2017 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\mid -2<x<1\}$, $B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>3\}$, 则 $A\cap B=$( )

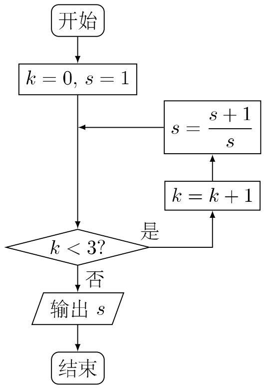
(A) $\{x\mid -2<x<-1\}$ (B) $\{x\mid -2<x<3\}$

(C) $\{x\mid -1<x<1\}$ (D) $\{x\mid 1<x<3\}$

2. 若复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(-\infty,-1)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(-1,+\infty)$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 ( )



(A) 2 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) $\dfrac{8}{5}$

4. 若 x,y 满足 $\begin{cases} x\leqslant 3, \\ x+y\geqslant 2, \\ y\leqslant x, \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为 ( )

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 9

5. 已知函数 $f(x)=3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ ( )

(A) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数 (B) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

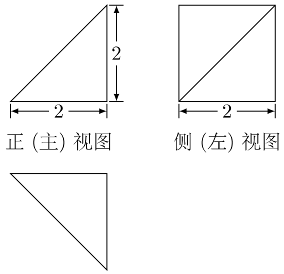
(C) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数 (D) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

6. 设 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 为非零向量, 则"存在负数 λ, 使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$"是"$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的最长棱的长度为 ( )



正 (主) 视图 侧 (左) 视图

俯视图

(A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

8. 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}, 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}, 则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是 ( )

(参考数据: $\lg 3\approx 0.48$)

(A) 10^{33} (B) 10^{53} (C) 10^{73} (D) 10^{93}

二、填空题

9. 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则实数 $m=$______.

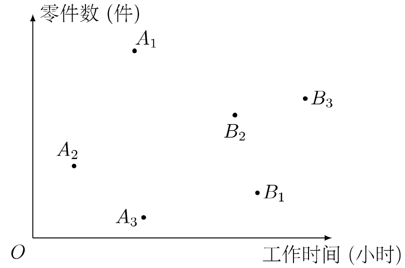
10. 若等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=-1$, $a_4=b_4=8$, 则 $\dfrac{a_2}{b_2}=$______.

11. 在极坐标系中, 点 A 在圆 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$ 上, 点 P 的坐标为 $(1,0)$, 则 $|AP|$ 的最小值为______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha-\beta)=$______.

13. 能够说明"设 a,b,c 是任意实数. 若 $a>b>c$, 则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为______.

14. 三名工人加工同一种零件, 他们在一天中的工作情况如图所示, 其中 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数, 点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数, $i=1,2,3$.



(1) 记 Q_i 为第 i 名工人在这一天中加工的零件总数, 则 Q_1,Q_2,Q_3 中最大的是______;

(2) 记 p_i 为第 i 名工人在这一天中平均每小时加工的零件数, 则 p_1,p_2,p_3 中最大的是______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $c=\dfrac{3}{7}a$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

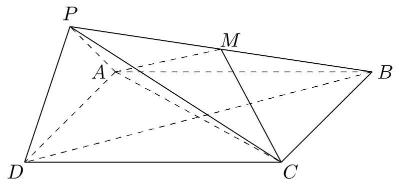
(2) 若 $a=7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 在线段 PB 上, $PD\parallel$ 平面 MAC, $PA=PD=\sqrt{6}$, $AB=4$.

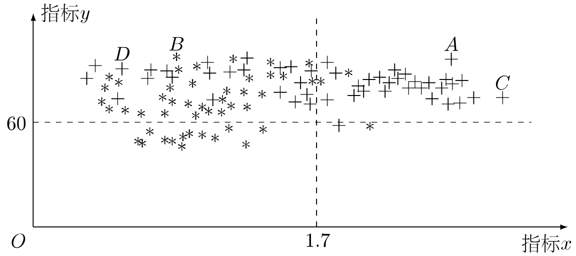
(1) 求证: M 为 PB 的中点;

(2) 求二面角 $B-PD-A$ 的大小;

(3) 求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值.



17. 为了研究一种新药的疗效, 选 100 名患者随机分成两组, 每组各 50 名, 一组服药, 另一组不服药. 一段时间后, 记录了两组患者的生理指标 x 和 y 的数据, 并制成如图, 其中"*"表示服药者, "+"表示未服药者.



(1) 从服药的 50 名患者中随机选出一人, 求此人指标 y 的值小于 60 的概率;
(2) 从图中 A, B, C, D 四人中随机选出两人, 记 ξ 为选出的两人中指标 x 的值大于 1.7 的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$;
(3) 试判断这 100 名患者中服药者指标 y 数据的方差与未服药者指标 y 数据的方差的大小. (只需写出结论)

18. 已知抛物线 C: $y^2=2px$ 过点 $P(1,1)$. 过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M, N, 过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP, ON 交于点 A, B, 其中 O 为原点.
(1) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程;
(2) 求证: A 为线段 BM 的中点.

19. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

20. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列, 记 $c_n=\max\{b_1-a_1n,\ b_2-a_2n,\ \cdots,\ b_n-a_nn\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, 其中 $\max\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.
(1) 若 $a_n=n$, $b_n=2n-1$, 求 c_1, c_2, c_3 的值, 并证明 $\{c_n\}$ 是等差数列;
(2) 证明: 或者对任意正数 M, 存在正整数 m, 当 $n\geqslant m$ 时, $\dfrac{c_n}{n}>M$; 或者存在正整数 m, 使得 $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$ 是等差数列.

2017 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x \mid x<-2$ 或 $x>2\}$, 则 $\complement_U A=$ ( )

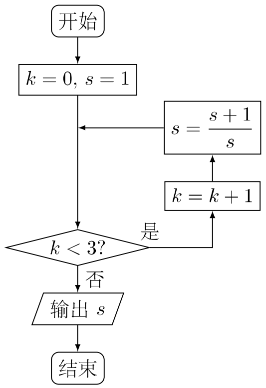
(A) $(-2,2)$ (B) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

(C) $[-2,2]$ (D) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

2. 若复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(-\infty,-1)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(-1,+\infty)$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 ( )



(A) 2 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) $\dfrac{8}{5}$

4. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x\leqslant 3, \\ x+y\geqslant 2, \\ y\leqslant x, \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为 ( )

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 9

5. 已知函数 $f(x)=3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ ( )

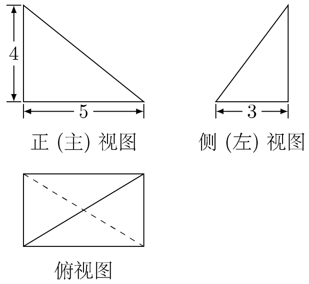
(A) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

(B) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

(C) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

(D) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 ( )



(A) 60 (B) 30 (C) 20 (D) 10

7. 设 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ 为非零向量, 则"存在负数 λ, 使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$"是"$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}, 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}, 则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是 ( )

(参考数据: $\lg 3\approx 0.48$)

(A) 10^{33} (B) 10^{53} (C) 10^{73} (D) 10^{93}

二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\sin\beta=$______.

10. 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则实数 $m=$______.

11. 已知 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 且 $x+y=1$, 则 x^2+y^2 的取值范围是______.

12. 已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上, 点 A 的坐标为 $(-2,0)$, O 为原点, 则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为______.

13. 能够说明"设 a, b, c 是任意实数. 若 $a>b>c$, 则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为______.

14. 某学习小组由学生和教师组成, 人员构成同时满足以下三个条件:

① 男学生人数多于女学生人数;

② 女学生人数多于教师人数;

③ 教师人数的两倍多于男学生人数.

(1) 若教师人数为 4, 则女学生人数的最大值为______;

(2) 该小组人数的最小值为______.

三、解答题

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$, $a_2+a_4=10$, $b_2b_4=a_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

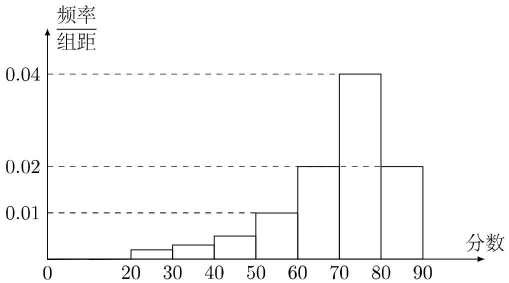
(2) 求和: $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$.

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

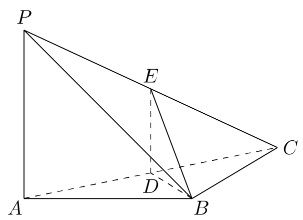
(2) 求证: 当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)\geqslant -\dfrac{1}{2}$.

17. 某大学艺术专业 400 名学生参加某次测评, 根据男女学生人数比例, 使用分层抽样的方法从中随机抽取了 100 名学生, 记录他们的分数, 将数据分成 7 组: $[20,30)$, $[30,40)$, $\cdots$, $[80,90]$, 并整理得到如下频率分布直方图:



(1) 从总体的 400 名学生中随机抽取一人, 估计其分数小于 70 的概率;
(2) 已知样本中分数小于 40 的学生有 5 人, 试估计总体中分数在区间 $[40,50)$ 内的人数;
(3) 已知样本中有一半男生的分数不小于 70, 且样本中分数不小于 70 的男女生人数相等. 试估计总体中男生和女生人数的比例.

18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp AB$, $PA\perp BC$, $AB\perp BC$, $PA=AB=BC=2$, D 为线段 AC 的中点, E 为线段 PC 上一点.
(1) 求证: $PA\perp BD$;
(2) 求证: 平面 $BDE\perp$ 平面 PAC;
(3) 当 $PA\,/\!/$ 平面 BDE 时, 求三棱锥 $E-BCD$ 的体积.



19. 已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 点 D 为 x 轴上一点, 过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M, N, 过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E. 求证: $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$.

