# 2016 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

## 一、选择题

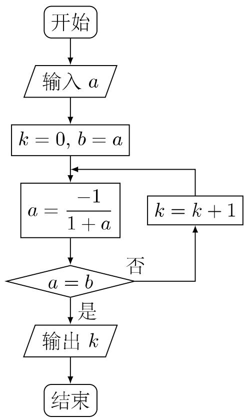
1. 已知集合 $A=\{x\mid |x|<2\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{0,\ 1\}$ (B) $\{0,\ 1,\ 2\}$ (C) $\{-1,\ 0,\ 1\}$ (D) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

2. 若 $x$, $y$ 满足 $\begin{cases}2x-y\leqslant 0,\\ x+y\leqslant 3,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最大值为 ( )

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 $a$ 值为 1, 则输出的 $k$ 值为 ( )




(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是向量, 则"$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$"是"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

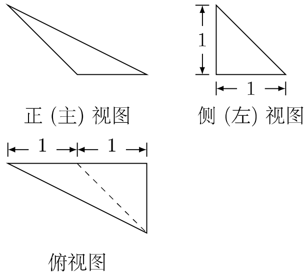
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $x, y\in\mathbf{R}$, 且 $x>y>0$, 则 ( )

(A) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}>0$ (B) $\sin x-\sin y>0$

(C) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^y<0$ (D) $\ln x+\ln y>0$

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 ( )




(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

7. 将函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 图象上的点 $P\left(\dfrac{\pi}{4},t\right)$ 向左平移 $s$ $(s>0)$ 个单位长度得到点 $P'$. 若 $P'$ 位于函数 $y=\sin 2x$ 的图象上, 则 ( )

(A) $t=\dfrac{1}{2}$, $s$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $s$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$

(C) $t=\dfrac{1}{2}$, $s$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $s$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$

8. 袋中装有偶数个球, 其中红球、黑球各占一半. 甲、乙、丙是三个空盒. 每次从袋中任意取出两个球, 将其中一个球放入甲盒, 如果这个球是红球, 就将另一个球放入乙盒, 否则就放入丙盒. 重复上述过程, 直到袋中所有球都被放入盒中, 则 ( )

(A) 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球 (B) 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

(C) 乙盒中红球不多于丙盒中红球 (D) 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

## 二、填空题

9. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若复数 $(1+\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点位于实轴上, 则 $a=$______.

10. 在 $(1-2x)^6$ 的展开式中, $x^2$ 的系数为______. (用数字作答)

11. 在极坐标系中, 直线 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 交于 $A$, $B$ 两点, 则 $|AB|=$______.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $S_n$ 为其前 $n$ 项和, 若 $a_1=6$, $a_3+a_5=0$, 则 $S_6=$______.

13. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的渐近线为正方形 $OABC$ 的边 $OA$, $OC$ 所在的直线, 点 $B$ 为该双曲线的焦点, 若正方形 $OABC$ 的边长为 2, 则 $a=$______.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant a,\\ -2x, & x>a.\end{cases}$

① 若 $a=0$, 则 $f(x)$ 的最大值为______;

② 若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 $a$ 的取值范围是______.

## 三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小;

(2) 求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值.

16. $A$, $B$, $C$ 三个班共有 100 名学生, 为调查他们的体育锻炼情况, 通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间, 数据如表 (单位: 小时):

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ 班 | 6 | 6.5 | 7 | 7.5 | 8 | | | |
| $B$ 班 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| $C$ 班 | 3 | 4.5 | 6 | 7.5 | 9 | 10.5 | 12 | 13.5 |

(1) 试估计 $C$ 班的学生人数;

(2) 从 $A$ 班和 $C$ 班抽出的学生中, 各随机选取一个人, $A$ 班选出的人记为甲, $C$ 班选出的人记为乙. 假设所有学生的锻炼时间相对独立, 求该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率;

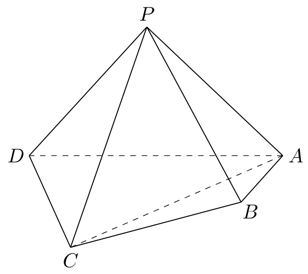
(3) 再从 $A$, $B$, $C$ 三班中各随机抽取一名学生, 他们该周锻炼时间分别是 7, 9, 8.25 (单位: 小时), 这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 $\mu_1$, 表格中数据的平均数记为 $\mu_0$, 试判断 $\mu_0$ 和 $\mu_1$ 的大小. (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, $PA\perp PD$, $PA=PD$, $AB\perp AD$, $AB=1$, $AD=2$, $AC=CD=\sqrt{5}$.

(1) 求证: $PD\perp$ 平面 $PAB$;

(2) 求直线 $PB$ 与平面 $PCD$ 所成角的正弦值;

(3) 在棱 $PA$ 上是否存在点 $M$, 使得 $BM\parallel$ 平面 $PCD$? 若存在, 求 $\dfrac{AM}{AP}$ 的值; 若不存在, 说明理由.




18. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{a-x}+bx$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(\mathrm{e}-1)x+4$.

(1) 求 $a$, $b$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知椭圆 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $O(0,0)$, $\triangle OAB$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程;

(2) 设 $P$ 是椭圆 $C$ 上一点, 直线 $PA$ 与 $y$ 轴交于点 $M$, 直线 $PB$ 与 $x$ 轴交于点 $N$. 求证: $|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

20. 设数列 $A$: $a_1, a_2, \cdots, a_N\ (N\geqslant 2)$. 如果对小于 $n\ (2\leqslant n\leqslant N)$ 的每个正整数 $k$ 都有 $a_k<a_n$, 则称 $n$ 是数列 $A$ 的一个"$G$ 时刻". 记 $G(A)$ 是数列 $A$ 的所有"$G$ 时刻"组成的集合.

(1) 对数列 $A$: $-2, 2, -1, 1, 3$, 写出 $G(A)$ 的所有元素;

(2) 证明: 若数列 $A$ 中存在 $a_n$ 使得 $a_n>a_1$, 则 $G(A)\neq\varnothing$;

(3) 证明: 若数列 $A$ 满足 $a_n-a_{n-1}\leqslant 1\ (n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)$, 则 $G(A)$ 的元素个数不小于 $a_N-a_1$.

# 2016 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

## 一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x \mid 2<x<4\}$, $B=\{x \mid x<3 \text{ 或 } x>5\}$, 则 $A\cap B=$( )

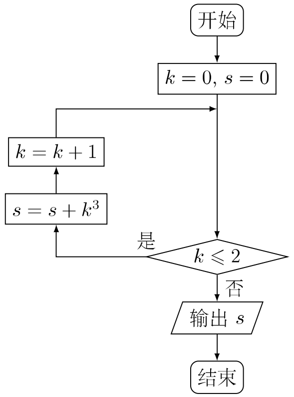
(A) $\{x \mid 2<x<5\}$ (B) $\{x \mid x<4 \text{ 或 } x>5\}$

(C) $\{x \mid 2<x<3\}$ (D) $\{x \mid x<2 \text{ 或 } x>5\}$

2. 复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $\mathrm{i}$ (B) $1+\mathrm{i}$ (C) $-\mathrm{i}$ (D) $1-\mathrm{i}$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 $s$ 值为 ( )




(A) 8 (B) 9 (C) 27 (D) 36

4. 下列函数中, 在区间 $(-1,1)$ 上为减函数的是 ( )

(A) $y=\dfrac{1}{1-x}$ (B) $y=\cos x$ (C) $y=\ln(x+1)$ (D) $y=2^{-x}$

5. 圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心到直线 $y=x+3$ 的距离为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

6. 从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人, 则甲被选中的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $\dfrac{8}{25}$ (D) $\dfrac{9}{25}$

7. 已知 $A(2,5)$, $B(4,1)$. 若点 $P(x,y)$ 在线段 $AB$ 上, 则 $2x-y$ 的最大值为 ( )

(A) $-1$ (B) 3 (C) 7 (D) 8

8. 某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段, 下表为 10 名学生的预赛成绩, 其中有三个数据模糊.

| 学生序号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 立定跳远 (单位: 米) | 1.96 | 1.92 | 1.82 | 1.80 | 1.78 |
| 30 秒跳绳 (单位: 次) | 63 | $a$ | 75 | 60 | 63 |
| 学生序号 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 立定跳远 (单位: 米) | 1.76 | 1.74 | 1.72 | 1.68 | 1.60 |
| 30 秒跳绳 (单位: 次) | 72 | 70 | $a-1$ | $b$ | 65 |

在这 10 名学生中, 进入立定跳远决赛的有 8 人, 同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人, 则 ( )

(A) 2 号学生进入 30 秒跳绳决赛 (B) 5 号学生进入 30 秒跳绳决赛

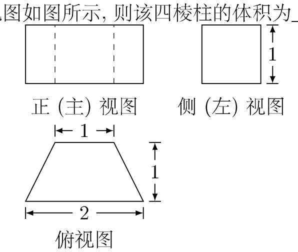
(C) 8 号学生进入 30 秒跳绳决赛 (D) 9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

## 二、填空题

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$ 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为______.

10. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\geqslant 2)$ 的最大值为______.

11. 某四棱柱的三视图如图所示, 则该四棱柱的体积为______.




12. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线为 $2x+y=0$, 一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$, 则 $a=$______; $b=$______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$, $a=\sqrt{3}c$, 则 $\dfrac{b}{c}=$______.

