1,1)$ 内的单调性并求极值.

21. 某国采用养老储备金制度. 公民在就业的第一年就交纳养老储备金, 数目为 a_1, 以后每年交纳的数目均比上一年增加 d $(d>0)$, 因此, 历年所交纳的储务金数目 a_1, a_2, $\cdots$ 是一个公差为 d 的等差数列, 与此同时, 国家给予优惠的计息政策, 不仅采用固定利率, 而且计算复利. 这就是说, 如果固定年利率为 r $(r>0)$, 那么, 在第 n 年末, 第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$, 第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}$, $\cdots$. 以 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.
(1) 写出 T_n 与 T_{n-1} $(n\geqslant 2)$ 的递推关系式;
(2) 求证: $T_n=A_n+B_n$, 其中 $\{A_n\}$ 是一个等比数列, $\{B_n\}$ 是一个等差数列.

2007 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$, 那么角 θ 是 ( )

(A) 第一或第二象限角 (B) 第二或第三象限角

(C) 第三或第四象限角 (D) 第一或第四象限角

2. 函数 $f(x)=3^x\ (0<x\leqslant 2)$ 的反函数的定义域为 ( )

(A) $(0,+\infty)$ (B) $(1,9]$ (C) $(0,1)$ (D) $[9,+\infty)$

3. 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β 的一个充分条件是 ( )

(A) 存在一条直线 a, $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$

(B) 存在一条直线 a, $a\subset\alpha$, $a\parallel\beta$

(C) 存在两条平行直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

(D) 存在两条异面直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

4. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 那么 ( )

(A) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$ (B) $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$ (C) $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$ (D) $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

5. 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照, 要求排成一排, 2 位老人相邻但不排在两端, 不同的排法共有 ( )

(A) 1440 种 (B) 960 种 (C) 720 种 (D) 480 种

6. 若不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant a,\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $a\geqslant\dfrac{4}{3}$ (B) $0<a\leqslant 1$

(C) $1\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{3}$ (D) $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\dfrac{4}{3}$

7. 如果正数 a, b, c, d 满足 $a+b=cd=4$, 那么 ( )

(A) $ab\leqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(B) $ab\geqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(C) $ab\leqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

(D) $ab\geqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

8. 对于函数① $f(x)=\lg(|x-2|+1)$, ② $f(x)=(x-2)^2$, ③ $f(x)=\cos(x+2)$, 判断如下三个命题的真假:

命题甲: $f(x+2)$ 是偶函数;

命题乙: $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数, 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数;

命题丙: $f(x+2)-f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是 ( )

(A) ①③ (B) ①② (C) ③ (D) ②

二、填空题

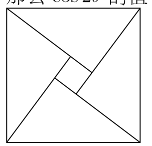
9. $\dfrac{2}{(1+\mathrm{i})^2}=$______.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 则此数列的通项公式为______; 数列 $\{na_n\}$ 中数值最小的项是第______项.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, $C=150^\circ$, $BC=1$, 则 $AB=$______.

12. 已知集合 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 1\}$, $B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$, 则实数 a 的取值范围是______.

13. 2002 年在北京召开的国际数学家大会, 会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形 (如图). 如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, 直角三角形中较小的锐角为 θ, 那么 $\cos 2\theta$ 的值等于______.



14. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为______; 满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是______.

三、解答题

15. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+cn$ (c 是常数, $n=1,2,3,\cdots$), 且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列.

(1) 求 c 的值;

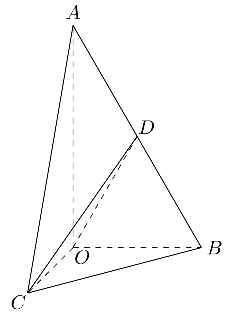
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

16. 如图, 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$, 斜边 $AB=4$. $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 可以通过 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角. 动点 D 的斜边 AB 上.

(1) 求证: 平面 $COD\perp$ 平面 AOB;

(2) 当 D 为 AB 的中点时, 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小;

(3) 求 CD 与平面 AOB 所成角的最大值.



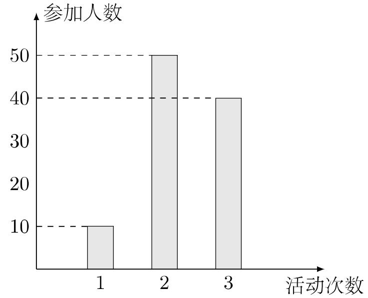
17. 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2,0)$, AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$, 点 $T(-1,1)$ 在 AD 边所在直线上.

(1) 求 AD 边所在直线的方程;

(2) 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程;

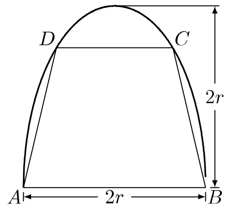
(3) 若动圆 P 过点 $N(-2,0)$, 且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切, 求动圆 P 的圆心的轨迹方程.

18. 某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动 (以下简称活动). 该校合唱团共有 100 名学生, 他们参加活动的次数统计如图所示.



(1) 求合唱团学生参加活动的人均次数;
(2) 从合唱团中任意选两名学生, 求他们参加活动次数恰好相等的概率;
(3) 从合唱团中任选两名学生, 用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值, 求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 有一块半椭圆形钢板, 其半轴长为 $2r$, 短半轴长为 r, 计划将此钢板切割成等腰梯形的形状, 下底 AB 是半椭圆的短轴, 上底 CD 的端点在椭圆上, 记 $CD=2x$, 梯形面积为 S.
(1) 求面积 S 以 x 为自变量的函数式, 并写出其定义域;
(2) 求面积 S 的最大值.



20. 已知集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\}\ (k\geqslant 2)$, 其中 $a_i\in\mathbf{Z}\ (i=1,2,\cdots,k)$. 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in A,\ a+b\in A\}$; $T=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in A,\ a-b\in A\}$, 其中 (a,b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a\in A$, 总有 $-a\notin A$, 则称集合 A 具有性质 P.
(1) 检验集合 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 与 $\{-1,\ 2,\ 3\}$ 是否具有性质 P, 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T;
(2) 对任何具有性质 P 的集合 A, 证明: $n\leqslant\dfrac{k(k-1)}{2}$;
(3) 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.

2007 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$, 那么角 θ 是 ( )

(A) 第一或第二象限角 (B) 第二或第三象限角

(C) 第三或第四象限角 (D) 第一或第四象限角

2. 函数 $f(x)=3^x\ (0<x\leqslant 2)$ 的反函数的定义域为 ( )

(A) $(0,+\infty)$ (B) $(1,9]$ (C) $(0,1)$ (D) $[9,+\infty)$

3. 函数 $f(x)=\sin 2x-\cos 2x$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

4. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的焦点为 F_1, F_2, 两条准线与 x 轴的交点分别为 M, N. 若 $|MN|\leqslant 2|F_1F_2|$, 则该椭圆离心率的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (B) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ (D) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

5. 某城市的汽车牌照号码由 2 个英文字母后接 4 个数字组成, 其中 4 个数字互不相同的牌照号码共有 ( )

(A) $\left(\mathrm{C}_{26}^1\right)^2\mathrm{A}_{10}^4$ 个 (B) $\mathrm{A}_{26}^2\mathrm{A}_{10}^4$ 个 (C) $\left(\mathrm{C}_{26}^1\right)^2 10^4$ 个 (D) $\mathrm{A}_{26}^2 10^4$ 个

6. 若不等式组 $\begin{cases}x-y+5\geqslant 0,\\ y\geqslant a,\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $a<5$ (B) $a\geqslant 7$ (C) $5\leqslant a<7$ (D) $a<5$ 或 $a\geqslant 7$

7. 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β 的一个充分条件是 ( )

(A) 存在一条直线 a, $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$

(B) 存在一条直线 a, $a\subset\alpha$, $a\parallel\beta$

(C) 存在两条平行直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

(D) 存在两条异面直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

8. 对于函数① $f(x)=|x+2|$, ② $f(x)=(x-2)^2$, ③ $f(x)=\cos(x-2)$, 判断如下两个命题的真假:

命题甲: $f(x+2)$ 是偶函数;

命题乙: $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数, 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数;

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是 ( )

(A) ①② (B) ①③ (C) ② (D) ③

二、填空题

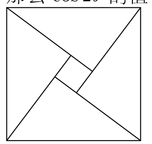
9. $f'(x)$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x+1$ 的导函数, 则 $f'(-1)$ 的值是______.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 则此数列的通项公式为______.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$, $\boldsymbol{b}=(1,1)$. 若向量 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$, 则实数 λ 的值是______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, $C=150^\circ$, $BC=1$, 则 $AB=$______.

13. 2002 年在北京召开的国际数学家大会, 会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形 (如图). 如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, 直角三角形中较小的锐角为 θ, 那么 $\cos 2\theta$ 的值等于______.



14. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为______; 当 $g[f(x)]=2$ 时, $x=$______.

三、解答题

15. 记关于 x 的不等式 $\dfrac{x-a}{x+1}<0$ 的解集为 P, 不等式 $|x-1|\leqslant 1$ 的解集为 Q.

(1) 若 $a=3$, 求 P;

(2) 若 $Q\subseteq P$, 求正数 a 的取值范围.

16. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+cn$ (c 是常数, $n=1,2,3,\cdots$), 且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列.

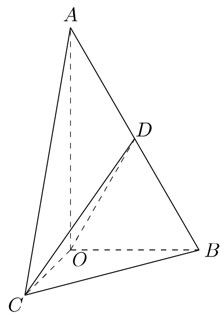
(1) 求 c 的值;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

17. 如图, 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$, 斜边 $AB=4$. $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 可以通过 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角. D 是 AB 的中点.

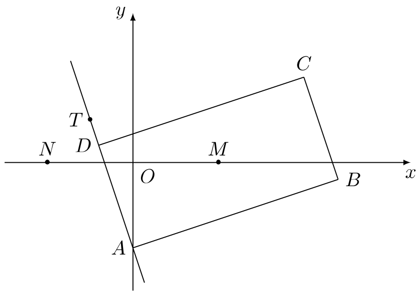
(1) 求证: 平面 $COD\perp$ 平面 AOB;

(2) 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小.



18. 某条公共汽车线路沿线共有 11 个车站 (包括起点站和终点站). 在起点站开出的一辆公共汽车上有 6 位乘客, 假设每位乘客在起点站之外的各个车站下车是等可能的. 求:
(1) 这 6 位乘客在互不相同的车站下车的概率;
(2) 这 6 位乘客中恰有 3 人在终点站下车的概率;

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2,0)$, AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$, 点 $T(-1,1)$ 在 AD 边所在直线上.
(1) 求 AD 边所在直线的方程;
(2) 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程;
(3) 若动圆 P 过点 $N(-2,0)$, 且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切, 求动圆 P 的圆心的轨迹方程.



20. 已知函数 $y=kx$ 与 $y=x^2+2\ (x\geqslant 0)$ 的图象相交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. l_1, l_2 分别是 $y=x^2+2\ (x\geqslant 0)$ 的图象在 A, B 两点的切线, M, N 分别是 l_1, l_2 与 x 轴的交点.
(1) 求 k 的取值范围;
(2) 设 t 为点 M 的横坐标, 当 $x_1<x_2$ 时, 写出 t 以 x_1 为自变量的函数式, 并求其定义域和值域;
(3) 试比较 $|OM|$ 与 $|ON|$ 的大小, 并说明理由 (O 是坐标原点).

2007 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和 $S_3=9$ 且 $a_1=1$, 则 a_2 等于 ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

2. 命题"若 $x^2<1$, 则 $-1<x<1$"的逆否命题是 ( )

(A) 若 $x^2\geqslant 1$, 则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$ (B) 若 $-1<x<1$, 则 $x^2<1$

(C) 若 $x>1$ 或 $x<-1$, 则 $x^2>1$ (D) 若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$, 则 $x^2\geqslant 1$

3. 若三个平面两两相交, 且三条交线互相平行, 则这三个平面把空间分成 ( )

(A) 5 部分 (B) 6 部分 (C) 7 部分 (D) 8 部分

4. 若 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64, 则展开式的常数项为 ( )

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 120

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{3}$, $A=45^\circ$, $C=75^\circ$, 则 $BC=$ ( )

(A) $3-\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $3+\sqrt{3}$

6. 从 5 张 100 元, 3 张 200 元, 2 张 300 元的奥运预赛门票中任取 3 张, 则所取 3 张中至少有 2 张价格相同的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{79}{120}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{23}{24}$

7. 若 a 是 $1+2b$ 与 $1-2b$ 的等比中项, 则 $\dfrac{2ab}{|a|+2|b|}$ 的最大值为 ( )

(A) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

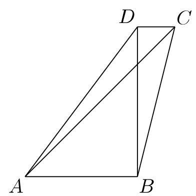
8. 设正数 a, b 满足 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax-b)=4$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}+ab^{n-1}}{a^{n-1}+2b^n}=$ ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

9. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上为减函数, 且函数 $y=f(x+8)$ 为偶函数, 则 ( )

(A) $f(6)>f(7)$ (B) $f(6)>f(9)$ (C) $f(7)>f(9)$ (D) $f(7)>f(10)$

10. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|=4$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|=4$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, 则 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为 ( )



(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

二、填空题

11. 复数 $\dfrac{2i}{2+i^3}$ 的虚部为______.

12. 已知 x, y 满足 $\begin{cases}x-y\leqslant 1,\\2x+y\leqslant 4,\\x\geqslant 1,\end{cases}$ 则函数 $z=x+3y$ 的最大值是______.

13. 若函数 $f(x)=\sqrt{2^{x^2+2ax-a}-1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为______.

14. 设 $\{a_n\}$ 为公比 $q>1$ 的等比数列, 若 a_{2004} 和 a_{2006} 是方程 $4x^2-8x+3=0$ 的两根, 则 $a_{2006}+a_{2007}=$______.

15. 某校要求每位学生从 7 门课程中选修 4 门, 其中甲、乙两门课程不能都选, 则不同的选课方案有______种. (用数字作答)

16. 过双曲线 $x^2-y^2=4$ 的右焦点 F 作倾斜角为 105° 的直线, 交双曲线于 P、Q 两点, 则 $|FP|\cdot|FQ|$ 的值为______.

三、解答题

17. 设 $f(x)=6\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值及最小正周期;

(2) 若锐角 α 满足 $f(\alpha)=3-2\sqrt{3}$, 求 $\tan\dfrac{4}{5}\alpha$ 的值.

18. 某单位有三辆汽车参加某种事故保险. 单位年初向保险公司缴纳每辆 900 元的保险金. 对在一年内发生此种事故的每辆汽车, 单位可获 9000 元的赔偿 (假设每辆车最多只赔偿一次). 设这三辆车在一年内发生此种事故的概率分别为 $\dfrac{1}{9}$、$\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{1}{11}$, 且各车是否发生事故相互独立. 求一年内该单位在此保险中:

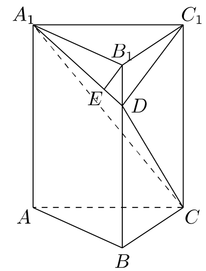
(1) 获赔的概率;

(2) 获赔金额 ξ 的分布列与期望.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=2$, $AB=1$, $\angle ABC=90^\circ$; 点 D、E 分别在 BB_1、A_1D 上, 且 $B_1E\perp A_1D$, 四棱锥 $C-ABDA_1$ 与直三棱柱的体积之比为 $3:5$.

(1) 求异面直线 DE 与 B_1C_1 的距离;

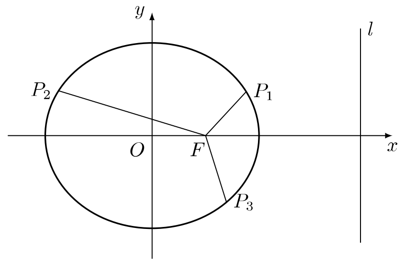
(2) 若 $BC=\sqrt{2}$, 求二面角 $A_1-DC_1-B_1$ 的平面角的正切值.



20. 已知函数 $f(x)=ax^4\ln x+bx^4-c\ (x>0)$ 在 $x=1$ 处取得极值 $-3-c$, 其中 a, b, c 为常数.
(1) 试确定 a, b 的值;
(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 若对任意 $x>0$, 不等式 $f(x)\geqslant -2c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

21. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1>1$, 且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$, $n\in\mathbf{N}_+$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n\left(2^{b_n}-1\right)=1$, 并记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $3T_n+1>\log_2(a_n+3)$, $n\in\mathbf{N}_+$.

22. 如图, 中心在原点 O 的椭圆的右焦点为 $F(3,0)$, 右准线 l 的方程为: $x=12$.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 在椭圆上任取三个不同点 P_1、P_2、P_3, 使 $\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\angle P_3FP_1$, 证明 $\dfrac{1}{|FP_1|}+\dfrac{1}{|FP_2|}+\dfrac{1}{|FP_3|}$ 为定值, 并求此定值.



2007 普通高等学校招生考试 (重庆卷文)

一、选择题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=8$, $a_1=64$, 则公比 q 为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8

2. 设全集 $U=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $A=\{a,\ c\}$, $B=\{b\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$ ( )

(A) $\varnothing$ (B) $\{a\}$ (C) $\{c\}$ (D) $\{a,\ c\}$

3. 垂直于同一平面的两条直线 ( )

(A) 平行 (B) 垂直 (C) 相交 (D) 异面

4. $(2x-1)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 ( )

(A) 15 (B) 60 (C) 120 (D) 240

5. "$-1<x<1$"是"$x^2<1$"的 ( )

(A) 充分必要条件 (B) 充分但不必要条件

(C) 必要但不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 下列各式中, 值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的是 ( )

(A) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$ (B) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$

(C) $2\sin^2 15^\circ-1$ (D) $\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$

7. 从 5 张 100 元, 3 张 200 元, 2 张 300 元的奥运预赛门票中任取 3 张, 则所取 3 张中至少有 2 张价格相同的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{79}{120}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{23}{24}$

8. 若直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 P、Q 两点, 且 $\angle POQ=120^\circ$ (其中 O 为原点), 则 k 的值为 ( )

(A) $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$

9. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(4,6)$, $\overrightarrow{OB}=(3,5)$, 且 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{OB}$, 则向量 $\overrightarrow{OC}=$ ( )

(A) $\left(-\dfrac{3}{7},\dfrac{2}{7}\right)$ (B) $\left(-\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{21}\right)$ (C) $\left(\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7}\right)$ (D) $\left(\dfrac{2}{7},-\dfrac{4}{21}\right)$

10. 设 $P(3,1)$ 为二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+b\ (x\geqslant 1)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象的一个交点, 则 ( )

(A) $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{5}{2}$ (B) $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{5}{2}$

(C) $a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{5}{2}$ (D) $a=-\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{5}{2}$

11. 设 $\sqrt{3}b$ 是 $1-a$ 和 $1+a$ 的等比中项, 则 $a+3b$ 的最大值为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 已知以 $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点, 则椭圆的长轴长为 ( )

(A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{6}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $4\sqrt{2}$

二、填空题

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1$, $BC=2$, $B=60^\circ$, 则 $AC=$______.

14. 已知 $\begin{cases}2x+3y\leqslant 6,\\ x-y\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的最大值为______.

15. 要排出某班一天中语文、数学、政治、英语、体育、艺术 6 门课各一节的课程表, 要求数学课排在前 3 节, 英语课不排在第 6 节, 则不同的排法种数为______. (以数字作答)

16. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+2^{\sqrt{x^2-5x+4}}$ 的最小值为______.

三、解答题

17. 设甲、乙两人每次射击命中目标的概率分别为 $\dfrac{3}{4}$ 和 $\dfrac{4}{5}$, 且各次射击相互独立.

(1) 若甲、乙各射击一次, 求甲命中但乙未命中目标的概率;

(2) 若甲、乙各射击两次, 求两人命中目标的次数相等的概率.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

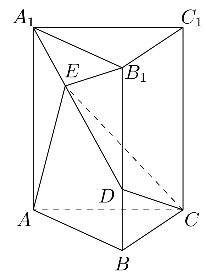
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 若角 α 在第一象限且 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, 求 $f(\alpha)$.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=1$, $BC=\dfrac{3}{2}$, $AA_1=2$; 点 D 在棱 BB_1 上, $BD=\dfrac{1}{3}BB_1$; $B_1E\perp A_1D$, 垂足为 E. 求:

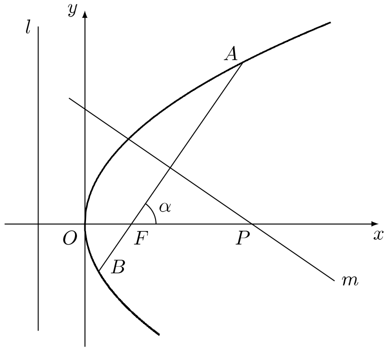
(1) 求异面直线 A_1D 与 B_1C_1 的距离;

(2) 四棱锥 $C-ABDE$ 的体积.



20. 用长为 18 m 的钢条围成一个长方体形状的框架, 要求长方体的长与宽之比为 2 : 1, 问该长方体的长、宽、高各为多少时, 其体积最大? 最大体积是多少?

21. 如图, 倾斜角为 α 的直线经过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F, 且与抛物线交于 A、B 两点.
(1) 求抛物线的焦点 F 的坐标及准线 l 方程;
(2) 若 α 为锐角, 作线段 AB 的垂直平分线 m 交 x 轴于点 P, 证明 $|FP|-|FP|\cos 2\alpha$ 为定值, 并求此定值.



22. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1>1$, 且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$, $n\in\mathbf{N}_+$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n\left(2^{b_n}-1\right)=1$, 并记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $3T_n+1>\log_2(a_n+3)$, $n\in\mathbf{N}_+$.

2007 普通高等学校招生考试 (大纲卷 I 理)

一、选择题

1. α 是第四象限角, $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$, 则 $\sin\alpha=$ ( )

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $-\frac{1}{5}$　(C) $\frac{5}{13}$　(D) $-\frac{5}{13}$

2. 设 a 是实数, 且 $\frac{a}{1+\mathrm{i}}+\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ 是实数, 则 $a=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\frac{3}{2}$　(D) 2

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$, $\boldsymbol{b}=(6,5)$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ ( )

(A) 垂直　(B) 不垂直也不平行

(C) 平行且同向　(D) 平行且反向

4. 已知双曲线的离心率为 2, 焦点是 $(-4,0)$, $(4,0)$, 则双曲线方程为 ( )

(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　(B) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　(C) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$　(D) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$

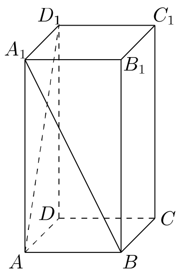
5. 设 $a, b\in\mathbf{R}$, 集合 $\{1,\ a+b,\ a\}=\left\{0,\ \frac{b}{a},\ b\right\}$, 则 $b-a=$ ( )

(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2

6. 下面给出的四个点中, 到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且位于 $\begin{cases}x+y-1<0,\\x-y+1>0\end{cases}$ 表示的平面区域内的点是 ( )

(A) $(1,1)$　(B) $(-1,1)$　(C) $(-1,-1)$　(D) $(1,-1)$

7. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 ( )



(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{3}{5}$　(D) $\frac{4}{5}$

8. 设 $a>1$, 函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$, 则 $a=$ ( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) 2　(C) $2\sqrt{2}$　(D) 4

9. $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $h(x)=f(x)+g(x)$, 则"$f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数"是"$h(x)$ 为偶函数"的 ( )

(A) 充要条件　(B) 充分而不必要的条件

(C) 必要而不充分的条件　(D) 既不充分也不必要的条件

10. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中, 常数项为 15, 则 $n=$ ( )

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

11. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l, 经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A, $AK\perp l$, 垂足为 K, 且 $\triangle AKF$ 的面积是 ( )

(A) 4　(B) $3\sqrt{3}$　(C) $4\sqrt{3}$　(D) 8

12. 函数 $f(x)=\cos^2 x-2\cos^2\frac{x}{2}$ 的一个单调增区间是 ( )

(A) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$　(B) $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$　(C) $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$　(D) $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$

二、填空题

13. 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有______种. (用数字作答)

14. 函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_3 x\ (x>0)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(x)=$______.

15. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 已知 S_1, $2S_2$, $3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为______.

16. 一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上. 已知正三棱柱的底面边长为 2, 则该三角形的斜边长为______.

三、解答题

17. 设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a=2b\sin A$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围.

18. 某商场经销某商品, 根据以往资料统计, 顾客采用的付款期为 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

商场经销一件该商品, 采用 1 期付款, 基利润为 200 元; 分 2 期或 3 期付款, 基利润为 250 元; 分 4 期或 5 期付款, 其利润为 300 元. η 表示经销一件该商品的利润.

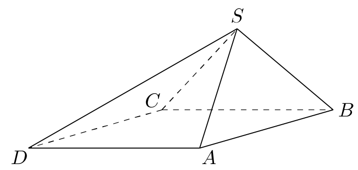
(1) 求事件 A:"购买该商品的 3 位顾客中, 至少有 1 件位采用 1 期付款的概率 $P(A)$;

(2) 求 η 的分布列及期望 $E\eta$.