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

2017 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

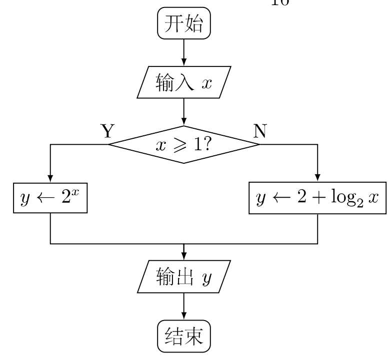
一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{a,\ a^2+3\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则实数 a 的值为______.

2. 已知复数 $z=(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的模是______.

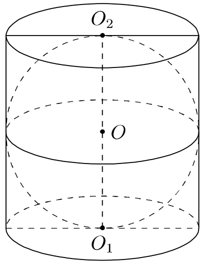
3. 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种不同型号的产品, 产量分别为 200, 400, 300, 100 件. 为检验产品的质量, 现用分层抽样的方法从以上所有的产品中抽取 60 件进行检验, 则应从丙种型号的产品中抽取______件.

4. 如图是一个算法流程图: 若输入 x 的值为 $\dfrac{1}{16}$, 则输出 y 的值是______.



5. 若 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{6}$, 则 $\tan\alpha=$______.

6. 如图, 在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O, 该球与圆柱的上、下底面及母线均相切, 记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1, 球 O 的体积为 V_2, 则 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值是______.



7. 记函数 $f(x)=\sqrt{6+x-x^2}$ 定义域为 D. 在区间 $[-4,5]$ 上随机取一个数 x, 则 $x\in D$ 的概率是______.

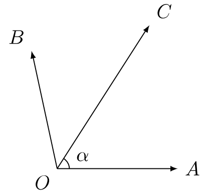
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右准线与它的两条渐近线分别交于点 P, Q, 其焦点是 F_1, F_2, 则四边形 F_1PF_2Q 的面积是______.

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, 其前 n 项为 S_n, 已知 $S_3=\dfrac{7}{4}$, $S_6=\dfrac{63}{4}$, 则 $a_8=$______.

10. 某公司一年购买某种货物 600 吨, 每次购买 x 吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 x 的值是______.

11. 已知函数 $f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, 其中 e 是自然对数的底数. 若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$. 则实数 a 的取值范围是______.

12. 如图, 在同一个平面内, 向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1, 1, $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α, 且 $\tan\alpha=7$, $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45°. 若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(m,\ n\in\mathbf{R})$, 则 $m+n=$______.

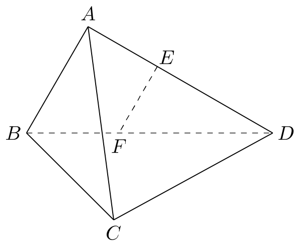


13. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-12,0)$, $B(0,6)$, 点 P 在圆 O: $x^2+y^2=50$ 上. 若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$, 则点 P 的横坐标的取值范围是______.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 1 的函数, 在区间 $[0,1)$ 上, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in D,\\ x, & x\notin D,\end{cases}$ 其中集合 $D=\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{n-1}{n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$, 则方程 $f(x)-\lg x=0$ 的解的个数是______.

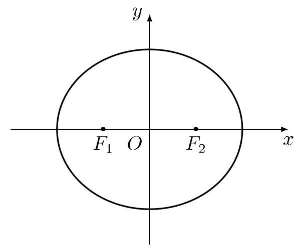
二、解答题

15. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB\perp AD$, $BC\perp BD$, 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD, 点 E, F (E 与 A, D 不重合) 分别在棱 AD, BD 上, 且 $EF\perp AD$. 求证:
(1) EF // 平面 ABC;
(2) $AD\perp AC$.



16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$, $\boldsymbol{b}=\left(3,-\sqrt{3}\right)$, $x\in[0,\pi]$.
(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 求 x 的值;
(2) 记 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

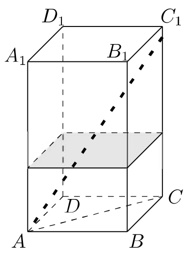
17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 两准线之间的距离为 8. 点 P 在椭圆 E 上, 且位于第一象限, 过点 F_1 作直线 PF_1 的垂线 l_1, 过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线 l_2.
(1) 求椭圆 E 的标准方程;
(2) 若直线 l_1, l_2 的交点 Q 在椭圆 E 上, 求点 P 的坐标.



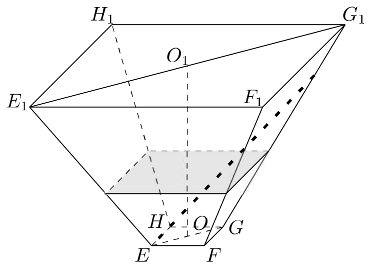
18. 如图, 水平放置的正四棱柱形玻璃容器 I 和正四棱台形玻璃容器 II 的高均为 32 cm, 容器 I 的底面对角线 AC 的长为 $10\sqrt{7}$ cm, 容器 II 的两底面对角线 EG, E_1G_1 的长分别为 14 cm 和 62 cm. 分别在容器 I 和容器 II 中注入水, 水深均为 12 cm. 现有一根玻璃棒 l, 其长度为 40 cm. (容器厚度, 玻璃棒粗细均忽略不计)

(1) 将 l 放在容器 I 中, l 的一端置于点 A 处, 另一端置于侧棱 CC_1 上, 求 l 没入水中部分的长度;

(2) 将 l 放在容器 II 中, l 的一端置于点 E 处, 另一端置于侧棱 GG_1 上, 求 l 没入水中部分的长度.



容器 I



容器 II

19. 对于给定的正整数 k, 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}=2ka_n$ 对任意正整数 $n\ (n>k)$ 总成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 是"$P(k)$ 数列".

(1) 证明: 等差数列 $\{a_n\}$ 是"$P(3)$ 数列";

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 既是"$P(2)$ 数列", 又是"$P(3)$ 数列", 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.

20. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1\ (a>0,\ b\in\mathbf{R})$ 有极值, 且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点. (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)

(1) 求 b 关于 a 的函数关系式, 并写出定义域;

(2) 证明: $b^2>3a$;

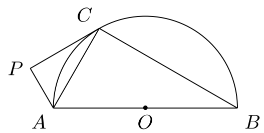
(3) 若 $f(x)$, $f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\dfrac{7}{2}$, 求 a 的取值范围.

21. 四选二.

【A】如图, AB 为半圆 O 的直径, 直线 PC 切半圆 O 于点 C, $AP\perp PC$, P 为垂足. 求证:

(1) $\angle PAC=\angle CAB$;

(2) $AC^2=AP\cdot AB$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{AB}$;

(2) 若曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的变换作用下得到另一曲线 C_2, 求 C_2 的方程.

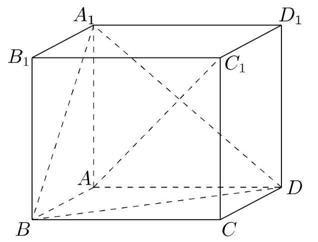
【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-8+t,\\ y=\dfrac{t}{2},\end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2s^2,\\ y=2\sqrt{2}s,\end{cases}$ (s 为参数). 设 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l 的距离的最小值.

【D】已知 a, b, c, d 为实数, 且 $a^2+b^2=4$, $c^2+d^2=16$, 证明 $ac+bd\leqslant 8$.

22. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB=AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$, $\angle BAD=120^\circ$.

(1) 求异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值;

(2) 求二面角 $B-A_1D-A$ 的正弦值.



23. 已知一个口袋有 m 个白球, n 个黑球 ($m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2$), 这些球除颜色外全部相同. 现将口袋中的球随机的逐个取出, 并放入如图所示的编号为 $1, 2, 3, \cdots, m+n$ 的抽屉内, 其中第 k 次取出的球放入编号为 k 的抽屉 ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+n$).

1	2	3	$\cdots$	$m+n$

(1) 试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率 p;

(2) 随机变量 X 表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数, $E(X)$ 是 X 的数学期望, 证明: $E(X)<\dfrac{n}{(m+n)(n-1)}$.

2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

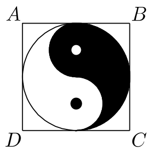
一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x \mid x<1\}$, $B=\{x \mid 3^x<1\}$, 则 ( )

(A) $A\cap B=\{x \mid x<0\}$ (B) $A\cup B=\mathbf{R}$

(C) $A\cup B=\{x \mid x>1\}$ (D) $A\cap B=\varnothing$

2. 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是 ( )



(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

3. 设有下面四个命题:
p_1: 若复数 z 满足 $\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;
p_2: 若复数 z 满足 $z^2\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;
p_3: 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$, 则 $z_1=\overline{z_2}$;
p_4: 若复数 $z\in\mathbf{R}$, 则 $\overline{z}\in\mathbf{R}$.
其中的真命题为 ( )

(A) p_1, p_3 (B) p_1, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_2, p_4

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4+a_5=24$, $S_6=48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

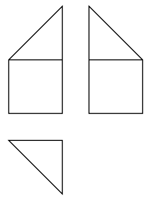
5. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1)=-1$, 则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 ( )

(A) $[-2,2]$ (B) $[-1,1]$ (C) $[0,4]$ (D) $[1,3]$

6. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 ( )

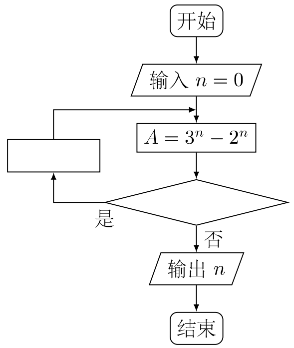
(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 35

7. 某多面体的三视图如图所示, 其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成, 正方形的边长为 2, 俯视图为等腰直角三角形, 该多面体的各个面中有若干个是梯形, 这些梯形的面积之和为 ( )



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

8. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n, 那么在 ◇ 和 ▭ 两个空白框中, 可以分别填入 ( )



(A) $A>1000$ 和 $n=n+1$ (B) $A>1000$ 和 $n=n+2$

(C) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$ (D) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

9. 已知曲线 C_1: $y=\cos x$, C_2: $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$, 则下面结论正确的是( )

(A) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(B) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(C) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(D) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

10. 已知 F 为抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2, 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为 ( )

(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10

11. 设 x, y, z 为正数, 且 $2^x=3^y=5^z$, 则 ( )

(A) $2x<3y<5z$ (B) $5z<2x<3y$ (C) $3y<5z<2x$ (D) $3y<2x<5z$

12. 几位大学生响应国家的创业号召, 开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣, 他们推出了"解数学题获取软件激活码"的活动. 这款软件的激活码为下面数学问题的答案: 已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, $\cdots$, 其中第一项是 2^0, 接下来的两项是 2^0, 2^1, 再接下来的三项是 2^0, 2^1, 2^2, 依此类推. 求满足如下条件的最小整数 N: $N>100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂. 那么该款软件的激活码是 ( )

(A) 440 (B) 330 (C) 220 (D) 110

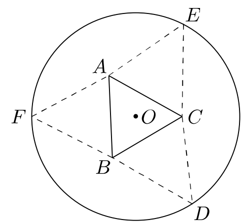
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$______.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y\leqslant 1, \\ 2x+y\geqslant -1, \\ x-y\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=3x-2y$ 的最小值为______.

15. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的右顶点为 A, 以 A 为圆心, b 为半径作圆 A, 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 若 $\angle MAN=60^\circ$, 则 C 的离心率为______.

16. 如图, 圆形纸片的圆心为 O, 半径为 5 cm, 该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O. D, E, F 为圆 O 上的点, $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$ 分别是以 BC, CA, AB 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后, 分别以 BC, CA, AB 为折痕折起 $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$, 使得 D, E, F 重合, 得到三棱锥. 当 $\triangle ABC$ 的边长变化时, 所得三棱锥体积 (单位: cm^3) 的最大值为______.



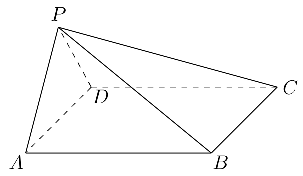
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$.

(1) 求 $\sin B\sin C$;

(2) 若 $6\cos B\cos C=1$, $a=3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP=\angle CDP=90°$.
(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD;
(2) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD=90°$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



19. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 根据长期生产经验, 可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.
(1) 假设生产状态正常, 记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数, 求 $P(X\geqslant 1)$ 及 X 的数学期望;
(2) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.
① 试说明上述监控生产过程方法的合理性;
② 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸:

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\overline{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$, $s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx 0.212$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i=1, 2, \cdots, 16$.
用样本平均数 $\overline{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$, 利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查? 剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据, 用剩下的数据估计 μ 和 σ (精确到 0.01).
附: 若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$, $0.9974^{16}\approx 0.9592$, $\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

20. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 四点 $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.
(1) 求 C 的方程;
(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1, 证明: l 过定点.

21. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t,\\ y=1-t,\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 若 $a=-1$, 求 C 与 l 的交点坐标;
(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a.

23. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$, $g(x)=|x+1|+|x-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$, 求 a 的取值范围.

2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$, $B=\{x\mid 3-2x>0\}$, 则 ( )

(A) $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$ (B) $A\cap B=\varnothing$

(C) $A\cup B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$ (D) $A\cup B=\mathbf{R}$

2. 为评估一种农作物的种植效果, 选了 n 块地作试验田, 这 n 块地的亩产量 (单位: kg) 分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 下面给出的指标中可以用来评估这种农作物亩产量稳定程度的是 ( )

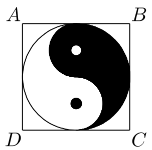
(A) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数 (B) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的标准差

(C) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的最大值 (D) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的中位数

3. 下列各式的运算结果为纯虚数的是 ( )

(A) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$ (B) $\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$ (C) $(1+\mathrm{i})^2$ (D) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是 ( )

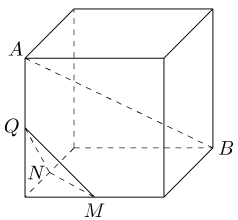


(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{8}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

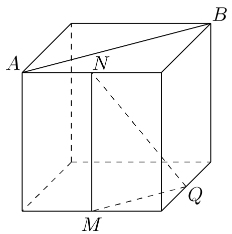
5. 已知 F 是双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点, P 是 C 上一点, 且 PF 与 x 轴垂直, 点 A 的坐标是 $(1,3)$. 则 $\triangle APF$ 的面积为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

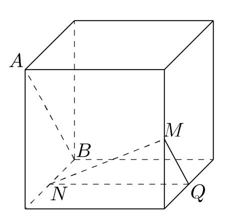
6. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是 ( )



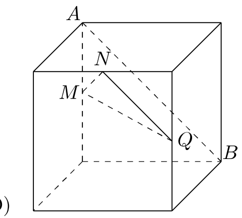
(A)



(B)



(C)

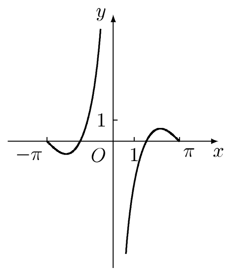


(D)

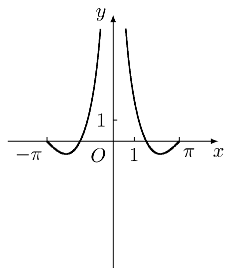
7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3,\\ x-y\geqslant 1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

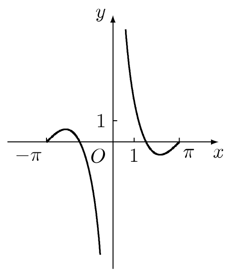
8. 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图象大致为 ( )



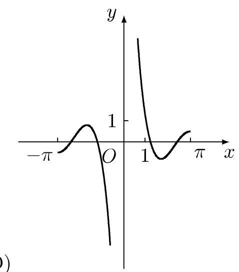
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$, 则 ( )

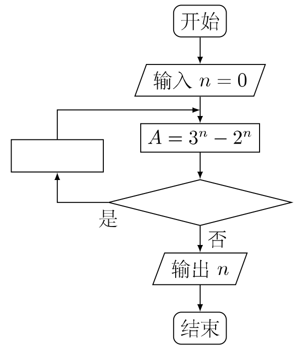
(A) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增

(B) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减

(C) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

(D) $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

10. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n, 那么在 ◇ 和 ▭ 两个空白框中, 可以分别填入 ( )



(A) $A>1000$ 和 $n=n+1$ (B) $A>1000$ 和 $n=n+2$

(C) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$ (D) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$, $a=2$, $c=\sqrt{2}$, 则 $C=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{12}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$

12. 设 A, B 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$, 则 m 的取值范围是 ( )

(A) $(0,1]\cup[9,+\infty)$ (B) $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$

(C) $(0,1]\cup[4,+\infty)$ (D) $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(m,1)$, 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $m=$______.

14. 曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为______.

15. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\tan\alpha=2$, 则 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$______.

16. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径, 若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB, $SA=AC$, $SB=BC$, 三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为______.

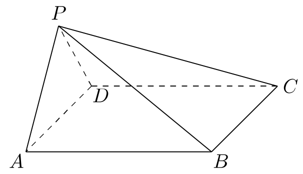
三、解答题

17. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_2=2$, $S_3=-6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n, 并判断 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 是否能成等差数列.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$.
(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD;
(2) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD=90^\circ$, 且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$, 求该四棱锥的侧面积.



19. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 下面是检验员在一天内依次抽取的 16 个零件的尺寸:

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得
$\overline{x}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=9.97$, $s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx 0.212$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16}(i-8.5)^2}\approx 18.439$, $\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})(i-8.5)=-2.78$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i=1, 2, \cdots, 16$.
(1) 求 (x_i,i) $(i=1, 2, \cdots, 16)$ 的相关系数 r, 并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小; (若 $|r|<0.25$, 则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小)
(2) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\overline{x}-3s,\overline{x}+3s)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.
① 从这一天抽检的结果看, 是否需对当天的生产过程进行检查?
② 在 $(\overline{x}-3s,\overline{x}+3s)$ 之外的数据称为离群值, 试剔除离群值, 估计这条生产线当天生产的零件尺寸的均值与标准差. (精确到 0.01)
附: 样本 (x_i,y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$, $\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

20. 设 A, B 为曲线 C: $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4.
(1) 求直线 AB 的斜率;
(2) 设 M 为曲线 C 上一点, C 在 M 处的切线与直线 AB 平行, 且 $AM\perp BM$, 求直线 AB 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-a)-a^2x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t,\\ y=1-t,\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 若 $a=-1$, 求 C 与 l 的交点坐标;
(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a.

23. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$, $g(x)=|x+1|+|x-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$, 求 a 的取值范围.

2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

1. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $2+\mathrm{i}$　(D) $2-\mathrm{i}$

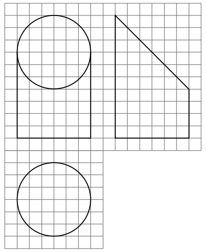
2. 设集合 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{x\mid x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则 $B=$ ( )

(A) $\{1,\ -3\}$　(B) $\{1,\ 0\}$　(C) $\{1,\ 3\}$　(D) $\{1,\ 5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题:"远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?"意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层共有灯 ( )

(A) 1 盏　(B) 3 盏　(C) 5 盏　(D) 9 盏

4. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为 ( )



(A) 90π　(B) 63π　(C) 42π　(D) 36π

5. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\ 2x-3y+3\geqslant 0,\\ y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是 ( )

(A) -15　(B) -9　(C) 1　(D) 9

6. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作, 每人至少完成 1 项, 每项工作由 1 人完成, 则不同的安排方式共有 ( )

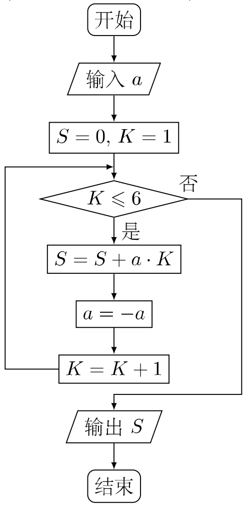
(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 24 种　(D) 36 种

7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 ( )

(A) 乙可以知道四人的成绩　(B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩　(D) 乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ ( )



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

9. 若双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2, 则 C 的离心率为 ( )

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ( )

(A) -1　(B) $-2\mathrm{e}^{-3}$　(C) $5\mathrm{e}^{-3}$　(D) 1

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是 ( )

(A) -2　(B) $-\dfrac{3}{2}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) -1

二、填空题

13. 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次, X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX=$______.

14. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\ \left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是______.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$______.

16. 已知 F 是抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN|=$______.

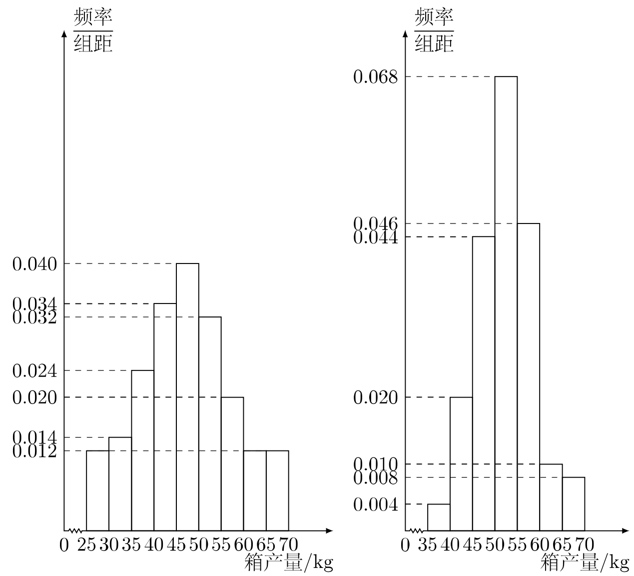
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 面积为 2, 求 b.

18. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



旧养殖法　　新养殖法

(1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 A 表示事件"旧养殖法的箱产量低于 50 kg, 新养殖法的箱产量不低于 50 kg", 估计 A 的概率;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

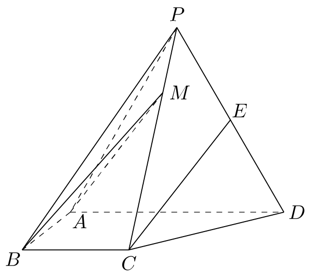
(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

附:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^{\circ}$, E 是 PD 的中点.
(1) 证明: 直线 $CE \parallel$ 平面 PAB;
(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°, 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



20. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 C: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.
(1) 求点 P 的轨迹方程;
(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geqslant 0$.
(1) 求 a;
(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0, 且 $\mathrm{e}^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.
(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;
(2) 设点 A 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:
(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;
(2) $a+b\leqslant 2$.

2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

(A) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (B) $\{1,\ 2,\ 3\}$ (C) $\{2,\ 3,\ 4\}$ (D) $\{1,\ 3,\ 4\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$ ( )

(A) $1-\mathrm{i}$ (B) $1+3\mathrm{i}$ (C) $3+\mathrm{i}$ (D) $3+3\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 ( )

(A) 4π (B) 2π (C) π (D) $\dfrac{\pi}{2}$

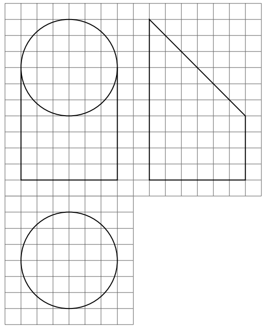
4. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 ( )

(A) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ (B) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ (C) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ (D) $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

5. 若 $a>1$, 则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是 ( )

(A) $(\sqrt{2},+\infty)$ (B) $(\sqrt{2},2)$ (C) $(1,\sqrt{2})$ (D) $(1,2)$

6. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为 ( )



(A) 90π (B) 63π (C) 42π (D) 36π

7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\ 2x-3y+3\geqslant 0,\\ y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是 ( )

(A) -15 (B) -9 (C) 1 (D) 9

8. 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间为 ( )

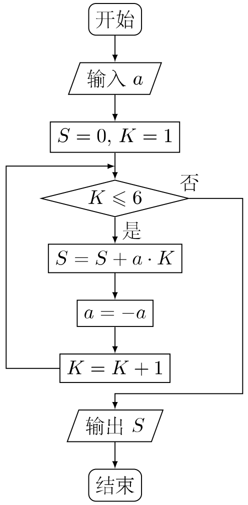
(A) $(-\infty,-2)$ (B) $(-\infty,1)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(4,+\infty)$

9. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 ( )

(A) 乙可以知道四人的成绩 (B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩 (D) 乙、丁可以知道自己的成绩

10. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ ( )



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

11. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张, 放回后再随机抽取 1 张, 则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{3}{10}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

12. 过抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点 F, 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴上方), l 为 C 的准线, 点 N 在 l 上, 且 $MN\perp l$, 则 M 到直线 NF 的距离为 ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $3\sqrt{3}$

二、填空题

13. 函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为______.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f(x)=2x^3+x^2$, 则 $f(2)=$______.

15. 长方体的长、宽、高分别为 3, 2, 1, 其顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为______.

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$, 则 $B=$______.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, $a_1=-1$, $b_1=1$, $a_2+b_2=2$.

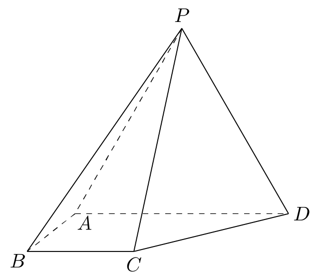
(1) 若 $a_3+b_3=5$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $T_3=21$, 求 S_3.

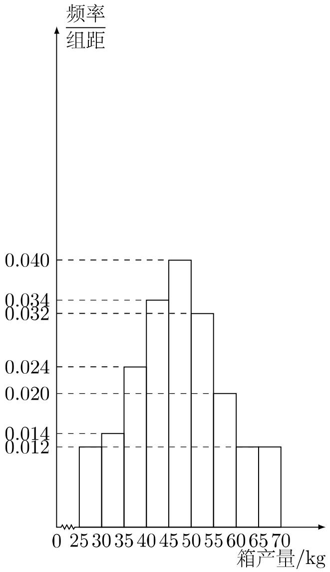
18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$.

(1) 证明: 直线 $BC\parallel$ 平面 PAD;

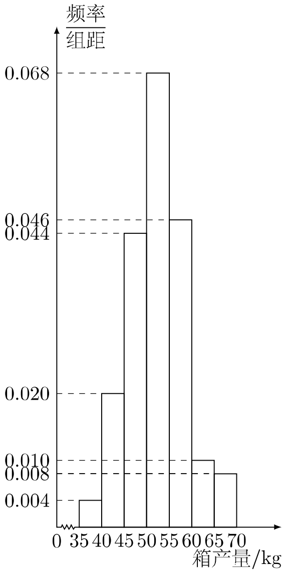
(2) 若 $\triangle PCD$ 面积为 $2\sqrt{7}$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



旧养殖法



新养殖法

(1) 记 A 表示事件"旧养殖法的箱产量低于 50 kg", 估计 A 的概率;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的优劣进行比较.

附:

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

,

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

20. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 C: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. 设函数 $f(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant ax+1$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:

(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;

(2) $a+b\leqslant 2$.

2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

一、选择题

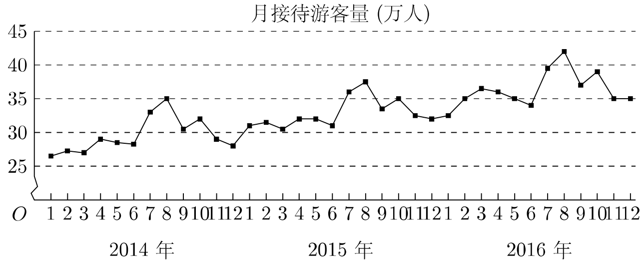
1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\mid y=x\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

2. 设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是 ( )

(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. $(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中的 x^3y^3 系数为 ( )

(A) -80　(B) -40　(C) 40　(D) 80

5. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点, 则 C 的方程为 ( )

(A) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　(B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　(C) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　(D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

6. 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是 ( )

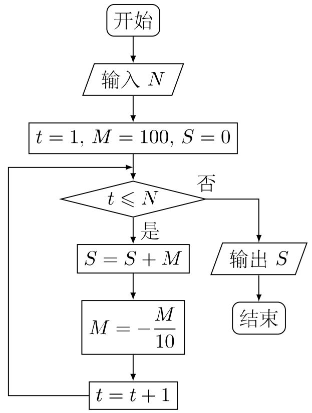
(A) $f(x)$ 的一个周期为 -2π

(B) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

(C) $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$

(D) $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

7. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为 ( )



(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

8. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为 ( )

(A) π　(B) $\frac{3\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) $\frac{\pi}{4}$

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差不为 0, 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为 ( )

(A) -24　(B) -3　(C) 3　(D) 8

10. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为( )

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点, 则 $a=$ ( )

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1

12. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$, 则 $\lambda+\mu$ 的最大值为 ( )

(A) 3　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) 2

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-4y$ 的最小值为______.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$, $a_1-a_3=-3$, 则 $a_4=$______.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是______.

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直, 斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转, 有下列结论:

① 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 30° 角;

② 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 60° 角;

③ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45°;

④ 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60°;

其中正确的是______. (填写所有正确结论的编号)

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$, $a=2\sqrt{7}$, $b=2$.

(1) 求 c;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD\perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

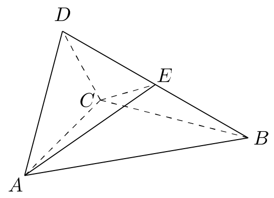
最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

(1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X (单位: 瓶) 的分布列;

(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量 n (单位: 瓶) 为多少时, Y 的数学期望达到最大值?

