

2024 新高考 2 卷真题卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知 $z = -1 - i$, 则 $|z| = (\quad)$

- A.0 B.1 C. $\sqrt{2}$ D.2

2.已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$. 则 (\quad)

- A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3.已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 2$, 且 $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{b}| = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.1

4.某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量(单位：kg)并整理得下表：

亩产量	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)
频数	6	12	18
亩产量	[1050,1100)	[1100,1150)	[1150,1200)
频数	30	24	10

根据表中数据，下列结论中正确的是 (\quad)

- A.100 块稻田亩产量的中位数小于 1050kg
B.100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%
C.100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间
D.100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16 (y > 0)$, 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' , P' 为垂足, 则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为()

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 (y > 0)$
C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 (y > 0)$ D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1 (y > 0)$

6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点. 则 $a =$ ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$, $AB = 6$, $A_1B_1 = 2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$. 若 $f(x) \geq 0$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 下列说法中正确的有()

- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点
B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值
C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期
D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上动点. 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点. 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B . 则()

- A. l 与 $\odot A$ 相切
 B. 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$
 C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$
 D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则()

- A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点
 B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
 D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a^3 + a^4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5$, 则 $S_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan\alpha + \tan\beta = 4, \tan\alpha \tan\beta = \sqrt{2} + 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 在如图的 4×4 的方格表中选 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种选法, 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格中的 4 个数之和的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13 分)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2$.

(1)求 A ;

(2)若 $a = 2, \sqrt{2}b\sin C = c\sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

16.(15 分)已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$.

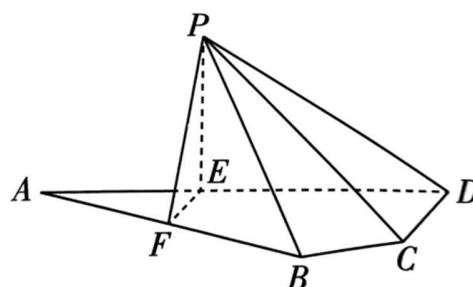
(1)当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2)若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.

17.(15 分)如图,平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 8, CD = 3, AD = 5\sqrt{3}, \angle ADC = 90^\circ, \angle BAD = 30^\circ$,点 E, F 满足 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.将 $\triangle AEF$ 沿 EF 翻折至 $\triangle PEF$,使得 $PC = 4\sqrt{3}$.

(1)证明: $EF \perp PD$;

(2)求平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角的正弦值.



18.(17 分)某投篮比赛分为两个阶段, 每个参赛队由两名队员组成. 比赛具体规则如下: 第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次, 若 3 次都未投中, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少投中 1 次, 则该队进入第二阶段. 第二阶段由该队的另一名队员投篮 3 次, 每次投篮投中得 5 分, 未投中得 0 分, 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和. 某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为 p , 乙每次投中的概率为 q , 各次投中与否相互独立.

(1)若 $p=0.4, q=0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

(2)假设 $0 < p < q$.

(i)为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

(ii)为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

19.(17 分)已知双曲线 $(C: x^2 - y^2 = m(m > 0))$, 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$: 过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点. 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .

(1)若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2 .

(2)证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

(3)设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积. 证明: 对任意正整数 n , $S_n = S_{n+1}$.