2021年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

一、选择题:本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$M=\{1,2\},N=\{3,4\}$，则$\complement_U(M\cup N)=$（　　）

A. $\{5\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先进行并集运算，然后进行补集运算即可.

【详解】由题意可得：$M\cup N=\{1,2,3,4\}$，则$\complement_U\left(M\cup N\right)=\{5\}$.

故选：A.

2. 设$\mathrm{i}z=4+3\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

A. $-3-4\mathrm{i}$　　B. $-3+4\mathrm{i}$　　C. $3-4\mathrm{i}$　　D. $3+4\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意结合复数的运算法则即可求得z的值.

【详解】由题意可得：$z=\dfrac{4+3i}{i}=\dfrac{\left(4+3i\right)i}{i^2}=\dfrac{4i-3}{-1}=3-4i$.

故选：C.

3. 已知命题$p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x<1$；命题$q:\forall x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^{|x|}\geq 1$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg\left(p\vee q\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】由正弦函数的有界性确定命题p的真假性，由指数函数的知识确定命题q的真假性，由此确定正确选项.

【详解】由于$\sin 0=0$，所以命题p为真命题；

由于$y=e^x$在R上为增函数，$|x|\geq 0$，所以$e^{|x|}\geq e^0=1$，所以命题q为真命题；

所以$p\wedge q$为真命题，$\neg p\wedge q$、$p\wedge\neg q$、$\neg\left(p\vee q\right)$为假命题.

故选：A．

4．函数 $f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是（　　）

A．3π 和 $\sqrt{2}$　　B．3π 和 2　　C．6π 和 $\sqrt{2}$　　D．6π 和 2

【答案】C

【解析】

【分析】利用辅助角公式化简 $f\left(x\right)$，结合三角函数周期性和值域求得函数的最小正周期和最大值.

【详解】由题，$f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{3}\right)\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2p}{\frac{1}{3}}=6p$，最大值为 $\sqrt{2}$.

故选：C．

5．若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 4,\\ x-y\leq 2,\\ y\leq 3,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最小值为（　　）

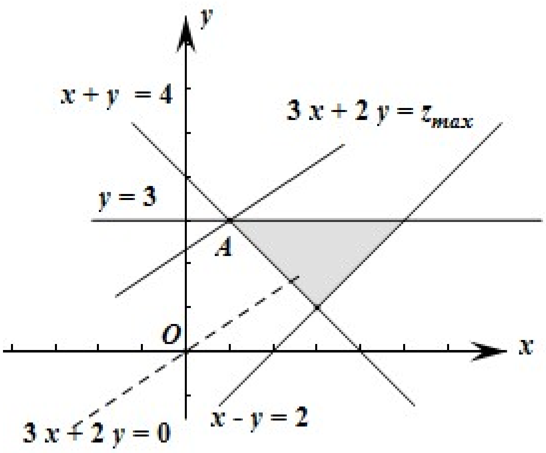
A．18　　B．10　　C．6　　D．4

【答案】C

【解析】

【分析】由题意作出可行域，变换目标函数为 $y=-3x+z$，数形结合即可得解.

【详解】由题意，作出可行域，如图阴影部分所示，



由 $\begin{cases}x+y=4\\ y=3\end{cases}$ 可得点 $A\left(1,3\right)$，

转换目标函数 $z=3x+y$ 为 $y=-3x+z$，

上下平移直线 $y=-3x+z$，数形结合可得当直线过点 A 时，z 取最小值，

此时 $z_{\min}=3\times1+3=6$.

故选：C.

6. $\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意结合诱导公式可得 $\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$，再由二倍角公式即可得解.

【详解】由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

$=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D.

7. 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 随机取 1 个数，则取到的数小于 $\frac{1}{3}$ 的概率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据几何概型的概率公式即可求出.