14. 某网店统计了连续三天售出商品的种类情况: 第一天售出 19 种商品, 第二天售出 13 种商品, 第三天售出 18 种商品; 前两天都售出的商品有 3 种, 后两天都售出的商品有 4 种, 则该网店

① 第一天售出但第二天未售出的商品有______种;

② 这三天售出的商品最少有______种.

## 三、解答题

15. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $b_2=3$, $b_3=9$, $a_1=b_1$, $a_{14}=b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

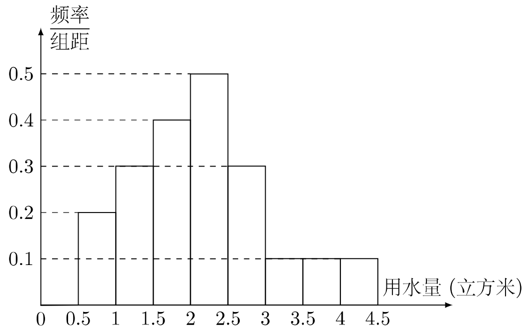
(2) 设 $c_n=a_n+b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\pi$.

(1) 求 $\omega$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

17. 某市居民用水拟实行阶梯水价, 每人每月用水量中不超过 $w$ 立方米的部分按 4 元/立方米收费, 超出 $w$ 立方米的部分按 10 元/立方米收费, 从该市随机调查了 10000 位居民, 获得了他们某月的用水量数据, 整理得到如图频率分布直方图:




(1) 如果 $w$ 为整数, 那么根据此次调查, 为使 80% 以上居民在该月的用水价格为 4 元/立方米, $w$ 至少定为多少?

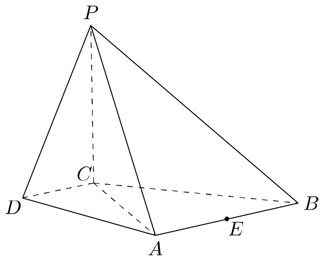
(2) 假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替, 当 $w=3$ 时, 估计该市居民该月的人均水费.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\parallel DC$, $DC\perp AC$.

(1) 求证: $DC\perp$ 平面 $PAC$;

(2) 求证: 平面 $PAB\perp$ 平面 $PAC$;

(3) 设点 $E$ 为 $AB$ 的中点. 在棱 $PB$ 上是否存在点 $F$, 使得 $PA\parallel$ 平面 $CEF$? 说明理由.




19. 已知椭圆: $C$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(2,0)$, $B(0,1)$ 两点.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程及离心率;

(2) 设 $P$ 为第三象限内一点且在椭圆 $C$ 上, 直线 $PA$ 与 $y$ 轴交于点 $M$, 直线 $PB$ 与 $x$ 轴交于点 $N$, 求证: 四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

20. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a=b=4$, 若函数 $f(x)$ 有三个不同零点, 求 $c$ 的取值范围;

(3) 求证: $a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

# 2016 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

## 一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{x\mid -2<x<3\}$, 则 $A\cap B=$______.

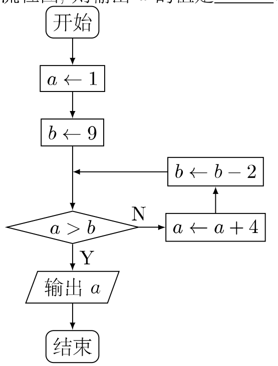
2. 复数 $z=(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z$ 的实部是______.

3. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦距是______.

4. 已知一组数据 4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 则该组数据的方差是______.

5. 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是______.

6. 如图是一个算法的流程图, 则输出 $a$ 的值是______.

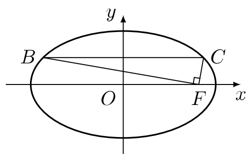



7. 将一个质地均匀的骰子 (一种各个面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和小于 10 的概率是______.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $S_n$ 是其前 $n$ 项和. 若 $a_1+a_2^2=-3$, $S_5=10$, 则 $a_9$ 的值是______.

9. 定义在区间 $[0,3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是______.

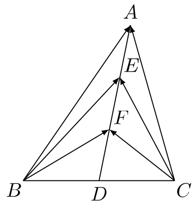
10. 如图, 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, $F$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点, 直线 $y=\dfrac{b}{2}$ 与椭圆交于 $B$, $C$ 两点, 且 $\angle BFC=90^\circ$, 则该椭圆的离心率是______.




11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1,1)$ 上 $f(x)=\begin{cases}x+a, & -1\leqslant x<0,\\ \left|\dfrac{2}{5}-x\right|, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$. 若 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)$, 则 $f(5a)$ 的值是______.

12. 已知实数 $x$, $y$ 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0,\\ 2x+y-2\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $x^2+y^2$ 的取值范围是______.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $D$ 是 $BC$ 的中点, $E$, $F$ 是 $AD$ 上两个三等分点, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$, $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$, 则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是______.

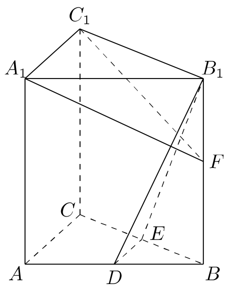



14. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A=2\sin B\sin C$, 则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是______.

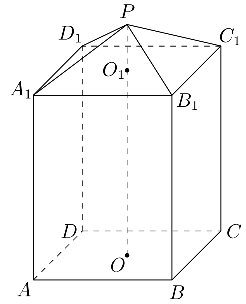
## 二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=6$, $\cos B=\dfrac{4}{5}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$.
(1) 求 $AB$ 的长;
(2) 求 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

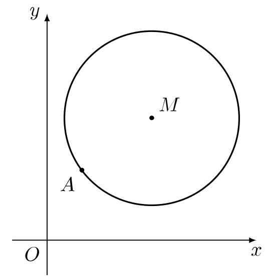
16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $D$, $E$ 分别为 $AB$, $BC$ 的中点, 点 $F$ 在侧棱 $B_1B$ 上, 且 $B_1D\perp A_1F$, $A_1C_1\perp A_1B_1$. 求证:
(1) 直线 $DE\parallel$ 平面 $A_1C_1F$;
(2) 平面 $B_1DE\perp$ 平面 $A_1C_1F$.




17. 现需要设计一个仓库, 它由上下两部分组成, 上部分的形状是正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$, 下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 并要求正四棱柱的高 $O_1O$ 是正四棱锥的高 $PO_1$ 的 4 倍.
(1) 若 $AB=6$ m, $PO_1=2$ m, 则仓库的容积是多少?
(2) 若正四棱锥的侧棱长为 6 m, 当 $PO_1$ 为多少时, 仓库的容积最大?




18. 如图, 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 已知以 $M$ 为圆心的圆 $M$: $x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.
(1) 设圆 $N$ 与 $x$ 轴相切, 与圆 $M$ 外切, 且圆心 $N$ 在直线 $x=6$ 上, 求圆 $N$ 的标准方程;
(2) 设平行于 $OA$ 的直线 $l$ 与圆 $M$ 相交于 $B$, $C$ 两点, 且 $BC=OA$, 求直线 $l$ 的方程;
(3) 设点 $T(t,0)$ 满足: 存在圆 $M$ 上的两点 $P$ 和 $Q$, 使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$, 求实数 $t$ 的取值范围.



19. 已知函数 $f(x)=a^x+b^x$ $(a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1)$.

(1) 设 $a=2,\ b=\dfrac{1}{2}$.

① 求方程 $f(x)=2$ 的根;

② 若对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 恒成立, 求实数 $m$ 的最大值;

(2) 若 $0<a<1,\ b>1$, 函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点, 求 $ab$ 的值.

20. 记 $U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 100\}$. 对数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 和 $U$ 的子集 $T$, 若 $T=\varnothing$, 定义 $S_T=0$; 若 $T=\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k\}$, 定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$. 例如: $T=\{1,\ 3,\ 66\}$ 时, $S_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是公比为 3 的等比数列, 且当 $T=\{2,\ 4\}$ 时, $S_T=30$.

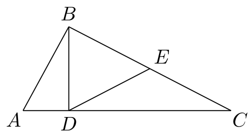
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 对任意正整数 $k$ $(1\leqslant k\leqslant 100)$, 若 $T\subseteq\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$, 求证: $S_T<a_{k+1}$;

(3) 设 $C\subseteq U,\ D\subseteq U,\ S_C\geqslant S_D$, 求证: $S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

21. 四选二.

【A】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $BD\perp AC$, $D$ 为垂足, $E$ 是 $BC$ 中点. 求证: $\angle EDC=\angle ABD$.




【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{AB}$.

【C】在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 已知直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\end{cases}$ ($t$ 为参数), 椭圆 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$ ($\theta$ 为参数). 设直线 $l$ 与椭圆 $C$ 相交于 $A,\ B$ 两点, 求线段 $AB$ 的长.

【D】设 $a>0$, $|x-1|<\dfrac{a}{3}$, $|y-2|<\dfrac{a}{3}$, 求证: $|2x+y-4|<a$.

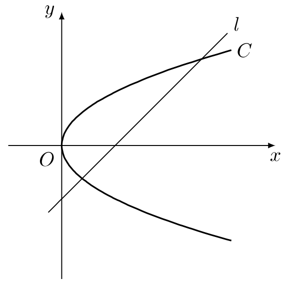
22. 如图, 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 已知直线 $l$: $x-y-2=0$, 抛物线 $C$: $y^2=2px$ $(p>0)$.

