

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

天津卷 · 数学

第 I 卷

注意事项:

1. 每小题选出答案后,用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。

2. 本卷共 9 小题,每小题 5 分,共 45 分

参考公式:

•如果事件 A 、 B 互斥,那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

•如果事件 A 、 B 相互独立,那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

•球的体积公式 $V = \frac{1}{3}\pi R^3$, 其中 R 表示球的半径。

•圆锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 表示圆锥的底面面积, h 表示圆锥的高。

一、选择题: 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

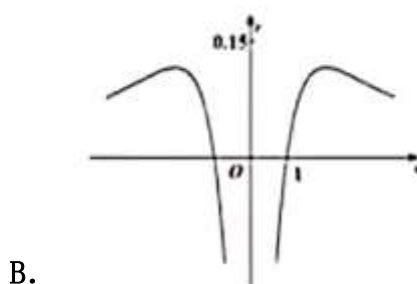
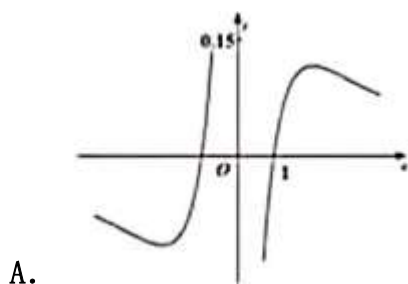
1. 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$ ()

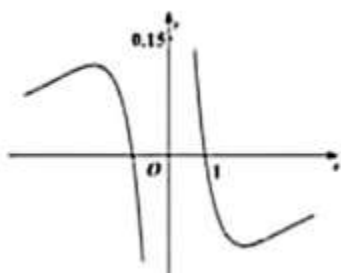
A. $\{0\}$ B. $\{0, 1, 3, 5\}$ C. $\{0, 1, 2, 4\}$ D. $\{0, 2, 3, 4\}$

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 6$ ” 是 “ $a^2 > 36$ ” 的 ()

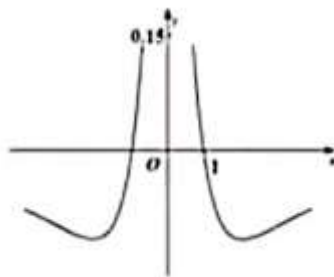
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的图像大致为 ()



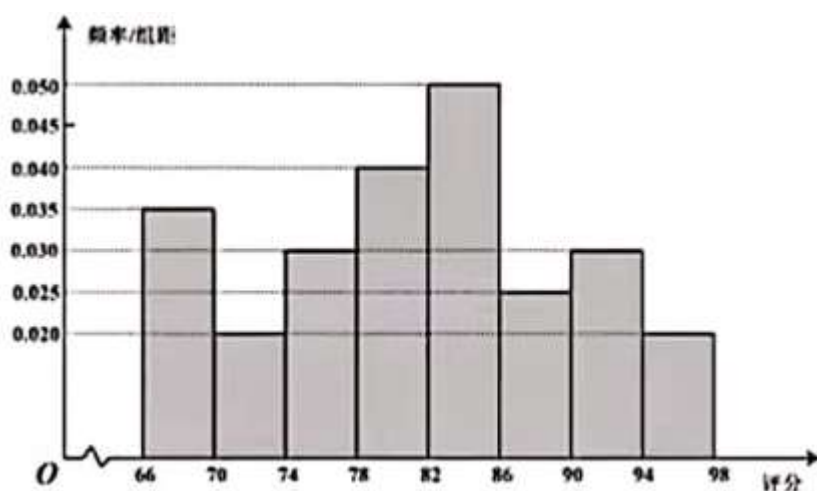


C.



D.

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取 400 部, 统计其评分数据, 将所得 400 个评分数据分为 8 组: $[66, 70), [70, 74), \dots, [94, 98]$, 并整理得到如下的频率分布直方图, 则评分在区间 $[82, 86)$ 内的影视作品数量是 ()



A. 20 B. 40 C. 64 D. 80

5. 设 $a = \log_2 0.3, b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4, c = 0.4^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面, 顶点均在球面上, 若球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 两个圆锥的高之比为 1:3, 则这两个圆锥的体积之和为 ()

A. 3π B. 4π C. 9π D. 12π

7. 若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ ()

A. -1 B. $\lg 7$ C. 1 D. $\log_7 10$

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合, 抛物线的准线交双曲线于 A, B 两点, 交双曲线的渐近线于 C, D 两点, 若 $|CD| = \sqrt{2}|AB|$. 则双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3



9. 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有 6 个零点,

则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$ B. $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$ C. $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$ D. $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试 (天津卷)

数学

第 II 卷

注意事项

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2. 本卷共 11 小题, 共 105 分.

二、填空题, 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 试题中包含两个空的, 答对 1 个的给 3 分, 全部答对的给 5 分.

10. i 是虚数单位, 复数 $\frac{9+2i}{2+i} =$ _____.

11. 在 $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^6 的系数是 _____.

12. 若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 y 轴交于点 A , 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切于点 B , 则 $|AB| =$ _____.

13. 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为 _____.

14. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语, 若一方猜对且另一方猜错, 则猜对的一方获胜, 否则本次平局. 已知每次活动中, 甲、乙猜对的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{1}{5}$, 且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响, 各次活动也互不影响, 则一次活动中, 甲获胜的概率为 _____; 3 次活动中, 甲至少获胜 2 次的概率为 _____.

15. 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中, D 为线段 BC 上的动点, $DE \perp AB$ 且交 AB 于点 E . $DF \parallel AB$ 且交 AC 于点 F , 则 $|2\overline{BE} + \overline{DF}|$ 的值为 _____; $(\overline{DE} + \overline{DF}) \cdot \overline{DA}$ 的最小值为 _____.

三、解答题, 本大题共 5 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.



16. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$.

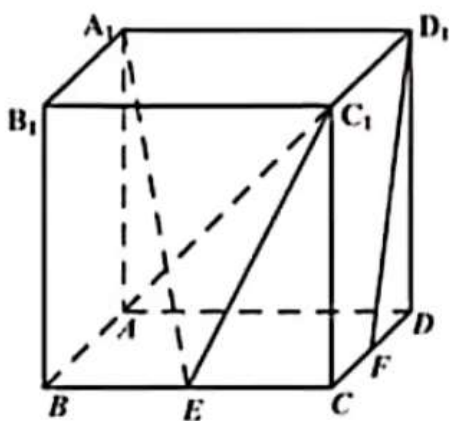
(I) 求 a 的值;

(II) 求 $\cos C$ 的值;

(III) 求 $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. (本小题满分 15 分)

如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 BC 的中点, F 为棱 CD 的中点.



(I) 求证: $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 ;

(II) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值.

(III) 求二面角 $A - A_1C_1 - E$ 的正弦值.

18. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F , 上顶点为 B , 离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 且 $|BF| = \sqrt{5}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M , 与 y 轴的正半轴交于点 N , 过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P . 若 $MP \parallel BF$, 求直线 l 的方程.

19. (本小题满分 15 分)

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项和为 64. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列,

$$b_1 = 4, b_3 - b_2 = 48.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;



(II) 记 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in N^*$.

(i) 证明 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2} (n \in N^*)$

20. (本小题满分 16 分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - xe^x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 证明 $f(x)$ 存在唯一的极值点

(III) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