19. 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$. 已知 $\angle ABC=45^\circ$, $AB=2$, $BC=2\sqrt{2}$, $SA=SB=\sqrt{3}$.

(1) 证明: $SA\perp BC$;

(2) 求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小.



20. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$.

(1) 证明: $f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$;

(2) 若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$, 求 a 的取值范围.

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 过 F_1 的直线交椭圆于 B、D 两点, 过 F_2 的直线交椭圆于 A、C 两点, 且 $AC\perp BD$, 垂足为 P.

(1) 设 P 点的坐标为 (x_0,y_0), 证明: $\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}<1$;

(2) 求四过形 $ABCD$ 的面积的最小值.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2$, $a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)$, $n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 中 $b_1=2$, $b_{n+1}=\dfrac{3b_n+4}{2b_n+3}$, $n=1,2,3,\cdots$, 证明: $\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$, $n=1,2,3,\cdots$.

2007 普通高等学校招生考试 (大纲卷 I 文)

一、选择题

1. 设 $S=\{x\mid 2x+1>0\}$, $T=\{x\mid 3x-5<0\}$, 则 $S\cap T=$ ( )

(A) $\varnothing$ (B) $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{2}\right\}$

(C) $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{5}{3}\right\}$ (D) $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{3}\right\}$

2. α 是第四象限角, $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$, 则 $\sin\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{5}{13}$ (B) $-\dfrac{5}{13}$ (C) $\dfrac{5}{12}$ (D) $-\dfrac{5}{12}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$, $\boldsymbol{b}=(6,5)$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ ( )

(A) 垂直 (B) 不垂直也不平行

(C) 平行且同向 (D) 平行且反向

4. 已知双曲线的离心率为 2, 焦点是 $(-4,0)$, $(4,0)$, 则双曲线方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{10}=1$

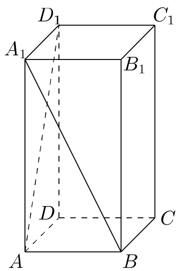
5. 甲、乙、丙 3 位同学选修课程, 从 4 门课程中, 甲选修 2 门, 乙、丙各选修 3 门, 则不同的选修方案共有 ( )

(A) 36 种 (B) 48 种 (C) 96 种 (D) 192 种

6. 下面给出的四个点中, 位于 $\begin{cases}x+y-1<0,\\ x-y+1>0\end{cases}$ 表示的平面区域内的点是( )

(A) $(0,2)$ (B) $(-2,0)$ (C) $(0,-2)$ (D) $(2,0)$

7. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 ( )



(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

8. 设 $a>1$, 函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $a=$ ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

9. $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $h(x)=f(x)+g(x)$, 则"$f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数"是"$h(x)$ 为偶函数"的 ( )

(A) 充要条件 (B) 充分而不必要的条件

(C) 必要而不充分的条件 (D) 既不充分也不必要的条件

10. 函数 $y=2\cos^2 x$ 的一个单调增区间是 ( )

(A) $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

11. 曲线 $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$ 在点 $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$ 处的切线与坐标轴围成的三角形面积为( )

(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{2}{9}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

12. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l, 经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A, $AK\perp l$, 垂足为 K, 且 $\triangle AKF$ 的面积是 ( )

(A) 4 (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 8

二、填空题

13. 从某自动包装机包装的食盐中, 随机抽取 20 袋, 测得各袋的质量分别为 (单位: g):

492	496	494	495	498	497	501	502	504	496
497	503	506	508	507	492	496	500	501	499

根据频率分布估计总体分布的原理, 该自动包装机包装的袋装食盐质量在 497.5 g ~ 501.5 g 之间的概率约为______.

14. 函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_3 x$ $(x>0)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(x)=$______.

15. 正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长和各测棱长都为 $\sqrt{2}$, 点 S、A、B、C、D 都在同一个球面上, 则该球的体积为______.

16. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 已知 S_1, $2S_2$, $3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为______.

三、解答题

17. 设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a=2b\sin A$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 若 $a=3\sqrt{3}$, $c=5$, 求 b.

18. 某商场经销某商品, 顾客可采用一次性付款或分期付款购买. 根据以往资料统计, 顾客采用一次性付款的概率是 0.6. 经销一件该商品, 若顾客采用一次性付款, 商场获得利润 200 元; 若顾客采用分期付款, 商场获得利润 250 元.

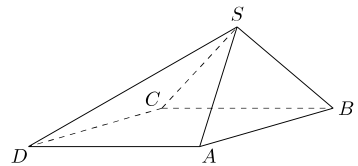
(1) 求 3 位购买该商品的顾客中至少有 1 位采用一次性付款的概率;

(2) 求 3 位顾客每人购买 1 件该商品, 商场获得利润不超过 650 元的概率.

19. 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$. 已知 $\angle ABC=45°$, $AB=2$, $BC=2\sqrt{2}$, $SA=SB=\sqrt{3}$.

(1) 证明: $SA\perp BC$;

(2) 求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小.



20. 设函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+3bx+8c$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 时取得极值.
(1) 求 a、b 的值;
(2) 若对于任意的 $x\in[0,3]$, 都有 $f(x)<c^2$ 成立, 求 c 的取值范围.

21. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, 且 $a_1=b_1=1$, $a_3+b_5=21$, $a_5+b_3=13$.
(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

22. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 过 F_1 的直线交椭圆于 B、D 两点, 过 F_2 的直线交椭圆于 A、C 两点, 且 $AC\perp BD$, 垂足为 P.
(1) 设 P 点的坐标为 (x_0,y_0), 证明: $\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}<1$;
(2) 求四过形 $ABCD$ 的面积的最小值.

2007 普通高等学校招生考试 (大纲卷 II 理)

一、选择题

1. $\sin 210^\circ =$ ( )

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

2. 函数 $f(x)=|\sin x|$ 的一个单调递增区间是 ( )

(A) $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

3. 设复数 z 满足 $\frac{1+2\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $-2+\mathrm{i}$ (B) $-2-\mathrm{i}$ (C) $2-\mathrm{i}$ (D) $2+\mathrm{i}$

4. 以下四个数中的最大者是 ( )

(A) $(\ln 2)^2$ (B) $\ln(\ln 2)$ (C) $\ln\sqrt{2}$ (D) $\ln 2$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda=$ ( )

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$

6. 不等式 $\frac{x-1}{x^2-4}>0$ 的解集为 ( )

(A) $(-2,1)$ (B) $(2,+\infty)$

(C) $(-2,1)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

7. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等, 则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦等于 ( )

(A) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知曲线 $y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 ( )

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

9. 把函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$ 平移, 得到 $y=f(x)$ 的图象, 则 $f(x)=$ ( )

(A) $\mathrm{e}^{x-3}+2$ (B) $\mathrm{e}^{x+3}-2$ (C) $\mathrm{e}^{x-2}+3$ (D) $\mathrm{e}^{x+2}-3$

10. 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有 ( )

(A) 40 种 (B) 60 种 (C) 100 种 (D) 120 种

11. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点. 若双曲线上存在点 A, 使 $\angle F_1AF_2=90^\circ$, 且 $|AF_1|=3|AF_2|$, 则双曲线离心率为 ( )

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (D) $\sqrt{5}$

12. 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A、B、C 为该抛物线上三点. 若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$, 则 $|FA|+|FB|+|FC|=$ ( )

(A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 3

二、填空题

13. $(1+2x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为______. (用数字作答)

14. 在某项测量中, 测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$. 若 ξ 在 $(0,1)$ 内取值的概率为 0.4, 则 ξ 在 $(0,2)$ 内取值的概率为______.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1 cm, 那么该棱柱的表面积为______cm^2.

16. 已知数列的通项 $a_n=-5n+2$, 其前 n 项和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=$______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知内角 $A=\frac{\pi}{3}$, 边 $BC=2\sqrt{3}$, 设内角 $B=x$, 周长为 y.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域;

(2) 求 y 的最大值.

18. 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件 A: "取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品"的概率 $P(A)=0.96$.

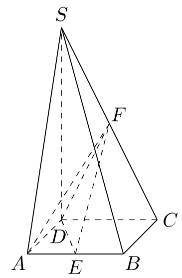
(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p;

(2) 若该批产品共有 100 件, 从中任意抽取 2 件, ξ 表示取出的 2 件产品中二等品的件数, 求 ξ 的分布列.

19. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$, E、F 分别是 AB、SC 的中点.

(1) 求证: $EF\,/\!/$ 平面 SAD;

(2) 设 $SD=2CD$, 求二面角 $A-EF-D$ 的大小.



20. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.
(1) 求圆 O 的方程;
(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A、B 两点, 圆内的动点 P 使 $|PA|$、$|PO|$、$|PB|$ 成等比数列, 求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\in(0,1)$, $a_n=\dfrac{3-a_{n-1}}{2}$, $n=2,3,4,\cdots$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=a_n\sqrt{3-2a_n}$, 证明 $b_n<b_{n+1}$, 其中 n 为正整数.

22. 已知函数 $f(x)=x^3-x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程;
(2) 设 $a>0$, 如果过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a<b<f(a)$.

2007 普通高等学校招生考试 (大纲卷 II 文)

一、选择题

1. $\cos 330° =$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 4\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{3\}$ (C) $\{1,\ 2,\ 4\}$ (D) $\{1,\ 4\}$

3. 函数 $f(x)=|\sin x|$ 的一个单调递增区间是 ( )

(A) $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

4. 以下四个数中的最大者是 ( )

(A) $(\ln 2)^2$ (B) $\ln(\ln 2)$ (C) $\ln\sqrt{2}$ (D) $\ln 2$

5. 不等式 $\frac{x-2}{x+3}>0$ 的解集是 ( )

(A) $(-3,2)$ (B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda=$ ( )

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$

7. 已知正三棱锥的侧棱长与底面边长的 2 倍, 则侧棱与底面所成角的余弦值等于 ( )

(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知曲线 $y=\frac{x^2}{4}$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. 把函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$ 平移, 得到 $y=f(x)$ 的图象, 则 $f(x)=$ ( )

(A) e^x+2 (B) e^x-2 (C) e^{x-2} (D) e^{x+2}

10. 5 位同学报名参加两上课外活动小组, 每位同学限报其中的一个小组, 则不同的报名方法共有 ( )

(A) 10 种 (B) 20 种 (C) 25 种 (D) 32 种

11. 已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍, 则椭圆的离心率为 ( )

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点, 若点 P 在双曲线上, 且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$, 则 $\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=$ ( )

(A) $\sqrt{10}$ (B) $2\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{5}$

二、填空题

13. 一个总体含有 100 个个体, 以简单随机抽样方式从该总体中抽取一个容量为 5 的样本, 则指定的某个个体被抽到的概率为______.

14. 已知数列的通项 $a_n=-5n+2$, 则其前 n 项和为 $S_n=$______.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1 cm, 那么该棱柱的表面积为______cm^2.

16. $(1+2x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为______. (用数字作答)

三、解答题

17. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q<1$, 前 n 项和为 S_n. 已知 $a_3=2$, $S_4=5S_2$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知内角 $A=\frac{\pi}{3}$, 边 $BC=2\sqrt{3}$, 设内角 $B=x$, 周长为 y.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域;

(2) 求 y 的最大值.

19. 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件 A: "取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品"的概率 $P(A)=0.96$.

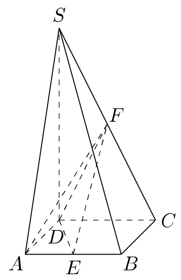
(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p;

(2) 若该批产品共有 100 件, 从中任意抽取 2 件, 求事件 B: "取出的 2 件产品中至少有一件二等品"的概率 $P(B)$.

20. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$, E、F 分别是 AB、SC 的中点.

(1) 求证: $EF /\!/$ 平面 SAD;

(2) 设 $SD=2CD$, 求二面角 $A-EF-D$ 的大小.



21. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.

(1) 求圆 O 的方程;

(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A、B 两点, 圆内的动点 P 使 $|PA|$、$|PO|$、$|PB|$ 成等比数列, 求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-bx^2+(2-b)x+1$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值, 在 $x=x_2$ 处取得极小值, 且 $0<x_1<1<x_2<2$.

(1) 证明 $a>0$;

(2) 若 $z=a+2b$, 求 z 的取值范围.

2007 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$, 则 S_5 等于 ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{5}{6}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{30}$

3. 已知集合 $A=\{x \mid x<a\}$, $B=\{x \mid 1<x<2\}$, 且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $a\leqslant 1$ (B) $a<1$ (C) $a\geqslant 2$ (D) $a>2$

4. 对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 下列命题中真命题的是 ( )

(A) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ (B) 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

(C) 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ (D) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

5. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π, 则该函数的图象 ( )

(A) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称 (B) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(C) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 对称 (D) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称

6. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右焦点为圆心, 且与其渐近线相切的圆的方程是 ( )

(A) $x^2+y^2-10x+9=0$ (B) $x^2+y^2-10x+16=0$

(C) $x^2+y^2+10x+16=0$ (D) $x^2+y^2+10x+9=0$

7. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)<f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(0,1)$

(C) $(-1,0)\cup(0,1)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8. 已知 m、n 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 ( )

(A) $m\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, $m/\!/\beta$, $n/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$

(B) $\alpha/\!/\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta\Rightarrow m/\!/n$

(C) $m\perp\alpha$, $m\perp n\Rightarrow n/\!/\alpha$

(D) $n/\!/m$, $n\subset\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$

9. 把 $1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$ 展开成关于 x 的多项式, 其各项系数和为 a_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-1}{a_n+1}$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

10. 顶点在同一球面上的正四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=1$, $AA'=\sqrt{2}$, 则 A、C 两点间的球面距离为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

11. 已知对任意实数 x, 有 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$, 且 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $g'(x)>0$, 则 $x<0$ 时, ( )

(A) $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ (B) $f'(x)>0$, $g'(x)<0$

(C) $f'(x)<0$, $g'(x)>0$ (D) $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

12. 如图, 三行三列的方阵中有 9 个数 a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$, 从中任取三个数, 则至少有两个数位于同行或同列的概率是 ( )

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(A) $\dfrac{3}{7}$ (B) $\dfrac{4}{7}$ (C) $\dfrac{1}{14}$ (D) $\dfrac{13}{14}$

二、填空题

13. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases} x+y\geqslant 2, \\ x-y\leqslant 2, \\ 0\leqslant y\leqslant 3, \end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的取值范围是______.

14. 已知正方形 $ABCD$, 则以 A、B 为焦点, 且过 C、D 两点的椭圆的离心率为______.

15. 两封信随机投入 A、B、C 三个空邮箱, 则 A 邮箱的信件数 ξ 的数学期望 $E\xi=$______.

16. 中学数学中存在许多关系, 比如"相等关系"、"平行关系"等等. 如果集合 A 中元素之间的一个关系"$\sim$"满足以下三个条件:

① 自反性: 对于任意 $a\in A$, 都有 $a\sim a$;

② 对称性: 对于 $a,b\in A$, 若 $a\sim b$, 则有 $b\sim a$;

③ 传递性: 对于 $a,b,c\in A$, 若 $a\sim b$, $b\sim c$, 则有 $a\sim c$.

则称"$\sim$"是集合 A 的一个等价关系. 例如: "数的相等"是等价关系, 而"直线的平行"不是等价关系 (自反性不成立). 请你再列出三个等价关系: ______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A=\dfrac{1}{4}$, $\tan B=\dfrac{3}{5}$.

(1) 求角 C 的大小;

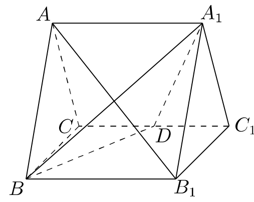
(2) 若 AB 边的长为 $\sqrt{17}$, 求 BC 边的长.

18. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2, D 为 CC_1 中点.

(1) 求证: $AB_1\perp$ 平面 A_1BD;

(2) 求二面角 $A-AD_1-B$ 的大小;

(3) 求点 C 到平面 A_1BD 的距离.

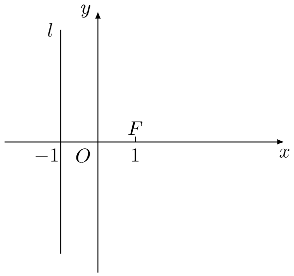


19. 某分公司经销某种品牌产品, 每件产品的成本为 3 元, 并且每件产品需向总公司交 a 元 $(3\leqslant a\leqslant 5)$ 的管理费, 预计当每件产品的售价为 x 元 $(9\leqslant x\leqslant 11)$ 时, 一年的销售量为 $(12-x)^2$ 万件.

(1) 求分公司一年的利润 L (万元) 与每件产品的售价 x 的函数关系式;

(2) 当每件产品的售价为多少元时, 分公司一年的利润 L 最大? 并求出 L 的最大值 $Q(a)$.

20. 如图, 已知点 $F(1,0)$, 直线 l: $x=-1$, P 为平面上的动点, 过 P 作直线 l 的垂线, 垂足为点 Q, 且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.
(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;
(2) 过点 F 的直线交轨迹 C 于 A、B 两点, 交直线 l 于点 M, 已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值.



21. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1+\sqrt{2}$, $S_3=9+3\sqrt{2}$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和为 S_n;
(2) 设 $b_n=\dfrac{S_n}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成为等比数列.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-kx$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 若 $k=\mathrm{e}$, 试确定函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $k>0$, 且对于任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(|x|)>0$ 恒成立, 试确定实数 k 的取值范围;
(3) 设函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$, 求证: $F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2007 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)$ 等于 ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{5\}$ (C) $\{3, 4\}$ (D) $\{2, 3, 4, 5\}$

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=4$, 则 $a_2\cdot a_6$ 等于 ( )

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32

3. $\sin 15^\circ\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\sin 105^\circ$ 等于 ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

4. "$|x|<2$"是"$x^2-x-6<0$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

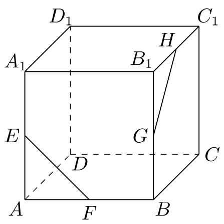
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象 ( )

(A) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称 (B) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(C) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 对称 (D) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称

6. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F、G、H 分别为 AA_1、AB、BB_1、B_1C_1 的中点, 则异面直线 EF 与 GH 所成的角等于 ( )



(A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 120°

7. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)>f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(1,+\infty)$

(C) $(-\infty,0)\cup(0,1)$ (D) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

8. 对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 下列命题中真命题的是 ( )

(A) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (B) 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(C) 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ (D) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

9. 已知 m、n 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 ( )

(A) $m\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

(B) $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$

(C) $m\perp\alpha$, $m\perp n\Rightarrow n\parallel\alpha$

(D) $n\parallel m$, $n\subset\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$

10. 以双曲线 $x^2-y^2=2$ 的右焦点为圆心, 且与其右准线相切的圆的方程是 ( )

(A) $x^2+y^2-4x-3=0$ (B) $x^2+y^2-4x+3=0$

(C) $x^2+y^2+4x-5=0$ (D) $x^2+y^2+4x+5=0$

11. 已知对任意实数 x, 有 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$, 且 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $g'(x)>0$, 则 $x<0$ 时, ( )

(A) $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ (B) $f'(x)>0$, $g'(x)<0$

(C) $f'(x)<0$, $g'(x)>0$ (D) $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

12. 某通讯公司推出一组手机号码, 卡号的前七位数字固定, 从"×××××××0000"到"×××××××9999"共 10000 个号码. 公司规定: 凡卡号的后四位带有数字"4"或"7"的一律作为"优惠卡", 则这组号码中"优惠卡"的个数为 ( )

(A) 2000 (B) 4096 (C) 5904 (D) 8320

二、填空题

13. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是______. (用数字作答)

14. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 2,\\x-y\leqslant 2,\\0\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的取值范围是______.

15. 已知长方形 $ABCD$, $AB=4$, $BC=3$, 则以 A、B 为焦点, 且过 C、D 两点的椭圆的离心率为______.

16. 中学数学中存在许多关系, 比如"相等关系"、"平行关系"等等. 如果集合 A 中元素之间的一个关系"$\sim$"满足以下三个条件:

① 自反性: 对于任意 $a\in A$, 都有 $a\sim a$;

② 对称性: 对于 $a,b\in A$, 若 $a\sim b$, 则有 $b\sim a$;

③ 传递性: 对于 $a,b,c\in A$, 若 $a\sim b$, $b\sim c$, 则有 $a\sim c$.

则称"$\sim$"是集合 A 的一个等价关系. 例如: "数的相等"是等价关系, 而"直线的平行"不是等价关系 (自反性不成立). 请你再列出两个等价关系: ______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A=\dfrac{1}{4}$, $\tan B=\dfrac{3}{5}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 AB 边的长为 $\sqrt{17}$, 求 BC 边的长.

18. 甲、乙两名跳高运动员一次试跳 2 米高度成功的概率分别为 0.7、0.6, 且每次试跳成功与否相互之间没有影响, 求:

(1) 甲试跳三次, 第三次才成功的概率;

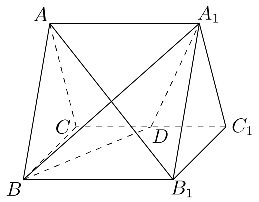
(2) 甲、乙两人在第一次试跳中至少有一人成功的概率;

(3) 甲、乙各试跳两次, 甲比乙的成功次数恰好多一次的概率.

19. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2, D 为 CC_1 中点.

(1) 求证: $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD;

(2) 求二面角 $A-AD_1-B$ 的大小.



20. 设函数 $f(x)=tx^2+2t^2x+t-1$ $(x\in\mathbf{R},\ t>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值 $h(t)$;

(2) 若 $h(t)<-2t+m$ 对 $t\in(0,2)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $a_{n+1}=2S_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n;

(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

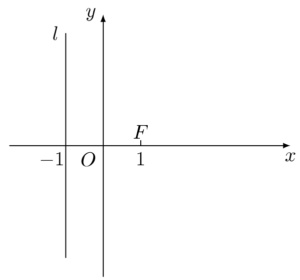
22. 如图, 已知点 $F(1,0)$, 直线 l: $x=-1$, P 为平面上的动点, 过 P 作直线 l 的垂线, 垂足为点 Q, 且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线交轨迹 C 于 A、B 两点, 交直线 l 于点 M.

① 已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值;

② 求 $\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MB}\right|$ 的最小值.



2007 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M, $g(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 N, 则 $M\cap N=$ ( )

   (A) $\{x\mid x>-1\}$　(B) $\{x\mid x<1\}$

   (C) $\{x\mid -1<x<1\}$　(D) $\varnothing$

2. 若复数 $(1+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 是纯虚数 (i 是虚数单位, b 是实数), 则 $b=$ ( )

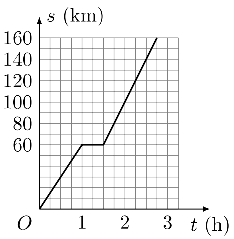
   (A) 2　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) -2

3. 若函数 $f(x)=\sin^2x-\dfrac{1}{2}$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $f(x)$ 是 ( )

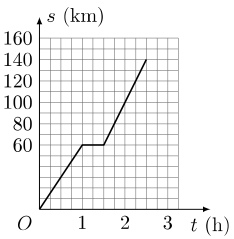
   (A) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数　(B) 最小正周期为 π 的奇函数

   (C) 最小正周期为 2π 的偶函数　(D) 最小正周期为 π 的偶函数

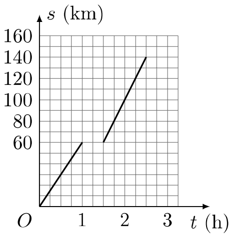
4. 客车从甲地以 60 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达乙地, 在乙地停留了半小时, 然后以 80 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达丙地. 下列描述客车从甲地出发, 经过乙地, 最后到达丙地所经过的路程 s 与时间 t 之间关系的图象中, 正确的是 ( )



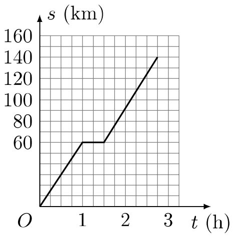
(A)



(B)



(C)



(D)

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$, 第 k 项满足 $5<a_k<8$, 则 $k=$ ( )

   (A) 9　(B) 8　(C) 7　(D) 6

6. 图 1 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图, 从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} (如 A_2 表示身高 (单位: cm) 在 $[150,155)$ 内的学生人数). 图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160 ~ 180 cm (含 160 cm, 不含 180 cm) 的学生人数, 那么在流程图中的判断框内应填写的条件是 ( )

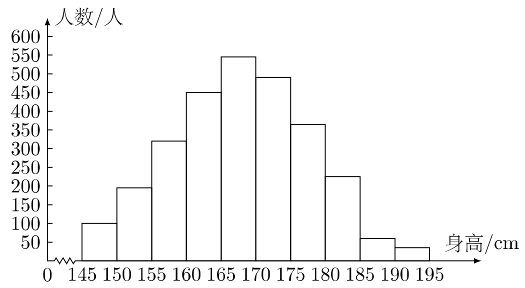


图 1

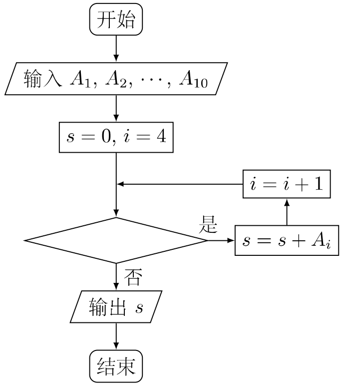
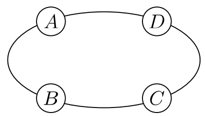


图 2

   (A) $i<6$　(B) $i<7$　(C) $i<8$　(D) $i<9$

7. 如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图. 公司在年初分配给 A, B, C, D 四个维修点某种配件各 50 件. 在使用前发现需将 A, B, C, D 四个维修点的这批配件分别调整为 40, 45, 54, 61 件, 但调整只能在相邻维修点之间进行, 那么要完成上述调整, 最少的调动件次 (n 件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为 n) 为 ( )



   (A) 15　(B) 16　(C) 17　(D) 18

8. 设 S 是至少含有两个元素的集合. 在 S 上定义了一个二元运算"$*$"(即对任意的 a, $b\in S$, 对于有序元素对 (a,b), 在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应). 若对任意的 a, $b\in S$, 有 $a*(b*a)=b$, 则对任意的 a, $b\in S$, 下列等式中不恒成立的是 ( )

   (A) $(a*b)*a=a$　(B) $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

   (C) $b*(b*b)=b$　(D) $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

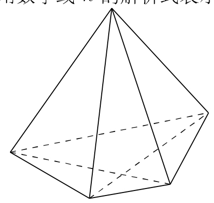
二、填空题

9. 甲, 乙两个袋中装有红, 白两种颜色的小球, 这些小球除颜色外完全相同. 其中甲袋装有 4 个红球, 2 个白球, 乙袋装有 1 个红球, 5 个白球. 现分别从甲, 乙两袋中各随机取出一个球, 则取出的两球是红球的概率为______. (答案用分数表示)

10. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一定点 $A(2,1)$. 若线段 OA 的垂直平分线过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, 则该抛物线的准线方程是______.