(1) 若直线 $l$ 过抛物线 $C$ 的焦点, 求抛物线 $C$ 的方程;

(2) 已知抛物线 $C$ 上存在关于直线 $l$ 对称的相异两点 $P$ 和 $Q$.

① 求证: 线段 $PQ$ 上的中点坐标为 $(2-p,-p)$;

② 求 $p$ 的取值范围.




23. (1) 求 $7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4$ 的值;

(2) 设 $m,\ n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant m$, 求证: $(m+1)\mathrm{C}_m^m+(m+2)\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+n\mathrm{C}_{n-1}^m+(n+1)\mathrm{C}_n^m=(m+1)\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}$.

# 2016 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

## 一、选择题

1. 设集合 $A=\{x \mid x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x \mid 2x-3>0\}$, 则 $A\cap B=$( )

(A) $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$ (B) $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$ (C) $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$

2. 设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$, 其中 $x$, $y$ 是实数, 则 $|x+y\mathrm{i}|=$ ( )

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27, $a_{10}=8$, 则 $a_{100}=$ ( )

(A) 100 (B) 99 (C) 98 (D) 97

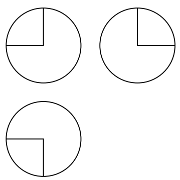
4. 某公司的班车在 7 : 30, 8 : 00, 8 : 30 发车, 小明在 7 : 50 至 8 : 30 之间到达发车站乘坐班车, 且到达发车站的时刻是随机的, 则他等车时间不超过 10 分钟的概率是 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

5. 已知方程 $\dfrac{x^2}{m^2+n}-\dfrac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线, 且该双曲线两焦点间的距离为 4, 则 $n$ 的取值范围是 ( )

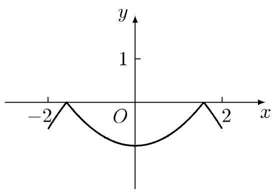
(A) $(-1,3)$ (B) $(-1,\sqrt{3})$ (C) $(0,3)$ (D) $(0,\sqrt{3})$

6. 如图, 某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\dfrac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是 ( )

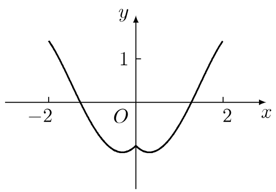


(A) $17\pi$ (B) $18\pi$ (C) $20\pi$ (D) $28\pi$

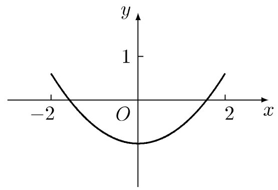
7. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为 ( )



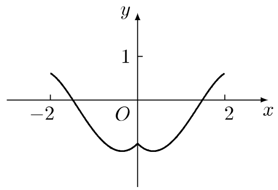

(A)




(B)




(C)



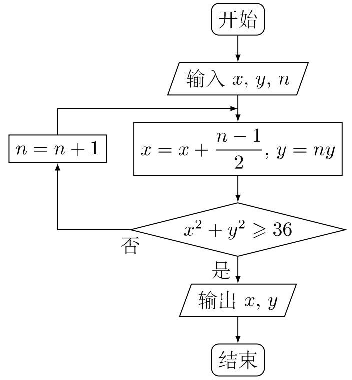

(D)

8. 若 $a>b>1$, $0<c<1$, 则 ( )

(A) $a^c<b^c$ (B) $ab^c<ba^c$

(C) $a\log_b c<b\log_a c$ (D) $\log_a c<\log_b c$

9. 执行下面的程序图, 如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$, 则输出 $x$, $y$ 的值满足 ( )




(A) $y=2x$ (B) $y=3x$ (C) $y=4x$ (D) $y=5x$

10. 以抛物线 $C$ 的顶点为圆心的圆交 $C$ 于 $A$, $B$ 两点, 交 $C$ 的准线于 $D$, $E$ 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$, $|DE|=2\sqrt{5}$, 则 $C$ 的焦点到准线的距离为 ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

11. 平面 $\alpha$ 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 $A$, $\alpha\,/\!/$ 平面 $CB_1D_1$, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$, 则 $m$, $n$ 所成角的正弦值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调, 则 $\omega$ 的最大值为 ( )

(A) 11 (B) 9 (C) 7 (D) 5

## 二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$, 则 $m=$______.

14. $(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中, $x^3$ 的系数是______. (用数字填写答案)

15. 设等比数列满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为______.

16. 某高科技企业生产产品 $A$ 和产品 $B$, 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 $A$ 需要甲材料 1.5 kg, 乙材料 1 kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 $B$ 需要甲材料 0.5 kg, 乙材料 0.3 kg, 用 3 个工时, 生产一件产品 $A$ 的利润为 2100 元, 生产一件产品 $B$ 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150 kg, 乙材料 90 kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 $A$、产品 $B$ 的利润之和的最大值为______元.

## 三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 $A$, $B$, $C$ 的对边分别为 $a$, $b$, $c$, 已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

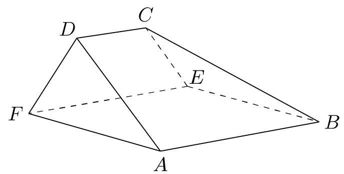
(1) 求 $C$;

(2) 若 $c=\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

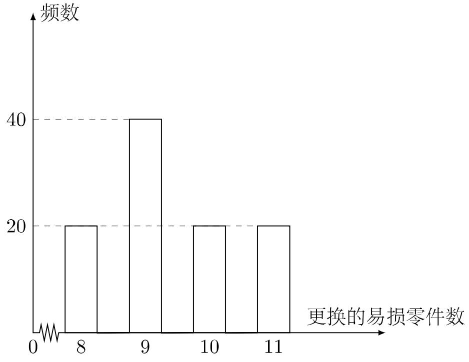
18. 如图, 在以 $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ 为顶点的五面体中, 面 $ABEF$ 为正方形, $AF=2FD$, $\angle AFD=90°$, 且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 $60°$.

(1) 证明: 平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$;

(2) 求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.



19. 某公司计划购买 2 台机器, 该种机器使用三年后即被淘汰, 机器有一易损零件, 在购进机器时, 可以额外购买这种零件作为备件, 每个 200 元. 在机器使用期间, 如果备件不足再购买, 则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件, 为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数, 得下面柱状图:




以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率, 记 $X$ 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数, $n$ 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

(1) 求 $X$ 的分布列;

(2) 若要求 $P(X \leqslant n) \geqslant 0.5$, 确定 $n$ 的最小值;

(3) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据, 在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一, 应选用哪个?

20. 设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 $A$, 直线 $l$ 过点 $B(1,0)$ 且与 $x$ 轴不重合, $l$ 交圆 $A$ 于 $C$, $D$ 两点, 过 $B$ 作 $AC$ 的平行线交 $AD$ 于点 $E$.

(1) 证明 $|EA|+|EB|$ 为定值, 并写出点 $E$ 的轨迹方程;

(2) 设点 $E$ 的轨迹为曲线 $C_1$, 直线 $l$ 交 $C_1$ 于 $M$, $N$ 两点, 过 $B$ 且与 $l$ 垂直的直线与圆 $A$ 交于 $P$, $Q$ 两点, 求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

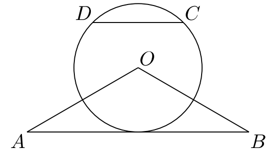
(1) 求 $a$ 的取值范围;

(2) 设 $x_1$, $x_2$ 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1+x_2<2$.

22. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB=120°$, 以 $O$ 为圆心, $\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(1) 证明: 直线 $AB$ 与 $\odot O$ 相切;

(2) 点 $C$, $D$ 在 $\odot O$ 上, 且 $A$, $B$, $C$, $D$ 四点共圆, 证明: $AB \parallel CD$.




23. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=1+a\sin t, \end{cases}$ ($t$ 为参数, $a>0$). 在以坐标原点为极点, $x$ 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2$: $\rho=4\cos\theta$.