【详解】设 $\Omega=$ “区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 随机取 1 个数”，对应集合为：$\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\right\}$，区间长度为 $\frac{1}{2}$，

$A=$ “取到的数小于 $\frac{1}{3}$”，对应集合为：$\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{3}\right\}$，区间长度为 $\frac{1}{3}$，

所以 $P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}=\frac{\frac{1}{3}-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{2}{3}$.

故选：B.

【点睛】本题解题关键是明确事件“取到的数小于$\frac{1}{3}$”对应的范围，再根据几何概型的概率公式即可准确求出．

8. 下列函数中最小值为 4 的是（　　）

A. $y=x^2+2x+4$　　B. $y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$

C. $y=2^x+2^{2-x}$　　D. $y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数的性质可判断A选项不符合题意，再根据基本不等式“一正二定三相等”，即可得出B,D不符合题意，C符合题意．

【详解】对于 A，$y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3$，当且仅当$x=-1$时取等号，所以其最小值为$3$，A 不符合题意；

对于 B，因为$0<|\sin x|\leq 1$，$y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}\geq 2\sqrt{4}=4$，当且仅当$|\sin x|=2$时取等号，等号取不到，所以其最小值不为$4$，B 不符合题意；

对于 C，因为函数定义域为R，而$2^x>0$，$y=2^x+2^{2-x}=2^x+\frac{4}{2^x}\geq 2\sqrt{4}=4$，当且仅当$2^x=2$，即$x=1$时取等号，所以其最小值为$4$，C 符合题意；

对于 D，$y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$，函数定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，而$\ln x\in R$且$\ln x\neq 0$，如当$\ln x=-1$，$y=-5$，D 不符合题意．

故选：C．

【点睛】本题解题关键是理解基本不等式的使用条件，明确“一正二定三相等”的意义，再结合有关函数的性质即可解出．

9. 设函数$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$　　C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

【答案】B

【解析】

【分析】分别求出选项的函数解析式，再利用奇函数的定义即可.

【详解】由题意可得 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$，

对于 A，$f\left(x-1\right)-1=\dfrac{2}{x}-2$ 不是奇函数；

对于 B，$f\left(x-1\right)+1=\dfrac{2}{x}$ 是奇函数；

对于 C，$f\left(x+1\right)-1=\dfrac{2}{x+2}-2$，定义域不关于原点对称，不是奇函数；

对于 D，$f\left(x+1\right)+1=\dfrac{2}{x+2}$，定义域不关于原点对称，不是奇函数.

故选：B

【点睛】本题主要考查奇函数定义，考查学生对概念的理解，是一道容易题.

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为（　　）

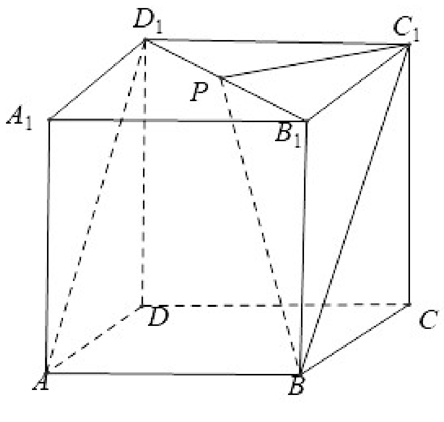
A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】平移直线 AD_1 至 BC_1，将直线 PB 与 AD_1 所成的角转化为 PB 与 BC_1 所成的角，解三角形即可.

【详解】



如图，连接 BC_1, PC_1, PB，因为 $AD_1 \parallel BC_1$，

所以 $\angle PBC_1$ 或其补角为直线 PB 与 AD_1 所成的角，

因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $BB_1\perp PC_1$，又 $PC_1\perp B_1D_1$，$BB_1\cap B_1D_1=B_1$，

所以 $PC_1 \perp$ 平面 PBB_1，所以 $PC_1 \perp PB$，

设正方体棱长为 2，则 $BC_1 = 2\sqrt{2}, PC_1 = \frac{1}{2}D_1B_1 = \sqrt{2}$，

$\sin\angle PBC_1 = \frac{PC_1}{BC_1} = \frac{1}{2}$，所以 $\angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}$.