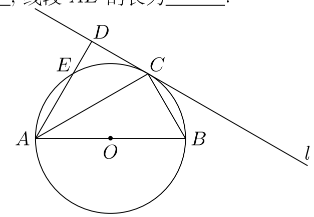
12. 如果一个凸多面体是 n 棱锥, 那么这个凸多面体的所有顶点所确定的直线共有______条. 这些直线中共有 $f(n)$ 对异面直线, 则 $f(4)=$______; $f(n)=$______. (答案用数字或 n 的解析式表示)



13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+3,\\y=3-t,\end{cases}$ (参数 $t\in\mathbf{R}$), 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta+2,\end{cases}$ (参数 $\theta\in[0,2\pi]$), 则圆 C 的圆心坐标为______, 圆心到直线 l 的距离为______.

14. 设函数 $f(x)=|2x-1|+x+3$, 则 $f(-2)=$______; 若 $f(x)\leqslant 5$, 则 x 的取值范围是______.

15. 如图所示, 圆 O 的直径 $AB=6$, C 为圆周上一点, $BC=3$. 过点 C 作圆的切线 l, 过 A 做 l 的垂线 AD, AD 分别与直线 l, 圆交于点 D, E, 则 $\angle DAC=$______, 线段 AE 的长为______.



三、解答题

16. 已知 $\triangle ABC$ 顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$, $B(0,0)$, $C(c,0)$.
(1) 若 $c=5$, 求 $\sin\angle A$ 的值;
(2) 若 $\angle A$ 是钝角, 求 c 的取值范围.

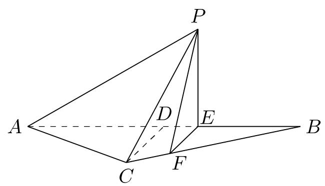
17. 下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x (吨) 与相应的生产能耗 y (吨标准煤) 的几组对照数据.

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(1) 请画出上表的散点图;
(2) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=\widehat{b}x+\widehat{a}$;
(3) 已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤. 试根据 (2) 求出的线性回归方程, 预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤?
(参考数值: $3\times 2.5+4\times 3+5\times 4+6\times 4.5=66.5$)

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆心在第二象限, 半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆 C 与直线 $y=x$ 相切于坐标原点 O. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与圆 C 的一个交点到椭圆两点的距离之和为 10.
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 试探求 C 上是否存在异于原点的点 Q, 使 Q 到椭圆右焦点 F 的距离等于线段 OF 的长. 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

19. 如图所示, 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $AB=6\sqrt{6}$, 高 $CD=3$, 点 E 是线段 BD 上异于点 B, D 的动点, 点 F 在 BC 边上, 且 $EF\perp AB$, 现沿 EF 将 $\triangle BEF$ 折起到 $\triangle PEF$ 的位置, 使 $PE\perp AC$, 记 $BE=x$, $V(x)$ 表示四棱锥 $P-ACFE$ 的体积.
(1) 求 $V(x)$ 的表达式;
(2) 当 x 为何值时, $V(x)$ 取得最大值?
(3) 当 $V(x)$ 取得最大值时, 求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值.



20. 已知 a 是实数, 函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$, α, β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 $(\alpha>\beta)$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$.
(1) 求 α, β 的值;
(2) 证明: 对任意的正整数 n, 都有 $a_n>\alpha$;
(3) 记 $b_n=\ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ $(n=1,2,\cdots)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2007 普通高等学校招生考试 (广东卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid 1+x>0\}$, $N=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{1-x}>0\right\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$　(B) $\{x\mid x>1\}$

(C) $\{x\mid -1<x<1\}$　(D) $\{x\mid x\geqslant -1\}$

2. 若复数 $(1+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 是纯虚数 (i 是虚数单位, b 是实数), 则 $b=$ ( )

(A) -2　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 2

3. 若函数 $f(x)=x^3$ $(x\in\mathbf{R})$, 则函数 $y=f(-x)$ 在其定义域上是 ( )

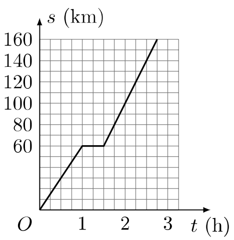
(A) 单调递减的偶函数　(B) 单调递减的奇函数

(C) 单调递增的偶函数　(D) 单调递增的奇函数

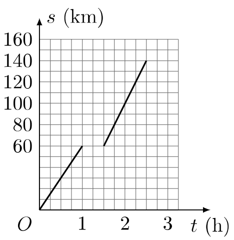
4. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 2

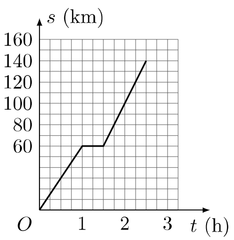
5. 客车从甲地以 60 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达乙地, 在乙地停留了半小时, 然后以 80 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达丙地. 下列描述客车从甲地出发, 经过乙地, 最后到达丙地所经过的路程 s 与时间 t 之间关系的图象中, 正确的是 ( )



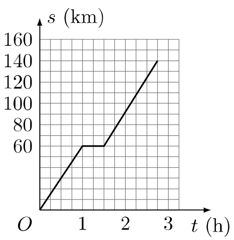
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 若 l, m, n 是互不相同的空间直线, α, β 是不重合的平面, 则下列命题中为真命题的是 ( )

(A) 若 $\alpha\parallel\beta$, $l\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $l\parallel n$　(B) 若 $\alpha\perp\beta$, $l\subset\alpha$, 则 $l\perp\beta$

(C) 若 $l\perp n$, $m\perp n$, 则 $l\parallel m$　(D) 若 $l\perp\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

7. 图 1 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图, 从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} (如 A_2 表示身高 (单位: cm) 在 $[150,155)$ 内的学生人数). 图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 $160\sim180$ cm (含 160 cm, 不含 180 cm) 的学生人数, 那么在流程图中的判断框内应填写的条件是 ( )

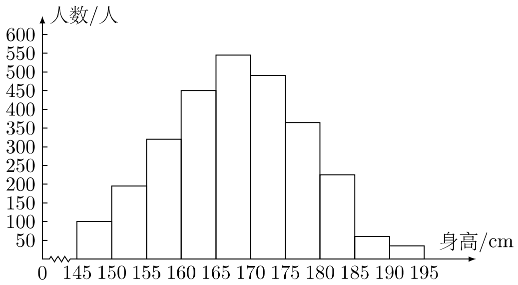


图 1

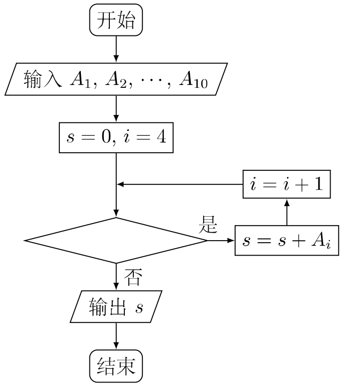


图 2

(A) $i<9$　(B) $i<8$　(C) $i<7$　(D) $i<6$

8. 在一个袋子中装有分别标注数字 1, 2, 3, 4, 5 的五个小球, 这些小球除标注的数字外完全相同. 现从中随机取出 2 个小球, 则取出的小球标注的数字之和为 3 或 6 的概率是 ( )

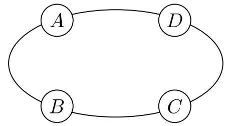
(A) $\dfrac{3}{10}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{10}$　(D) $\dfrac{1}{12}$

9. 已知简谐运动 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\varphi\right)$ $\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $(0,1)$, 则该简谐运动的最小正周期 T 和初相 φ 分别为 ( )

(A) $T=6$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　(B) $T=6$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

(C) $T=6\pi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　(D) $T=6\pi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

10. 如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图. 公司在年初分配给 A, B, C, D 四个维修点某种配件各 50 件. 在使用前发现需将 A, B, C, D 四个维修点的这批配件分别调整为 40, 45, 54, 61 件, 但调整只能在相邻维修点之间进行, 那么要完成上述调整, 最少的调动件次 (n 件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为 n) 为 ( )



(A) 18　(B) 17　(C) 16　(D) 15

二、填空题

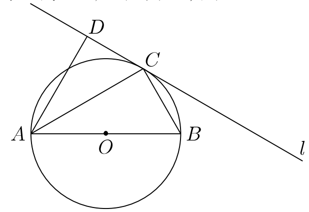
11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线关于 x 轴对称, 顶点在原点 O, 且过点 $P(2,4)$, 则该抛物线的方程是______.

12. 函数 $f(x)=x\ln x$ $(x>0)$ 的单调递增区间是______.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$, 则其通项 $a_n=$______; 若它的第 k 项满足 $5<a_k<8$, 则 $k=$______.

14. 在极坐标系中, 直线 l 的方程为 $\rho\sin\theta=3$, 则点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 l 的距离为______.

15. 如图所示, 圆 O 的直径 $AB=6$, C 为圆周上一点, $BC=3$ 过 C 作圆的切线 l, 过 A 作 l 的垂线 AD, 垂足为 D, 则 $\angle DAC=$______.



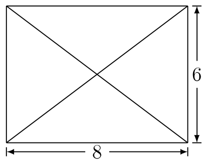
三、解答题

16. 已知 $\triangle ABC$ 顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$, $B(0,0)$, $C(c,0)$.

(1) 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, 求 c 的值;

(2) 若 $c=5$, 求 $\sin\angle A$ 的值.

17. 已知某几何体的俯视图是如图所示的矩形, 正视图 (或称主视图) 是一个底边长为 8, 高为 4 的等腰三角形, 侧视图 (或称左视图) 是一个底边长为 6, 高为 4 的等腰三角形.
(1) 求该几何体的体积 V;
(2) 求该几何体的侧面积 S.



18. 下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x (吨) 与相应的生产能耗 y (吨标准煤) 的几组对照数据.

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(1) 请画出上表的散点图;
(2) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=\widehat{b}x+\widehat{a}$;
(3) 已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤. 试根据 (2) 求出的线性回归方程, 预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤?
(参考数值: $3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5=66.5$)

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆心在第二象限, 半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆 C 与直线 $y=x$ 相切于坐标原点 O. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与圆 C 的一个交点到椭圆两点的距离之和为 10.
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 试探求 C 上是否存在异于原点的点 Q, 使 Q 到椭圆右焦点 F 的距离等于线段 OF 的长. 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$, α, β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 $(\alpha>\beta)$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ $(n=1, 2, \cdots)$.
(1) 求 α, β 的值;
(2) 已知对任意的正整数 n, 都有 $a_n>\alpha$, 记 $b_n=\ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 已知 a 是实数, 函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.

2007 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

1. 如果 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零常数项, 则正整数 n 的最小值为 ( )

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 10

2. 将 $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{\pi}{4},-2\right)$ 平移, 则平移后所得图象的解析式为 ( )

(A) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)-2$ (B) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

(C) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)-2$ (D) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)+2$

3. 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P-Q=\{x\mid x\in P,\text{ 且 }x\notin Q\}$, 如果 $P=\{x\mid \log_2 x<1\}$, $Q=\{x\mid |x-2|<1\}$, 那么 $P-Q$ 等于 ( )

(A) $\{x\mid 0<x<1\}$ (B) $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

(C) $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$ (D) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

4. 平面 α 外有两条直线 m 和 n, 如果 m 和 n 在平面 α 内的射影分别是 m' 和 n', 给出下列四个命题:

① $m'\perp n'\Rightarrow m\perp n$;

② $m\perp n\Rightarrow m'\perp n'$;

③ m' 与 n' 相交 $\Rightarrow m$ 与 n 相交或重合;

④ m' 与 n' 平行 $\Rightarrow m$ 与 n 平行或重合.

其中不正确的命题个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 已知 p 和 q 是两个不相等的正整数, 且 $q\geqslant 2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p-1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^q-1}=$ ( )

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{p}{q}$ (D) $\dfrac{p-1}{q-1}$

6. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=p$ (p 为正常数, $n\in\mathbf{N}^*$), 则称 $\{a_n\}$ 为"等方比数列". 甲: 数列 $\{a_n\}$ 是等方比数列; 乙: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 ( )

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7. 双曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0,\ b>0$) 的左准线为 l, 左焦点和右焦点分别为 F_1 和 F_2; 抛物线 C_2 的准线为 l, 焦点为 F_2; C_1 与 C_2 的一个交点为 M, 则 $\dfrac{|F_1F_2|}{|MF_1|}-\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}$ 等于 ( )

(A) -1 (B) 1 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项分别为 A_n 和 B_n, 且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$, 则使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

9. 连掷两次骰子得到的点数分别为 m 和 n, 记向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$ 的夹角为 θ, 则 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的概率是 ( )

(A) $\dfrac{5}{12}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{7}{12}$ (D) $\dfrac{5}{6}$

10. 已知直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (a, b 是非零常数) 与圆 $x^2+y^2=100$ 有公共点, 且公共点的横坐标均为整数, 那么这样的直线共有 ( )

(A) 60 条 (B) 66 条 (C) 72 条 (D) 78 条

二、填空题

11. 已知函数 $y=2x-a$ 的反函数是 $y=bx+3$, 则 $a=$______; $b=$______.

12. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$, a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $b\neq 0$, 若 z^2-4bz 是实数, 则有序实数对 (a,b) 可以是______. (写出一个有序实数对即可)

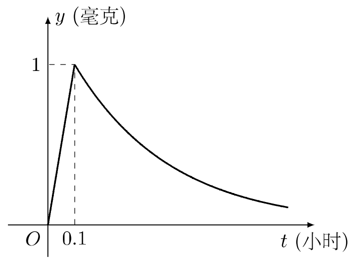
13. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ -2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为______.

14. 某男运动员在三分线投球的命中率是 $\dfrac{1}{2}$, 他投球 10 次, 恰好投进 3 个球的概率______. (用数值作答)

15. 为了预防流感, 某学校对教室用药薰消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比; 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-a}$ (a 为常数), 如图所示. 据图中提供的信息, 回答下列问题:

(1) 从药物释放开始, 每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系式为______;

(2) 据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时, 学生方可进教室, 那么药物释放开始, 至少需要经过______小时后, 学生才能回到教室.



三、解答题

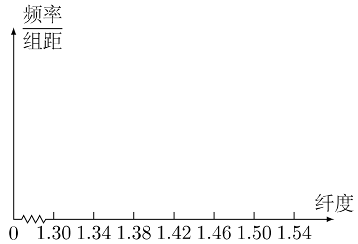
16. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 且满足 $0\leqslant\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqslant 6$, 设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ.

(1) 求 θ 的取值范围;

(2) 求函数 $f(\theta)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)-\sqrt{3}\cos 2\theta$ 的最大值与最小值.

17. 在生产过程中, 测得纤维产品的纤度 (表示纤维粗细的一种量) 共有 100 个数据, 将数据分组如下表:

分组	频数	频率
$[1.30,1.34)$	4	
$[1.34,1.38)$	25	
$[1.38,1.42)$	30	
$[1.42,1.46)$	29	
$[1.46,1.50)$	10	
$[1.50,1.54)$	2	
合计	100	

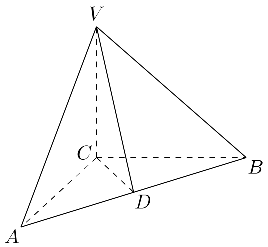


(1) 补全频率分布表, 并画出频率分布直方图;

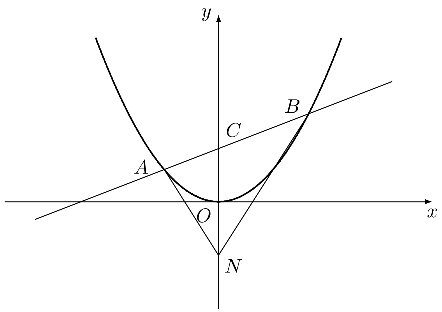
(2) 估计纤度落在 $[1.38,1.50)$ 中的概率及纤度小于 1.40 的概率是多少?

(3) 统计方法中, 同一组数据常用该组区间的中点值 (例如区间 $[1.30,1.34)$ 的中点值是 1.32) 作为代表. 据此, 估计纤度的期望.

18. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VC\perp$ 底面 ABC, $AC\perp BC$, D 是 AB 的中点, 且 $AC=BC=a$, $\angle VDC=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(1) 求证: 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD;
(2) 当角 θ 变化时, 求直线 BC 与平面 VAB 所成的角的取值范围.



19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过定点 $C(0,p)$ 作直线与抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 相交于 A, B 两点.
(1) 若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点, 求 $\triangle ANB$ 面积的最小值;
(2) 是否存在垂直于 y 轴的直线 l, 使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.



20. 已知定义在正实数集上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax$, $g(x)=3a^2\ln x+b$, 其中 $a>0$. 设两曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 有公共点, 且在该点处的切线相同.
(1) 用 a 表示 b, 并求 b 的最大值;
(2) 求证: $f(x)\geqslant g(x)$ $(x>0)$.

21. 已知 m, n 为正整数.
(1) 用数学归纳法证明: 当 $x>-1$ 时, $(1+x)^m\geqslant 1+mx$;
(2) 对于 $n\geqslant 6$, 已知 $\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n<\dfrac{1}{2}$, 求证 $\left(1-\dfrac{m}{n+3}\right)^m<\dfrac{1}{2}$, $m=1$, 2, $\cdots$, n;
(3) 求满足等式 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$ 的所有正整数 n.

2007 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

一、选择题

1. $\tan 690^\circ$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $-\sqrt{3}$

2. 如果 $U=\{x \mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, 那么 $\complement_U A\cap \complement_U B=$ ( )

(A) $\{1,\ 2\}$　(B) $\{3,\ 4\}$　(C) $\{5,\ 6\}$　(D) $\{7,\ 8\}$

3. 如果 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零常数项, 则正整数 n 的最小值为 ( )

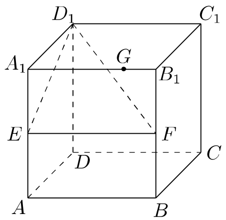
(A) 10　(B) 6　(C) 5　(D) 3

4. 函数 $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}\ (x<0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}\ (x<-1)$　(B) $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}\ (x>1)$

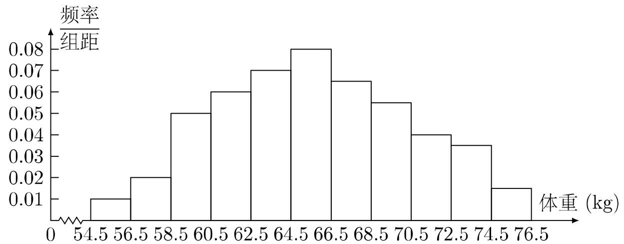
(C) $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}\ (x<-1)$　(D) $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}\ (x>1)$

5. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点, G 为棱 A_1B_1 上的一点, 且 $A_1G=\lambda\ (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, 则点 G 到平面 D_1EF 的距离为 ( )



(A) $\sqrt{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6. 为了了解某学校学生的身体发育情况, 抽查了该校 100 名高中男生的体重情况, 根据所得数据画出样本的频率分布直方图如图所示. 根据此图, 估计该校 2000 名高中男生中体重大于 70.5 公斤的人数为 ( )



(A) 300　(B) 360　(C) 420　(D) 450

7. 将 5 本不同的书全发给 4 名同学, 每名同学至少有一本书的概率是 ( )

(A) $\dfrac{15}{64}$　(B) $\dfrac{15}{128}$　(C) $\dfrac{24}{125}$　(D) $\dfrac{48}{125}$

8. 由直线 $y=x+1$ 上的一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线, 则切线长的最小值为 ( )

(A) 1　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{7}$　(D) 3

9. 设 $\boldsymbol{a}=(4,3)$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $\boldsymbol{b}$ 在 x 轴上的投影为 2, 且 $|\boldsymbol{b}|\leqslant 14$, 则 $\boldsymbol{b}$ 为 ( )

(A) $(2,14)$　(B) $\left(2,-\dfrac{2}{7}\right)$　(C) $\left(-2,\dfrac{2}{7}\right)$　(D) $(2,8)$

10. 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 现有下列命题:

① s 是 q 的充要条件;
② p 是 q 的充分条件而不是必要条件;
③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件;
④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件;
⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件.
则正确命题的序号是 ( )

(A) ①④⑤　(B) ①②④　(C) ②③⑤　(D) ②④⑤

二、填空题

11. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ -2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为______.

12. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交双曲线的左支于 M、N 两点, F_2 为其右焦点, 则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为______.

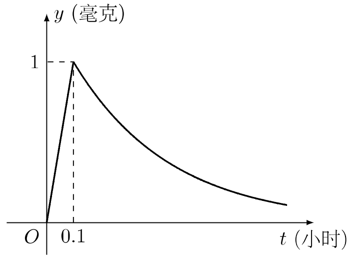
13. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\dfrac{1}{2}x+2$, 则 $f(1)+f'(1)=$______.

14. 某男运动员在三分线投球的命中率是 $\dfrac{1}{2}$, 他投球 10 次, 恰好投进 3 个球的概率______. (用数值作答)

15. 为了预防流感, 某学校对教室用药薰消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比; 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-a}$ (a 为常数), 如图所示. 据图中提供的信息, 回答下列问题:

(1) 从药物释放开始, 每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系式为______;

(2) 据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时, 学生方可进教室, 那么药物释放开始, 至少需要经过______小时后, 学生才能回到教室.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

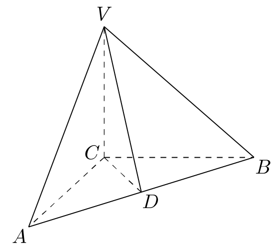
(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 若不等式 $|f(x)-m|<2$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

17. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VC\perp$ 底面 ABC, $AC\perp BC$, D 是 AB 的中点, 且 $AC=BC=a$, $\angle VDC=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求证: 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD;

(2) 试确定角 θ 的值, 使得直线 BC 与平面 VAB 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

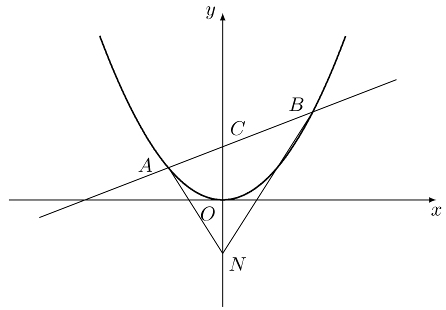


18. 某商品每件成本 9 元, 售价 30 元, 每星期卖出 432 件. 如果降低价格, 销售量可以增加, 且每星期多卖出的商品件数与商品单价的降低值 x (单位: 元, $0 \leqslant x \leqslant 30$) 的平方成正比. 已知商品单价降低 2 元时, 一星期多卖出 24 件.
(1) 将一个星期的商品销售利润表示成 x 的函数;
(2) 如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大?