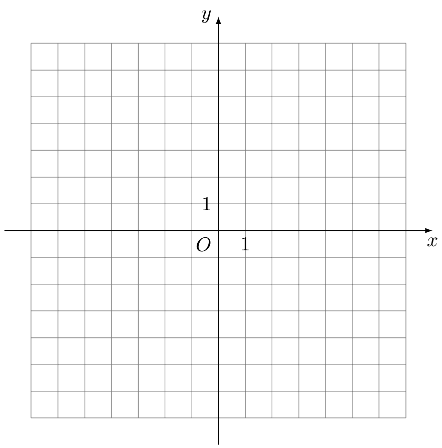
(1) 说明 $C_1$ 是哪种曲线, 并将 $C_1$ 的方程化为极坐标方程;

(2) 直线 $C_3$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$, 其中 $\alpha_0$ 满足 $\tan\alpha_0=2$, 若曲线 $C_1$ 与 $C_2$ 的公共点都在 $C_3$ 上, 求 $a$.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(1) 在图中画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



# 2016 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

## 一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{1,\ 3\}$　(B) $\{3,\ 5\}$　(C) $\{5,\ 7\}$　(D) $\{1,\ 7\}$

2. 设 $(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 的实部与虚部相等, 其中 $a$ 为实数, 则 $a=$ ( )

(A) $-3$　(B) $-2$　(C) $2$　(D) $3$

3. 为美化环境, 从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中, 余下的 2 种花种在另一个花坛中, 则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是 ( )

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{5}{6}$

4. $\triangle ABC$ 的内角 $A$, $B$, $C$ 的对边分别为 $a$, $b$, $c$. 已知 $a=\sqrt{5}$, $c=2$, $\cos A=\frac{2}{3}$, 则 $b=$ ( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $2$　(D) $3$

5. 直线 $l$ 经过椭圆的一个顶点和一个焦点, 若椭圆中心到 $l$ 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 则该椭圆的离心率为 ( )

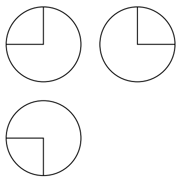
(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

6. 将函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后, 所得图象对应的函数为 ( )

(A) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　(B) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　(D) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

7. 如图, 某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是 ( )



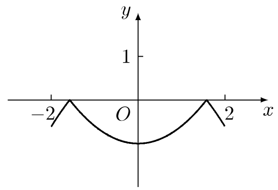
(A) $17\pi$　(B) $18\pi$　(C) $20\pi$　(D) $28\pi$

8. 若 $a>b>0$, $0<c<1$, 则 ( )

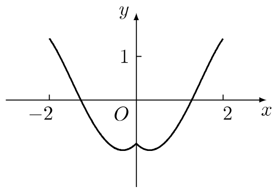
(A) $\log_a c<\log_b c$　(B) $\log_c a<\log_c b$

(C) $a^c<b^c$　(D) $c^a>c^b$

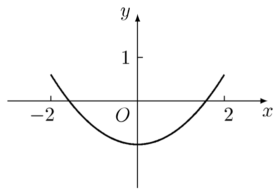
9. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为 ( )



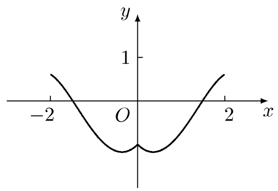

(A)




(B)

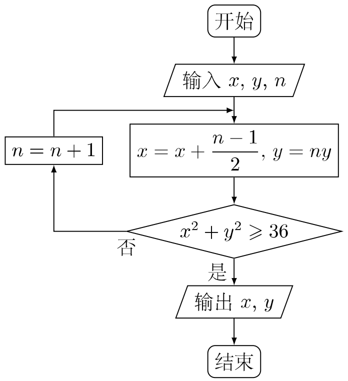



(C)




(D)

10. 执行下面的程序图, 如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$, 则输出 $x$, $y$ 的值满足 ( )




(A) $y=2x$　(B) $y=3x$　(C) $y=4x$　(D) $y=5x$

11. 平面 $\alpha$ 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 $A$, $\alpha\,/\!/$ 平面 $CB_1D_1$, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$, 则 $m$, $n$ 所成角的正弦值为 ( )

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{1}{3}$

12. 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增, 则 $a$ 的取值范围是 ( )

(A) $[-1,1]$　(B) $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$　(C) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　(D) $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

## 二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,x+1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $x=$______.

14. 已知 $\theta$ 是第四象限角, 且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$______.

15. 设直线 $y=x+2a$ 与圆 $C$: $x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 $A$, $B$ 两点, 若 $|AB|=2\sqrt{3}$, 则圆 $C$ 的面积为______.

16. 某高科技企业生产产品 $A$ 和产品 $B$, 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 $A$ 需要甲材料 1.5 kg, 乙材料 1 kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 $B$ 需要甲材料 0.5 kg, 乙材料 0.3 kg, 用 3 个工时, 生产一件产品 $A$ 的利润为 2100 元, 生产一件产品 $B$ 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150 kg, 乙材料 90 kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 $A$、产品 $B$ 的利润之和的最大值为______元.

## 三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, $b_2=\frac{1}{3}$, $a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

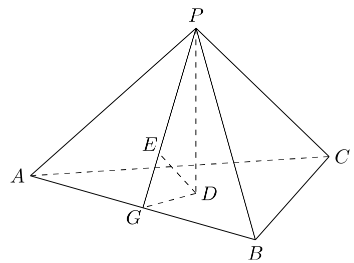
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和.

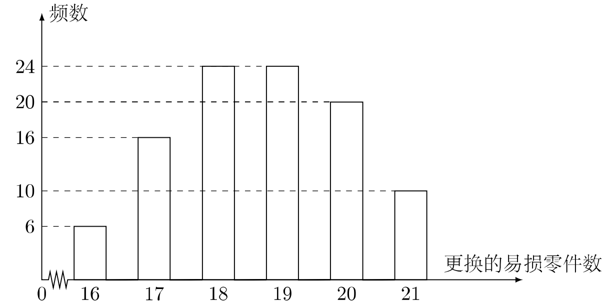
18. 如图, 在已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形, $PA=6$, 顶点 $P$ 在平面 $ABC$ 内的正投影为点 $D$, $D$ 在平面 $PAB$ 内的正投影为点 $E$, 连接 $PE$ 并延长交 $AB$ 于点 $G$.

(1) 证明 $G$ 是 $AB$ 的中点;

(2) 如图, 在图中作出点 $E$ 在平面 $PAC$ 内的正投影 $F$ (说明做法及理由), 并求四面体 $PDEF$ 的体积.



19. 某公司计划购买 1 台机器, 该种机器使用三年后即被淘汰, 机器有一易损零件, 在购进机器时, 可以额外购买这种零件作为备件, 每个 200 元. 在机器使用期间, 如果备件不足再购买, 则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件, 为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年试用期内更换的易损零件数, 得下面柱状图:




记 $x$ 表示 1 台机器在三年试用期内需更换的易损零件数, $y$ 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用 (单位: 元), $n$ 表示购机的同时购买的易损零件数.

(1) 若 $n=19$, 求 $y$ 与 $x$ 的函数解析式;

(2) 若要求"需更换的易损零件数不大于 $n$"的频率不小于 0.5, 求 $n$ 的最小值;

(3) 假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件或每台都购买 20 个易损零件, 分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数, 以此作为决策依据, 购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件?

20. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 直线 $l$: $y=t$ $(t\neq 0)$ 交 $y$ 轴于点 $M$, 交抛物线 $C$: $y^2=2px$ $(p>0)$ 于点 $P$, $M$ 关于点 $P$ 的对称点为 $N$, 连接 $ON$ 并延长交 $C$ 于点 $H$.

(1) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$;

(2) 除 $H$ 以外, 直线 $MH$ 与抛物线 $C$ 是否有其它公共点? 说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$.

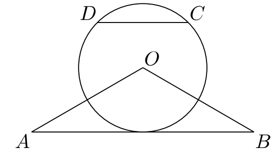
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 $a$ 的取值范围.

22. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB=120°$, 以 $O$ 为圆心, $\dfrac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(1) 证明: 直线 $AB$ 与 $\odot O$ 相切;

(2) 点 $C$, $D$ 在 $\odot O$ 上, 且 $A$, $B$, $C$, $D$ 四点共圆, 证明: $AB\parallel CD$.




23. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=1+a\sin t,\end{cases}$ ($t$ 为参数, $a>0$). 在以坐标原点为极点, $x$ 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2$: $\rho=4\cos\theta$.

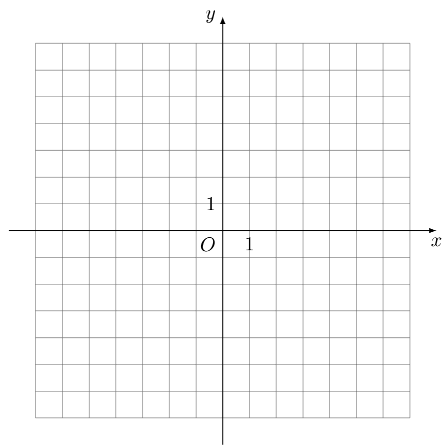
(1) 说明 $C_1$ 是哪种曲线, 并将 $C_1$ 的方程化为极坐标方程;

(2) 直线 $C_3$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$, 其中 $\alpha_0$ 满足 $\tan\alpha_0=2$, 若曲线 $C_1$ 与 $C_2$ 的公共点都在 $C_3$ 上, 求 $a$.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(1) 在图中画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



# 2016 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

## 一、选择题

1. 已知 $z=(m+3)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第四象限, 则实数 $m$ 的取值范围是 ( )

(A) $(-3,1)$ (B) $(-1,3)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(-\infty,-3)$

2. 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{x\,|\,(x+1)(x-2)<0,\ x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

(A) $\{1\}$ (B) $\{1,\ 2\}$

(C) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ (D) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

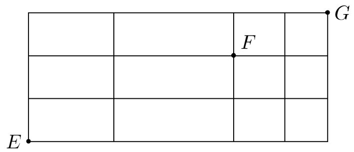
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$, $\boldsymbol{b}=(3,-2)$, 且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$ ( )

(A) $-8$ (B) $-6$ (C) $6$ (D) $8$

4. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ ( )

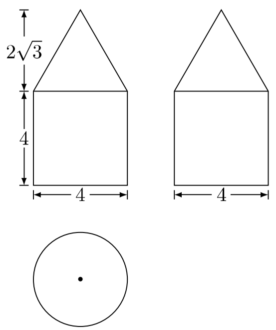
(A) $-\dfrac{4}{3}$ (B) $-\dfrac{3}{4}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