故选：D

11．设 B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点，点 P 在 C 上，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

【答案】A

【解析】

【分析】设点 $P(x_0,y_0)$，由依题意可知，$B(0,1)$，$\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=1$，再根据两点间的距离公式得到 $|PB|^2$，然后消元，即可利用二次函数的性质求出最大值.

【详解】设点 $P(x_0,y_0)$，因为 $B(0,1)$，$\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=1$，所以

$$|PB|^2 = x_0^2+(y_0-1)^2 = 5(1-y_0^2)+(y_0-1)^2 = -4y_0^2-2y_0+6 = -4\left(y_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4},$$

而 $-1 \le y_0 \le 1$，所以当 $y_0=\frac{1}{2}$ 时，$|PB|$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

故选：A.

【点睛】本题解题关键是熟悉椭圆的简单几何性质，由两点间的距离公式，并利用消元思想以及二次函数的性质即可解出．易错点是容易误认为短轴的相对端点是椭圆上到上定点 B 最远的点，或者认为是椭圆的长轴的端点到短轴的端点距离最大，这些认识是错误的，要注意将距离的平方表示为二次函数后，自变量的取值范围是一个闭区间，而不是全体实数上求最值．.

12．设 $a \ne 0$，若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则（　　）

A．$a<b$　　B．$a>b$　　C．$ab<a^2$　　D．$ab>a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】先考虑函数的零点情况，注意零点左右附近函数值是否编号，结合极大值点的性质，

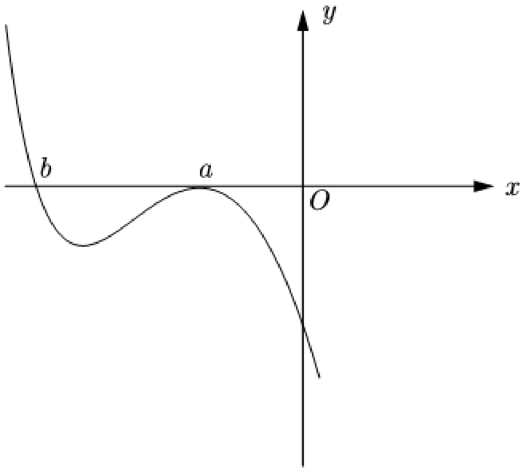
类讨论，画出 $f\left(x\right)$ 图象，即可得到 a,b 所满足的关系，由此确定正确选项.

【详解】若 $a=b$，则 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^3$ 为单调函数，无极值点，不符合题意，故 $a \neq b$.

$\therefore f\left(x\right)$ 有 $x=a$ 和 $x=b$ 两个不同零点，且在 $x=a$ 左右附近是不变号，在 $x=b$ 左右附近是变号的. 依题意，

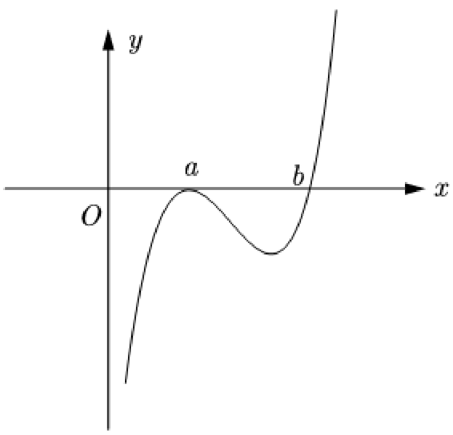
$x=a$ 为函数 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^2\left(x-b\right)$ 的极大值点，$\therefore$ 在 $x=a$ 左右附近都是小于零的.

当 $a<0$ 时，由 $x>b$，$f\left(x\right)\le 0$，画出 $f\left(x\right)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b<a$，$a<0$，故 $ab>a^2$.