19. 设二次函数 $f(x)=x^2+ax+a$, 方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1 和 x_2 满足 $0<x_1<x_2<1$.
(1) 求实数 a 的取值范围;
(2) 试比较 $f(0)f(1)-f(0)$ 与 $\dfrac{1}{16}$ 的大小, 并说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n>0$, $b_n=\sqrt{a_na_{n+1}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 且 $\{b_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列.
(1) 证明: $a_{n+2}=a_nq^2$;
(2) 若 $c_n=a_{2n-1}+2a_{2n}$, 证明数列 $\{c_n\}$ 是等比数列;
(3) 求和: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}}+\dfrac{1}{a_{2n}}$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过定点 $C(0,p)$ 作直线与抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 相交于 A, B 两点.
(1) 若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点, 求 $\triangle ANB$ 面积的最小值;
(2) 是否存在垂直于 y 轴的直线 l, 使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.



2007 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 复数 $\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$ 等于 ( )

(A) $4\mathrm{i}$ (B) $-4\mathrm{i}$ (C) $2\mathrm{i}$ (D) $-2\mathrm{i}$

2. 不等式 $\dfrac{x-2}{x+1} \leqslant 0$ 的解集是 ( )

(A) $(-\infty,-1)\cup(-1,2]$ (B) $[-1,2]$

(C) $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$ (D) $(-1,2]$

3. 设 M, N 是两个集合, 则"$M\cup N\neq\varnothing$"是"$M\cap N\neq\varnothing$"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

4. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是非零向量, 若函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b})$ 的图象是一条直线, 则必有 ( )

(A) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ (B) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ (C) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ (D) $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

5. 设随机变量 ξ 服从标准正态分布 $N(0,1)$. 已知 $\Phi(-1.96)=0.025$, 则 $P(|\xi|<1.96)=$ ( )

(A) 0.025 (B) 0.050 (C) 0.950 (D) 0.975

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4, & x\leqslant 1,\\ x^2-4x+3, & x>1,\end{cases}$ 的图象和函数 $g(x)=\log_2 x$ 的图象的交点个数是 ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

7. 下列四个命题中, 不正确的是 ( )

(A) 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

(B) 函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 的不连续点是 $x=2$ 和 $x=-2$

(C) 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

(D) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

8. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, E、F 分别是棱 AA_1、DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

9. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 若在其右准线上存在 P, 使线段 PF_1 的中垂线过点 F_2, 则椭圆离心率的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (B) $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ (D) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

10. 设集合 $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, S_1、S_2、$\cdots$、S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i=\{a_i,\ b_i\}$, $S_j=\{a_j,\ b_j\}$ $(i\neq j,\ i$、$j\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k\})$, 都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\ \dfrac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\ \dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x,\ y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者). 则 k 的最大值是 ( )

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1,1)$ 且与直线 $x+y=4$ 相切的圆的方程是______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $a=1$, $b=\sqrt{7}$, $c=\sqrt{3}$, 则 $B=$______.

13. 函数 $f(x)=12x-x^3$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最小值是______.

14. 设集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\, y\geqslant\dfrac{1}{2}|x-2|\right\}$, $B=\{(x,y)\mid y\leqslant -|x|+b\}$, $A\cap B\neq\varnothing$.

(1) b 的取值范围是______;

(2) 若 $(x,y)\in A\cap B$, 且 $x+2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是______.

15. 将杨辉三角中的奇数换成 1, 偶数换成 0, 得到如图所示的 $0-1$ 三角数表, 从上往下数, 第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行, 第 2 次全行的数都为 1 的是第 3 行, $\cdots$, 第 n 次全行的数都为 1 的是第______行; 第 61 行中 1 的个数是______.

第 1 行	1	1				
第 2 行	1	0	1			
第 3 行	1	1	1	1		
第 4 行	1	0	0	0	1	
第 5 行	1	1	0	0	1	1

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$, $g(x)=1+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

(1) 设 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;

(2) 求函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的单调递增区间.

17. 某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训, 以提高下岗人员的再就业能力. 每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训, 已知参加过财会培训的有 60%, 参加过计算机培训的有 75%. 假设每个人对培训项目的选择是相互独立的, 且各人的选择相互之间没有影响.

(1) 任选 1 名下岗人员, 求该人参加过培训的概率;

(2) 任选 3 名下岗人员, 记 ξ 为 3 人中参加过培训的人数, 求 ξ 的分布列和期望.

18. 如图 1, E, F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB, CD 的中点, G 是 EF 上的一点, 将 $\triangle GAB$, $\triangle GCD$ 分别沿 AB, CD 翻折成 $\triangle G_1AB$, $\triangle G_2CD$, 并连接 G_1G_2, 使得平面 $G_1AB\perp$ 平面 $ABCD$, $G_1G_2\,/\!/\,AD$, 且 $G_1G_2<AD$, 连接 BG_2, 如图 2.

(1) 证明: 平面 $G_1AB\perp$ 平面 G_1ADG_2;

(2) 当 $AB=12$, $BC=25$, $EG=8$ 时, 求直线 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角.

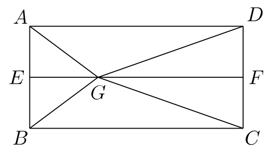


图 1

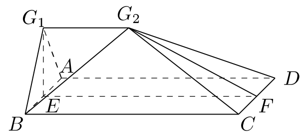
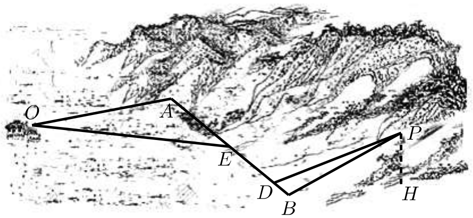


图 2

19. 如图, 某地为了开发旅游资源, 欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路, 点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$, 且 $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$, 点 P 到平面 α 的距离 $PH=0.4$ (km). 沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用, 从点 O 到山脚修路的造价为 a 万元/km, 原有公路改建费用为 $\dfrac{a}{2}$ 万元/km, 当山坡上公路长度为 l km $(1\leqslant l\leqslant 2)$ 时, 其造价为 $(l^2+1)a$ 万元, 已知 $OA\perp AB$, $PB\perp AB$, $AB=1.5$ (km), $OA=\sqrt{3}$ (km).
(1) 在 AB 上求一点 D, 使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小;
(2) 对于 (1) 中得到的点 D, 在 DA 上求一点 E, 使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小;
(3) 在 AB 上是否存在两个不同的点 D', E', 使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于 (2) 中得到的最小总造价, 证明你的结论.



20. 已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点.
(1) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程;
(2) 在 x 轴上是否存在定点 C, 使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数? 若存在, 求出点 C 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 $A_n(a_n,b_n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上的点, $a_1=a$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$, $a_n\neq 0$, $n=2,3,4,\cdots$.
(1) 证明: 数列 $\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}$ $(n\geqslant 2)$ 是常数数列;
(2) 确定 a 的取值集合 M, 使 $a\in M$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;
(3) 证明: 当 $a\in M$ 时, 弦 A_nA_{n+1} $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的斜率随 n 单调递增.

2007 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 不等式 $x^2 > x$ 的解集是 ( )

(A) $(-\infty, 0)$　(B) $(0, 1)$
(C) $(1, +\infty)$　(D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2. 若 O, E, F 是不共线的任意三点, 则以下各式中成立的是 ( )

(A) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$　(B) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$
(C) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$　(D) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$

3. 设 p: $b^2 - 4ac > 0$ $(a \neq 0)$, q: 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ 有实根, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

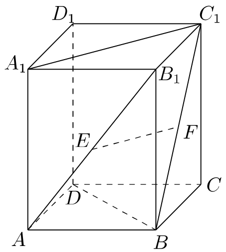
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 中, 若 $a_1 = 1$, $a_4 = \dfrac{1}{8}$, 则该数列的前 10 项和为 ( )

(A) $2 - \dfrac{1}{2^8}$　(B) $2 - \dfrac{1}{2^9}$　(C) $2 - \dfrac{1}{2^{10}}$　(D) $2 - \dfrac{1}{2^{11}}$

5. 在 $(1+x)^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 的二项展开式中, 若只有 x^5 的系数最大, 则 $n =$( )

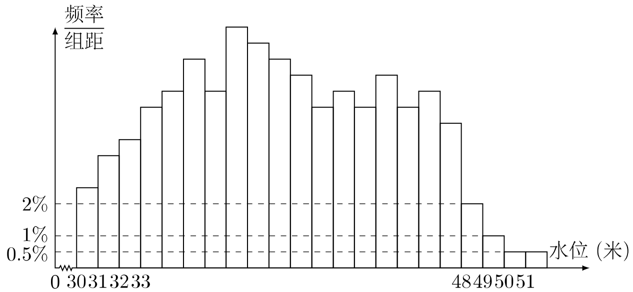
(A) 8　(B) 9　(C) 10　(D) 11

6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别是 AB_1、BC_1 的中点, 则以下结论中不成立的是 ( )



(A) EF 与 BB_1 垂直　(B) EF 与 BD 垂直
(C) EF 与 CD 异面　(D) EF 与 A_1C_1 异面

7. 根据某水文观测点的历史统计数据, 得到某条河流水位的频率分布直方图 (如图), 从图中可以看出, 该水文观测点平均至少一百年才遇到一次的洪水的最低水位是 ( )



(A) 48 米　(B) 49 米　(C) 50 米　(D) 51 米

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & x \leqslant 1, \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1, \end{cases}$ 的图象和函数 $g(x) = \log_2 x$ 的图象的交点个数是 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

9. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 1)$ 的左、右焦点, P 是其右准线上纵坐标为 $\sqrt{3}c$ (c 为半焦距) 的点, 且 $|F_1F_2| = |F_2P|$, 则椭圆的离心率是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 设集合 $M = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, S_1、S_2、$\cdots$、S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i = \{a_i,\ b_i\}$, $S_j = \{a_j,\ b_j\}$ $(i \neq j$, i、$j \in \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k\})$, 都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\ \dfrac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\ \dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x,\ y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者). 则 k 的最大值是 ( )

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1, 1)$ 且与直线 $x + y = 4$ 相切的圆的方程是______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $a = 1$, $c = \sqrt{3}$, $C = \dfrac{\pi}{3}$, 则 $A =$______.

13. 若 $a > 0$, $a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{9}$, 则 $\log_{\frac{2}{3}} a =$______.

14. 设集合 $A = \{(x, y) \mid y \geqslant |x - 2|,\ x \geqslant 0\}$, $B = \{(x, y) \mid y \leqslant -x + b\}$, $A \cap B \neq \varnothing$.
(1) b 的取值范围是______;
(2) 若 $(x, y) \in A \cap B$, 且 $x + 2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是______.

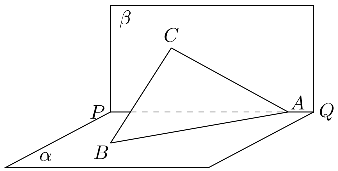
15. 棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的表面积是______; 设 E、F 分别是该正方体的棱 AA_1、DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为______.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$. 求:
(1) 函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

17. 某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训, 以提高下岗人员的再就业能力. 每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训, 已知参加过财会培训的有 60%, 参加过计算机培训的有 75%. 假设每个人对培训项目的选择是相互独立的, 且各人的选择相互之间没有影响.
(1) 任选 1 名下岗人员, 求该人参加过培训的概率;
(2) 任选 3 名下岗人员, 求这 3 人中至少有 2 人参加过培训的概率.

18. 如图, 已知直二面角 $\alpha-PQ-\beta$, $A\in PQ$, $B\in\alpha$, $C\in\beta$, $CA=CB$, $\angle BAP=45°$, 直线 CA 和平面 α 所成的角为 $30°$.
(1) 证明: $BC\perp PQ$;
(2) 求二面角 $B-AC-P$ 的大小.



19. 已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的右焦点为 F, 过点 F 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点, 点 C 的坐标是 $(1,0)$.
(1) 证明: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数;
(2) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CO}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程.

20. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和, $a_1=a$, 且 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$, $a_n\neq 0$, $n=2,3,4,\cdots$.
(1) 证明: 数列 $\{a_{n+2}-a_n\}$ $(n\geqslant 2)$ 是常数数列;
(2) 试找出一个奇数 a, 使以 18 为首项, 7 为公比的等比数列 $\{b_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 中的所有项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 并指出 b_n 是数列 $\{a_n\}$ 中的第几项.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+bx$ 在区间 $[-1,1)$, $(1,3]$ 内各有一个极值点.
(1) 求 a^2-4b 的最大值;
(2) 当 $a^2-4b=8$ 时, 设函数 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线为 l, 若 l 在点 A 处穿过 $y=f(x)$ 的图象 (即动点在点 A 附近沿曲线 $y=f(x)$ 运动, 经过点 A 时, 从 l 的一侧进入另一侧), 求函数 $f(x)$ 的表达式.

2007 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、选择题

1. 下列函数中, 周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的是 ( )

(A) $y=\sin\dfrac{x}{2}$ (B) $y=\sin 2x$ (C) $y=\cos\dfrac{x}{4}$ (D) $y=\cos 4x$

2. 已知全集 $U=\mathbf{Z}$, $A=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{x\mid x^2=x\}$, 则 $A\cap\complement_U B$ 为( )

(A) $\{-1,\ 2\}$ (B) $\{-1,\ 0\}$ (C) $\{0,\ 1\}$ (D) $\{1,\ 2\}$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线的中心在坐标原点, 焦点在 y 轴上, 一条渐近线方程为 $x-2y=0$, 则它的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

4. 已知两条直线 m, n, 两个平面 α, β, 给出下面四个命题:

① $m\parallel n$, $m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$;

② $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$;

③ $m\parallel n$, $m\parallel\alpha\Rightarrow n\parallel\alpha$;

④ $\alpha\parallel\beta$, $m\parallel n$, $m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\beta$.

其中正确命题的序号是 ( )

(A) ①③ (B) ②④ (C) ①④ (D) ②③

5. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x\ (x\in[-\pi,0])$ 的单调递增区间是 ( )

(A) $\left[-\pi,-\dfrac{5\pi}{6}\right]$ (B) $\left[-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ (C) $\left[-\dfrac{\pi}{3},0\right]$ (D) $\left[-\dfrac{\pi}{6},0\right]$

6. 设函数 $f(x)$ 定义在实数集上, 它的图象关于直线 $x=1$ 对称, 且当 $x\geqslant 1$ 时, $f(x)=3^x-1$, 则有 ( )

(A) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ (B) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

(C) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(\dfrac{2}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

7. 若对于任意实数 x, 有 $x^3=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+a_3(x-2)^3$, 则 a_2 的值为 ( )

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

8. 设 $f(x)=\lg\left(\dfrac{2}{1-x}+a\right)$ 是奇函数, 则使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$

(C) $(-\infty,0)$ (D) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

9. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$, $f'(0)>0$, 对于任意实数 x 都有 $f(x)\geqslant 0$, 则 $\dfrac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 ( )

(A) 3 (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) 2 (D) $\dfrac{3}{2}$

10. 在平面直角坐标系 xOy, 已知平面区域 $A=\{(x,y)|x+y\leqslant 1$, 且 $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$, 则平面区域 $B=\{(x+y,x-y)\mid(x,y)\in A\}$ 的面积为 ( )

(A) 2 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

二、填空题

11. 若 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\alpha\tan\beta=$______.

12. 某校开设 9 门课程供学生选修, 其中 A, B, C 三门由于上课时间相同, 学校规定, 每位同学选修 4 门, 共有______种不同的选修方案. (用数值作答)

13. 已知函数 $f(x)=x^3-12x+8$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值与最小值分别为 M, m, 则 $M-m=$______.

14. 正三棱锥 $P-ABC$ 高为 2, 侧棱与底面 ABC 成 45°, 则点 A 到侧面 PBC 的距离为______.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle ABC$ 顶点 $A(-4,0)$ 和 $C(4,0)$, 顶点 B 在椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上, 则 $\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}=$______.

16. 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5 cm, 秒针均匀地绕点 O 旋转, 当时间 $t=0$ 时, 点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合, 将 A, B 两点的距离 d (cm) 表示成 $t(s)$ 的函数, 则 $d=$______.

三、解答题

17. 某气象站天气预报的准确率为 80%, 计算 (结果保留到小数点后面第 2 位)

(1) 5 次预报中恰有 2 次准确的概率;

(2) 5 次预报中至少有 2 次准确的概率;

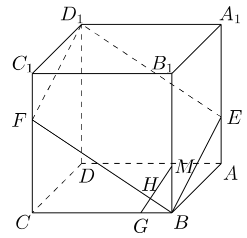
(3) 5 次预报中恰有 2 次准确, 且其中第 3 次预报准确的概率.

18. 如图, 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 3 的正方体, 点 E 在 AA_1 上, 点 F 在 CC_1 上, 且 $AE=FC_1=1$.

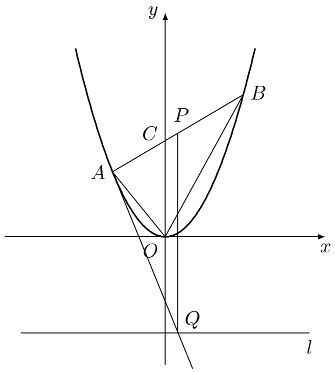
(1) 求证: E, B, F, D_1 四点共面;

(2) 若点 G 在 BC 上, $BG=\dfrac{2}{3}$, 点 M 在 BB_1 上, $GM\perp BF$, 垂足为 H, 求证: $EM\perp$ 面 BCC_1B_1;

(3) 用 θ 表示截面 $EBFD_1$ 和面 BCC_1B_1 所成锐二面角大小, 求 $\tan\theta$



19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线, 与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A, B 两点, 一条垂直于 x 轴的直线, 分别与线段 AB 和直线 l: $y=-c$ 交于 P, Q.
(1) 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$, 求 c 的值;
(2) 若 P 为线段 AB 的中点, 求证: QA 为此抛物线的切线;
(3) 试问 (2) 的逆命题是否成立? 说明理由.



20. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $a_1=b_1$, $a_2=b_2\neq a_1$, 记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.
(1) 若 $b_k=a_m$ (m, k 是大于 2 正整数), 求证: $S_{k-1}=(m-1)a_1$;
(2) 若 $b_3=a_i$ (i 是某一正整数), 求证: q 是整数, 且数列 $\{b_n\}$ 中每一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项;
(3) 是否存在这样的正数 q, 使等比数列 $\{b_n\}$ 中有三项成等差数列? 若存在, 写出一个 q 的值, 并加以说明; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 a, b, c,d 是不全为零的实数, 函数 $f(x)=bx^2+cx+d$, $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. 方程 $f(x)=0$ 有实数根, 且 $f(x)=0$ 的实数根都是 $g(f(x))=0$ 的根; 反之, $g(f(x))=0$ 的实数根都是 $f(x)=0$ 的根.
(1) 求 d 的值;
(2) 若 $a=0$, 求 c 的取值范围;
(3) 若 $a=1$, $f(1)=0$, 求 c 的取值范围.

2007 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

一、选择题

1. 化简 $\dfrac{2+4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$ 的结果是 ( )

(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $-2+\mathrm{i}$ (C) $2-\mathrm{i}$ (D) $-2-\mathrm{i}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ ( )

(A) 等于 0 (B) 等于 1 (C) 等于 3 (D) 不存在

3. 若 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=3$, 则 $\cot\alpha$ 等于 ( )

(A) -2 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 2

4. 已知 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中, 各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为 64, 则 n 等于 ( )

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

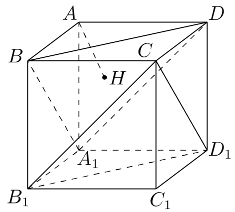
5. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是 ( )

(A) $\sin x<\dfrac{3}{\pi}x$ (B) $\sin x>\dfrac{3}{\pi}x$ (C) $\sin x<\dfrac{4}{\pi^2}x^2$ (D) $\sin x>\dfrac{4}{\pi^2}x^2$

6. 若集合 $M=\{0,\ 1,\ 2\}$, $N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant 0$ 且 $x-2y-1\leqslant 0,\ x,\ y\in M\}$, 则 N 中元素的个数为 ( )

(A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 2

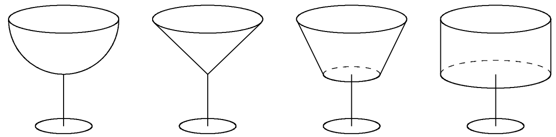
7. 如图, 正方体 AC_1 的棱长为 1, 过点 A 作平面 A_1BD 的垂线, 垂足为点 H. 则以下命题中, 错误的是 ( )



(A) 点 H 是 $\triangle A_1BD$ 的垂心 (B) AH 垂直平面 CB_1D_1

(C) AH 的延长线经过点 C_1 (D) 直线 AH 和 BB_1 所成的角为 45°

8. 四位好朋友在一次聚会上, 他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯, 如图所示, 盛满酒后他们约定: 先各自饮杯中酒的一半. 设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1, h_2, h_3, h_4, 则它们的大小关系正确的是 ( )



(A) $h_2>h_1>h_4$ (B) $h_1>h_2>h_3$ (C) $h_3>h_2>h_4$ (D) $h_2>h_4>h_1$

9. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$, 右焦点为 $F(c,0)$, 方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2, 则点 $P(x_1,x_2)$ ( )

(A) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内 (B) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 上

(C) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 外 (D) 以上三种情形都有可能

10. 将一个骰子连续抛掷三次, 它落地时向上的点数依次成等差数列的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{1}{12}$ (C) $\dfrac{1}{15}$ (D) $\dfrac{1}{18}$

11. 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以 5 为周期的可导偶函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线的斜率为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{5}$ (B) 0 (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) 5

12. 设 p: $f(x)=\mathrm{e}^x+\ln x+2x^2+mx+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, q: $m\geqslant -5$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

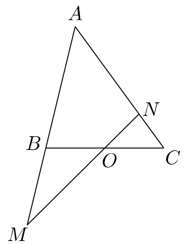
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

二、填空题

13. 设函数 $y=4+\log_2(x-1)\ (x\geqslant 3)$, 则其反函数的定义域为______.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 对于任意 p, $q\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_p+a_q=a_{p+q}$, 若 $a_1=\dfrac{1}{9}$, 则 $a_{36}=$______.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB、AC 于不同的两点 M、N, 若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n$ 的值为______.



16. 设有一组圆 C_1: $(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4\ (k\in\mathbf{N}^*)$. 下面四个命题:

A. 存在一条定直线与所有的圆均相切;

B. 存在一条定直线与所有的圆均相交;

C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交;

D. 所有的圆均不经过原点.

其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}cx+1, & 0<x<c,\\ 2^{-\frac{x}{c^2}}+k, & c\leqslant x<1,\end{cases}$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$.

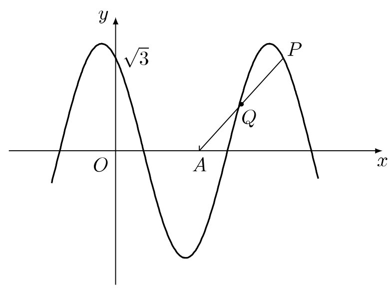
(1) 求实数 k 和 c 的值;

(2) 解不等式 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$.

18. 如图, 函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ $\left(x\in\mathbf{R},\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,\sqrt{3})$, 且在该点处切线的斜率为 -2.

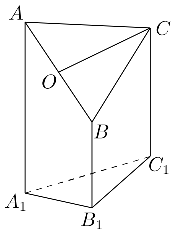
(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$, 点 P 是该函数图象上的一点, 点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, 求 x_0 的值.

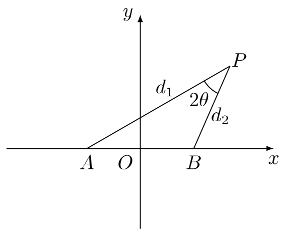


19. 某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品, 制作过程中必须先后经过两次烧制, 当第一次烧制合格后可进入第二次烧制, 两次烧制过程相互独立. 根据该厂现有的技术水平, 经过第一次烧制后, 甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.5, 0.6, 0.4. 经过第二次烧制后, 甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.6, 0.5, 0.75.
(1) 求第一次烧制后恰有一件产品合格的概率;
(2) 经过前后两次烧制后, 合格工艺品的个数为 ξ, 求随机变量 ξ 的期望.

20. 如图是一个直三棱柱 (以 $A_1B_1C_1$ 为底面) 被一平面所截得到的几何体, 截面为 ABC. 已知 $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, $AA_1 = 4$, $BB_1 = 2$, $CC_1 = 3$.
(1) 设点 O 是 AB 的中点, 证明: $OC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$;
(2) 求二面角 $B - AC - A_1$ 的大小;
(3) 求此几何体的体积.



21. 设动点 P 到点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2, $\angle APB = 2\theta$. 且存在常数 λ $(0<\lambda<1)$, 使得 $d_1d_2\sin^2\theta = \lambda$.
(1) 证明: 动点 P 的轨迹 C 为双曲线, 并求出 C 的方程;
(2) 过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M、N 两点, 试确定 λ 的范围, 使 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = 0$, 其中点 O 为坐标原点.