5. 如图, 小明从街道的 $E$ 处出发, 先到 $F$ 处与小红会合, 再一起到位于 $G$ 处的老年公寓参加志愿者活动, 则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为 ( )




(A) 24 (B) 18 (C) 12 (D) 9

6. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 ( )



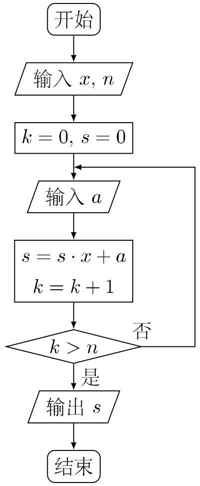

(A) $20\pi$ (B) $24\pi$ (C) $28\pi$ (D) $32\pi$

7. 若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度, 则平移后图象的对称轴为 ( )

(A) $x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$ (B) $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$

(C) $x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z})$ (D) $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z})$

8. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2$, $n=2$, 依次输入的 $a$ 为 2, 2, 5, 则输出的 $s=$ ( )




(A) 7 (B) 12 (C) 17 (D) 34

9. 若 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{7}{25}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $-\dfrac{1}{5}$ (D) $-\dfrac{7}{25}$

10. 从区间 $[0,1]$ 随机抽取 $2n$ 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$, 构成 $n$ 个数对 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_n,y_n)$, 其中两数的平方和小于 1 的数对共有 $m$ 个, 则用随机模拟的方法得到的圆周率的近似值为 ( )

(A) $\dfrac{4n}{m}$ (B) $\dfrac{2n}{m}$ (C) $\dfrac{4m}{n}$ (D) $\dfrac{2m}{n}$

11. 已知 $F_1, F_2$ 是双曲线 $E$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点, 点 $M$ 在 $E$ 上, $MF_1$ 与 $x$ 轴垂直, $\sin\angle MF_2F_1=\dfrac{1}{3}$, 则 $E$ 的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

12. 已知函数 $f(x)\ (x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$, 若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_m,y_m)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$ ( )

(A) 0 (B) $m$ (C) $2m$ (D) $4m$

## 二、填空题

13. $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$, 若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$______.

14. $\alpha, \beta$ 是两个平面, $m, n$ 是两条线, 有下列四个命题:

① 如果 $m\perp n, m\perp\alpha, n\parallel\beta$, 那么 $\alpha\perp\beta$;

② 如果 $m\perp\alpha, n\parallel\alpha$, 那么 $m\perp n$;

③ 如果 $\alpha\parallel\beta, m\subset\alpha$, 那么 $m\parallel\beta$;

④ 如果 $m\parallel n, \alpha\parallel\beta$, 那么 $m$ 与 $\alpha$ 所成的角和 $n$ 与 $\beta$ 所成的角相等.

则上述四个命题中真命题的是______.

15. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: "我与乙的卡片上相同的数字不是 2", 乙看了丙的卡片后说: "我与丙的卡片上相同的数字不是 1", 丙说: "我的卡片上的数字之和不是 5", 则甲的卡片上的数字是______.

16. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线, 也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线, $b=$______.

## 三、解答题

17. $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 且 $a_1=1$, $S_7=28$. 记 $b_n=[\lg a_n]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数, 如 $[0.9]=0$, $[\lg 99]=1$.

(1) 求 $b_1, b_{11}, b_{101}$;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项和.

18. 某险种的基本保费为 $a$ (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

| 上年度出险次数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geqslant 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 保费 | $0.85a$ | $a$ | $1.25a$ | $1.5a$ | $1.75a$ | $2a$ |

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下:

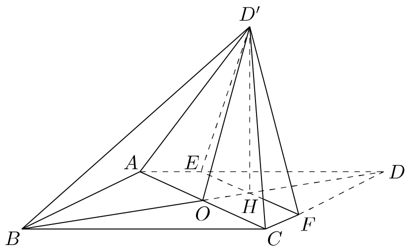
| 一年内出险次数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geqslant 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | 0.30 | 0.15 | 0.20 | 0.20 | 0.10 | 0.05 |

(1) 求一续保人本年度的保费高于基本保费的概率;

(2) 若一续保人本年度的保费高于基本保费, 求其保费比基本保费高出 60% 的概率;

(3) 求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值.

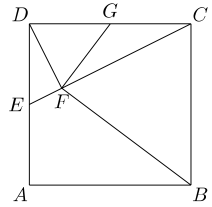
19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$, $AB=5$, $AC=6$, 点 $E$, $F$ 分别在 $AD$, $CD$ 上, $AE=CF=\dfrac{5}{4}$, $EF$ 交 $BD$ 于点 $H$. 将三角形 $DEF$ 沿 $EF$ 折到三角形 $D'EF$ 的位置 $OD'=\sqrt{10}$.
(1) 证明: $D'H\perp$ 平面 $ABCD$;
(2) 求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值.




20. 已知椭圆 $E$: $\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 $x$ 轴上, $A$ 是 $E$ 的左顶点, 斜率为 $k$ $(k>0)$ 的直线交 $E$ 于 $A$, $M$ 两点, 点 $N$ 在 $E$ 上, $MA\perp NA$.
(1) 当 $t=4$, $|AM|=|AN|$ 时, 求三角形 $AMN$ 的面积;
(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 求 $k$ 的取值范围.

21. (1) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\cdot \mathrm{e}^x$ 的单调性, 并证明当 $x>0$ 时, $(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$;
(2) 证明: 当 $a\in[0,1)$ 时, 函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}$ $(x>0)$ 有最小值. 设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求函数 $h(a)$ 的值域.

22. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $E$, $G$ 分别在边 $DA$, $DC$ 上 (不与端点重合), 且 $DE=DG$, 过 $D$ 点作 $DF\perp CE$, 垂足为 $F$.
(1) 证明: $B$, $C$, $G$, $F$ 四点共圆;
(2) 若 $AB=1$, $E$ 为 $DA$ 的中点, 求四边形 $BCGF$ 的面积.




23. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 圆 $C$ 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.
(1) 以坐标原点为极点, $x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求圆 $C$ 的极坐标方程;
(2) 直线 $l$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ ($t$ 为参数), 直线 $l$ 与圆 $C$ 交于 $A$, $B$ 两点, $|AB|=\sqrt{10}$, 求 $l$ 的斜率.

24. 已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$, $M$ 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.
(1) 求 $M$;
(2) 证明: 当 $a$, $b\in M$ 时, $|a+b|<|1+ab|$.

# 2016 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

## 一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{x \mid x^2<9\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

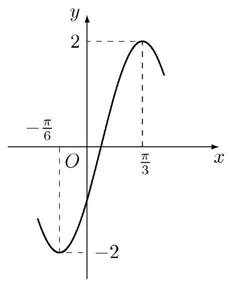
(A) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (B) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(C) $\{1, 2, 3\}$ (D) $\{1, 2\}$

2. 设复数 $z$ 满足 $z+\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$, 则 $\overline{z}=$ ( )

(A) $-1+2\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) $3+2\mathrm{i}$ (D) $3-2\mathrm{i}$

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 ( )




(A) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ (B) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ (D) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

4. 体积为 8 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球面的表面积为 ( )

(A) $12\pi$ (B) $\frac{32}{3}\pi$ (C) $8\pi$ (D) $4\pi$

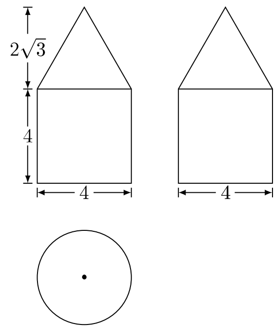
5. 设 $F$ 为抛物线 $C$: $y^2=4x$ 的焦点, 曲线 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$ 与 $C$ 交于点 $P$, $PF\perp x$ , 则 $k=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

6. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ ( )

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

7. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 ( )

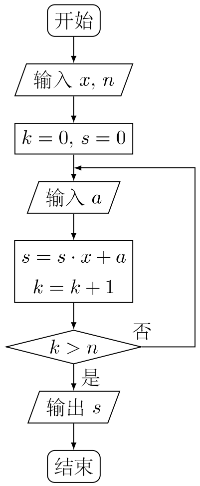



(A) $20\pi$ (B) $24\pi$ (C) $28\pi$ (D) $32\pi$

8. 某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现, 红灯持续时间为 40 秒. 若一名行人来到该路口遇到红灯, 则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为 ( )

(A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{3}{10}$

9. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2$, $n=2$, 依次输入的 $a$ 为 2, 2, 5, 则输出的 $s=$ ( )




(A) 7 (B) 12 (C) 17 (D) 34

10. 下列函数中, 其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ( )

(A) $y=x$ (B) $y=\lg x$ (C) $y=2^x$ (D) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

11. 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为 ( )

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

12. 已知函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$, 若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_m,y_m)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=$( )

(A) 0 (B) $m$ (C) $2m$ (D) $4m$

## 二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,4)$, $\boldsymbol{b}=(3,-2)$, 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $m=$______.

14. 若 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0, \\ x+y-3\geqslant 0, \\ x-3\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值为______.

15. $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$, 若 $\cos A=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$______.

16. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: "我与乙的卡片上相同的数字不是 2", 乙看了丙的卡片后说: "我与丙的卡片上相同的数字不是 1", 丙说: "我的卡片上的数字之和不是 5", 则甲的卡片上的数字是______.

## 三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_4=4$, $a_5+a_7=6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=[a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和, 其中 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数, 如 $[0.9]=0$, $[2.6]=2$.