当 $a>0$ 时，由 $x>b$ 时，$f\left(x\right)>0$，画出 $f\left(x\right)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b>a$，$a>0$，故 $ab>a^2$.

综上所述，$ab>a^2$ 成立.

故选：D

【点睛】本小题主要考查三次函数的图象与性质，利用数形结合的数学思想方法可以快速解答.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量$\vec{a}=(2,5),\vec{b}=(\lambda,4)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\lambda=$________.

【答案】$\dfrac{8}{5}$

【解析】

【分析】利用向量平行的充分必要条件得到关于λ的方程，解方程即可求得实数λ的值.

【详解】由题意结合向量平行的充分必要条件可得：$2\times4-\lambda\times5=0$，

解方程可得：$\lambda=\dfrac{8}{5}$.

故答案为：$\dfrac{8}{5}$.

14. 双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的右焦点到直线$x+2y-8=0$的距离为________.

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】先求出右焦点坐标，再利用点到直线的距离公式求解.

【详解】由已知，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5+4}=3$，所以双曲线的右焦点为$(3,0)$，

所以右焦点$(3,0)$到直线$x+2y-8=0$的距离为$\dfrac{|3+2\times0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$

15. 记□ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由三角形面积公式可得$ac=4$，再结合余弦定理即可得解.

【详解】由题意，$S_{\square ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，

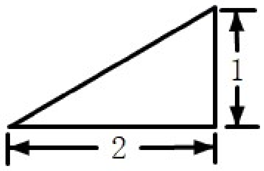
所以$ac=4,a^2+c^2=12$，

所以$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=12-2\times4\times\dfrac{1}{2}=8$，解得$b=2\sqrt{2}$（负值舍去）.

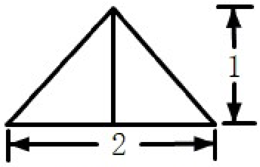
故答案为：$2\sqrt{2}$.

16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某三棱锥的三视

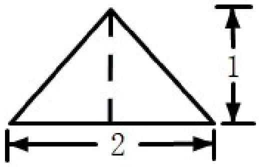
侧视图和俯视图的编号依次为__________（写出符合要求的一组答案即可）.



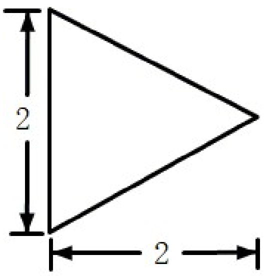
图①



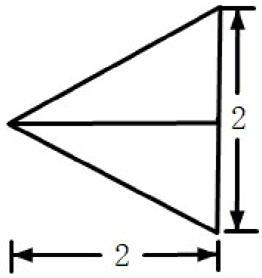
图②



图③



图④



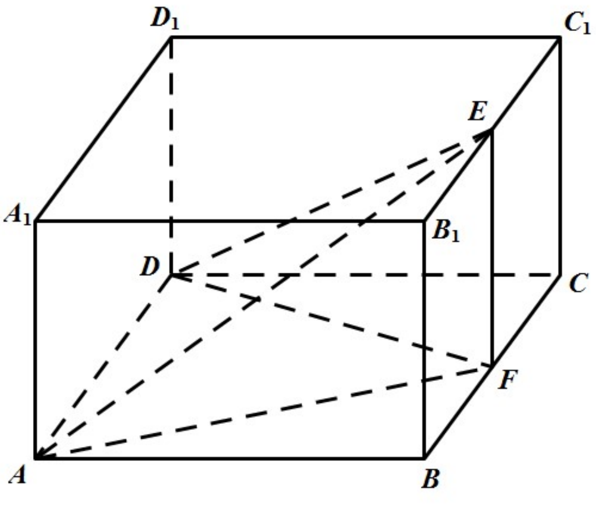
图⑤

【答案】③④（答案不唯一）

【解析】

【分析】由题意结合所给的图形确定一组三视图的组合即可.