22. 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 = 4$, 且对于任何 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $2 + \dfrac{1}{a_{n+1}} < \dfrac{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}} < 2 + \dfrac{1}{a_n}$.
(1) 求 a_1, a_3;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

2007 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

一、选择题

1. 若集合 $M=\{0,\ 1\}$, $I=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 则 $\complement_I M$ 为 ( )

(A) $\{0,\ 1\}$ (B) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ (C) $\{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

2. 函数 $y=5\tan(2x+1)$ 的最小正周期为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

3. 函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{x-4}$ 的定义域为 ( )

(A) $(1,4)$ (B) $[1,4)$

(C) $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ (D) $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

4. 若 $\tan\alpha=3$, $\tan\beta=\dfrac{4}{3}$, 则 $\tan(\alpha-\beta)$ 等于 ( )

(A) -3 (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) 3 (D) $\dfrac{1}{3}$

5. 设 $(x^2+1)(2x+1)^9=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{11}(x+2)^{11}$, 则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}$ 的值为 ( )

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

6. 一袋中装有大小相同, 编号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的八个球, 从中有放回地每次取一个球, 共取 2 次, 则取得两个球的编号和不小于 15 的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{32}$ (B) $\dfrac{1}{64}$ (C) $\dfrac{3}{32}$ (D) $\dfrac{3}{64}$

7. 连接抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 与点 $M(1,0)$ 所得的线段与抛物线交于点 A, 设点 O 为坐标原点, 则三角形 OAM 的面积为 ( )

(A) $-1+\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$ (C) $1+\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$

8. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则下列命题正确的是 ( )

(A) $\sin x<\dfrac{2}{\pi}x$ (B) $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$ (C) $\sin x<\dfrac{3}{\pi}x$ (D) $\sin x>\dfrac{3}{\pi}x$

9. 四面体 $ABCD$ 外接球球心在 CD 上, 且 $CD=2$, $AB=\sqrt{3}$, 在外接球面上两点 A、B 间的球面距离是 ( )

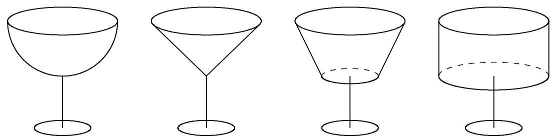
(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

10. 设 p: $f(x)=x^3+2x^2+mx+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增, q: $m\geqslant\dfrac{4}{3}$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. 四位好朋友在一次聚会上, 他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯, 如图所示, 盛满酒后他们约定: 先各自饮杯中酒的一半. 设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1, h_2, h_3, h_4, 则它们的大小关系正确的是 ( )



(A) $h_2>h_1>h_4$ (B) $h_1>h_2>h_3$ (C) $h_3>h_2>h_4$ (D) $h_2>h_4>h_1$

12. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$, 右焦点为 $F(c,0)$, 方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2, 则点 $P(x_1,x_2)$ ( )

(A) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 上 (B) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 外

(C) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内 (D) 以上三种情形都有可能

二、填空题

13. 在平面直角坐标系中, 正方形 $OABC$ 的对角线 OB 的两端点分别为 $O(0,0)$, $B(1,1)$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_{12}=21$, 则 $a_2+a_5+a_8+a_{11}=$______.

15. 已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$, 若函数 $y=f(1+x)$ 的图像经过点 $(3,1)$, 则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必经过点______.

16. 如图, 正方体 AC_1 的棱长为 1, 过点 A 作平面 A_1BD 的垂线, 垂足为点 H. 有下列四个命题:

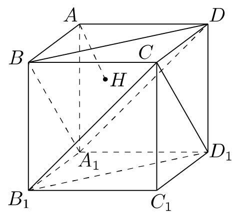
A. 点 H 是 $\triangle A_1BD$ 的垂心;

B. AH 垂直平面 CB_1D_1;

C. 二面角 $C-B_1D_1-C_1$ 的正切值为 $\sqrt{2}$;

D. 点 H 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离为 $\dfrac{3}{4}$.

其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}cx+1, & 0<x<c,\\ 2^{-\frac{x}{c^2}}+1, & c\leqslant x<1,\end{cases}$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$.

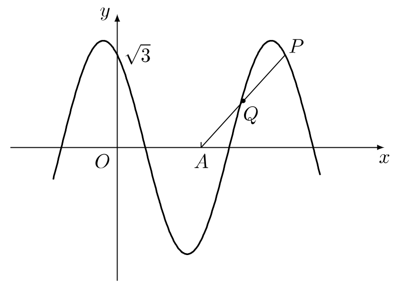
(1) 求常数 c 的值;

(2) 解不等式 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$.

18. 如图, 函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ $\left(x\in\mathbf{R},\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,\sqrt{3})$, 且在该点处切线的斜率为 -2.

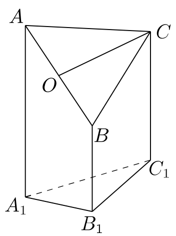
(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$, 点 P 是该函数图象上的一点, 点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, 求 x_0 的值.



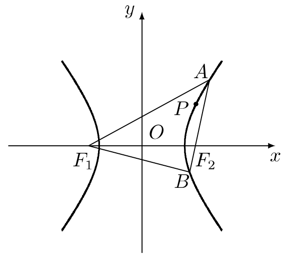
19. 栽培甲、乙两种果树, 先要培育成苗, 然后再进行移栽. 已知甲、乙两种果树成苗的概率分别为 0.6, 0.5, 移栽后成活的概率分别为 0.7, 0.9.
(1) 求甲、乙两种果树至少有一种果树成苗的概率;
(2) 求恰好一种果树能栽培成苗且移栽成活的概率.

20. 如图是一个直三棱柱 (以 $A_1B_1C_1$ 为底面) 被一平面所截得到的几何体, 截面为 ABC. 已知 $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, $AA_1 = 4$, $BB_1 = 2$, $CC_1 = 3$.
(1) 设点 O 是 AB 的中点, 证明: $OC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$;
(2) 求 AB 与平面 AA_1C_1C 所成的角的大小;
(3) 求此几何体的体积.



21. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.
(1) 求最小的自然数 n, 使 $a_n \geqslant 2007$;
(2) 求和: $T_{2n} = \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{2}{a_2} + \dfrac{3}{a_3} - \cdots - \dfrac{2n}{a_{2n}}$.

22. 设动点 P 到两定点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2, $\angle F_1PF_2 = 2\theta$, 且存在常数 λ $(0 < \lambda < 1)$, 使得 $d_1d_2\sin^2\theta = \lambda$.
(1) 证明: 动点 P 的轨迹 C 为双曲线, 并求出 C 的方程;
(2) 如图, 过点 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A、B 两点. 问: 是否存在 λ, 使 $\triangle F_1AB$ 是以点 B 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



2007 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$ ( )
(A) $\{1\}$ (B) $\{5\}$ (C) $\{2,4\}$ (D) $\{1,2,4,5\}$

2. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数图象过点 $(1,5)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象必过点 ( )
(A) $(1,1)$ (B) $(1,5)$ (C) $(5,1)$ (D) $(5,5)$

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$, 且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{b}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 ( )
(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3=9$, $S_6=36$, 则 $a_7+a_8+a_9=$ ( )
(A) 63 (B) 45 (C) 36 (D) 27

5. 若 $\theta\in\left(\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{5}{4}\pi\right)$, 则复数 $(\cos\theta+\sin\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{i}$ 在复平面内所对应的点在 ( )
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

6. 若函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后, 得到函数 $y=f(x+1)-2$ 的图象, 则向量 $\boldsymbol{a}=$ ( )
(A) $(-1,-2)$ (B) $(1,-2)$ (C) $(-1,2)$ (D) $(1,2)$

7. 若 m、n 是两条不同的直线, α、β、γ 是三个不同的平面, 则下列命题中的真命题是 ( )
(A) 若 $m\subset\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp\alpha$
(B) 若 $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, $m/\!/n$, 则 $\alpha/\!/\beta$
(C) 若 $m\perp\beta$, $m/\!/\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$
(D) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\alpha\perp\beta$, 则 $\beta\perp\gamma$

8. 已知变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\leqslant 0,\\ x\geqslant 1,\\ x+y-7\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是 ( )
(A) $\left[\dfrac{9}{5},6\right]$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{9}{5}\right]\cup[6,+\infty)$
(C) $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$ (D) $[3,6]$

9. 一个坛子里有编号为 1, 2, $\cdots$, 12 的 12 个大小相同的球, 其中 1 到 6 号球是红球, 其余的是黑球. 若从中任取两个球, 则取到的都是红球, 且至少有 1 个球的号码是偶数的概率为 ( )
(A) $\dfrac{1}{22}$ (B) $\dfrac{1}{11}$ (C) $\dfrac{3}{22}$ (D) $\dfrac{2}{11}$

10. 设 p、q 是两个命题, p: $\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0$, q: $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}>0$, 则 p 是 q 的 ( )
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. 设 P 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上的一点, F_1、F_2 是该双曲线的两个焦点. 若 $|P_1F|:|PF_2|=3:2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ( )
(A) $6\sqrt{3}$ (B) 12 (C) $12\sqrt{3}$ (D) 24

12. 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 仅当 $x=0$ 时的函数值为 0, 且 $f(x)\geqslant g(x)$, 那么下列情形不可能出现的是( )
(A) 0 是 $f(x)$ 的极大值, 也是 $g(x)$ 的极大值
(B) 0 是 $f(x)$ 的极小值, 也是 $g(x)$ 的极小值
(C) 0 是 $f(x)$ 的极大值, 但不是 $g(x)$ 的极值
(D) 0 是 $f(x)$ 的极小值, 但不是 $g(x)$ 的极值

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\cos x, & x\geqslant 0,\\ x^2-1, & x<0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$______.

14. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 P 到左准线的距离为 10, F 是该椭圆的左焦点. 若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}\right)$, 则 $\left|\overrightarrow{OM}\right|=$______.

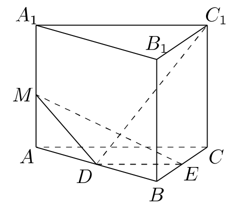
15. 若一个底面边长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 侧棱长为 $\sqrt{6}$ 的正六棱柱的所有顶点都在一个球的面上, 则此球的体积为______.

16. 将数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 排成一列, 记第 i 个数为 a_i $(i=1,2,\cdots,6)$. 若 $a_1\neq 1$, $a_3\neq 3$, $a_5\neq 5$, $a_1<a_3<a_5$, 则不同的排列方法共有______种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{\omega x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$).
(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;
(2) 若对任意的 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $y=f(x)$, $x\in(a,a+\pi]$ 的图象与直线 $y=-1$ 有且仅有两个不同的交点, 试确定 ω 的值 (不必证明), 并求函数 $y=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$ 的单调增区间.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AC=BC=a$, D、E 分别为棱 AB、BC 的中点, M 为棱 AA_1 上的点, 二面角 $M-DE-A$ 为 $30°$.
(1) 证明: $A_1B_1\perp C_1D$;
(2) 求 MA 的长, 并求点 C 到平面 MDE 的距离.



19. 某企业准备投产一批特殊型号的产品, 已知该种产品的成本 C 与产量 q 的函数关系式为 $C=\dfrac{q^3}{3}-3q^2+20q+10$ $(q>0)$. 该种产品的市场前景无法确定, 有三种可能出现的情形, 各种情形发生的概率及产品价格 p 与产量 q 的函数关系如下表所示:

市场情形	概率	价格 p 与产量 q 的函数关系式
好	0.4	$p=164-3q$
中	0.4	$p=101-3q$
差	0.2	$p=70-3q$

设 L_1、L_2、L_3 分别表示市场情形好、中、差时的利润, 随机变量 ξ_q 表示当产量为 q 而市场前景无法确定时的利润.
(1) 分别求利润 L_1、L_2、L_3 与产量 q 的函数关系式;
(2) 当产量 q 确定时, 求期望 $E\xi_q$;
(3) 试问产量 q 取何值时, $E\xi_q$ 取得最大值.

20. 已知正三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2x$ 上, 其中 O 为坐标原点, 设圆 C 是 $\triangle OAB$ 的外接圆 (点 C 为圆心).
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 设圆 M 的方程为 $(x-4-7\cos\theta)^2+(y-7\sin\theta)^2=1$, 过圆 M 上任意一点 P 分别作圆 C 的两条切线 PE、PF, 切点为 E、F, 求 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值.

21. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 与函数 $f(x)$、$g(x)$, $x\in\mathbf{R}$ 满足条件: $b_1=b$, $a_n=f(b_n)=g(b_{n+1})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 若 $f(x)=tx+1$ $(t\neq 0,\ t\neq 2)$, $g(x)=2x$, $f(b)\neq g(b)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 求 t 的取值范围, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ (用 t 表示);
(2) 若函数 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $g(x)=f^{-1}(x)$, $b=1$, $f(1)<1$, 证明对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+1}<a_n$.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-2t(\mathrm{e}^x+x)+x^2+2t^2+1$, $g(x)=\dfrac{1}{2}f'(x)$.
(1) 证明: 当 $t<2\sqrt{2}$ 时, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;
(2) 对于给定的闭区间 $[a,b]$, 试说明存在实数 k, 当 $t>k$ 时, $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是减函数;
(3) 证明: $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$.

2007 普通高等学校招生考试 (辽宁卷文)

一、选择题

1. 若集合 $A=\{1,\ 3\}$, $N=\{2,\ 3,\ 4\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{1\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{3\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

2. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数图象过点 $(1,5)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象必过点 ( )

(A) $(5,1)$ (B) $(1,5)$ (C) $(1,1)$ (D) $(5,5)$

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标为 ( )

(A) $(-\sqrt{7},0)$、$(\sqrt{7},0)$ (B) $(0,-\sqrt{7})$、$(0,\sqrt{7})$

(C) $(-5,0)$、$(5,0)$ (D) $(0,-5)$、$(0,5)$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$, 且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{b}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3=9$, $S_6=36$, 则 $a_7+a_8+a_9=$ ( )

(A) 63 (B) 45 (C) 36 (D) 27

6. 若 m、n 是两条不同的直线, α、β、γ 是三个不同的平面, 则下列命题中的真命题是 ( )

(A) 若 $m\subset\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp\alpha$

(B) 若 $m\perp\beta$, $m\parallel\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$

(C) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\alpha\perp\beta$, 则 $\beta\perp\gamma$

(D) 若 $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$

7. 若函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后, 得到函数 $y=f(x-1)-2$ 的图象, 则向量 $\boldsymbol{a}=$ ( )

(A) $(1,-2)$ (B) $(1,2)$ (C) $(-1,-2)$ (D) $(-1,2)$

8. 已知变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\leqslant 0,\\ x\geqslant 1,\\ x+y-7\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{9}{5},6\right]$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{9}{5}\right]\cup[6,+\infty)$

(C) $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$ (D) $[3,6]$

9. 函数 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$ 的单调减区间为 ( )

(A) $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ (B) $(3,+\infty)$ (C) $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$ (D) $(-\infty,2)$

10. 一个坛子里有编号为 1, 2, $\cdots$, 12 的 12 个大小相同的球, 其中 1 到 6 号球是红球, 其余的是黑球. 若从中任取两个球, 则取到的都是红球, 且至少有 1 个球的号码是偶数的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{22}$ (B) $\dfrac{1}{11}$ (C) $\dfrac{3}{22}$ (D) $\dfrac{2}{11}$

11. 设 p、q 是两个命题, p: $|x|-3>0$, q: $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}>0$, 则 p 是 q 的( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

12. 将数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 排成一列, 记第 i 个数为 a_i ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$). 若 $a_1\neq 1$, $a_3\neq 3$, $a_5\neq 5$, $a_1<a_3<a_5$, 则不同的排列方法种数为 ( )

(A) 18 (B) 30 (C) 36 (D) 48

二、填空题

13. 已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数, 若 $f(3)-f(2)=1$, 则 $f(-2)-f(-3)=$______.

14. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^8$ 展开式中含有 x 的整数次幂的项的系数之和为______. (用数字作答)

15. 若一个底面边长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 侧棱长为 $\sqrt{6}$ 的正六棱柱的所有顶点都在一个球的面上, 则此球的体积为______.

16. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 P 到左准线的距离为 10, F 是该椭圆的左焦点. 若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}\right)$, 则 $\left|\overrightarrow{OM}\right|=$______.

三、解答题

17. 某公司在过去几年内使用某种型号的灯管 1000 支, 该公司对这些灯管的使用寿命 (单位: 小时) 进行了统计, 统计结果如下表所示:

分组	$[500,900)$	$[900,1100)$	$[1100,1300)$	$[1300,1500)$
频数	48	121	208	223
频率				
分组	$[1500,1700)$	$[1700,1900)$	$[1900,+\infty)$	
频数	193	165	42	
频率				

(1) 将各组的频率填入表中;

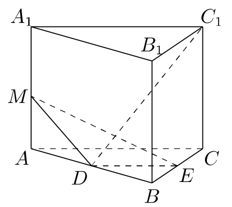
(2) 根据上述统计结果, 计算灯管使用寿命不足 1500 小时的频率;

(3) 该公司某办公室新安装了这种型号的灯管 3 支, 若将上述频率作为概率, 试求至少有 2 支灯管的寿命不足 1500 小时的概率.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AC=BC=a$, D、E 分别为棱 AB、BC 的中点, M 为棱 AA_1 上的点, 二面角 $M-DE-A$ 为 $30°$.

(1) 证明: $A_1B_1\perp C_1D$;

(2) 求 MA 的长, 并求点 C 到平面 MDE 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{\omega x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-1$ 的两个相邻交点间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$, 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

20. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, 且 $\begin{cases} a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+\dfrac{1}{4}b_{n-1}+1, \\ b_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}+\dfrac{3}{4}b_{n-1}+1, \end{cases}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 令 $c_n=a_n+b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和.

21. 已知正三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2x$ 上, 其中 O 为坐标原点, 设圆 C 是 $\triangle OAB$ 的外接圆 (点 C 为圆心).

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 设圆 M 的方程为 $(x-4-7\cos\theta)^2+(y-7\sin\theta)^2=1$, 过圆 M 上任意一点 P 分别作圆 C 的两条切线 PE、PF, 切点为 E、F, 求 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值.

22. 已知函数 $f(x)=x^2-9x^2\cos\alpha+48x\cos\beta+18\sin^2\alpha$, $g(x)=f'(x)$, 且对任意的实数 t 均有 $g(1+\cos t)\geqslant 0$, $g(3+\sin t)\leqslant 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若对任意的 $m\in[-26,6]$, 恒有 $f(x)\geqslant x^2-mx-11$, 求 x 的取值范围.

2007 普通高等学校招生考试 (琼、宁卷理)

一、选择题

1. 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\leqslant 1$, 则 ( )

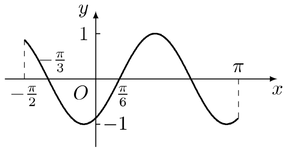
(A) $\neg p$: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$　(B) $\neg p$: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$

(C) $\neg p$: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$　(D) $\neg p$: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$

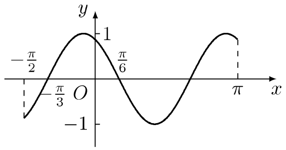
2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 则向量 $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}=$ ( )

(A) $(-2,-1)$　(B) $(-2,1)$　(C) $(-1,0)$　(D) $(-1,2)$

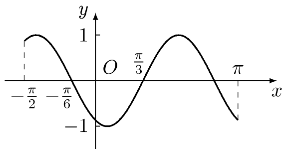
3. 函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 的简图是 ( )



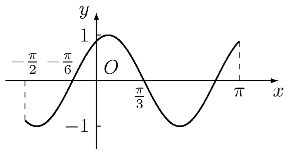
(A)



(B)



(C)

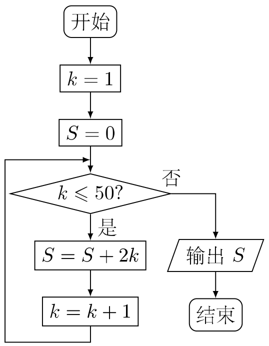


(D)

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_{10}=10$, 其前 10 项和 $S_{10}=70$, 则其公差 $d=$( )

(A) $-\dfrac{2}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

5. 如果执行下面的程序框图, 那么输出的 $S=$ ( )



(A) 2450　(B) 2500　(C) 2550　(D) 2652

6. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$ 在抛物线上, 且 $2x_2=x_1+x_3$, 则有 ( )

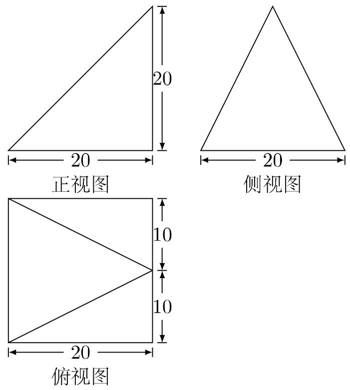
(A) $|FP_1|+|FP_2|=|FP_3|$　(B) $|FP_1|^2+|FP_2|^2=|FP_3|^2$

(C) $2|FP_2|=|FP_1|+|FP_3|$　(D) $|FP_2|^2=|FP_1|\cdot|FP_3|$

7. 已知 $x>0$, $y>0$, x,a,b,y 成等差数列, x,c,d,y 成等比数列, 则 $\dfrac{(a+b)^2}{cd}$ 的最小值是 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4

8. 已知某个几何体的三视图如下, 根据图中标出的尺寸 (单位: cm), 可得这个几何体的体积是 ( )



(A) $\dfrac{4000}{3}\text{cm}^3$　(B) $\dfrac{8000}{3}\text{cm}^3$　(C) 2000cm^3　(D) 4000cm^3

9. 若 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos\alpha+\sin\alpha$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

10. 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ 在点 $(4,\mathrm{e}^2)$ 处的切线与坐标轴所围三角形的面积为 ( )

(A) $\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^2$　(B) $4\mathrm{e}^2$　(C) $2\mathrm{e}^2$　(D) e^2

11. 甲、乙、丙三名射箭运动员在某次测试中各射箭 20 次, 三人的测试成绩如下表

甲的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	5	5	5	5

乙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	6	4	4	6

丙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	4	6	6	4

s_1、s_2、s_3 分别表示甲、乙、丙三名运动员这次测试成绩的标准差, 则有( )

(A) $s_3>s_1>s_2$　(B) $s_2>s_1>s_3$　(C) $s_1>s_2>s_3$　(D) $s_2>s_3>s_1$

12. 一个四棱锥和一个三棱锥恰好可以拼接成一个三棱柱, 这个四棱锥的底面为正方形, 且底面边长与各侧棱长相等, 这个三棱锥的底面边长与各侧棱长也都相等. 设四棱锥、三棱锥、三棱柱的高分别为 h_1, h_2, h, 则 $h_1:h_2:h=$ ( )

(A) $\sqrt{3}:1:1$　(B) $\sqrt{3}:2:2$　(C) $\sqrt{3}:2:\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{3}:2:\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知双曲线的顶点到渐近线的距离为 2, 焦点到渐近线的距离为 6, 则该双曲线的离心率为______.

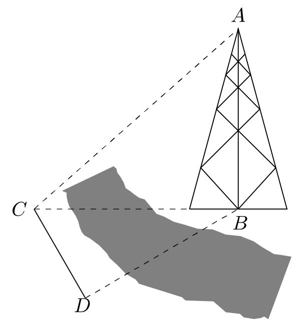
14. 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数, 则 $a=$______.

15. i 是虚数单位, $\dfrac{-5+10\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=$______. (用 $a+b\mathrm{i}$ 的形式表示, $a,b\in\mathbf{R}$)

16. 某校安排 5 个班到 4 个工厂进行社会实践, 每个班去一个工厂, 每个工厂至少安排一个班, 不同的安排方法共有______种. (用数字作答)

三、解答题

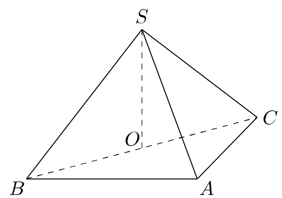
17. 如图, 测量河对岸的塔高 AB 时, 可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D. 现测得 $\angle BCD=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $CD=s$, 并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ, 求塔高 AB.



18. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧面 SAB 与侧面 SAC 均为等边三角形, $\angle BAC=90^\circ$, O 为 BC 中点.

(1) 证明: $SO\perp$ 平面 ABC;

(2) 求二面角 $A-SC-B$ 的余弦值.

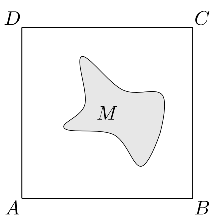


19. 在平面直角坐标系 xOy 中，经过点 $(0,\sqrt{2})$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个不同的交点 P 和 Q.
(1) 求 k 的取值范围;
(2) 设椭圆与 x 轴正半轴、y 轴正半轴的交点分别为 A、B，是否存在常数 k，使得向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线？如果存在，求 k 值；如果不存在，请说明理由.