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ABD=\angle CBD$, $AB=BD$.
(1) 证明: 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC;
(2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E, 若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值.



20. 已知抛物线 C: $y^2=2x$, 过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.
(1) 证明: 坐标原点 O 在圆 M 上;
(2) 设圆 M 过点 $P(4,-2)$, 求直线 l 与圆 M 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.
(1) 若 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的值;
(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$, 求 m 的最小值.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t,\\ y=kt,\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m,\\ y=\dfrac{m}{k},\end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.
(1) 写出 C 的普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 l_3: $\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.
(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 文)

一、选择题

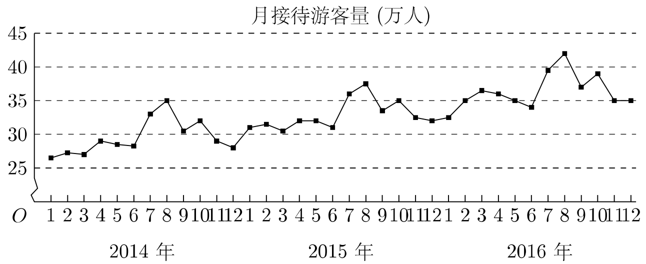
1. 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为　　( )

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 复平面内表示复数 $z=\mathrm{i}\,(-2+\mathrm{i})$ 的点位于　　( )

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是　　( )

(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha=$　　( )

(A) $-\dfrac{7}{9}$　　(B) $-\dfrac{2}{9}$　　(C) $\dfrac{2}{9}$　　(D) $\dfrac{7}{9}$

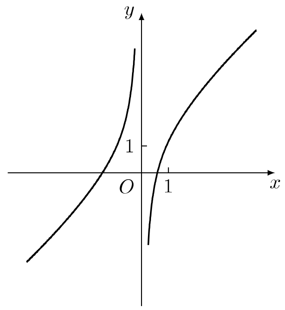
5. 设 $x,\,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的取值范围是 ( )

(A) $[-3,0]$　　(B) $[-3,2]$　　(C) $[0,2]$　　(D) $[0,3]$

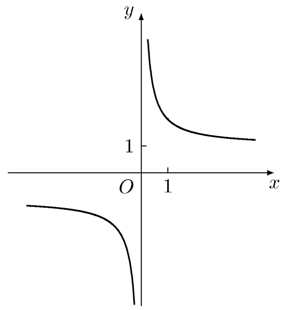
6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为　　( )

(A) $\dfrac{6}{5}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{1}{5}$

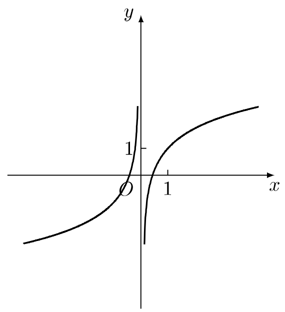
7. 函数 $y=1+x+\dfrac{\sin x}{x^2}$ 的部分图象大致为　　( )



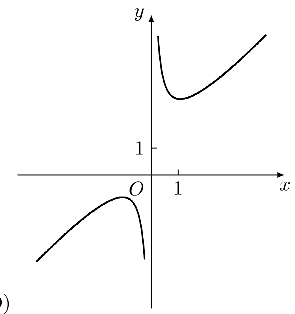
(A)



(B)

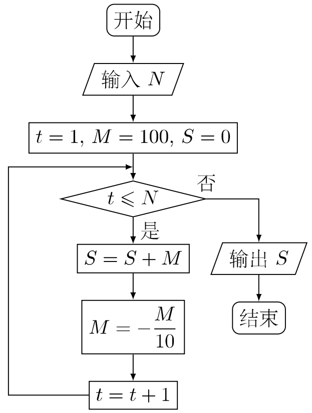


(C)



(D)

8. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为　　( )



(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

9. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为　　( )

(A) π　　(B) $\dfrac{3\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

10. 在正方体 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CD 的中点, 则　　( )

(A) $A_1E\perp DC_1$　(B) $A_1E\perp BD$　(C) $A_1E\perp BC_1$　(D) $A_1E\perp AC$

11. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为( )

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点, 则 $a=$　　( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,m)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$______.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1\,(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{3}{5}x$, 则 $a=$______.

15. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $C=60^\circ$, $b=\sqrt{6}$, $c=3$, 则 $A=$______.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是______.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)\,a_n=2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

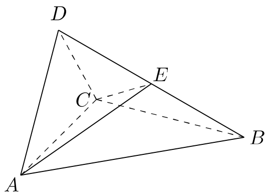
(1) 估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率;

(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时, 写出 Y 的所有可能值, 并估计 Y 大于零的概率.

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $AD=CD$.

(1) 证明: $AC\perp BD$;

(2) 已知 $\triangle ACD$ 是直角三角形, $AB=BD$, 若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点, 且 $AE\perp EC$, 求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.



20. 在直角坐标系中 xOy, 曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 点 C 的坐标为 $(0,1)$, 当 m 变化时, 解答下列问题:

(1) 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况? 说明理由;

(2) 证明过 A, B, C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a<0$ 时, 证明 $f(x)\leqslant -\dfrac{3}{4a}-2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t,\\ y=kt,\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m,\\ y=\dfrac{m}{k},\end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.

(1) 写出 C 的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 l_3: $\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

2017 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

1. 设函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 A, 函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 B, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $(1,2)$ (B) $(1,2]$ (C) $(-2,1)$ (D) $[-2,1)$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $z=a+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $z\cdot\bar{z}=4$, 则 $a=$ ( )

(A) 1 或 -1 (B) $\sqrt{7}$ 或 $-\sqrt{7}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

3. 已知命题 p: $\forall x>0$, $\ln(x+1)>0$; 命题 q: 若 $a>b$, 则 $a^2>b^2$, 下列命题为真命题的是 ( )

(A) $p\wedge q$ (B) $p\wedge\neg q$ (C) $\neg p\wedge q$ (D) $\neg p\wedge\neg q$

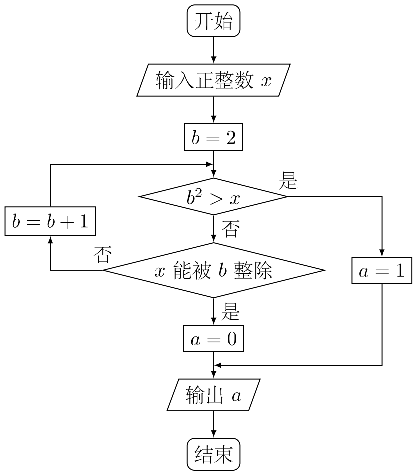
4. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\leqslant 0,\\3x+y+5\leqslant 0,\\x+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值是 ( )

(A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) 6

5. 为了研究某班学生的脚长 x (单位: 厘米) 和身高 y (单位: 厘米) 的关系, 从该班随机抽取 10 名学生, 根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系, 设其回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$, 已知 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=225$, $\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=1600$, $\hat{b}=4$, 该班某学生的脚长为 24, 据此估计其身高为 ( )

(A) 160 (B) 163 (C) 166 (D) 170

6. 执行两次如图所示的程序框图, 若第一次输入的 x 值为 7, 第二次输入的 x 值为 9, 则第一次, 第二次输出的 a 值分别为 ( )



(A) 0, 0 (B) 1, 1 (C) 0, 1 (D) 1, 0

7. 若 $a>b>0$, 且 $ab=1$, 则下列不等式成立的是 ( )

(A) $a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$ (B) $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

(C) $a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$ (D) $\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$

8. 从分别标有 1, 2, $\cdots$, 9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次, 每次抽取 1 张, 则抽到在 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率是 ( )

(A) $\frac{5}{18}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{7}{9}$

9. 在 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且满足 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$, 则下列等式成立的是 ( )

(A) $a=2b$ (B) $b=2a$ (C) $A=2B$ (D) $B=2A$

10. 已知当 $x\in[0,1]$ 时, 函数 $y=(mx-1)^2$ 的图象与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象有且只有一个交点, 则正实数 m 的取值范围是 ( )

(A) $(0,1]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$ (B) $(0,1]\cup[3,+\infty)$

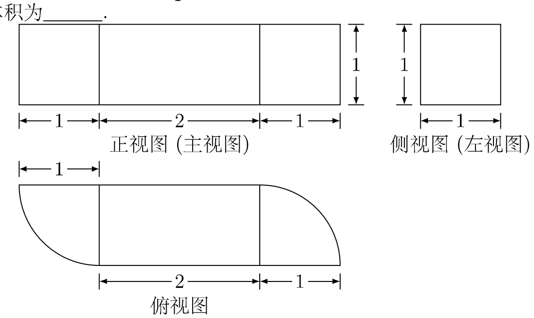
(C) $(0,\sqrt{2})\cup[2\sqrt{3},+\infty)$ (D) $(0,\sqrt{2}]\cup[3,+\infty)$

二、填空题

11. 已知 $(1+3x)^n$ 的展开式中含有 x^2 的系数是 54, 则 $n=$______.

12. 已知 $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ 是互相垂直的单位向量, 若 $\sqrt{3}\boldsymbol{e_1}-\boldsymbol{e_2}$ 与 $\boldsymbol{e_1}+\lambda\boldsymbol{e_2}$ 的夹角为 $60°$, 则实数 λ 的值是______.

13. 由一个长方体和两个 $\frac{1}{4}$ 圆柱体构成的几何体的三视图如图, 则该几何体的体积为______.



14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 交于 A, B 两点, 若 $|AF|+|BF|=4|OF|$, 则该双曲线的渐近线方程为______.

15. 若函数 $\mathrm{e}^xf(x)$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增, 则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质. 下列函数中所有具有 M 性质的函数的序号为______.