【详解】选择侧视图为③，俯视图为④，



如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2,BB_1=1$，

E,F 分别为棱 B_1C_1,BC 的中点，

则正视图①，侧视图③，俯视图④对应的几何体为三棱锥 $E-ADF$.

故答案为：③④.

【点睛】三视图问题解决的关键之处是由三视图确定直观图的形状以及直观图中线面的位置关系和数量关系.

三、解答题．共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为$\overline{x}$和$\overline{y}$，样本方差分别记为S_1^2和S_2^2．

（1）求$\overline{x}$，$\overline{y}$，S_1^2，S_2^2；

（2）判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果$\overline{y}-\overline{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{S_1^2+S_2^2}{10}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）．

【答案】（1）$\overline{x}=10,\overline{y}=10.3,S_1^2=0.036,S_2^2=0.04$；（2）新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

【解析】

【分析】（1）根据平均数和方差的计算方法，计算出平均数和方差.

（2）根据题目所给判断依据，结合（1）的结论进行判断.

【详解】（1）$\overline{x}=\dfrac{9.8+10.3+10+10.2+9.9+9.8+10+10.1+10.2+9.7}{10}=10$，

$\overline{y}=\dfrac{10.1+10.4+10.1+10+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5}{10}=10.3$，

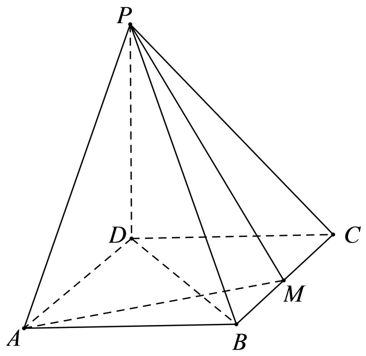
$S_1^2=\dfrac{0.2^2+0.3^2+0+0.2^2+0.1^2+0.2^2+0+0.1^2+0.2^2+0.3^2}{10}=0.036$，

$S_2^2=\dfrac{0.2^2+0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.2^2+0+0.3^2+0.2^2+0.1^2+0.2^2}{10}=0.04$.

（2）依题意，$\overline{y}-\overline{x}=0.3=2\times 0.15=2\sqrt{0.15^2}=2\sqrt{0.025}$，$2\sqrt{\dfrac{0.036+0.04}{10}}=2\sqrt{0.0076}$，

$\overline{y}-\overline{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

18. 如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，M为BC的中点，且$PB\perp$



（1）证明：平面 $PAM\perp$ 平面 PBD；

（2）若 $PD=DC=1$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

【解析】

【分析】（1）由 $PD\perp$ 底面 $ABCD$ 可得 $PD\perp AM$，又 $PB\perp AM$，由线面垂直的判定定理可得 $AM\perp$ 平面 PBD，再根据面面垂直的判定定理即可证出平面 $PAM\perp$ 平面 PBD；

（2）由（1）可知，$AM\perp BD$，由平面知识可知，$\triangle DAB\sim\triangle ABM$，由相似比可求出 AD，再根据四棱锥 $P-ABCD$ 的体积公式即可求出.

【详解】（1）因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AM\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AM$，

又 $PB\perp AM$，$PB\cap PD=P$，

所以 $AM\perp$ 平面 PBD，

而 $AM\subset$ 平面 PAM，

所以平面 $PAM\perp$ 平面 PBD.

（2）由（1）可知，$AM\perp$ 平面 PBD，所以 $AM\perp BD$，

从而 $\triangle DAB\sim\triangle ABM$，设 $BM=x$，$AD=2x$，

则 $\dfrac{BM}{AB}=\dfrac{AB}{AD}$，即 $2x^2=1$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $AD=\sqrt{2}$.