18. 某险种的基本保费为 $a$ (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

| 上年度出险次数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geqslant 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 保费 | $0.85a$ | $a$ | $1.25a$ | $1.5a$ | $1.75a$ | $2a$ |

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况, 得到如下统计表:

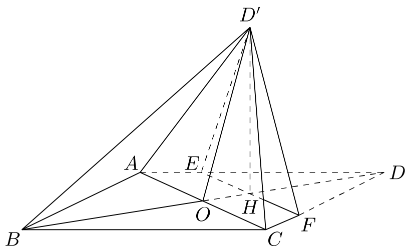
| 上年度出险次数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geqslant 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 60 | 50 | 30 | 30 | 20 | 10 |

(1) 记 $A$ 为事件: "一续保人本年度的保费不高于基本保费". 求 $P(A)$ 的估计值;

(2) 记 $B$ 为事件: "一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%". 求 $P(B)$ 的估计值;

(2) 求续保人本年度的平均保费估计值.

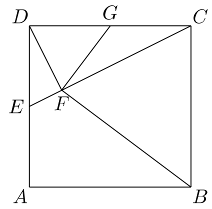
19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$, 点 $E$, $F$ 分别在 $AD$, $CD$ 上, $AE=CF$, $EF$ 交 $BD$ 于点 $H$, 将 $\triangle DEF$ 沿 $EF$ 折到 $\triangle D'EF$ 的位置.
(1) 证明: $AC \perp HD'$;
(2) 若 $AB=5$, $AC=6$, $AE=\dfrac{5}{4}$, $OD'=2\sqrt{2}$, 求五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积.




20. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.
(1) 当 $a=4$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;
(2) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f(x)>0$, 求 $a$ 的取值范围.

21. 已知点 $A$ 是椭圆 $E$: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点, 斜率为 $k\ (k>0)$ 的直线交椭圆 $E$ 于 $A$, $M$ 两点, 点 $N$ 在 $E$ 上, $MA\perp NA$.
(1) 当 $|AM|=|AN|$ 时, 求三角形 $AMN$ 的面积;
(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 证明: $\sqrt{3}<k<2$.

22. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $E$, $G$ 分别在边 $DA$, $DC$ 上 (不与端点重合), 且 $DE=DG$, 过 $D$ 点作 $DF\perp CE$, 垂足为 $F$.
(1) 证明: $B$, $C$, $G$, $F$ 四点共圆;
(2) 若 $AB=1$, $E$ 为 $DA$ 的中点, 求四边形 $BCGF$ 的面积.




23. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 圆 $C$ 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.
(1) 以坐标原点为极点, $x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求圆 $C$ 的极坐标方程;
(2) 直线 $l$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ ($t$ 为参数), 直线 $l$ 与圆 $C$ 交于 $A$, $B$ 两点, $|AB|=\sqrt{10}$, 求 $l$ 的斜率.

24. 已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$, $M$ 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.
(1) 求 $M$;
(2) 证明: 当 $a$, $b\in M$ 时, $|a+b|<|1+ab|$.

# 2016 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

## 一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\mid (x-2)(x-3)\geqslant 0\}$, $T=\{x\mid x>0\}$, 则 $S\cap T=$ ( )

(A) $[2,3]$ (B) $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$ (C) $[3,+\infty)$ (D) $(0,2]\cup[3,+\infty)$

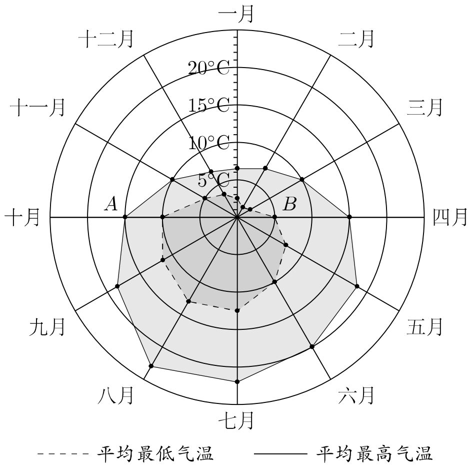
2. 若 $z=1+2\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{4\mathrm{i}}{z\bar{z}-1}=$ ( )

(A) 1 (B) $-1$ (C) i (D) $-$i

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ ( )

(A) $30^\circ$ (B) $45^\circ$ (C) $60^\circ$ (D) $120^\circ$

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 $A$ 点表示十月的平均最高气温约为 $15^\circ$C, $B$ 点表示四月的平均最低气温约为 $5^\circ$C. 下面叙述不正确的是 ( )




(A) 各月的平均最低气温都在 $0^\circ$C 以上

(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同

(D) 平均气温高于 $20^\circ$C 的月份有 5 个

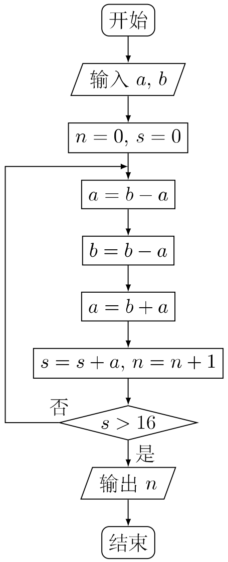
5. 若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{64}{25}$ (B) $\dfrac{48}{25}$ (C) 1 (D) $\dfrac{16}{25}$

6. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=4^{\frac{2}{5}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 ( )

(A) $b<a<c$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

7. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ ( )

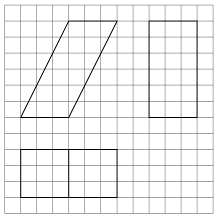



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, $BC$ 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\cos A=$ ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (D) $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 ( )



(A) $18+36\sqrt{5}$ (B) $54+18\sqrt{5}$ (C) 90 (D) 81

10. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 $V$ 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 $V$ 的最大值是 ( )

(A) $4\pi$ (B) $\dfrac{9\pi}{2}$ (C) $6\pi$ (D) $\dfrac{32\pi}{3}$

11. 已知 $O$ 为坐标原点, $F$ 是椭圆 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点, $A$, $B$ 分别为 $C$ 的左、右顶点, $P$ 为 $C$ 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 $A$ 的直线 $l$ 与线段 $PF$ 交于点 $M$, 与 $y$ 轴交于点 $E$. 若直线 $BM$ 经过 $OE$ 的中点, 则 $C$ 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

12. 定义"规范 01 数列"$\{a_n\}$ 如下: $\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项, 其中 $m$ 项为 0, $m$ 项为 1, 且对任意 $k\leqslant 2m$, $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数. 若 $m=4$, 则不同的"规范 01 数列"共有 ( )

(A) 18 个 (B) 16 个 (C) 14 个 (D) 12 个

## 二、填空题

13. 若 $x$, $y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0, \\ x-2y\leqslant 0, \\ x+2y-2\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为______.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移______个单位长度得到.

15. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\ln(-x)+3x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,-3)$ 处的切线方程是______.

16. 已知直线 $l$: $mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 $A$, $B$ 两点, 过 $A$, $B$ 分别做 $l$ 的垂线与 $x$ 轴交于 $C$, $D$ 两点, 若 $AB=2\sqrt{3}$, 则 $|CD|=$______.

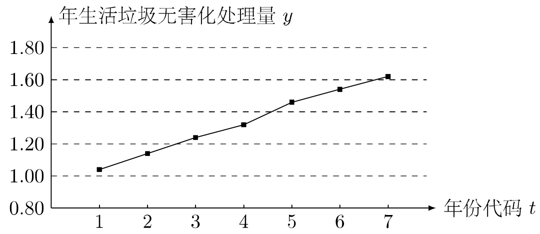
## 三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=1+\lambda a_n$, 其中 $\lambda\neq 0$;

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式;

(2) 若 $S_5=\dfrac{31}{32}$, 求 $\lambda$.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.




注: 年份代码 1 − 7 分别对应年份 2008 − 2014

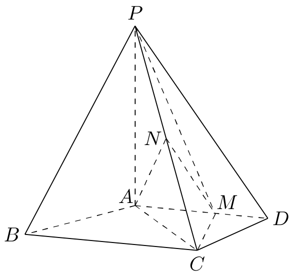
(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 $y$ 与 $t$ 的关系, 请用相关系数加以说明;
(2) 建立 $y$ 关于 $t$ 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

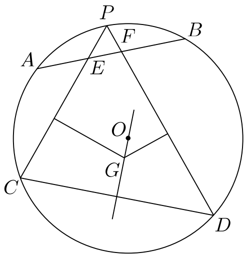
19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, $M$ 为线段 $AD$ 上一点, $AM = 2MD$, $N$ 为 $PC$ 的中点.
(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 $PAB$;
(2) 求直线 $AN$ 与平面 $PMN$ 所成角的正弦值.




20. 已知抛物线 $C$: $y^2 = 2x$ 的焦点为 $F$, 平行于 $x$ 轴的两条直线 $l_1$, $l_2$ 分别交 $C$ 于 $A$, $B$ 两点, 交 $C$ 的准线于 $P$, $Q$ 两点.
(1) 若 $F$ 在线段 $AB$ 上, $R$ 是 $PQ$ 的中点, 证明 $AR \parallel FQ$;
(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 $AB$ 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \alpha\cos 2x + (\alpha-1)(\cos x+1)$, 其中 $\alpha > 0$, $|f(x)|$ 的最大值为 $A$.
(1) 求 $f'(x)$;
(2) 求 $A$;
(3) 证明 $|f'(x)| \leqslant 2A$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 $P$, 弦 $PC$, $PD$ 分别交 $AB$ 于 $E$, $F$ 两点.
(1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;
(2) 若 $EC$ 的垂直平分线与 $FD$ 的垂直平分线交于点 $G$, 证明 $OG \perp CD$.




23. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha, \end{cases}$ ($\alpha$ 为参数), 以坐标原点为极点, 以 $x$ 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.
(1) 写出 $C_1$ 的普通方程和 $C_2$ 的直角坐标方程;
(2) 设点 $P$ 在 $C_1$ 上, 点 $Q$ 在 $C_2$ 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 $P$ 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x-a| + a$.
(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;
(2) 设函数 $g(x) = |2x-1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geqslant 3$, 求 $a$ 的取值范围.

# 2016 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 文)

## 一、选择题

1. 设集合 $A=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{4,\ 8\}$, 则 $\complement_A B=$ ( )

   (A) $\{4,\ 8\}$ (B) $\{0,\ 2,\ 6\}$
   
   (C) $\{0,\ 2,\ 6,\ 10\}$ (D) $\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

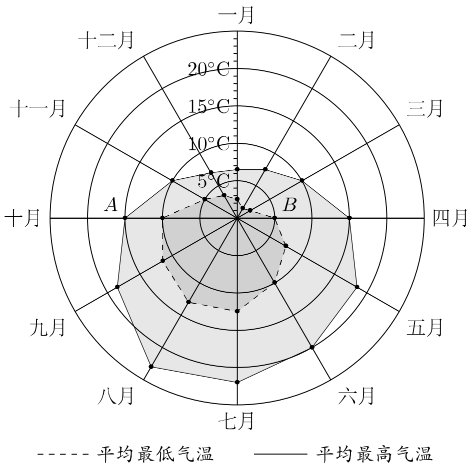
2. 若 $z=4+3\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{\overline{z}}{|z|}=$ ( )

   (A) 1 (B) $-1$ (C) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (D) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ ( )

   (A) $30^\circ$ (B) $45^\circ$ (C) $60^\circ$ (D) $120^\circ$

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 $A$ 点表示十月的平均最高气温约为 $15^\circ\mathrm{C}$, $B$ 点表示四月的平均最低气温约为 $5^\circ\mathrm{C}$. 下面叙述不正确的是 ( )




   (A) 各月的平均最低气温都在 $0^\circ\mathrm{C}$ 以上
   
   (B) 七月的平均温差比一月的平均温差大
   
   (C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同
   
   (D) 平均气温高于 $20^\circ\mathrm{C}$ 的月份有 5 个

5. 小敏打开计算机时, 忘记了开机密码的前两位, 只记得第一位是 $M$, $I$, $N$ 中的一个字母, 第二位是 1, 2, 3, 4, 5 中的一个数字, 则小敏输入一次密码能够成功开机的概率是 ( )

   (A) $\dfrac{8}{15}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{15}$ (D) $\dfrac{1}{30}$

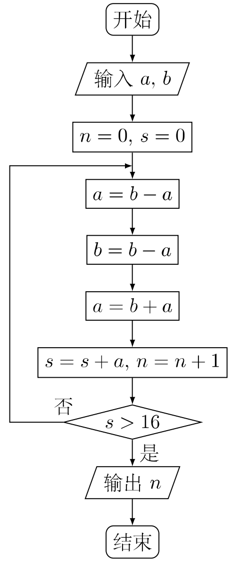
6. 若 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta=$ ( )

   (A) $-\dfrac{4}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

7. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=3^{\frac{2}{3}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 ( )

   (A) $b<a<c$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

8. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ ( )

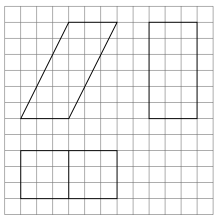



   (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, $BC$ 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\sin A=$ ( )

   (A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

10. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 ( )



   (A) $18+36\sqrt{5}$ (B) $54+18\sqrt{5}$ (C) 90 (D) 81

11. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 $V$ 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 $V$ 的最大值是 ( )

   (A) $4\pi$ (B) $\dfrac{9\pi}{2}$ (C) $6\pi$ (D) $\dfrac{32\pi}{3}$

12. 已知 $O$ 为坐标原点, $F$ 是椭圆 $C$ $dfracx^2a^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点, $A$, $B$ 分别为 $C$ 的左、右顶点, $P$ 为 $C$ 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 $A$ 的直线 $l$ 与线段 $PF$ 交于点 $M$, 与 $y$ 轴交于点 $E$. 若直线 $BM$ 经过 $OE$ 的中点, 则 $C$ 的离心率为 ( )

   (A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

## 二、填空题

13. 若 $x$, $y$ 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0,\\ x-2y-1\leqslant 0,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$, 则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为______.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=2\sin x$ 的图象至少向右平移______个单位长度得到.

15. 已知直线 $l$: $x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 $A$, $B$ 两点, 过 $A$, $B$ 分别作 $l$ 的垂线与 $x$ 轴交于 $C$, $D$ 两点, 则 $|CD|=$______.

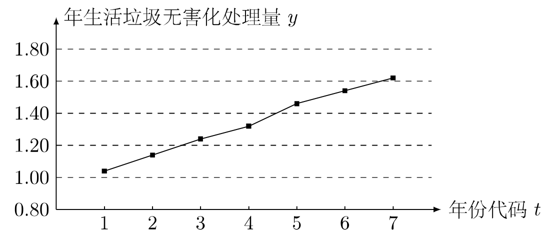
16. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x\leqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^{-x-1}-x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是______.

## 三、解答题

17. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

    (1) 求 $a_2$, $a_3$;
    
    (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.




注: 年份代码 $1-7$ 分别对应年份 $2008-2014$

(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 $y$ 与 $t$ 的关系, 请用相关系数加以说明;

(2) 建立 $y$ 关于 $t$ 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

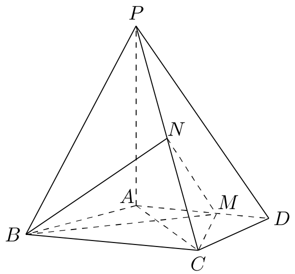
参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, $M$ 为线段 $AD$ 上一点, $AM = 2MD$, $N$ 为 $PC$ 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 $PAB$;

(2) 求四面体 $N-BCM$ 的体积.




20. 已知抛物线 $C$: $y^2 = 2x$ 的焦点为 $F$, 平行于 $x$ 轴的两条直线 $l_1$, $l_2$ 分别交 $C$ 于 $A$, $B$ 两点, 交 $C$ 的准线于 $P$, $Q$ 两点.

(1) 若 $F$ 在线段 $AB$ 上, $R$ 是 $PQ$ 的中点, 证明 $AR \parallel FQ$;

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 $AB$ 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

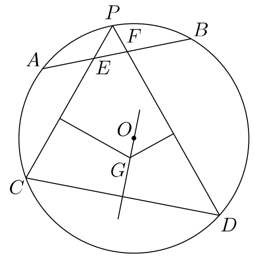
(2) 证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$;

(3) 设 $c > 1$, 证明当 $x \in (0, 1)$ 时, $1 + (c-1)x > c^x$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 $P$, 弦 $PC$, $PD$ 分别交 $AB$ 于 $E$, $F$ 两点.

(1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;

(2) 若 $EC$ 的垂直平分线与 $FD$ 的垂直平分线交于点 $G$, 证明 $OG \perp CD$.




23. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha, \end{cases}$ ($\alpha$ 为参数), 以坐标原点为极点, 以 $x$ 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 $C_1$ 的普通方程和 $C_2$ 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P$ 在 $C_1$ 上, 点 $Q$ 在 $C_2$ 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 $P$ 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geqslant 3$, 求 $a$ 的取值范围.

# 2016 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

## 一、选择题

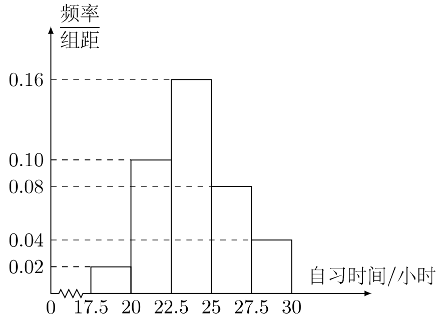
1. 若复数 $z$ 满足 $2z+\overline{z}=3-2\mathrm{i}$ 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) $-1+2\mathrm{i}$ (D) $-1-2\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{y\mid y=2^x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid x^2-1<0\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(0,1)$ (C) $(-1,+\infty)$ (D) $(0,+\infty)$

3. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5,30]$, 样本数据分组为 $[17.5,20)$, $[20,22.5)$, $[22.5,25)$, $[25,27.5)$, $[27.5,30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ( )

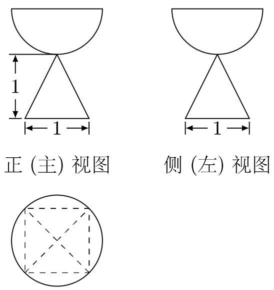



(A) 56 (B) 60 (C) 120 (D) 140

4. 若变量 $x,y$ 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\ 2x-3y\leqslant 9,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $x^2+y^2$ 的最大值是 ( )