① $f(x)=2^{-x}$; ② $f(x)=3^{-x}$; ③ $f(x)=x^3$; ④ $f(x)=x^2+2$.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)$, 其中 $0<\omega<3$, 已知 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

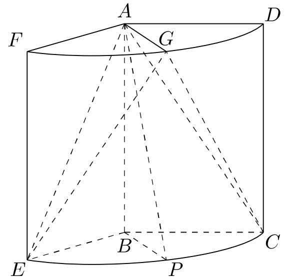
(1) 求 ω;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值.

17. 如图, 几何体是圆柱的一部分, 它是由矩形 $ABCD$ (及其内部) 以 AB 边所在直线为旋转轴旋转 $120°$ 得到的, G 是 $\widehat{DF}$ 的中点.

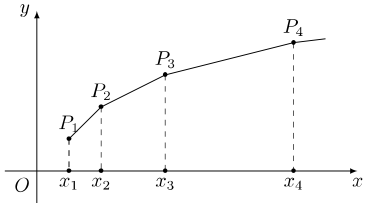
(1) 设 P 是 $\widehat{CE}$ 上的一点, 且 $AP\perp BE$, 求 $\angle CBP$ 的大小;

(2) 当 $AB=3$, $AD=2$ 时, 求二面角 $E-AG-C$ 的大小.



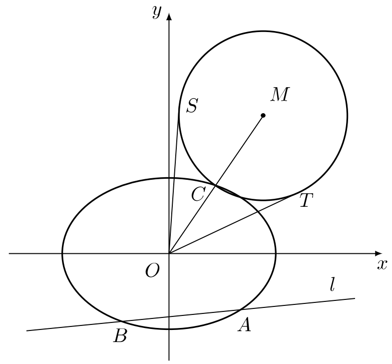
18. 在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用，现有 6 名男志愿者 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 和 4 名女志愿者 B_1, B_2, B_3, B_4，从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示，另 5 人接受乙种心理暗示.
(1) 求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率;
(2) 用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求 X 的分布列与数学期望 EX.

19. 已知 $\{x_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且 $x_1+x_2=3$, $x_3-x_2=2$.
(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
(2) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，依次连接点 $P_1(x_1,1)$, $P_2(x_2,2)$, $\cdots$, $P_{n+1}(x_{n+1},n+1)$ 得到折线 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$，求由该折线与直线 $y=0$, $x=x_1$, $x=x_{n+1}$ 所围成的区域的面积 T_n.



20. 已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$, $g(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x+2x-2)$，其中 $\mathrm{e}=2.17828\cdots$ 是自然对数的底数.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程;
(2) 令 $h(x)=g(x)-af(x)$ $(a\in\mathbf{R})$，讨论 $h(x)$ 的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2.
(1) 求椭圆 E 的方程.
(2) 如图，该直线 l: $y=k_1x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 交椭圆 E 于 A, B 两点，C 是椭圆 E 上的一点，直线 OC 的斜率为 k_2，且 $k_1k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$M$ 是线段 OC 延长线上一点，且 $|MC|:|AB|=2:3$，$\odot M$ 的半径为 $|MC|$，OS, OT 是 $\odot M$ 的两条切线，切点分别为 S, T，求 $\angle SOT$ 的最大值，并求取得最大值时直线 l 的斜率.



2017 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid |x-1|<1\}$, $N=\{x\mid x<2\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,2)$　(C) $(0,2)$　(D) $(1,2)$

2. 已知 i 是虚数单位, 若复数 z 满足 $z\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$, 则 $z^2=$ ( )

(A) $-2\mathrm{i}$　(B) $2\mathrm{i}$　(C) -2　(D) 2

3. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y+5\leqslant 0, \\ x+3\geqslant 0, \\ y\leqslant 2, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值是 ( )

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3

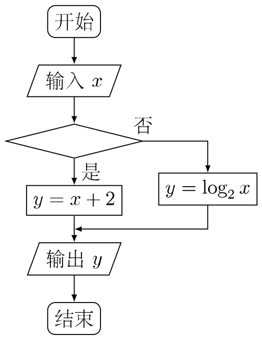
4. 已知 $\cos x=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos 2x=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $-\dfrac{1}{8}$　(D) $\dfrac{1}{8}$

5. 已知命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}$, $x^2-x+1\geqslant 0$. 命题 q: 若 $a^2<b^2$, 则 $a<b$, 下列命题为真命题的是 ( )

(A) $p\wedge q$　(B) $p\wedge\neg q$　(C) $\neg p\wedge q$　(D) $\neg p\wedge\neg q$

6. 若执行下侧的程序框图, 当输入的 x 的值为 4 时, 输出的 y 的值为 2, 则空白判断框中的条件可能为 ( )



(A) $x>3$　(B) $x>4$　(C) $x\leqslant 4$　(D) $x\leqslant 5$

7. 函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ 的最小正周期为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　(C) π　(D) 2π

8. 如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名工人某日的产量数据 (单位: 件). 若这两组数据的中位数相等, 且平均值也相等, 则 x 和 y 的值分别为 ( )

甲组		乙组
6	5	9
2 5	6	1 7 y
x 4	7	8

(A) 3, 5　(B) 5, 5　(C) 3, 7　(D) 5, 7

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0<x<1, \\ 2(x-1), & x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a+1)$, 则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$ ( )

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

10. 若函数 $\mathrm{e}^x f(x)$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增, 则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质, 下列函数中具有 M 性质的是( )

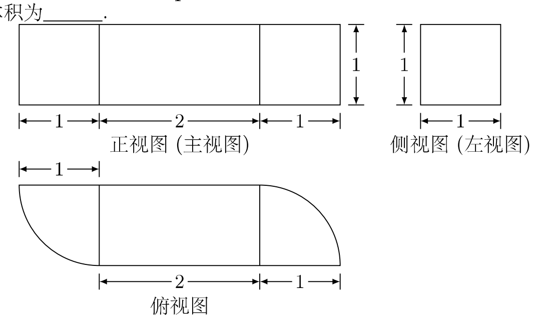
(A) $f(x)=2^{-x}$　(B) $f(x)=x^2$　(C) $f(x)=3^{-x}$　(D) $f(x)=\cos x$

二、填空题

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,6)$, $\boldsymbol{b}=(-1,\lambda)$, 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda=$______.

12. 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 过点 $(1,2)$, 则 $2a+b$ 的最小值为______.

13. 由一个长方体和两个 $\dfrac{1}{4}$ 圆柱体构成的几何体的三视图如图, 则该几何体的体积为______.



14. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+4)=f(x-2)$. 若当 $x\in[-3,0]$ 时, $f(x)=6^{-x}$, 则 $f(919)=$______.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 交于 A, B 两点, 若 $|AF|+|BF|=4|OF|$, 则该双曲线的渐近线方程为______.

三、解答题

16. 某旅游爱好者计划从 3 个亚洲国家 A_1, A_2, A_3 和 3 个欧洲国家 B_1, B_2, B_3 中选择 2 个国家去旅游.

(1) 若从这 6 个国家中任选 2 个, 求这 2 个国家都是亚洲国家的概率;

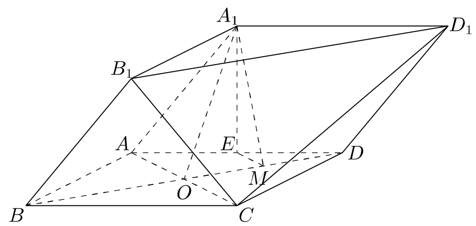
(2) 若从亚洲国家和欧洲国家中各任选 1 个, 求这 2 个国家包括 A_1 但不包括 B_1 的概率.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b=3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$, $S_{\triangle ABC}=3$, 求 A 和 a.

18. 由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示, 四边形 $ABCD$ 为正方形, O 为 AC 与 BD 的交点, E 为 AD 的中点, $A_1E\perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 证明: $A_1O\parallel$ 平面 B_1CD_1;

(2) 设 M 是 OD 的中点, 证明: 平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1.



19. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $a_1+a_2=6$, $a_1a_2=a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式;

(2) $\{b_n\}$ 为各项非零的等差数列, 其前 n 项和为 S_n, 已知 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$, 求数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$, $a\in\mathbf{R}$.

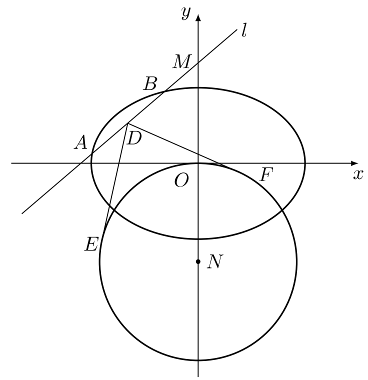
(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程;

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$, 讨论 $g(x)$ 的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆 C 截直线 $y=1$ 所得线段的长度为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 动直线 l: $y=kx+m\ (m\neq 0)$ 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 y 轴于点 M. 点 N 是 M 关于 O 的对称点, $\odot N$ 的半径为 $|NO|$. 设 D 为 AB 的中点, DE, DF 与 $\odot N$ 分别相切于点 E, F, 求 $\angle EDF$ 的最小值.



2017 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, 集合 $B=\{3,\ 4,\ 5\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 若排列数 $\mathrm{P}_6^m=6\times5\times4$, 则 $m=$______.

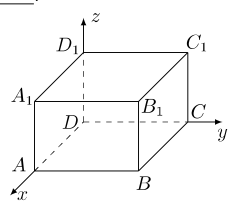
3. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}>1$ 的解集为______.

4. 已知球的体积为 36π, 则该球主视图的面积等于______.

5. 已知复数 z 满足 $z+\dfrac{3}{z}=0$, 则 $|z|=$______.

6. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的焦点为 F_1, F_2, P 为该双曲线上的一点, 若 $|PF_1|=5$, 则 $|PF_2|=$______.

7. 如图, 以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系, 若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4,3,2)$, 则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是______.