因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，

故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times\left(1\times\sqrt{2}\right)\times 1=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】本题第一问解题关键是找到平面 PAM 或平面 PBD 的垂线，结合题目条件 $PB\perp AM$，所以垂线可以从 PB,AM 中产生，稍加分析即可判断出 $AM\perp$ 平面 PBD，从而证出；第二问关键是底

的计算，利用第一问的结论结合平面几何知识可得出$\triangle DAB \sim \triangle ABM$，从而求出矩形的另一个边长，从而求得该四棱锥的体积．

19．设$\{a_n\}$是首项为1的等比数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{na_n}{3}$．已知a_1，$3a_2$，$9a_3$成等差数列．

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记S_n和T_n分别为$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和．证明：$T_n<\dfrac{S_n}{2}$．

【答案】（1）$a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}$，$b_n=\dfrac{n}{3^n}$；（2）证明见解析．

【解析】

【分析】利用等差数列的性质及a_1得到$9q^2-6q+1=0$，解方程即可；

利用公式法、错位相减法分别求出S_n,T_n，再作差比较即可．

【详解】因为$\{a_n\}$是首项为1的等比数列且a_1，$3a_2$，$9a_3$成等差数列，

所以$6a_2=a_1+9a_3$，所以$6a_1q=a_1+9a_1q^2$，

即$9q^2-6q+1=0$，解得$q=\dfrac{1}{3}$，所以$a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}$，

所以$b_n=\dfrac{na_n}{3}=\dfrac{n}{3^n}$．

（2）证明：由（1）可得$S_n=\dfrac{1\times(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})$，

$T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^{n-1}}+\dfrac{n}{3^n}$，①

$\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^n}+\dfrac{n}{3^{n+1}}$，②

①－②得$\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})-\dfrac{n}{3^{n+1}}$，

所以$T_n=\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{3^n})-\dfrac{n}{2\cdot 3^n}$，

所以$T_n-\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{3^n})-\dfrac{n}{2\cdot 3^n}-\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{3^n})=-\dfrac{n}{2\cdot 3^n}<0$，

所以$T_n<\dfrac{S_n}{2}$．

【点睛】本题主要考查数列的求和，涉及到等差数列的性质，错位相减法求数列的和，考查学生的数学运算能力，是一道中档题，其中证明不等式时采用作差法，或者作商法要根据式子得结构类型灵

键是要看如何消项化简的更为简洁.

20. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为2.

（1）求C的方程;

（2）已知O为坐标原点，点P在C上，点Q满足$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$，求直线$OQ$斜率的最大值.

【答案】（1）$y^2=4x$；（2）最大值为$\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】（1）由抛物线焦点与准线的距离即可得解;

（2）设$Q\left(x_0,y_0\right)$，由平面向量的知识可得$P\left(10x_0-9,10y_0\right)$，进而可得$x_0=\frac{25y_0^2+9}{10}$，再由斜率公式及基本不等式即可得解.

【详解】（1）抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，

由题意，该抛物线焦点到准线的距离为$\frac{p}{2}-\left(-\frac{p}{2}\right)=p=2$，

所以该抛物线的方程为$y^2=4x$；

（2）设$Q\left(x_0,y_0\right)$，则$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}=\left(9-9x_0,-9y_0\right)$，

所以$P\left(10x_0-9,10y_0\right)$，

由P在抛物线上可得$\left(10y_0\right)^2=4\left(10x_0-9\right)$，即$x_0=\frac{25y_0^2+9}{10}$，

所以直线OQ的斜率$k_{OQ}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_0}{\frac{25y_0^2+9}{10}}=\frac{10y_0}{25y_0^2+9}$，

当$y_0=0$时，$k_{OQ}=0$；

当$y_0\neq0$时，$k_{OQ}=\frac{10}{25y_0+\frac{9}{y_0}}$，

当$y_0>0$时，因为$25y_0+\frac{9}{y_0}\geq2\sqrt{25y_0\cdot\frac{9}{y_0}}=30$，

此时 $0<k_{OQ}\le\frac{1}{3}$，当且仅当 $25y_0=\frac{9}{y_0}$，即 $y_0=\frac{3}{5}$ 时，等号成立；

当 $y_0<0$ 时，$k_{OQ}<0$；

综上，直线 OQ 的斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用平面向量的知识求得点 Q 坐标的关系，在求斜率的最值时要注意对 y_0 取值范围的讨论.

21. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f\left(x\right)$ 的公共点的坐标.

【答案】(1)答案见解析；(2) $\left(1,a+1\right)$ 和 $\left(-1,-1-a\right)$.

【解析】

【分析】(1)首先求得导函数的解析式，然后分类讨论导函数的符号即可确定原函数的单调性；

(2)首先求得导数过坐标原点的切线方程，然后将原问题转化为方程求解的问题，据此即可求得公共点坐标.

【详解】(1)由函数的解析式可得：$f'\left(x\right)=3x^2-2x+a$，

导函数的判别式 $\Delta=4-12a$，

当 $\Delta=4-12a\le 0, a\ge\frac{1}{3}$ 时，$f'\left(x\right)\ge 0, f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增，

当 $\Delta=4-12a>0, a<\frac{1}{3}$ 时，$f'\left(x\right)=0$ 的解为：$x_1=\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}, x_2=\frac{1+\sqrt{1-3a}}{2}$，

当 $x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0, f\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0, f\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0, f\left(x\right)$ 单调递增；

综上可得：当 $a\ge\frac{1}{3}$ 时，$f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增，

当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}\right)$，$\left(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty\right)$ 上

单调递增，在$\left[\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}\right]$上单调递减.

(2)由题意可得：$f\left(x_0\right)=x_0^3-x_0^2+ax_0+1$，$f'\left(x_0\right)=3x_0^2-2x_0+a$，

则切线方程为：$y-\left(x_0^3-x_0^2+ax_0+1\right)=\left(3x_0^2-2x_0+a\right)\left(x-x_0\right)$，

切线过坐标原点，则：$0-\left(x_0^3-x_0^2+ax_0+1\right)=\left(3x_0^2-2x_0+a\right)\left(0-x_0\right)$,

整理可得：$2x_0^3-x_0^2-1=0$，即：$\left(x_0-1\right)\left(2x_0^2+x_0+1\right)=0$，

解得：$x_0=1$，则$f\left(x_0\right)=f\left(1\right)=1-1+a+1=a+1$，$f'(x_0)=f'\left(1\right)=1+a$

切线方程为：$y=\left(a+1\right)x$，

与$f(x)=x^3-x^2+ax+1$联立得$x^3-x^2+ax+1=(a+1)x$，

化简得$x^3-x^2-x+1=0$，由于切点的横坐标 1 必然是该方程的一个根，$\therefore\left(x-1\right)$是$x^3-x^2-x+1$的一个因式，$\therefore$该方程可以分解因式为$\left(x-1\right)\left(x^2-1\right)=0$,

解得$x_1=1,x_2=-1$,

$f\left(-1\right)=-1-a$，

综上，曲线$y=f\left(x\right)$过坐标原点的切线与曲线$y=f\left(x\right)$的公共点的坐标为$\left(1,a+1\right)$和$\left(-1,-1-a\right)$.

【点睛】本题考查利用导数研究含有参数的函数的单调性问题，和过曲线外一点所做曲线的切线问题，注意单调性研究中对导函数，要依据其零点的不同情况进行分类讨论；再求切线与函数曲线的公共点坐标时，要注意除了已经求出的切点，还可能有另外的公共点(交点)，要通过联立方程求解，其中得到三次方程求解时要注意其中有一个实数根是求出的切点的横坐标，这样就容易通过分解因式求另一个根.三次方程时高考压轴题中的常见问题，不必恐惧，一般都能容易找到其中一个根，然后在通过分解因式的方法求其余的根.