20. 如图，面积为 S 的正方形 $ABCD$ 中有一个不规则的图形 M，可按下面方法估计 M 的面积：在正方形 $ABCD$ 中随机投掷 n 个点，若 n 个点中有 m 个点落入 M 中，则 M 的面积的估计值为 $\dfrac{m}{n}S$. 假设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，M 的面积为 1，并向正方形 $ABCD$ 中随机投掷 10000 个点，以 X 表示落入 M 中的点的数目.
(1) 求 X 的均值 EX;
(2) 求用以上方法估计 M 的面积时，M 的面积的估计值与实际值之差在区间 $(-0.03,0.03)$ 内的概率.

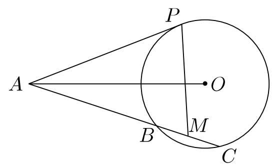
附表：$P(k)=\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_{10000}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10000-i}$

k	2424	2425	2574	2575
$P(k)$	0.0403	0.0423	0.9570	0.9590



21. 设函数 $f(x)=\ln(x+a)+x^2$.
(1) 若当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极值，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)$ 存在极值，求 a 的取值范围，并证明所有极值之和大于 $\ln\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

22. 如图，已知 AP 是 $\odot O$ 的切线，P 为切点，AC 是 $\odot O$ 的割线，与 $\odot O$ 交于 B、C 两点，圆心 O 在 $\angle PAC$ 的内部，点 M 是 BC 的中点.
(1) 证明 A, P, O, M 四点共圆;
(2) 求 $\angle OAM+\angle APM$ 的大小.



23. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程分别为 $\rho=4\cos\theta$, $\rho=-4\sin\theta$.
(1) 把 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程化为直角坐标方程;
(2) 求经过 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 交点的直线的直角坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=|2x+1|-|x-4|$.
(1) 解不等式 $f(x)>2$;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的最小值.

2007 普通高等学校招生考试 (琼、宁卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid x>-1\}$, $B=\{x\mid -2<x<2\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

   (A) $\{x\mid x>-2\}$　(B) $\{x\mid x>-1\}$

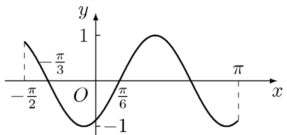
   (C) $\{x\mid -2<x<-1\}$　(D) $\{x\mid -1<x<2\}$

2. 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\leqslant 1$, 则 ( )

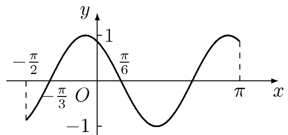
   (A) $\neg p$: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$　(B) $\neg p$: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$

   (C) $\neg p$: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$　(D) $\neg p$: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$

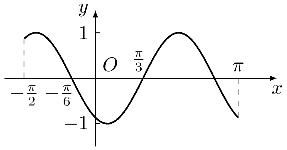
3. 函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 的简图是 ( )



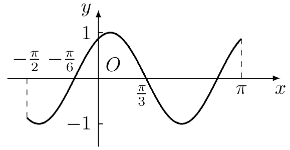
(A)



(B)



(C)

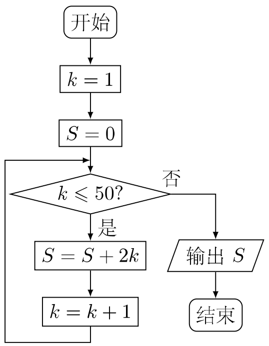


(D)

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 则向量 $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}=$ ( )

   (A) $(-2,-1)$　(B) $(-2,1)$　(C) $(-1,0)$　(D) $(-1,2)$

5. 如果执行下面的程序框图, 那么输出的 $S=$ ( )



   (A) 2450　(B) 2500　(C) 2550　(D) 2652

6. 已知 a, b, c, d 成等比数列, 且曲线 $y=x^2-2x+3$ 的顶点是 (b,c), 则 ad 等于 ( )

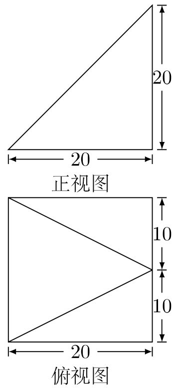
   (A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) -2

7. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$ 在抛物线上, 且 $2x_2=x_1+x_3$, 则有 ( )

   (A) $|FP_1|+|FP_2|=|FP_3|$　(B) $|FP_1|^2+|FP_2|^2=|FP_3|^2$

   (C) $2|FP_2|=|FP_1|+|FP_3|$　(D) $|FP_2|^2=|FP_1|\cdot|FP_3|$

8. 已知某个几何体的三视图如下, 根据图中标出的尺寸 (单位: cm), 可得这个几何体的体积是 ( )



   (A) $\dfrac{4000}{3}\text{cm}^3$　(B) $\dfrac{8000}{3}\text{cm}^3$　(C) 2000cm^3　(D) 4000cm^3

9. 若 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos\alpha+\sin\alpha$ 的值为 ( )

   (A) $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

10. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $(2,\mathrm{e}^2)$ 处的切线与坐标轴所围三角形的面积为 ( )

    (A) $\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^2$　(B) $2\mathrm{e}^2$　(C) e^2　(D) $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$

11. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的各顶点都在一个半径为 r 的球面上, 球心 O 在 AB 上, $SO\perp$ 底面 ABC, $AC=\sqrt{2}r$, 则球的体积与三棱锥体积之比是 ( )

    (A) π　(B) 2π　(C) 3π　(D) 4π

12. 甲、乙、丙三名射箭运动员在某次测试中各射箭 20 次, 三人的测试成绩如下表

甲的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	5	5	5	5

乙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	6	4	4	6

丙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	4	6	6	4

s_1、s_2、s_3 分别表示甲、乙、丙三名运动员这次测试成绩的标准差, 则有( )

    (A) $s_3>s_1>s_2$　(B) $s_2>s_1>s_3$　(C) $s_1>s_2>s_3$　(D) $s_2>s_3>s_1$

二、填空题

13. 已知双曲线的顶点到渐近线的距离为 2, 焦点到渐近线的距离为 6, 则该双曲线的离心率为______.

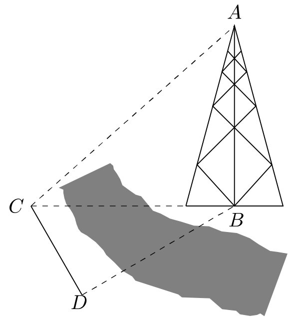
14. 设函数 $f(x)=(x+1)(x+a)$ 为偶函数, 则 $a=$______.

15. i 是虚数单位, $\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+8\mathrm{i}^8=$______. (用 $a+b\mathrm{i}$ 的形式表示, a, $b\in\mathbf{R}$)

16. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_4+a_6=6$, 其前 5 项和 $S_5=10$, 则其公差 $d=$______.

三、解答题

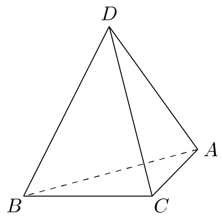
17. 如图, 测量河对岸的塔高 AB 时, 可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D. 现测得 $\angle BCD=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $CD=s$, 并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ, 求塔高 AB.



18. 如图, A, B, C, D 为空间四点. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=BC=\sqrt{2}$, 等边三角形 ADB 以 AB 为轴运动.

    (1) 当平面 $ADB\perp$ 平面 ABC 时, 求 CD;

    (2) 当 $\triangle ADB$ 转动时, 是否总有 $AB\perp CD$? 证明你的结论.

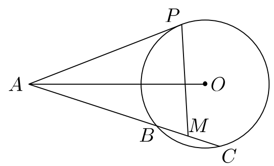


19. 设函数 $f(x)=\ln(2x+3)+x^2$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$ 的最大值和最小值.

20. 设有关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b^2=0$.
(1) 若 a 是从 0, 1, 2, 3 四个数中任取的一个数, b 是从 0, 1, 2 三个数中任取的一个数, 求上述方程有实根的概率;
(2) 若 a 是从区间 $[0,3]$ 任取的一个数, b 是从区间 $[0,2]$ 任取的一个数, 求上述方程有实根的概率.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $x^2+y^2-12x+32=0$ 的圆心为 Q, 过点 $P(0,2)$ 且斜率为 k 的直线与圆 Q 相交于不同的交点 A、B.
(1) 求 k 的取值范围;
(2) 是否存在常数 k, 使得向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 共线? 如果存在, 求 k 值; 如果不存在, 请说明理由.

22. 如图, 已知 AP 是 $\odot O$ 的切线, P 为切点, AC 是 $\odot O$ 的割线, 与 $\odot O$ 交于 B、C 两点, 圆心 O 在 $\angle PAC$ 的内部, 点 M 是 BC 的中点.
(1) 证明 A, P, O, M 四点共圆;
(2) 求 $\angle OAM+\angle APM$ 的大小.



23. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程分别为 $\rho=4\cos\theta$, $\rho=-4\sin\theta$.
(1) 把 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程化为直角坐标方程;
(2) 求经过 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 交点的直线的直角坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=|2x+1|-|x-4|$.
(1) 解不等式 $f(x)>2$;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的最小值.

2007 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

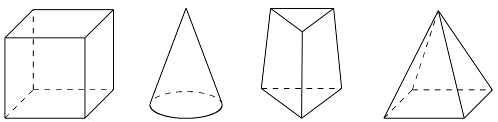
1. 若 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ (i 为虚数单位), 则 $z^2=-1$ 的 θ 值可能是 ( )

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

2. 已知集合 $M=\{-1,\ 1\}$, $N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,\ x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{-1,\ 1\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{-1,\ 0\}$

3. 下列几何体各自的三视图中, 有且仅有两个视图相同的是 ( )



① 正方体 ② 圆锥 ③ 三棱台 ④ 正四棱锥

(A) ①② (B) ①③ (C) ①④ (D) ②④

4. 设 $a\in\left\{-1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 3\right\}$, 则使函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数的所有 α 值为 ( )

(A) 1, 3 (B) -1, 1 (C) -1, 3 (D) -1, 1, 3

5. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期和最大值分别为( )

(A) π, 1 (B) π, $\sqrt{2}$ (C) 2π, 1 (D) 2π, $\sqrt{2}$

6. 给出下列三个等式: $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是 ( )

(A) $f(x)=3^x$ (B) $f(x)=\sin x$ (C) $f(x)=\log_2 x$ (D) $f(x)=\tan x$

7. 命题"对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$"的否定是 ( )

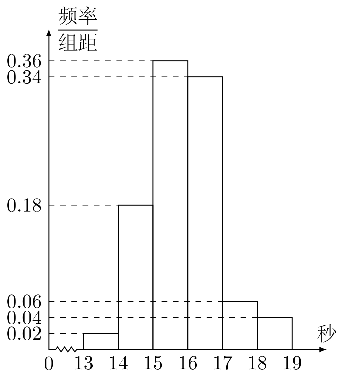
(A) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(B) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(C) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

(D) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

8. 某班 50 名学生在一次百米测试中, 成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间, 将测试结果按如下方式分成六组: 第一组, 成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒; 第二组, 成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒; $\cdots$; 第六组, 成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒. 如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图. 设成绩小于 17 秒的学生人数占全班总人数的百分比为 x, 成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y, 则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为( )



(A) 0.9, 35 (B) 0.9, 45 (C) 0.1, 35 (D) 0.1, 45

9. 下列各小题中, p 是 q 的充要条件的是 ( )

① p: $m<2$ 或 $m>6$; q: $y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点.

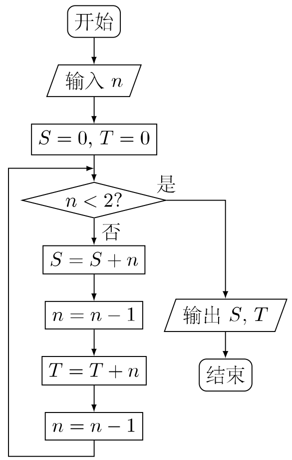
② p: $\frac{f(-x)}{f(x)}=1$; q: $y=f(x)$ 是偶函数.

③ p: $\cos\alpha=\cos\beta$; q: $\tan\alpha=\tan\beta$.

④ p: $A\cap B=A$; q: $\complement_U B\subseteq\complement_U A$.

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

10. 阅读如图的程序框图, 若输入的 n 是 100, 则输出的变量 S 和 T 的值依次是 ( )



(A) 2500, 2500 (B) 2550, 2550 (C) 2500, 2550 (D) 2550, 2500

11. 在直角 $\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的高, 则下列等式不成立的是 ( )

(A) $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

(B) $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(C) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$

(D) $\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\frac{\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\times\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}$

12. 位于坐标原点的一个质点 P 按下述规则移动: 质点每次移动一个单位; 移动的方向为向上或向右, 并且向上、向右移动的概率都是 $\frac{1}{2}$. 质点 P 移动 5 次后位于点 $(2,3)$ 的概率为 ( )

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (B) $C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (D) $C_5^2C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$

二、填空题

13. 设 O 是坐标原点, F 是抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点, A 是抛物线上的一点, $\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $60°$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为______.

14. 设 D 是不等式组 $\begin{cases}x+2y\leqslant 10,\\ 2x+y\geqslant 3,\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\ y\geqslant 1\end{cases}$ 表示的平面区域, 则 D 中的点 $P(x,y)$ 到直线 $x+y=10$ 距离的最大值是______.

15. 与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是______.

16. 函数 $y=\log_a(x+3)-1\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx+ny+1=0$ 上, 其中 $mn>0$, 则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为______.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\frac{n}{3}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 设 $b_n=\frac{n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 设 b 和 c 分别是先后抛掷一枚骰子得到的点数, 用随机变量 ξ 表示方程 $x^2+bx+c=0$ 实根的个数 (重根按一个计).

(1) 求方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率;

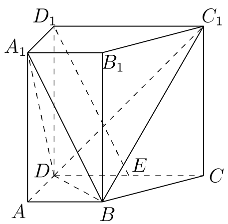
(2) 求 ξ 的分布列和数学期望;

(3) 求在先后两次出现的点数中有 5 的条件下, 方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率.

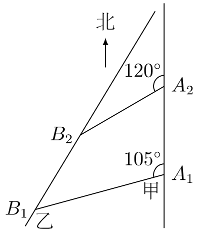
19. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$, $AD\perp DC$, $AB\parallel DC$.

(1) 设 E 是 DC 的中点, 求证: $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD;

(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的余弦值.



20. 如图, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 乙船按固定方向匀速直线航行. 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处, 此时两船相距 20 海里. 当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里. 问乙船每小时航行多少海里?



21. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3, 最小值为 1.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 l: $y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点. 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

22. 设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$, 其中 $b\neq 0$.

(1) 当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时, 判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(3) 证明对任意的正整数 n, 不等式 $\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)>\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}$ 都成立.

2007 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

一、选择题

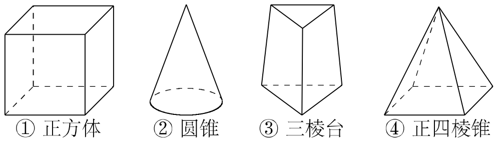
1. 复数 $\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的实部是 ( )

(A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 已知集合 $M=\{-1,\ 1\}$, $N=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{2}<2^{x+1}<4, x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap N=$( )

(A) $\{-1,\ 1\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{-1,\ 0\}$

3. 下列几何体各自的三视图中, 有且仅有两个视图相同的是 ( )



(A) ①② (B) ①③ (C) ①④ (D) ②④

4. 要得到函数 $y=\sin x$ 的图象, 只需将函数 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象 ( )

(A) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位 (B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位 (D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,n)$, $\boldsymbol{b}=(-1,n)$, 若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 则 $|\boldsymbol{a}|=$ ( )

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 4

6. 给出下列三个等式: $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是 ( )

(A) $f(x)=3^x$ (B) $f(x)=\sin x$ (C) $f(x)=\log_2 x$ (D) $f(x)=\tan x$

7. 命题"对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$"的否定是 ( )

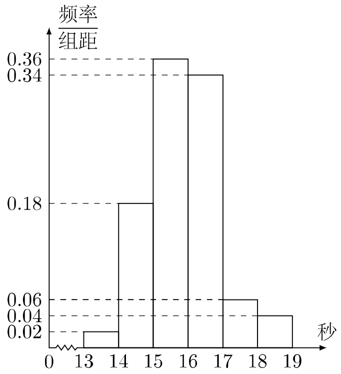
(A) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(B) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(C) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

(D) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

8. 某班 50 名学生在一次百米测试中, 成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间, 将测试结果按如下方式分成六组: 第一组, 成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒; 第二组, 成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒; $\cdots$; 第六组, 成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒. 如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图. 设成绩小于 17 秒的学生人数占全班总人数的百分比为 x, 成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y, 则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为( )

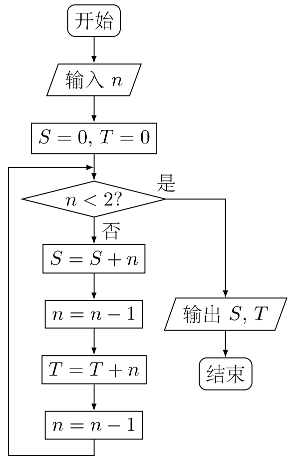


(A) 0.9, 35 (B) 0.9, 45 (C) 0.1, 35 (D) 0.1, 45

9. 设 O 是坐标原点, F 是抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点, A 是抛物线上的一点, $\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 60°, 则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为 ( )

(A) $\dfrac{21p}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{21}p}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{13}}{6}p$ (D) $\dfrac{13}{36}p$

10. 阅读如图的程序框图, 若输入的 n 是 100, 则输出的变量 S 和 T 的值依次是 ( )



(A) 2550, 2500 (B) 2550, 2550 (C) 2500, 2500 (D) 2500, 2550

11. 设函数 $y=x^3$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象的交点为 (x_0,y_0), 则 x_0 所在的区间是 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $(1,2)$ (C) $(2,3)$ (D) $(3,4)$

12. 设集合 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$, 分别从集合 A 和 B 中随机取一个数 a 和 b, 确定平面上的一个点 $P(a,b)$, 记"点 $P(a,b)$ 落在直线 $x+y=n$ 上"为事件 C_n $(2\leqslant n\leqslant 5,\ n\in\mathbf{N})$, 若事件 C_n 的概率最大, 则 n 的所有可能值为 ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 2 和 5 (D) 3 和 4

二、填空题

13. 设函数 $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $f_2(x)=x^{-1}$, $f_3(x)=x^2$, 则 $f_1(f_2(f_3(2007)))=$______.

14. 函数 $y=a^{1-x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx+ny-1=0$ $(mn>0)$ 上, 则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为______.

15. 当 $x\in(1,2)$ 时, 不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是______.

16. 与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $\tan C=3\sqrt{7}$.

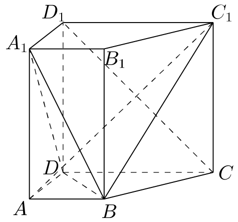
(1) 求 $\cos C$;

(2) 若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\dfrac{5}{2}$, 且 $a+b=9$, 求 c.

18. 设 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_3=7$, 且 a_1+3, $3a_2$, a_3+4 构成等差数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(2) 令 $b_n=\ln a_{3n+1}$, $n=1, 2, \cdots$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 本公司计划 2008 年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 分钟的广告, 广告总费用不超过 9 万元, 甲、乙电视台的广告收费标准分别为 500 元/分钟和 200 元/分钟. 规定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告, 能给公司事来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元. 问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间, 才能使公司的收益最大, 最大收益是多少万元?

20. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$, $AD\perp DC$, $AB\parallel DC$.
(1) 求证: $D_1C\perp AC_1$;
(2) 设 E 是 DC 上一点, 试确定 E 的位置, 使 $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD, 并说明理由.



21. 设函数 $f(x)=ax^2+b\ln x$, 其中 $ab\neq 0$. 证明: 当 $ab>0$ 时, 函数 $f(x)$ 没有极值点; 当 $ab<0$ 时, 函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点, 并求出极值.

22. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3, 最小值为 1.
(1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 若直线 l: $y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点. 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

2007 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$ 对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x-3|<2\}$, 则集合 $\complement_U A$ 等于 ( )

(A) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (B) $\{2,\ 3,\ 4\}$ (C) $\{1,\ 5\}$ (D) $\{5\}$

3. 抛物线 $y=x^2$ 的准线方程是 ( )

(A) $4y+1=0$ (B) $4x+1=0$ (C) $2y+1=0$ (D) $2x+1=0$

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{5}$ (B) $-\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{3}{5}$

5. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_n=2$, $S_{3n}=14$, 则 S_{4n} 等于 ( )

(A) 80 (B) 30 (C) 26 (D) 16

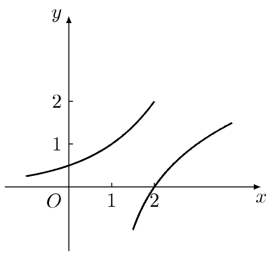
6. 一个正三棱锥的四个顶点都在半径为 1 的球面上, 其中底面的三个顶点在该球的一个大圆上, 则该正三棱锥的体积是 ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

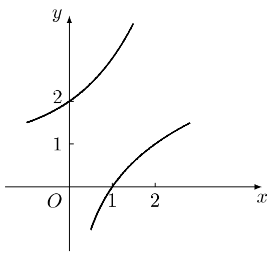
7. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$, 以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是 ( )

(A) $\sqrt{ab}$ (B) $\sqrt{a^2+b^2}$ (C) a (D) b

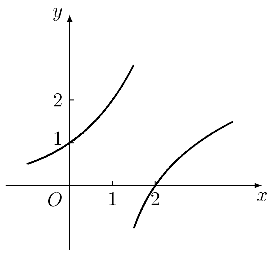
8. 若函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$, 则函数 $f(x-1)$ 与 $f^{-1}(x-1)$ 的图象可能是 ( )



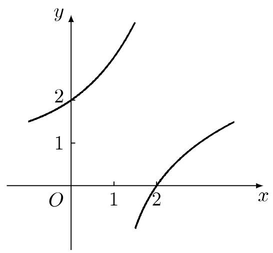
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 给出如下三个命题:

① 四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列的充要条件是 $ad=bc$;

② 设 $a, b\in\mathbf{R}$, 且 $ab\neq0$, 若 $\dfrac{a}{b}<1$, 则 $\dfrac{b}{a}>1$;

③ 若 $f(x)=\log_2 x$, 则 $f(|x|)$ 是偶函数.

其中不正确的序号是 ( )

(A) ①②③ (B) ①② (C) ②③ (D) ①③

10. 已知平面 $\alpha\parallel$ 平面 β, 直线 $m\subset\alpha$, 直线 $n\subset\beta$, 点 $A\in m$, 点 $B\in n$, 记点 A、B 之间的距离为 a, 点 A 到直线 n 的距离为 b, 直线 m 和 n 的距离为 c, 则 ( )

(A) $b\leqslant c\leqslant a$ (B) $a\leqslant c\leqslant b$ (C) $c\leqslant a\leqslant b$ (D) $c\leqslant b\leqslant a$

11. $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x)+f(x)\leqslant0$. 对任意正数 a, b, 若 $a<b$, 则必有 ( )

(A) $af(b)\leqslant bf(a)$ (B) $bf(a)\leqslant af(b)$ (C) $af(a)\leqslant f(b)$ (D) $bf(b)\leqslant f(a)$

12. 设集合 $S=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, 在 S 上定义运算 $\oplus$ 为: $A_i\oplus A_j=A_k$, 其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数, $i, j=0, 1, 2, 3$. 则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x\ (x\in S)$ 的个数为 ( )

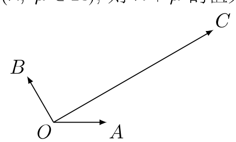
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

二、填空题

13. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}\right)=$______.

14. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant0,\\2x+y-2\geqslant0,\\3x-y-3\leqslant0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为______.

15. 如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120°, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30°, 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ (λ, $\mu\in\mathbf{R}$), 则 $\lambda+\mu$ 的值为______.



16. 安排 3 名支教教师去 6 所学校任教, 每校至多 2 人, 则不同的分配方案共有______. 种. (用数字作答)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos2x)$, $\boldsymbol{b}=(1+\sin2x,1)$, $x\in\mathbf{R}$, 且函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},2\right)$.

(1) 求实数 m 的值;

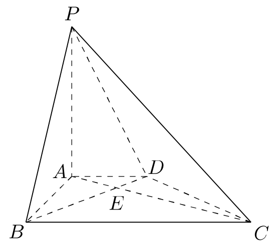
(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值及此时 x 值的集合.

18. 某项选拔共有三轮考核, 每轮设有一个问题, 能正确回答问题者进入下一轮考核, 否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为 $\dfrac{4}{5}$、$\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{2}{5}$, 且各轮问题能否正确回答互不影响.

(1) 求该选手被淘汰的概率;

(2) 该选手在选拔中回答问题的个数记为 ξ, 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望.

19. 如图, 在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=4$, $AD=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $BC=6$.
(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC;
(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的大小.



20. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+ax+a}$, 其中 a 为实数.
(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求 a 的取值范围;
(2) 当 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调减区间.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

22. 已知各项全不为零的数列 $\{a_k\}$ 的前 k 项和为 S_k, 且 $S_k=\dfrac{1}{2}a_k a_{k+1}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 其中 $a_1=1$.
(1) 求数列 $\{a_k\}$ 的通项公式;
(2) 对任意给定的正整数 n ($n \geqslant 2$), 数列 $\{b_k\}$ 满足 $\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=\dfrac{k-n}{a_{k+1}}$ ($k=1, 2, \cdots, n-1$), $b_1=1$. 求 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.

2007 普通高等学校招生考试 (陕西卷文)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, 集合 $A=\{2,\ 3,\ 6\}$, 则集合 $\complement_U A$ 等于 ( )

(A) $\{1,\ 4\}$ (B) $\{4,\ 5\}$ (C) $\{1,\ 4,\ 5\}$ (D) $\{2,\ 3,\ 6\}$

2. 函数 $f(x)=\lg\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 ( )

(A) $[0,1]$ (B) $(-1,1)$

(C) $[-1.1]$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

3. 抛物线 $x^2=y$ 的准线方程是 ( )

(A) $4x+1=0$ (B) $4y+1=0$ (C) $2x+1=0$ (D) $2y+1=0$

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{3}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{3}{5}$

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_2=2$, $S_4=10$, 则 S_6 等于 ( )

(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 42

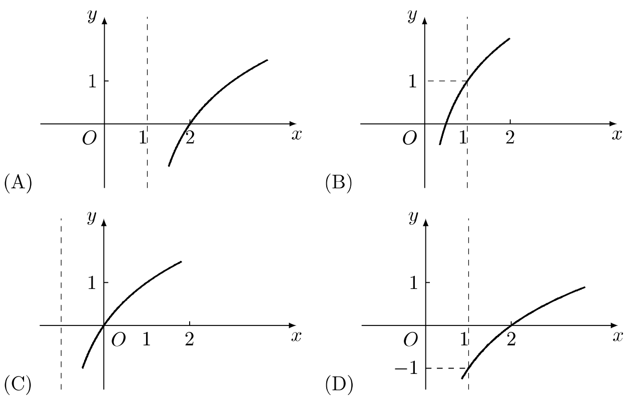
6. 某商场有四类食品, 其中粮食类、植物油类、动物性食品类以及果蔬类分别有 40 种、10 种、30 种、20 种, 现从中抽取一个容量为 20 的样本进行食品安全检测. 若采用分层抽样的方法抽取样本, 则抽取的植物油类与果蔬类食品种数之和是 ( )

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

7. Rt$\triangle ABC$ 的三个顶点在半径为 13 的球面上, 直角边的长分别为 6 和 8, 则球心到平面 ABC 的距离是 ( )

(A) 5 (B) 6 (C) 10 (D) 12

8. 设函数 $f(x)=2^x+1\ (x\in\mathbf{R})$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是 ( )



9. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$, 以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是 ( )

(A) a (B) b (C) $\sqrt{ab}$ (D) $\sqrt{a^2+b^2}$

10. 已知 P 为平面 α 外一点, 直线 $l\subset\alpha$, 点 $Q\in l$, 记点 P 到平面 α 的距离为 a, 点 P 到直线 l 的距离为 b, 点 P、Q 之间的距离为 c, 则 ( )

(A) $a\leqslant b\leqslant c$ (B) $c\leqslant a\leqslant b$ (C) $a\leqslant c\leqslant b$ (D) $b\leqslant c\leqslant a$

11. 给出如下三个命题:

① 设 $a,b\in\mathbf{R}$, 且 $ab\neq0$, 若 $\dfrac{b}{a}>1$, 则 $\dfrac{a}{b}<1$;

② 四个非零实数 $a,\ b,\ c,\ d$ 依次成等比数列的充要条件是 $ad=bc$;

③ 若 $f(x)=\log_2 x$, 则 $f(|x|)$ 是偶函数.

其中正确命题的序号是 ( )

(A) ①② (B) ②③ (C) ①③ (D) ①②③

12. 某生物生长过程中, 在三个连续时段内的增长量都相等, 在各时段内平均增长速度分别为 v_1、v_2、v_3, 该生物在所讨论的整个时段内的平均增长速度为 ( )

(A) $\dfrac{v_1+v_2+v_3}{3}$ (B) $\dfrac{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}+\dfrac{1}{v_3}}{3}$

(C) $\sqrt[3]{v_1v_2v_3}$ (D) $\dfrac{3}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}+\dfrac{1}{v_3}}$

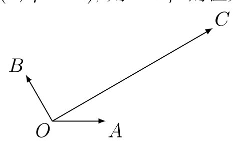
二、填空题

13. $(1+2x)^5$ 的展开式中 x^2 项的系数是______. (用数字作答)

14. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant0,\\3x-y-3\leqslant0,\\x\geqslant0,\ y\geqslant0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为______.

15. 安排 3 名支教教师去 4 所学校任教, 每校至多 2 人, 则不同的分配方案共有______种. (用数字作答)

16. 如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120°, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30°, 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\ (\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$, 则 $\lambda+\mu$ 的值为______.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos x)$, $\boldsymbol{b}=(1+\sin x,1)$, $x\in\mathbf{R}$, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

(1) 求实数 m 的值;

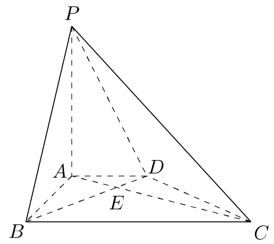
(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

18. 某项选拔共有四轮考核, 每轮设有一个问题, 能正确回答问题者进入下一轮考核, 否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三、四轮的问题的概率分别为 $\dfrac{4}{5}$、$\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{1}{5}$, 且各轮问题能否正确回答互不影响.

(1) 求该选手进入第四轮才被淘汰的概率;

(2) 求该选手至多进入第三轮考核的概率.

19. 如图, 在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=3$, $AD=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $BC=6$.
(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC;
(2) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



20. 已知实数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其中 $a_7=1$, 且 a_4, a_5+1, a_6 成等差数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, 证明: $S_n < 128$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$.

21. 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在区间 $[0,1]$ 上是增函数, 在区间 $(-\infty,0)$, $(1,+\infty)$ 上是减函数. 又 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 若在区间 $[0,m]$ $(m>0)$ 上恒有 $f(x) \leqslant x$ 成立, 求 m 的取值范围.

22. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

2007 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是______.

2. 若直线 l_1: $2x+my+1=0$ 与直线 l_2: $y=3x-1$ 平行, 则 $m=$______.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

4. 方程 $9^x-6\cdot 3^x-7=0$ 的解是______.

5. 若 $x, y\in \mathbf{R}^+$, 且 $x+4y=1$, 则 $x\cdot y$ 的最大值是______.

6. 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$______.

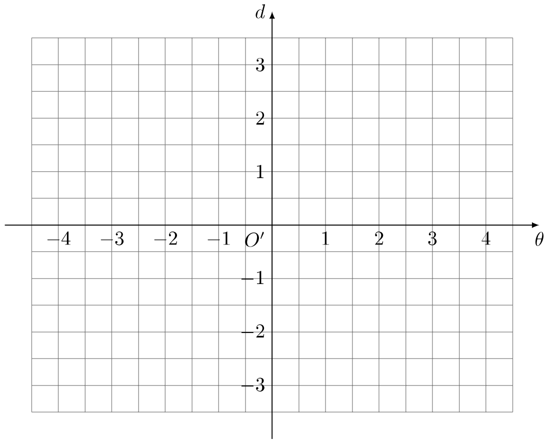
7. 在五个数字 1, 2, 3, 4, 5 中, 若随机取出三个数字, 则剩下两个数字都是奇数的概率是______. (结果用数值表示)

8. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的中心为焦点, 且以该双曲线的左焦点为顶点的抛物线方程是______.

9. 对于非零实数 a, b, 以下四个命题都成立: ① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$; ② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; ③ 若 $|a|=|b|$, 则 $a=\pm b$; ④ 若 $a^2=ab$, 则 $a=b$. 那么, 对于非零复数 a, b, 仍然成立的命题的所有序号是______.

10. 在平面上, 两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α, β 是两个相交平面, 空间两条直线 l_1, l_2 在 α 上的射影是直线 s_1, s_2, l_1, l_2 在 β 上的射影是直线 t_1, t_2. 用 s_1 与 s_2, t_1 与 t_2 的位置关系, 写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件: ______.

11. 已知 P 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点 (原点 O 除外), 直线 OP 的倾斜角为 θ 弧度, 记 $d=|OP|$. 在右侧的坐标系中, 画出以 (θ, d) 为坐标的点的轨迹的大致图形为



二、选择题

12. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $2+a\mathrm{i}$, $b+\mathrm{i}$ (i 是虚数单位) 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根, 那么 p, q 的值分别是 ( )

(A) $p=-4$, $q=5$ (B) $p=-4$, $q=3$

(C) $p=4$, $q=5$ (D) $p=4$, $q=3$

13. 设 a, b 是非零实数, 若 $a<b$, 则下列不等式成立的是 ( )

(A) $a^2<b^2$ (B) $ab^2<a^2b$ (C) $\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$ (D) $\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$

14. 直角坐标系 xOy 中, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ 分别是与 x, y 轴正方向同向的单位向量. 在直角三角形 ABC 中, 若 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{i}+k\overrightarrow{j}$, 则 k 的可能值个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

15. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数, 且 $f(x)$ 满足: "当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时, 总可推出 $f(k+1)\geqslant (k+1)^2$ 成立". 那么, 下列命题总成立的是 ( )

(A) 若 $f(3)\geqslant 9$ 成立, 则当 $k\geqslant 1$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

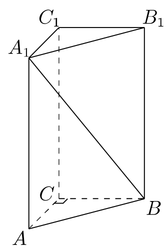
(B) 若 $f(5)\geqslant 25$ 成立, 则当 $k\leqslant 5$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

(C) 若 $f(7)<49$ 成立, 则当 $k\geqslant 8$ 时, 均有 $f(k)<k^2$ 成立

(D) 若 $f(4)=25$ 成立, 则当 $k\geqslant 4$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

三、解答题

16. 如图, 在体积为 1 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=1$, 求直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角. (结果用反三角函数值表示)



17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边. 若 $a=2$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

18. 近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳电池的年生产量达到 670 兆瓦, 年生产量的增长率为 34 %. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增 2 % (如, 2003 年的年生产量的增长率为 36 %).

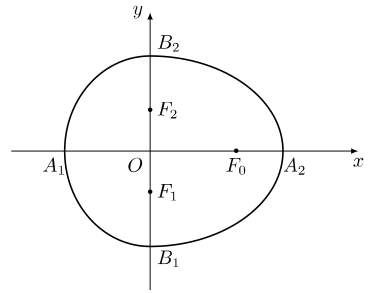
(1) 求 2006 年全球太阳电池的年生产量 (结果精确到 0.1 兆瓦);

(2) 目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量, 2006 年的实际安装量为 1420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在 42 %, 到 2010 年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的 95 %), 这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到 0.1 %)?

19. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ ($x\neq 0$, 常数 $a\in\mathbf{R}$).
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;
(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

20. 如果有穷数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n (n 为正整数) 满足条件 $a_1=a_n$, $a_2=a_{n-1}$, $\cdots$, $a_n=a_1$, 即 $a_i=a_{n-i+1}$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 我们称其为"对称数列". 例如, 由组合数组成的数列 C_m^0, C_m^1, $\cdots$, C_m^m 就是"对称数列".
(1) 设 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的"对称数列", 其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列, 且 $b_1=2$, $b_4=11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项;
(2) 设 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k-1$ (正整数 $k>1$) 的"对称数列", 其中 c_k, c_{k+1}, $\cdots$, c_{2k-1} 是首项为 50, 公差为 -4 的等差数列. 记 $\{c_n\}$ 各项的和为 S_{2k-1}. 当 k 为何值时, S_{2k-1} 取得最大值? 并求出 S_{2k-1} 的最大值;
(3) 对于确定的正整数 $m>1$, 写出所有项数不超过 $2m$ 的"对称数列", 使得 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{m-1}$ 依次是该数列中连续的项; 当 $m>1500$ 时, 求其中一个"对称数列"前 2008 项的和 S_{2008}.

21. 我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($x\geqslant 0$) 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 合成的曲线称作"果圆", 其中 $a^2=b^2+c^2$, $a>0$, $b>c>0$. 如图, 设点 F_0, F_1, F_2 是相应椭圆的焦点, A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是"果圆"与 x, y 轴的交点.
(1) 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为 1 的等边三角形, 求"果圆"的方程;
(2) 当时 $|A_1A_2|>|B_1B_2|$ 时, 求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围;
(3) 连接"果圆"上任意两点的线段称为"果圆"的弦. 试研究: 是否存在实数 k, 使斜率为 k 的"果圆"平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上? 若存在, 求出所有可能的 k 值; 若不存在, 说明理由.



2007 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 方程 $3^{x-1}=\dfrac{1}{9}$ 的解是______.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

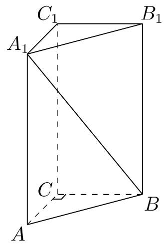
3. 直线 $4x+y-1=0$ 的倾斜角 $\theta=$______.

4. 函数 $y=\sec x\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$______.

5. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的中心为顶点, 且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是______.

6. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$, $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$, 则 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$______.

7. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AA_1=2$, $AC=BC=1$, 则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小是______. (结果用反三角函数值表示)

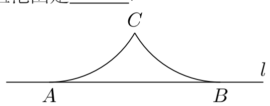


8. 某工程由 A, B, C, D 四道工序组成, 完成它们需用时间依次为 2, 5, x, 4 天. 四道工序的先后顺序及相互关系是: A, B 可以同时开工; A 完成后, C 可以开工; BC 完成后, D 可以开工. 若该工程总时数为 9 天, 则完成工序 C 需要的天数 x 最大是______.

9. 在五个数字 1, 2, 3, 4, 5 中, 若随机取出三个数字, 则剩下两个数字都是奇数的概率是______. (结果用数值表示)

10. 对于非零实数 a, b, 以下四个命题都成立: ① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$; ② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; ③ 若 $|a|=|b|$, 则 $a=\pm b$; ④ 若 $a^2=ab$, 则 $a=b$. 那么, 对于非零复数 a, b, 仍然成立的命题的所有序号是______.

11. 如图, AB 是直线 l 上的两点, 且 $AB=2$. 两个半径相等的动圆分别与 l 相切于 AB 点, C 是这两个圆的公共点, 则圆弧 AC, CB 与线段 AB 围成图形面积 S 的取值范围是______.



二、选择题

12. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $2+a\mathrm{i}$, $b+3\mathrm{i}$ (i 是虚数单位) 是一个实系数一元二次方程的两个根, 那么 a, b 的值分别是 ( )

(A) $a=-3$, $b=2$ (B) $a=3$, $b=-2$

(C) $a=-3$, $b=-2$ (D) $a=3$, $b=2$

13. 圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 关于直线 $2x-y+3=0$ 对称的圆的方程是 ( )

(A) $(x+3)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{2}$ (B) $(x-3)^2+(y+2)^2=\dfrac{1}{2}$

(C) $(x+3)^2+(y-2)^2=2$ (D) $(x-3)^2+(y+2)^2=2$

14. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & 1\leqslant n\leqslant 1000,\\ \dfrac{n^2}{n^2-2n}, & n\geqslant 1001,\end{cases}$ 则数列 $\{a_n\}$ 的极限值 ( )

(A) 等于 0 (B) 等于 1 (C) 等于 0 或 1 (D) 不存在

15. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数, 且 $f(x)$ 满足: "当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时, 总可推出 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$ 成立". 那么, 下列命题总成立的是 ( )

(A) 若 $f(1)<1$ 成立, 则 $f(10)<100$ 成立

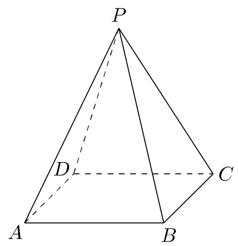
(B) 若 $f(2)<4$ 成立, 则 $f(1)\geqslant 1$ 成立

(C) 若 $f(3)\geqslant 9$ 成立, 则当 $k\geqslant 1$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

(D) 若 $f(4)\geqslant 25$ 成立, 则当 $k\geqslant 4$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

三、解答题

16. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=2$, 直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$, 求正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 V.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边. 若 $a=2$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

18. 近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳电池的年生产量达到 670 兆瓦, 年生产量的增长率为 34 %. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增 2 % (如, 2003 年的年生产量的增长率为 36 %).

(1) 求 2006 年全球太阳电池的年生产量 (结果精确到 0.1 兆瓦);

(2) 目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量, 2006 年的实际安装量为 1420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在 42 %, 到 2010 年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的 95 %), 这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到 0.1 %)?

19. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ ($x\neq 0$, 常数 $a\in\mathbf{R}$).

(1) 当 $a=2$ 时, 解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

20. 如果有穷数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_m (m 为正整数) 满足条件 $a_1=a_m$, $a_2=a_{m-1}$, $\cdots$, $a_m=a_1$, 即 $a_i=a_{m-i+1}$ ($i=1, 2, \cdots, m$), 我们称其为"对称数列". 例如, 数列 1, 2, 5, 2, 1 与数列 8, 4, 2, 2, 4, 8 都是"对称数列".

(1) 设 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的"对称数列", 其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列, 且 $b_1=2$, $b_4=11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项;

(2) 设 $\{c_n\}$ 是 49 项的"对称数列", 其中 c_{25}, c_{26}, $\cdots$, c_{49} 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求 $\{c_n\}$ 各项的和 S;

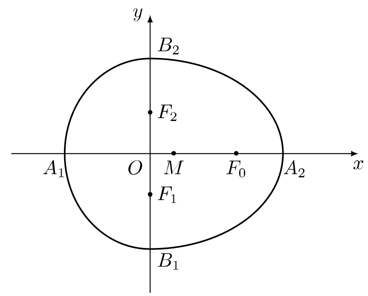
(3) 设 $\{d_n\}$ 是 100 项的"对称数列", 其中 d_{51}, d_{52}, $\cdots$, d_{100} 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列. 求 $\{d_n\}$ 前 n 项的和 S_n ($n=1, 2, \cdots, 100$).

21. 我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($x\geqslant 0$) 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 合成的曲线称作"果圆", 其中 $a^2=b^2+c^2$, $a>0$, $b>c>0$. 如图, 设点 F_0, F_1, F_2 是相应椭圆的焦点, A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是"果圆"与 x, y 轴的交点, M 是线段 A_1A_2 的中点.

(1) 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为 1 的等边三角形, 求该"果圆"的方程;

(2) 设 P 是"果圆"的半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 上任意一点. 求证: 当 $|PM|$ 取得最小值时, P 在点 B_1, B_2 或 A_1 处;

(3) 若 P 是"果圆"上任意一点, 求 $|PM|$ 取得最小值时点 P 的横坐标.



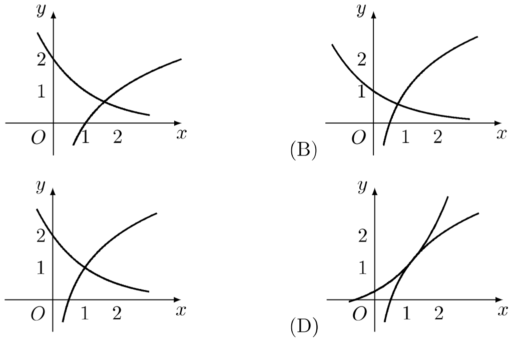
2007 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}^3$ 的值是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 1

2. 函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{-x+1}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是 ( )

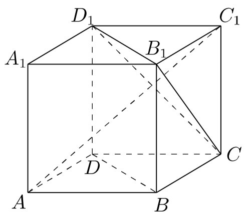


(A) (B) (C) (D)

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$ ( )

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

4. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 下面结论错误的是 ( )



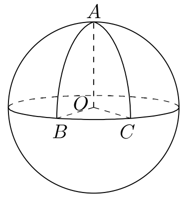
(A) $BD\,/\!/$ 平面 CB_1D_1 (B) $AC_1\perp BD$

(C) $AC_1\perp$ 平面 CB_1D_1 (D) 异面直线 AD 与 CB_1 角为 60°

5. 如果双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2, 那么点 P 到 y 轴的距离是 ( )

(A) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (C) $2\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{3}$

6. 设球 O 的半径是 1, A、B、C 是球面上三点, 已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是 $\dfrac{\pi}{2}$, 且二面角 $B-OA-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是 ( )



(A) $\dfrac{7\pi}{6}$ (B) $\dfrac{5\pi}{4}$ (C) $\dfrac{4\pi}{3}$ (D) $\dfrac{3\pi}{2}$

7. 设 $A(a,1)$, $B(2,b)$, $C(4,5)$ 为坐标平面上三点, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影相同, 则 a 与 b 满足的关系式为 ( )

(A) $4a-5b=3$ (B) $5a-4b=3$ (C) $4a+5b=14$ (D) $5a+4b=14$

8. 已知抛物线 $y=-x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B, 则 $|AB|$ 等于 ( )

(A) 3 (B) 4 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

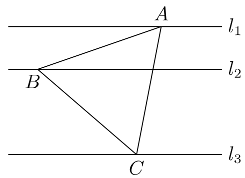
9. 某公司有 60 万元资金, 计划投资甲、乙两个项目, 按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\dfrac{2}{3}$ 倍, 且对每个项目的投资不能低于 5 万元, 对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润, 对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润, 该公司正确规划投资后, 在这两个项目上共可获得的最大利润为 ( )

(A) 36 万元 (B) 31.2 万元 (C) 30.4 万元 (D) 24 万元

10. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有 ( )

(A) 288 个 (B) 240 个 (C) 144 个 (D) 126 个

11. 如图, l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的边长是 ( )



(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (C) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4}$ (D) $\dfrac{2-\sqrt{21}}{3}$

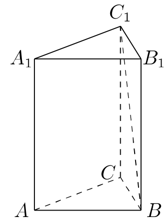
12. 已知一组抛物线 $y=\dfrac{1}{2}ax^2+bx+1$, 其中 a 为 2, 4, 6, 8 中任取的一个数, b 为 1, 3, 5, 7 中任取的一个数, 从这些抛物线中任意抽取两条, 它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线相互平行的概率是 ( )

(A) $\dfrac{1}{12}$ (B) $\dfrac{7}{60}$ (C) $\dfrac{6}{25}$ (D) $\dfrac{5}{25}$

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-u)^2}$ (e 是自然对数的底数) 的最大值是 m, 且 $f(x)$ 是偶函数, 则 $m+u=$______.

14. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面三角形的边长为 1, 则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是______.



15. 已知 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2-2=0$, $\odot O'$ 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$, 由动点 P 向 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 所引的切线长相等, 则动点 P 的轨迹方程是______.

16. 下面有五个命题:

① 函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ 的最小正周期是 π;

② 终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$;

③ 在同一坐标系中, 函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点;

④ 把函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象;

⑤ 函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上是减函数.

其中真命题的序号是______. (写出所有)

三、解答题

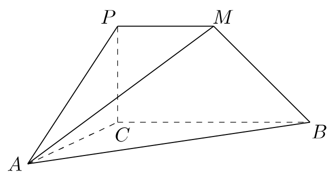
17. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$, 且 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值;

(2) 求 β.

18. 厂家在产品出厂前, 需对产品做检验, 厂家将一批产品发给商家时, 商家按合同规定也需随机抽取一定数量的产品做检验, 以决定是否接收这批产品.
(1) 若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.8, 从中任意取出 4 件进行检验. 求至少有 1 件是合格品的概率;
(2) 若厂家发给商家 20 件产品, 其中有 3 件不合格, 按合同规定该商家从中任取 2 件, 都进行检验, 只有 2 件都合格时才接收这批产品, 否则拒收. 求该商家可能检验出不合格产品数 ξ 的分布列及期望 $E\xi$, 并求该商家拒收这批产品的概率.

19. 如图, $PCBM$ 是直角梯形, $\angle PCB=90^\circ$, $PM /\!/ BC$, $PM=1$, $BC=2$, 又 $AC=1$, $\angle ACB=120^\circ$, $AB\perp PC$, 直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°.
(1) 求证: 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC;
(2) 求二面角 $M-AC-B$ 的大小;
(3) 求三棱锥 $P-MAC$ 的体积.



20. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点.
(1) 若 P 是该椭圆上的一个动点, 求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值和最小值;
(2) 设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B, 且 $\angle AOB$ 为锐角 (其中 O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=x^2-4$, 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 x_1 为正实数.
(1) 用 x_n 表示 x_{n+1};
(2) 求证: 对一切正整数 n, $x_{n+1}\leqslant x_n$ 的充要条件是 $x_1\geqslant 2$;
(3) 若 $x_1=4$, 记 $a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列, 并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

22. 设函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*$, 且 $n>1$, $x\in\mathbf{N})$.
(1) 当 $x=6$ 时, 求 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的展开式中二项式系数最大的项;
(2) 对任意的实数 x, 证明 $\dfrac{f(2x)+f(2)}{2}>f'(x)$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数);
(3) 是否存在 $a\in\mathbf{N}$, 使得 $an<\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)<(a+1)n$ 恒成立? 若存在, 试证明你的结论并求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

2007 普通高等学校招生考试 (四川卷文)

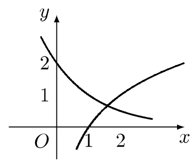
一、选择题

1. 设集合 $M=\{4,\ 5,\ 6,\ 8\}$, 集合 $N=\{3,\ 5,\ 7,\ 8\}$, 那么 $M\cup N=$ ( )

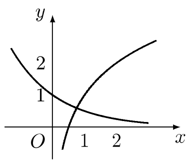
(A) $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$　(B) $\{5,\ 8\}$

(C) $\{3,\ 5,\ 7,\ 8\}$　(D) $\{4,\ 5,\ 6,\ 8\}$

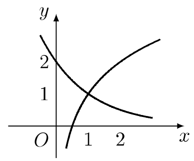
2. 函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{-x+1}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是 ( )



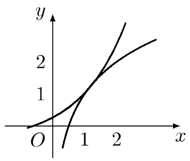
(A)



(B)



(C)

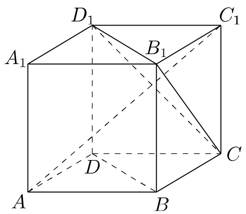


(D)

3. 某商场买来一车苹果, 从中随机抽取了 10 个苹果, 其重量 (单位: 克) 分别为: 150, 152, 153, 149, 148, 146, 151, 150, 152, 147, 由此估计这车苹果单个重量的期望值是 ( )

(A) 150.2 克　(B) 149.8 克　(C) 149.4 克　(D) 147.8 克

4. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 下面结论错误的是 ( )



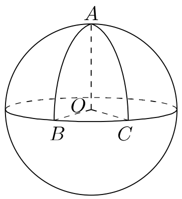
(A) $BD\parallel$ 平面 CB_1D_1　(B) $AC_1\perp BD$

(C) $AC_1\perp$ 平面 CB_1D_1　(D) 异面直线 AD 与 CB_1 角为 $60°$

5. 如果双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2, 那么点 P 到 y 轴的距离是 ( )

(A) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　(C) $2\sqrt{6}$　(D) $2\sqrt{3}$

6. 设球 O 的半径是 1, A、B、C 是球面上三点, 已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是 $\dfrac{\pi}{2}$, 且二面角 $B-OA-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是 ( )



(A) $\dfrac{7\pi}{6}$　(B) $\dfrac{5\pi}{4}$　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$　(D) $\dfrac{3\pi}{2}$

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_3+a_5=14$, 其前 n 项和 $S_n=100$, 则 $n=$( )

(A) 9　(B) 10　(C) 11　(D) 12

8. 设 $A(a,1)$, $B(2,b)$, $C(4,5)$ 为坐标平面上三点, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影相同, 则 a 与 b 满足的关系式为 ( )

(A) $4a-5b=3$　(B) $5a-4b=3$　(C) $4a+5b=14$　(D) $5a+4b=14$

9. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有 ( )

(A) 48 个　(B) 36 个　(C) 24 个　(D) 18 个

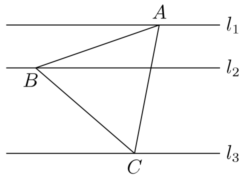
10. 已知抛物线 $y=-x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B, 则 $|AB|$ 等于 ( )

(A) 3　(B) 4　(C) $3\sqrt{2}$　(D) $4\sqrt{2}$

11. 某公司有 60 万元资金, 计划投资甲、乙两个项目, 按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\dfrac{2}{3}$ 倍, 且对每个项目的投资不能低于 5 万元, 对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润, 对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润, 该公司正确规划投资后, 在这两个项目上共可获得的最大利润为 ( )

(A) 36 万元　(B) 31.2 万元　(C) 30.4 万元　(D) 24 万元

12. 如图, l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的边长是 ( )

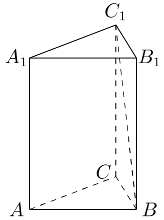


(A) $2\sqrt{3}$　(B) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　(C) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4}$　(D) $\dfrac{2-\sqrt{21}}{3}$

二、填空题

13. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中的第 5 项为常数项, 那么正整数 n 的值是______.

14. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面三角形的边长为 1, 则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是______.



15. 已知 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2-2=0$, $\odot O'$ 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$, 由动点 P 向 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 所引的切线长相等, 则动点 P 的轨迹方程是______.

16. 下面有五个命题:

① 函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$, 的最小正周期是 π;

② 终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha\ \middle|\ \alpha=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

③ 在同一坐标系中, 函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点;

④ 把函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象;

⑤ 角 θ 为第一象限角的充要条件是 $\sin\theta>0$.

其中真命题的序号是______. (写出所有)

三、解答题

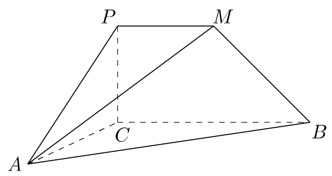
17. 厂家在产品出厂前, 需对产品做检验, 厂家对一般产品致冷商家的, 商家符合规定拾取一定数量的产品做检验, 以决定是否验收这些产品.

(1) 若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.3, 从中任意取出 4 种进行检验, 求至少要 1 件是合格产品的概率;

(2) 若厂家发给商家 20 件产品, 其中有 3 件不合格, 按合同规定该商家从中任取 2 件, 来进行检验, 只有 2 件产品合格时才接收这些产品, 否则拒收, 分别求出该商家计算出不合格产品为 1 件和 2 件的概率, 并求该商家拒收这些产品的概率.

18. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$, 且 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.
(1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值;
(2) 求 β.

19. 如图, $PCBM$ 是直角梯形, $\angle PCB=90^{\circ}$, $PM \parallel BC$, 直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°, 又 $AC=1$, $BC=2PM=2$, $\angle ACB=90^{\circ}$.
(1) 求证: $AC\perp BM$;
(2) 求二面角 $M-AB-C$ 的大小;
(3) 求多面体 $PMABC$ 的体积.



20. 设函数 $f(x)=ax^3+bx+c\ (a\neq 0)$ 为奇函数, 其图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-6y-7=0$ 垂直, 导函数 $f'(x)$ 的最小值为 -12.
(1) 求 a, b, c 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间, 并求函数 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值和最小值.

21. 已知 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2-1$ 的左、右焦点.
(1) 若 P 是第一象限内该椭圆上的一点, 且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-\dfrac{5}{4}$, 求点 P 的坐标;
(2) 设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B, 且 $\angle AOB$ 为锐角 (其中 O 为作标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=x^2-4$, 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 x_1 为正实数.
(1) 用 x_n 表示 x_{n+1};
(2) 若 $x_1=4$, 记 $a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列, 并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
(3) 若 $x_1=4$, $b_n=x_n-2$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 证明 $T_n<3$.

2007 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant -1, \\ x+y\geqslant 1, \\ 3x-y\leqslant 3, \end{cases}$ 则目标函数 $z=4x+y$ 的最大值为 ( )

(A) 4 (B) 11 (C) 12 (D) 14

3. "$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$"是"$\tan\theta=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则此双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{24}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{48}-\dfrac{y^2}{96}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2y^2}{3}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$

5. 函数 $y=\log_2(\sqrt{x+4}+2)\ (x>0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=4^x-2^{x+1}\ (x>2)$ (B) $y=4^x-2^{x+1}\ (x>1)$

(C) $y=4^x-2^{x+2}\ (x>2)$ (D) $y=4^x-2^{x+2}\ (x>1)$

6. 设 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面. 下列四个命题中, 正确的命题是( )

(A) 若 a, b 与 α 所成的角相等, 则 $a\parallel b$

(B) 若 $a\parallel\alpha, b\parallel\beta, \alpha\parallel\beta$, 则 $a\parallel b$

(C) 若 $a\subset\alpha, b\subset\beta, a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(D) 若 $a\perp\alpha, b\perp\beta, \alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$

7. 在 $\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)=f(2-x)$. 若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数, 则 $f(x)$ ( )

(A) 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数, 在区间 $[3,4]$ 上是增函数

(B) 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数, 在区间 $[3,4]$ 上是减函数

(C) 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数, 在区间 $[3,4]$ 上是增函数

(D) 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数, 在区间 $[3,4]$ 上是减函数

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, $a_1=9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项, 则 $k=$ ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 设 a, b, c 均为正数, 且 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$. 则( )

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $b<a<c$

10. 设两个向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+2, \lambda^2-\cos^2\alpha)$ 和 $\boldsymbol{b}=\left(m, \dfrac{m}{2}+\sin\alpha\right)$, 其中 λ, m, α 为实数. 若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$, 则 $\dfrac{\lambda}{m}$ 的取值范围是 ( )

(A) $[-6,1]$ (B) $[4,8]$ (C) $(-\infty,1]$ (D) $[-1,6]$

二、填空题

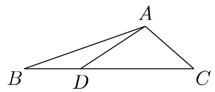
11. 若 $\left(x^2+\dfrac{1}{ax}\right)^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{5}{2}$, 则 $a=$______. (用数字作答)

12. 一个长方体的各顶点均在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为______.

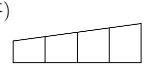
13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 是 2, 前 n 项的和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-n^2}{S_n}=$______.

14. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是______.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=120^\circ$, $AB=2AC=1$, D 是边 BC 上一点, $DC=2BD$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.



16. 如图, 用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色, 每个格子涂一种颜色. 要求最多使用 3 种颜色且相邻的两个格子颜色不同, 则不同的涂色方法共有______种. (用数字作答)



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值和最大值.

18. 已知甲盒内有大小相同的 1 个红球和 3 个黑球, 乙盒内有大小相同的 2 个红球和 4 个黑球. 现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

(1) 求取出的 4 个球均为黑球的概率;

(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率;

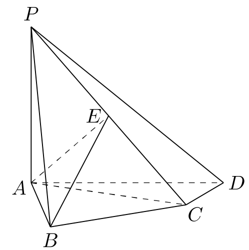
(3) 设 ξ 为取出的 4 个球中红球的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AD$, $AC\perp CD$, $\angle ABC=60^\circ$, $PA=AB=BC$, E 是 PC 的中点.

(1) 证明 $CD\perp AE$;

(2) 证明 $PD\perp$ 平面 ABE;

(3) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2ax-a^2+1}{x^2+1}$ $(x\in\mathbf{R})$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a\neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 $\lambda>0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(3) 证明存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立.

22. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, A 是椭圆上的一点, $AF_2\perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$.

(1) 证明 $a=\sqrt{2}b$;

(2) 设 Q_1, Q_2 为椭圆上的两个动点, $OQ_1\perp OQ_2$, 过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD, 垂足为 D, 求点 D 的轨迹方程.

2007 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $S=\{x\in\mathbf{R}\mid x+1\geqslant 2\}$, $T=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, 则 $S\cap T=$ ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{1,\ 2\}$ (C) $\{0,\ 1,\ 2\}$ (D) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1,\\ x+y\leqslant 4,\\ y\geqslant 2,\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+4y$ 的最大值为 ( )

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14

3. "$a=2$"是"直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 设 $a=\log_{\frac{1}{2}}3$, $b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.2}$, $c=2^{\frac{1}{3}}$, 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $b<a<c$

5. 函数 $y=\log_2(x+4)\ (x>0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=2^x+4\ (x>2)$ (B) $y=2^x+4\ (x>0)$

(C) $y=2^x-4\ (x>2)$ (D) $y=2^x-4\ (x>0)$

6. 设 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面. 下列四个命题中, 正确的命题是( )

(A) 若 a, b 与 α 所成的角相等, 则 $a\parallel b$

(B) 若 $a\parallel\alpha, b\parallel\beta, \alpha\parallel\beta$, 则 $a\parallel b$

(C) 若 $a\subset\alpha, b\subset\beta, a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(D) 若 $a\perp\alpha, b\perp\beta, \alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$

7. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则此双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{24}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{48}-\dfrac{y^2}{96}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2y^2}{3}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, $a_1=9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项, 则 $k=$ ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 设函数 $f(x)=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|\ (x\in\mathbf{R})$, 则 $f(x)$ ( )

(A) 在区间 $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$ 上是增函数 (B) 在区间 $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数

(C) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数 (D) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上是减函数

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^2$. 若对任意的 $x\in[t, t+2]$, 不等式 $f(x+t)\geqslant 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是( )

(A) $\left[\sqrt{2}, +\infty\right)$ (B) $[2, +\infty)$

(C) $(0, 2]$ (D) $\left[-\sqrt{2}, -1\right]\cup\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

二、填空题

11. 从一堆苹果中任取了 20 只, 并得到它们的质量 (单位: 克) 数据分布表如下:

分组	[90, 100)	[100, 110)	[110, 120)	[120, 130)	[130140)	[140, 150)
频数	1	2	3	10	3	1

则这堆苹果中, 质量不小于 120 克的苹果数约占苹果总数的______%.

12. $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$ 的二项展开式中常数项是______. (用数字作答)

13. 一个长方体的各顶点均在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为______.

14. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是______.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=3$, D 是边 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

16. 如图, 用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色, 每个格子涂一种颜色. 要求相邻的两个格子颜色不同, 且两端的格子的颜色也不同, 则不同的涂色方法共有______种. (用数字作答)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC=2$, $BC=3$, $\cos A=-\dfrac{4}{5}$.

(1) 求 $\sin B$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

18. 已知甲盒内有大小相同的 3 个红球和 4 个黑球, 乙盒内有大小相同的 5 个红球和 4 个黑球. 现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

(1) 求取出的 4 个球均为红球的概率;

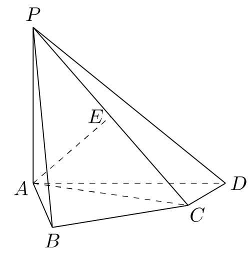
(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率;

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AD$, $AC\perp CD$, $\angle ABC=60^\circ$, $PA=AB=BC$, E 是 PC 的中点.

(1) 求 PB 和平面 PAD 所成的角的大小;

(2) 证明 $AE\perp$ 平面 PCD;

(3) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=4a_n-3n+1$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 证明数列 $\{a_n-n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;
(3) 证明不等式 $S_{n+1}\leqslant 4S_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 皆成立.

21. 设函数 $f(x)=-x(x-a)^2$ $(x\in\mathbf{R})$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;
(2) 当 $a\neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极大值和极小值;
(3) 当 $a>3$ 时, 证明存在 $k\in[-1,0]$, 使得不等式 $f(k-\cos x)\geqslant f(k^2-\cos^2 x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

22. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, A 是椭圆上的一点, $AF_2\perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$.
(1) 证明 $a=\sqrt{2}b$;
(2) 求 $t\in(0,b)$ 使得下述命题成立: 设圆 $x^2+y^2=t^2$ 上任意点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线交椭圆于 Q_1, Q_2 两点, 则 $OQ_1\perp OQ_2$.

2007 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

一、选择题

1. "$x>1$" 是 "$x^2>x$" 的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

2. 若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$) 的最小正周期是 π, 且 $f(0)=\sqrt{3}$, 则 ( )

(A) $\omega=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\omega=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

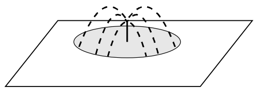
(C) $\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　(D) $\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

3. 直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是 ( )

(A) $x+2y-1=0$　(B) $2x+y-1=0$

(C) $2x+y-3=0$　(D) $x+2y-3=0$

4. 要在边长为 16 米的正方形草坪上安装喷水龙头, 使整个草坪都能喷洒到水. 假设每个喷水龙头的喷洒范围都是半径为 6 米的圆面, 则需安装这种喷水龙头的个数最少是 ( )



(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$, $P(\xi\leqslant 4)=0.84$, 则 $P(\xi\leqslant 0)=$ ( )

(A) 0.16　(B) 0.32　(C) 0.68　(D) 0.84

6. 若 P 是两条异面直线 l, m 外的任意一点, 则 ( )

(A) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都平行

(B) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都垂直

(C) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都相交

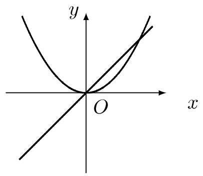
(D) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都异面

7. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$, 则 ( )

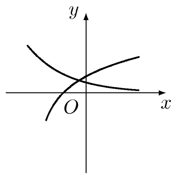
(A) $|2\boldsymbol{a}|>|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　(B) $|2\boldsymbol{a}|<|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

(C) $|2\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$　(D) $|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$

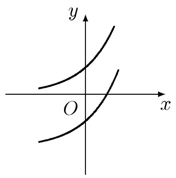
8. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 将 $y=f(x)$ 和 $y=f'(x)$ 的图象画在同一个直角坐标系中, 不可能正确的是 ( )



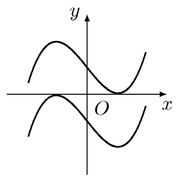
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, P 是准线上一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=4ab$, 则双曲线的离心率是( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 3

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\geqslant 1,\\ x, & |x|<1,\end{cases}$ 若 $f(g(x))$ 的值域是 $[0,+\infty)$, 则函数 $g(x)$ 的值域是 ( )

(A) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　(B) $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

(C) $[0,+\infty)$　(D) $[1,+\infty)$

二、填空题

11. 已知复数 $z_1=1-\mathrm{i}$, $z_1\cdot z_2=1+\mathrm{i}$, 则复数 $z_2=$______.

12. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$, 且 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$, 则 $\cos 2\theta$ 的值是______.

13. 不等式 $|2x-1|-x<1$ 的解集是______.

14. 某书店有 11 种杂志, 2 元 1 本的 8 种, 1 元 1 本的 3 种. 小张用 10 元钱买杂志 (每种至多买一本, 10 元钱刚好用完), 则不同买法的种数是______. (用数字作答)

15. 随机变量 ξ 的分布列如下:

ξ	-1	0	1
P	a	b	c

其中 a, b, c 成等差数列. 若 $E\xi=\dfrac{1}{3}$. 则 $D\xi$ 的值是______.

16. 已知点 O 在二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的棱上, 点 P 在 α 内, 且 $\angle POB=45^\circ$. 若对于 β 内异于 O 的任意一点 Q, 都有 $\angle POQ\geqslant 45^\circ$, 则二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小是______.

17. 设 m 为实数, 若 $\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x-2y+5\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0,\\ mx+y\geqslant 0.\end{cases}\right\}\subseteq\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$, 则 m 的取值范围是______.

三、解答题

18. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2}+1$, 且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

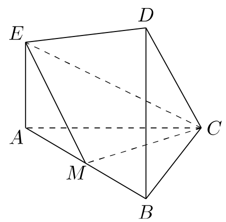
(1) 求边 AB 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{6}\sin C$, 求角 C 的度数.

19. 在如图所示的几何体中, $EA\perp$ 平面 ABC, $DB\perp$ 平面 ABC, $AC\perp BC$, 且 $AC=BC=BD=2AE$, M 是 AB 的中点.

(1) 求证: $CM\perp EM$;

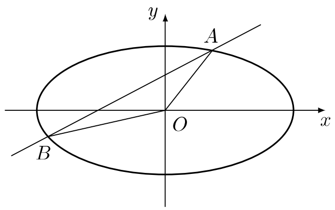
(2) 求 CM 与平面 CDE 所成的角.



20. 如图, 直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A, B 两点, 记 $\triangle AOB$ 的面积为 S.

(1) 求在 $k=0$, $0<b<1$ 的条件下, S 的最大值;

(2) 当 $|AB|=2$, $S=1$ 时, 求直线 AB 的方程.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}, a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot 2^k=0$ 的两个根, 且 $a_{2k-1}\leqslant a_{2k}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$.

(1) 求 a_1, a_3, a_5, a_7;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n};

(3) 记 $f(n)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|\sin n|}{\sin n}+3\right)$, $T_n=\dfrac{(-1)^{f(2)}}{a_1a_2}+\dfrac{(-1)^{f(3)}}{a_3a_4}+\dfrac{(-1)^{f(4)}}{a_5a_6}+\cdots+\dfrac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$, 求证: $\dfrac{1}{6}\leqslant T_n\leqslant\dfrac{5}{24}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

22. 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$, 对任意实数 t, 记 $g_t(x)=t^{\frac{2}{3}}x-\dfrac{2}{3}t$.

(1) 求函数 $y=f(x)-g_8(x)$ 的单调区间;

(2) 求证:

① 当 $x>0$ 时, $f(x)\geqslant g_t(x)$ 对任意实数 t 成立;

② 有且仅有一个正实数 x_0, 使得 $g_8(x_0)\geqslant g_t(x_0)$ 对任意实数 t 成立.

2007 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8\}$, $A=\{1,\ 6\}$, $B=\{5,\ 6,\ 8\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$( )

(A) $\{6\}$　(B) $\{5,\ 8\}$　(C) $\{6,\ 8\}$　(D) $\{3,\ 5,\ 6,\ 8\}$

2. 已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\tan\varphi=$ ( )

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{3}$

3. "$x>1$" 是 "$x^2>x$" 的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

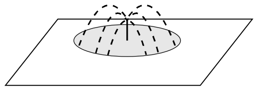
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是 ( )

(A) $x+2y-1=0$　(B) $2x+y-1=0$

(C) $2x+y-3=0$　(D) $x+2y-3=0$

5. 要在边长为 16 米的正方形草坪上安装喷水龙头, 使整个草坪都能喷洒到水. 假设每个喷水龙头的喷洒范围都是半径为 6 米的圆面, 则需安装这种喷水龙头的个数最少是 ( )



(A) 6　(B) 5　(C) 4　(D) 3

6. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^9$ 展开式中的常数项是 ( )

(A) -36　(B) 36　(C) -84　(D) 84

7. 若 P 是两条异面直线 l, m 外的任意一点, 则 ( )

(A) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都平行

(B) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都垂直

(C) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都相交

(D) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都异面

8. 甲, 乙两人进行乒乓球比赛, 比赛规则为"3 局 2 胜", 即以先赢 2 局者为胜. 根据经验, 每局比赛中甲获胜的概率为 0.6, 则本次比赛甲获胜的概率是 ( )

(A) 0.216　(B) 0.36　(C) 0.432　(D) 0.648

9. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$, 则 ( )

(A) $|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$　(B) $|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$

(C) $|2\boldsymbol{a}|>|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　(D) $|2\boldsymbol{a}|<|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, P 是准线上一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=4ab$, 则双曲线的离心率是( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 3

二、填空题

11. 函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的值域是______.

12. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$, 则 $\sin 2\theta$ 的值是______.

13. 某校有学生 2000 人, 其中高三学生 500 人. 为了解学生的身体素质情况, 采用按年级分层抽样的方法, 从该校学生中抽取一个 200 人的样本. 则样本中高三学生的人数为______.

14. $z=2x+y$ 中的 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y+5\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 z 的最小值是______.

15. 曲线 $y=x^3-2x^2-4x+2$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是______.

16. 某书店有 11 种杂志, 2 元 1 本的 8 种, 1 元 1 本的 3 种. 小张用 10 元钱买杂志 (每种至多买一本, 10 元钱刚好用完), 则不同买法的种数是______. (用数字作答)

17. 已知点 O 在二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的棱上, 点 P 在 α 内, 且 $\angle POB=45^\circ$. 若对于 β 内异于 O 的任意一点 Q, 都有 $\angle POQ\geqslant 45^\circ$, 则二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小是______.

三、解答题

18. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2}+1$, 且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1) 求边 AB 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{6}\sin C$, 求角 C 的度数.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}, a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot 2^k=0$ 的两个根, 且 $a_{2k-1}\leqslant a_{2k}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

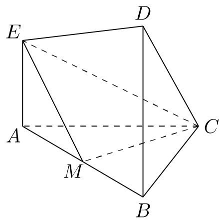
(1) 求 a_1, a_3, a_5, a_7 及 a_{2n} $(n\geqslant 4)$ (不必证明);

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

20. 在如图所示的几何体中, $EA\perp$ 平面 ABC, $DB\perp$ 平面 ABC, $AC\perp BC$, 且 $AC=BC=BD=2AE$, M 是 AB 的中点.

(1) 求证: $CM\perp EM$;

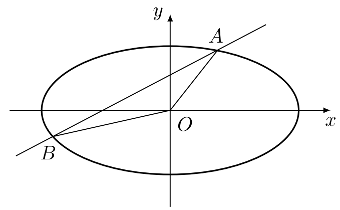
(2) 求 DE 与平面 EMC 所成角的正切值.



21. 如图, 直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A, B 两点, 记 $\triangle AOB$ 的面积为 S.

(1) 求在 $k=0$, $0<b<1$ 的条件下, S 的最大值;

(2) 当 $|AB|=2$, $S=1$ 时, 求直线 AB 的方程.



22. 已知 $f(x)=|x^2-1|+x^2+kx$.

(1) 若 $k=2$, 求方程 $f(x)=0$ 的解;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 在 $(0,2)$ 上有两个解 x_1, x_2, 求 k 的取值范围, 并证明 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<4$.