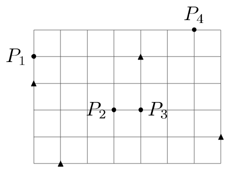
8. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 若 $g(x)=\begin{cases}3^x-1, & x\leqslant 0,\\ f(x), & x>0,\end{cases}$ 为奇函数, 则 $f^{-1}(x)=2$ 的解为______.

9. 已知四个函数: ① $y=-x$, ② $y=-\dfrac{1}{x}$, ③ $y=x^3$, ④ $y=x^{\frac{1}{2}}$. 从中任选 2 个, 则事件"所选 2 个函数的图象有且仅有一个公共点"的概率为______.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $a_n=n^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数, 若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的第 a_n 项都等于 $\{a_n\}$ 的第 b_n 项, 则 $\dfrac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=$______.

11. 设 α_1, $\alpha_2\in\mathbf{R}$, 且 $\dfrac{1}{2+\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=2$, 则 $|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|$ 的最小值等于______.

12. 如图, 用 35 个单位正方形拼成一个矩形, 点 P_1, P_2, P_3, P_4 以及四个标记为"▲"的点在正方形的顶点处, 设集合 $\Omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$, 点 $P\in\Omega$, 过 P 作直线 l_P, 使得不在 l_P 上的"▲"的点分布在 l_P 的两侧. 用 $D_1(l_P)$ 和 $D_2(l_P)$ 分别表示 l_P 一侧和另一侧的"▲"的点到 l_P 的距离之和. 若过 P 的直线 l_P 中有且只有一条满足 $D_1(l_P)=D_2(l_P)$, 则 Ω 中所有这样的 P 为______.



二、选择题

13. 关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x+5y=0,\\ 2x+3y=4,\end{cases}$ 的系数行列式 D 为 ( )

(A) $\begin{vmatrix}0&5\\4&3\end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix}1&0\\2&4\end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix}6&0\\5&4\end{vmatrix}$

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ( )

(A) 等于 $-\dfrac{1}{2}$ (B) 等于 0 (C) 等于 $\dfrac{1}{2}$ (D) 不存在

15. 已知 a、b、c 为实常数, 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=an^2+bn+c$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则"存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 x_{100+k}, x_{200+k}, x_{300+k} 成等差数列"的一个必要条件是 ( )

(A) $a\geqslant 0$ (B) $b\leqslant 0$

(C) $c=0$ (D) $a-2b+c=0$

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和 C_2: $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$. P 为 C_1 上的动点, Q 为 C_2 上的动点, w 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值. 记 $\Omega=\left\{(P,Q)\,|\,P \text{ 在 } C_1 \text{ 上}, Q \text{ 在 } C_2 \text{ 上}, \text{且 } \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=w\right\}$, 则 Ω 中 ( )

(A) 元素个数为 2 (B) 元素个数为 4

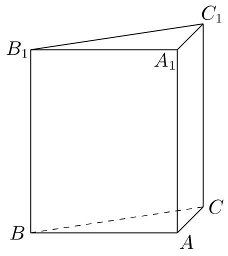
(C) 元素个数为 8 (D) 含有无穷个元素

三、解答题

17. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形, 两直角边 AB 和 AC 的长分别为 4 和 2, 侧棱 AA_1 的长为 5.

(1) 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积;

(2) 设 M 是 BC 中点, 求直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小.



18. 已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x+\dfrac{1}{2}$, $x\in(0,\pi)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 A 所对边 $a=\sqrt{19}$, 角 B 所对边 $b=5$, 若 $f(A)=0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 根据预测, 某地第 n $(n\in\mathbf{N}^*)$ 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n (单位: 辆), 其中 $a_n=\begin{cases}5n^4+15, & 1\leqslant n\leqslant 3,\\ -10n+470, & n\geqslant 4,\end{cases}$ $b_n=n+5$, 第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差.
(1) 求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量;
(2) 已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n=-4(n-46)^2+8800$ (单位: 辆). 设在某月底, 共享单车保有量达到最大, 问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, A 为 Γ 的上顶点, P 为 Γ 上异于上、下顶点的动点, M 为 x 轴正半轴上的动点.
(1) 若 P 在第一象限, 且 $|OP|=\sqrt{2}$, 求 P 的坐标;
(2) 设 $P\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, 若以 A, P, M 为顶点的三角形是直角三角形, 求 M 的横坐标;
(3) 若 $|MA|=|MP|$, 直线 AQ 与 Γ 交于另一点 C, 且 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$, 求直线 AQ 的方程.

21. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.
(1) 若 $f(x)=ax^3+1$, 求 a 的取值范围;
(2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 证明: $f(x)$ 是常值函数;
(3) 设 $f(x)$ 恒大于零. $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的、恒大于零的周期函数, M 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x)=f(x)g(x)$. 证明: "$h(x)$ 是周期函数"的充要条件是"$f(x)$ 是常值函数".

2017 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$ ( )

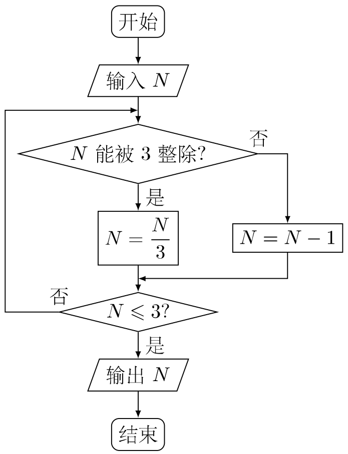
(A) $\{2\}$　(B) $\{1,\ 2,\ 4\}$

(C) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$　(D) $\{x\in\mathbf{R}\mid -1\leqslant x\leqslant 5\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y\geqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\\ y\leqslant 3,\end{cases}$ 则目标函数 $z=x+y$ 的最大值为 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) 1　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 3

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 24, 则输出 N 的值为 ( )



(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

4. 设 $\theta\in\mathbf{R}$, 则"$\left|\theta-\dfrac{\pi}{12}\right|<\dfrac{\pi}{12}$"是"$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左焦点为 F, 离心率为 $\sqrt{2}$. 若经过 F 和 $P(0,4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$

6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $g(x)=xf(x)$. 若 $a=g(-\log_2 5.1)$, $b=g(2^{0.8})$, $c=g(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ( )

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $b<a<c$　(D) $b<c<a$

7. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\pi$. 若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=2$, $f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π, 则 ( )

(A) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

(C) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　(D) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, & x\leqslant 1,\\ x+\dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-\dfrac{47}{16},2\right]$　(B) $\left[-\dfrac{47}{16},\dfrac{39}{16}\right]$　(C) $[-2\sqrt{3},2]$　(D) $\left[-2\sqrt{3},\dfrac{39}{16}\right]$

二、填空题

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数, 则 a 的值为______.

10. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为______.

11. 在极坐标系中, 直线 $4\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+1=0$ 与圆 $\rho=2\sin\theta$ 的公共点的个数为______.

12. 若 $a,b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $AB=3$, $AC=2$. 若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ (\lambda\in\mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$, 则 λ 的值为______.

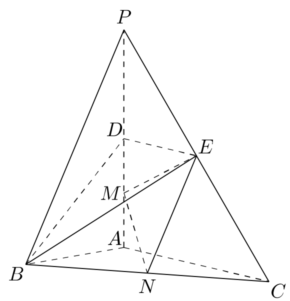
14. 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有______个. (用数字作答)

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a>b$, $a=5$, $c=6$, $\sin B=\dfrac{3}{5}$.
(1) 求 b 和 $\sin A$ 的值;
(2) 求 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

16. 从甲地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$.
(1) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;
(2) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

17. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, $\angle BAC=90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA=AC=4$, $AB=2$.
(1) 求证: $MN\,/\!/$ 平面 BDE;
(2) 求二面角 $C-EM-N$ 的正弦值;
(3) 已知点 H 在棱 PA 上, 且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{21}$, 求线段 AH 的长.



18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0, $b_2+b_3=12$, $b_3=a_4-2a_1$, $S_{11}=11b_4$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, 右顶点为 A, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 已知 A 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求椭圆的方程和抛物线的方程;
(2) 设 l 上两点 P, Q 关于 x 轴对称, 直线 AP 与椭圆相交于点 B (B 异于 A), 直线 BQ 与 x 轴相交于点 D. 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AP 的方程.

20. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点 x_0, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
(1) 求 $g(x)$ 的单调区间;
(2) 设 $m \in [1,x_0) \cup (x_0,2]$, 函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0)<0$;
(3) 求证: 存在大于 0 的常数 A, 使得对于任意的正整数 p, q, 且 $\dfrac{p}{q} \in [1,x_0) \cup (x_0,2]$, 满足 $\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right| \geqslant \dfrac{1}{Aq^4}$.

2017 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,\ 2,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$(　)

(A) $\{2\}$　(B) $\{1,\ 2,\ 4\}$　(C) $\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$　(D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

2. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则"$2-x\geqslant 0$"是"$|x-1|\leqslant 1$"的　(　)

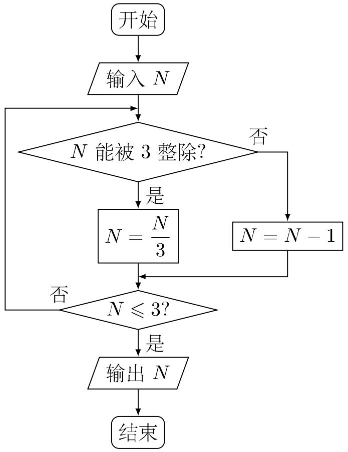
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 有 5 支彩笔 (除颜色外无差别), 颜色分别为红、黄、蓝、绿、紫. 从这 5 支彩笔中任取 2 支不同颜色的彩笔, 则取出的 2 支彩笔中含有红色彩笔的概率为　(　)

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

4. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 19, 则输出 N 的值为　(　)



(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 点 A 在双曲线的渐近线上, $\triangle OAF$ 是边长为 2 的等边三角形 (O 为原点), 则双曲线方程为　(　)

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　(D) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 若 $a=-f\left(\log_2\dfrac{1}{5}\right)$, $b=f(\log_2 4.1)$, $c=f(2^{0.8})$, 则 $a,\ b,\ c$ 的大小关系为　(　)

(A) $a<b<c$　(B) $b<a<c$　(C) $c<b<a$　(D) $c<a<b$

7. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\pi$. 若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=2$, $f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π, 则　(　)

(A) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

(C) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　(D) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|+2, & x<1,\\ x+\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是　(　)

(A) $[-2,2]$　(B) $[-2\sqrt{3},2]$　(C) $[-2,2\sqrt{3}]$　(D) $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

二、填空题

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数, 则 a 的值为______.

10. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l, 则 l 在 y 轴上的截距为______.

11. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为______.

12. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 已知点 C 在 l 上, 以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A. 若 $\angle FAC=120^\circ$, 则圆的方程为______.

13. 若 $a,b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $AB=3$, $AC=2$. 若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ (\lambda\in\mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$, 则 λ 的值为______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A,\ B,\ C$ 所对的边分别为 $a,\ b,\ c$. 已知 $a\sin A=4b\sin B$, $ac=\sqrt{5}(a^2-b^2-c^2)$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 $\sin(2B-A)$ 的值.

16. 电视台播放甲、乙两套连续剧, 每次播放连续剧时, 需要播放广告. 已知每次播放甲、乙两套连续剧时, 连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示:

	连续剧播放时长 (分钟)	广告播放时长 (分钟)	收视人次 (万)
甲	70	5	60
乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟, 广告的总播放时间不少于 30 分钟, 且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍. 分别用 $x,\ y$ 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

(1) 用 $x,\ y$ 列出满足题目条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

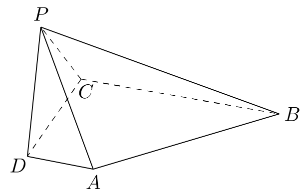
(2) 问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次, 才能使总收视人次最多?

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD\perp$ 平面 PDC, $AD\parallel BC$, $PD\perp PB$, $AD=1$, $BC=3$, $CD=4$, $PD=2$.

(1) 求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 求证: $PD\perp$ 平面 PBC;

(3) 求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n $(n\in\mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0, $b_2+b_3=12$, $b_3=a_4-2a_1$, $S_{11}=11b_4$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

19. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, $|a|\leqslant 1$. 已知函数 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$, $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 已知函数 $y=g(x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象在公共点 (x_0,y_0) 处有相同的切线.
① 求证: $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0;
② 若关于 x 的不等式 $g(x)\leqslant\mathrm{e}^x$ 在区间 $[x_0-1,x_0+1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$, 右顶点为 A, 点 E 的坐标为 $(0,c)$, $\triangle EFA$ 的面积为 $\dfrac{b^2}{2}$.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设点 Q 在线段 AE 上, $|FQ|=\dfrac{3}{2}c$, 延长线段 FQ 与椭圆交于点 P, 点 M, N 在 x 轴上, $PM\parallel QN$, 且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c, 四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.
① 求直线 FP 的斜率;
② 求椭圆的方程.

2017 普通高等学校招生考试 (浙江卷)

一、选择题

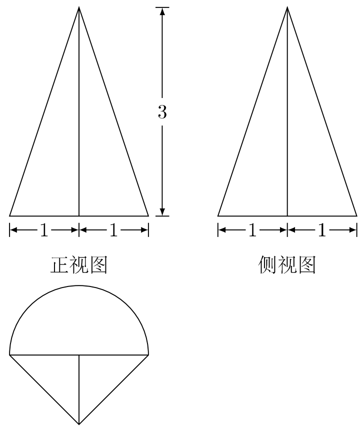
1. 已知集合 $P=\{x\mid -1<x<1\}$, $Q=\{x\mid 0<x<2\}$, 那么 $P\cup Q=$ (　)

(A) $(-1,2)$　(B) $(0,1)$　(C) $(-1,0)$　(D) $(1,2)$

2. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的离心率是 (　)

(A) $\frac{\sqrt{13}}{3}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{5}{9}$

3. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^2) 是 (　)



正视图　侧视图

俯视图

(A) $\frac{\pi}{2}+1$　(B) $\frac{\pi}{2}+3$　(C) $\frac{3\pi}{2}+1$　(D) $\frac{3\pi}{2}+3$

4. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+y-3\geqslant 0,\\ x-2y\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的取值范围是 (　)

(A) $[0,6]$　(B) $[0,4]$　(C) $[6,+\infty)$　(D) $[4,+\infty)$

5. 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是 M, 最小值是 m, 则 $M-m$ (　)

(A) 与 a 有关, 且与 b 有关　(B) 与 a 有关, 但与 b 无关

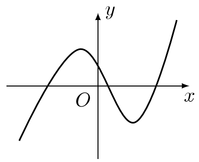
(C) 与 a 无关, 且与 b 无关　(D) 与 a 无关, 但与 b 有关

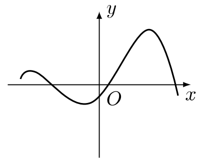
6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 则"$d>0$"是"$S_4+S_6>2S_5$"的 (　)

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

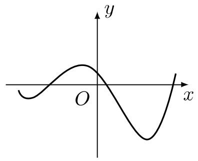
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是 (　)

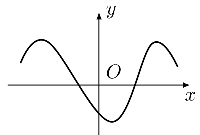




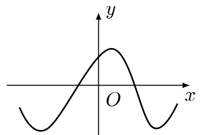
(A)



(B)



(C)



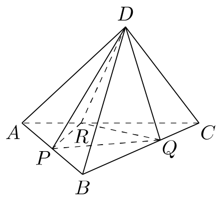
(D)

8. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i=1)=p_i$, $P(\xi_i=0)=1-p_i$, $i=1,2$. 若 $0<p_1<p_2<\frac{1}{2}$, 则 (　)

(A) $E(\xi_1)<E(\xi_2)$, $D(\xi_1)<D(\xi_2)$　(B) $E(\xi_1)<E(\xi_2)$, $D(\xi_1)>D(\xi_2)$

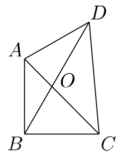
(C) $E(\xi_1)>E(\xi_2)$, $D(\xi_1)<D(\xi_2)$　(D) $E(\xi_1)>E(\xi_2)$, $D(\xi_1)>D(\xi_2)$

9. 如图, 已知正四面体 $D-ABC$ (所有棱长均相等的三棱锥), P, Q, R 分别为 AB, BC, CA 上的点, $AP=PB$, $\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RA}=2$, 分别记二面角 $D-PR-Q$, $D-PQ-R$, $D-QR-P$ 的平面角为 α, β, γ, 则 (　)



(A) $\gamma<\alpha<\beta$　(B) $\alpha<\gamma<\beta$　(C) $\alpha<\beta<\gamma$　(D) $\beta<\gamma<\alpha$

10. 如图, 已知平面四边形 $ABCD$, $AB\perp BC$, $AB=BC=AD=2$, $CD=3$, AC 与 BD 交于点 O, 记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$, $I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$, 则 (　)



(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_1<I_3<I_2$　(C) $I_3<I_1<I_2$　(D) $I_2<I_1<I_3$

二、填空题

11. 我国古代数学家刘徽创立的"割圆术"可以估算圆周率 π, 理论上能把 π 的值计算到任意精度, 祖冲之继承并发展了"割圆术", 将 π 的值精确到小数点后七位, 其结果领先世界一千多年, "割圆术"的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6, $S_6=$______.

12. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, $(a+b\mathrm{i})^2=3+4\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $a^2+b^2=$______, $ab=$______.

13. 已知多项式 $(x+1)^3(x+2)^2=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$, 则 $a_4=$______, $a_5=$______.

14. 已知 $\triangle ABC$, $AB=AC=4$, $BC=2$, 点 D 为 AB 延长线上一点, $BD=2$, 连接 CD, 则 $\triangle BDC$ 的面积是______, $\cos\angle BDC=$______.

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是______, 最大值是______.

16. 从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人, 副队长 1 人, 普通队员 2 人组成 4 人服务队, 要求服务队中至少有 1 名女生, 共有______种不同的选法. (用数字作答)

17. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a$ 在区间 $[1,4]$ 上的最大值是 5, 则 a 的取值范围是______.

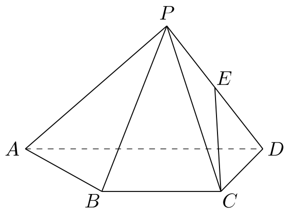
三、解答题

18. 已知函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x\ (x\in\mathbf{R})$.

(1) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值;

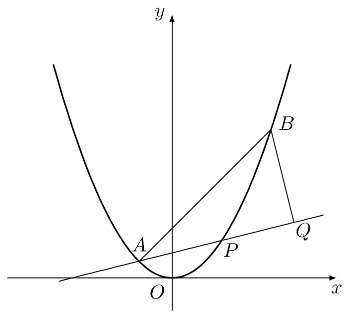
(2) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

19. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形, $BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, $PC=AD=2DC=2CB$, E 为 PD 的中点.
(1) 证明: $CE \parallel$ 平面 PAB;
(2) 求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.



20. 已知函数 $f(x)=\left(x-\sqrt{2x-1}\right)\mathrm{e}^{-x}\left(x \geqslant \dfrac{1}{2}\right)$.
(1) 求 $f(x)$ 的导函数;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上的取值范围.

21. 如图, 已知抛物线 $x^2=y$, 点 $A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$, 抛物线上的点 $P(x,y)\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\right)$, 过点 B 作直线 AP 的垂线, 垂足为 Q.
(1) 求直线 AP 斜率的取值范围;
(2) 求 $|PA|\cdot|PQ|$ 的最大值.



22. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1=1$, $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明: 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,
(1) $0<x_{n+1}<x_n$;
(2) $2x_{n+1}-x_n \leqslant \dfrac{x_nx_{n+1}}{2}$;
(3) $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-2}}$.