（二）选考题:共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做．则按所做的第一题计分．

[选修 4-4:坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系xOy中，⊙C的圆心为$C\left(2,1\right)$，半径为 1.

（1）写出⊙C的一个参数方程;

（2）过点$F\left(4,1\right)$作⊙C的两条切线．以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，

线的极坐标方程.

【答案】(1) $\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）;（2） $2\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})=4-\sqrt{3}$ 或 $2\rho\cos(\theta-\dfrac{\pi}{3})=4+\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】(1）直接利用圆心及半径可得的圆的参数方程;

（2）先求得过（4，1）的圆的切线方程，再利用极坐标与直角坐标互化公式化简即可.

【详解】(1）由题意，□ C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$，

所以□ C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）

（2）由题意，切线的斜率一定存在，设切线方程为 $y-1=k(x-4)$，即 $kx-y+1-4k=0$，

由圆心到直线的距离等于 1 可得 $\dfrac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以切线方程为 $\sqrt{3}x-3y+3-4\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x+3y-3-4\sqrt{3}=0$，

将 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$ 代入化简得

$2\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})=4-\sqrt{3}$ 或 $2\rho\cos(\theta-\dfrac{\pi}{3})=4+\sqrt{3}$

【点睛】本题主要考查直角坐标方程与极坐标方程的互化，涉及到直线与圆的位置关系，考查学生的数学运算能力，是一道基础题.

[选修 4—5:不等式选讲]

23. 已知函数 $f\left(x\right)=\left|x-a\right|+\left|x+3\right|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f\left(x\right)\geq 6$ 的解集;

（2）若 $f\left(x\right)>-a$，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left(-\infty,-4\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.（2） $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

【解析】

【分析】(1）利用绝对值的几何意义求得不等式的解集.

（2）利用绝对值不等式化简 $f\left(x\right)>-a$，由此求得 a 的取值范围.

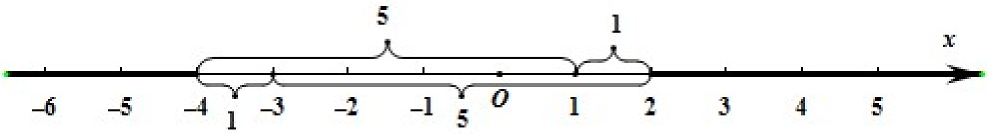
【详解】(1）当 $a=1$ 时， $f\left(x\right)=\left|x-1\right|+\left|x+3\right|$， $\left|x-1\right|+\left|x+3\right|$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距

则 $f\left(x\right)\geq 6$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和不小于 6，

当 $x=-4$ 或 $x=2$ 时所对应的数轴上的点到 $1,-3$ 所对应的点距离之和等于 6，

$\therefore$ 数轴上到 $1,-3$ 所对应的点距离之和等于大于等于 6 得到所对应的坐标的范围是 $x\leq -4$ 或 $x\geq 2$，

所以 $f\left(x\right)\geq 6$ 的解集为 $\left(-\infty,-4\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.



（2）依题意 $f\left(x\right)>-a$，即 $\left|x-a\right|+\left|x+3\right|>-a$ 恒成立，

$\left|x-a\right|+\left|x+3\right|=\left|a-x\right|+\left|x+3\right|\geq\left|a+3\right|$，

当且仅当 $\left(a-x\right)\left(x+3\right)\geq 0$ 时取等号，$\therefore f\left(x\right)_{min}=\left|a+3\right|$，

故 $\left|a+3\right|>-a$，

所以 $a+3>-a$ 或 $a+3<a$，

解得 $a>-\dfrac{3}{2}$.

所以 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

【点睛】解绝对值不等式的方法有零点分段法、几何意义法．解含有两个绝对值，且其中的 x 的系数相等时，可以考虑利用数轴上绝对值的几何意义求解；利用绝对值三角不等式求最值也是常见的问题，注意表述取等号的条件.