2021 年普通高等学校招生全国统一考试理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设$2(z+\overline{z})+3(z-\overline{z})=4+6i$，则$z=$（　　）

A. $1-2i$　　B. $1+2i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

2. 已知集合$S=\{s|s=2n+1,n\in Z\}$，$T=\{t|t=4n+1,n\in Z\}$，则$S\cap T=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. S　　C. T　　D. Z

3. 已知命题$p:\exists x\in R,\sin x<1$；命题$q:\forall x\in R$，$e^{|x|}\geq 1$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$

C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg(p\vee q)$

4. 设函数$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

5. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为B_1D_1的中点，则直线PB与AD_1所成的角为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）

A. 60 种　　B. 120 种　　C. 240 种　　D. 480 种

7. 把函数$y=f(x)$图像上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图像，则$f(x)=$（　　）

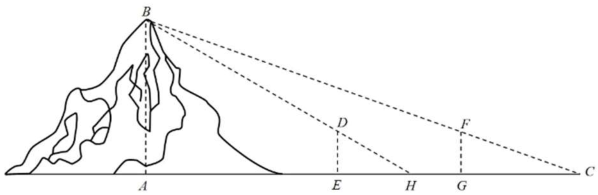
A. $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7x}{12}\right)$　　B. $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$

8. 在区间$(0,1)$与$(1,2)$中各随机取 1 个数，则两数之和大于$\frac{7}{4}$的概率为（　　）

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{23}{32}$　　C. $\frac{9}{32}$　　D. $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高．如图，点E，H，G在水平线AC上，DE和FG是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG称为“表距”，GC和EH都称为“表目距”，GC与EH的差称为“表目距的差”则海岛的高$AB=$（　　）



A. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表高$　　B. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}-表高$

C. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表距$　　D. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}-表距$

10. 设$a\neq 0$，若$x=a$为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，则（　　）

A. $a<b$　　B. $a>b$

C. $ab<a^2$　　D. $ab>a^2$

11. 设B是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点，若C上的任意一点P都满足$|PB|\leq 2b$，则C的离心率的取值范围是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　B. $\frac{1}{2},1)$

C. $0,\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $0,\frac{1}{2}$

12. 设$a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$．则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$

C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

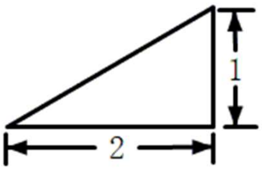
13. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+my=0$，则 C

焦距为__________.

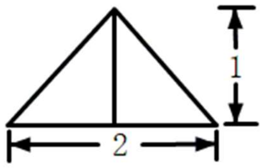
14. 已知向量$\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(3,4)$，若$(\vec{a}-\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$，则$\lambda=$___________.

15. 记$\triangle ABC$的内角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$_________.

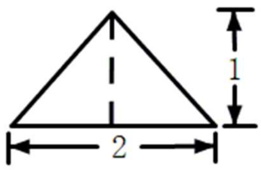
16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为__________（写出符合要求的一组答案即可）.



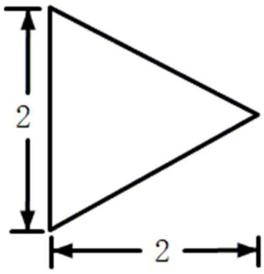
图①



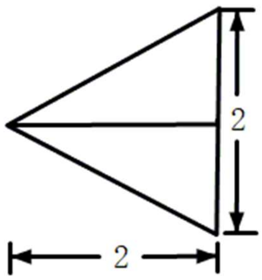
图②



图③



图④



图⑤

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

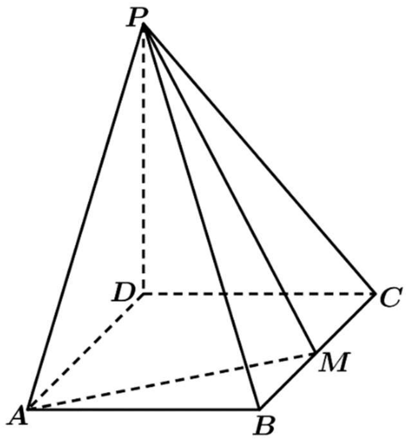
旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为$\bar{x}$和$\bar{y}$，样本方差分别记为S_1^2和S_2^2．

（1）求$\bar{x}$，$\bar{y}$，S_1^2，S_2^2；

（2）判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果$\bar{y}-\bar{x}\geq 2\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{10}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）．

18. 如图，四棱锥$P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，$PD=DC=1$，M为BC的中点，且 $PB\perp AM$.



（1）求BC；

（2）求二面角$A-PM-B$的正弦值.

19. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前 n 项积，已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

20. 设函数$f(x)=ln(a-x)$，已知$x=0$是函数$y=xf(x)$的极值点.

（1）求 a；

（2）设函数$g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}$. 证明:$g(x)<1$.

21. 已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，且F与圆$M:x^2+(y+4)^2=1$上点的距离的最小值为4.

（1）求p；

（2）若点P在M上，PA,PB是C的两条切线，A,B是切点，求$\triangle PAB$面积的最大值.

（二）选考题，共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．在直角坐标系xOy中，$\odot C$的圆心为$C(2,1)$，半径为 1．

（1）写出$\odot C$ 的一个参数方程；

（2）过点$F(4,1)$作$\odot C$的两条切线．以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程．

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23. 已知函数$f(x)=|x-a|+|x+3|$.

（1）当 $a=1$时，求不等式$f(x)\geq 6$的解集；

（2）若$f(x)>-a$，求 a 的取值范围．