(A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 12

5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 ( )




(A) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\pi$ (B) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (C) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ (D) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$

6. 已知直线 $a$, $b$ 分别在两个不同的平面 $\alpha$, $\beta$ 内. 则"直线 $a$ 和直线 $b$ 相交"是"平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 相交"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x)=\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\pi$ (C) $\dfrac{3\pi}{2}$ (D) $2\pi$

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 满足 $4|\boldsymbol{m}|=3|\boldsymbol{n}|$, $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1}{3}$. 若 $\boldsymbol{n}\perp(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$, 则实数 $t$ 的值为 ( )

(A) 4 (B) $-4$ (C) $\dfrac{9}{4}$ (D) $-\dfrac{9}{4}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 当 $x<0$ 时, $f(x)=x^3-1$; 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(-x)=-f(x)$; 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. 则 $f(6)=$ ( )

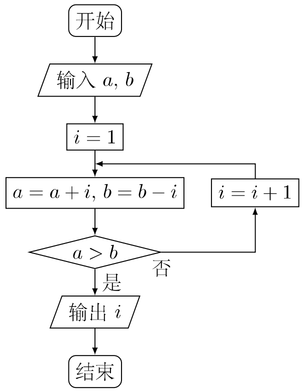
(A) $-2$ (B) $-1$ (C) 0 (D) 2

10. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$ 具有 $T$ 性质. 下列函数中具有 $T$ 性质的是 ( )

(A) $y=\sin x$ (B) $y=\ln x$ (C) $y=\mathrm{e}^x$ (D) $y=x^3$

## 二、填空题

11. 执行如图的程序框图, 若输入的 $a$, $b$ 的值分别为 0 和 9, 则输出的 $i$ 的值为______.




12. 若 $\left(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 $x^5$ 的系数是 $-80$, 则实数 $a=$______.

13. 已知双曲线 $E$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$, 若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 $E$ 上, $AB$, $CD$ 的中点为 $E$ 的两个焦点, 且 $2|AB|=3|BC|$, 则 $E$ 的离心率是______.

14. 在 $[-1,1]$ 上随机地取一个数 $k$, 则事件"直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交"发生的概率为______.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m, & x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$, 若存在实数 $b$, 使得关于 $x$ 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根, 则 $m$ 的取值范围是______.

## 三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A$, $B$, $C$ 的对边分别为 $a$, $b$, $c$, 已知 $2(\tan A+\tan B)=\dfrac{\tan A}{\cos B}+\dfrac{\tan B}{\cos A}$.

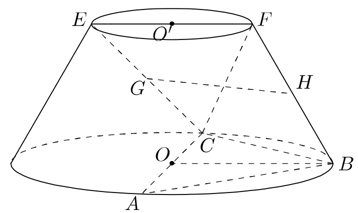
(1) 证明: $a+b=2c$;

(2) 求 $\cos C$ 的最小值.

17. 在如图所示的圆台中, $AC$ 是下底面圆 $O$ 的直径, $EF$ 是上底面圆 $O'$ 的直径, $FB$ 是圆台的一条母线.

(1) 已知 $G$, $H$ 分别为 $EC$, $FB$ 的中点, 求证: $GH\parallel$ 平面 $ABC$;

(2) 已知 $EF=FB=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$, $AB=BC$. 求二面角 $F-BC-A$ 的余弦值.

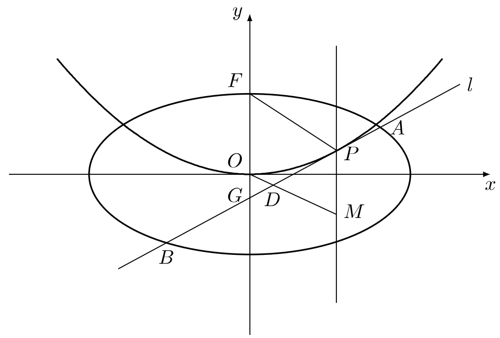


18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n = 3n^2+8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.
(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $c_n = \dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

19. 甲、乙两人组成"星队"参加猜成语活动, 每轮活动由甲、乙各猜一个成语, 在一轮活动中, 如果两人都猜对, 则"星队"得 3 分; 如果只有一个人猜对, 则"星队"得 1 分; 如果两人都没猜对, 则"星队"得 0 分. 已知甲每轮猜对的概率是 $\dfrac{3}{4}$, 乙每轮猜对的概率是 $\dfrac{2}{3}$; 每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响. 各轮结果亦互不影响. 假设"星队"参加两轮活动, 求:
(1) "星队"至少猜对 3 个成语的概率;
(2) "星队"两轮得分之和为 $X$ 的分布列和数学期望 $EX$.

20. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \dfrac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $a=1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \dfrac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1,2]$ 成立.

21. 平面直角坐标系 $xOy$ 中, 椭圆 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 抛物线 $E$: $x^2 = 2y$ 的焦点 $F$ 是 $C$ 的一个顶点.
(1) 求椭圆 $C$ 的方程;
(2) 设 $P$ 是 $E$ 上的动点, 且位于第一象限, $E$ 在点 $P$ 处的切线 $l$ 与 $C$ 交于不同的两点 $A$, $B$, 线段 $AB$ 的中点为 $D$, 直线 $OD$ 与过 $P$ 且垂直于 $x$ 轴的直线交于点 $M$.
① 求证: 点 $M$ 在定直线上;
② 直线 $l$ 与 $y$ 轴交于点 $G$, 记 $\triangle PFG$ 的面积为 $S_1$, $\triangle PDM$ 的面积为 $S_2$, 求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最大值及取得最大值时点 $P$ 的坐标.



# 2016 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

## 一、选择题

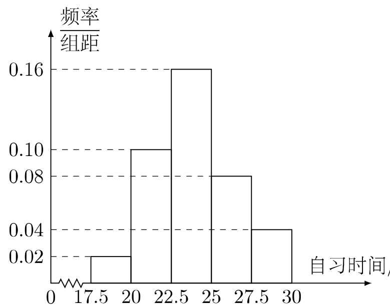
1. 设集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

(A) $\{2, 6\}$　(B) $\{3, 6\}$　(C) $\{1, 3, 4, 5\}$　(D) $\{1, 2, 4, 6\}$

2. 若复数 $z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\overline{z}=$ ( )

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

3. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$, 样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ( )

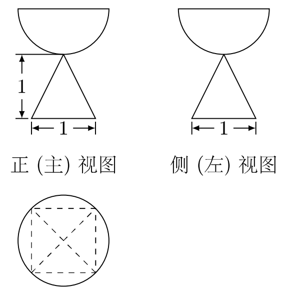



(A) 56　(B) 60　(C) 120　(D) 140

4. 若变量 $x, y$ 满足 $\begin{cases} x+y\leqslant 2, \\ 2x-3y\leqslant 9, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $x^2+y^2$ 的最大值是 ( )

(A) 4　(B) 9　(C) 10　(D) 12

5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 ( )




正 (主) 视图　侧 (左) 视图

俯视图

(A) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\pi$　(B) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$　(C) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$　(D) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$

6. 已知直线 $a, b$ 分别在两个不同的平面 $\alpha, \beta$ 内. 则"直线 $a$ 和直线 $b$ 相交"是"平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 相交"的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知圆 $M$: $x^2+y^2-2ay=0$ $(a>0)$ 截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$, 则圆 $M$ 与圆 $N$: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是 ( )

(A) 内切　(B) 相交　(C) 外切　(D) 相离

8. $\triangle ABC$ 中, 角 $A$, $B$, $C$ 的对边分别是 $a$, $b$, $c$, 已知 $b=c$, $a^2=2b^2(1-\sin A)$, 则 $A=$ ( )

(A) $\dfrac{3\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 当 $x<0$ 时, $f(x)=x^3-1$; 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(-x)=-f(x)$; 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. 则 $f(6)=$ ( )

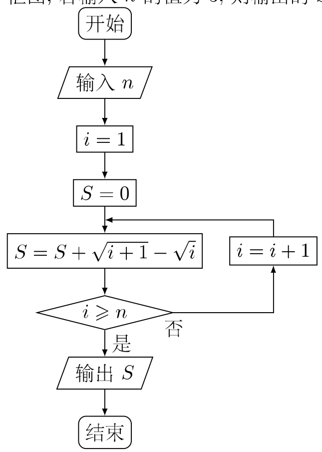
(A) $-2$　(B) $-1$　(C) 0　(D) 2

10. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$ 具有 $T$ 性质. 下列函数中具有 $T$ 性质的是 ( )

(A) $y=\sin x$　(B) $y=\ln x$　(C) $y=\mathrm{e}^x$　(D) $y=x^3$

## 二、填空题

11. 执行如图的程序框图, 若输入 $n$ 的值为 3, 则输出的 $S$ 的值为______.




12. 观察下列等式:

$\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 1\times 2$;

$\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 2\times 3$;

$\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)^{-2}+\cdots+\left(\sin\dfrac{6\pi}{7}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 3\times 4$;

$\left(\sin\dfrac{\pi}{9}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{9}\right)^{-2}+\cdots+\left(\sin\dfrac{8\pi}{9}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 4\times 5$;

……

照此规律, $\left(\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{2n+1}\right)^{-2}+\cdots+\left(\sin\dfrac{2n\pi}{2n+1}\right)^{-2}=$______.

13. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(6,-4)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则实数 $t$ 的值为______.

14. 已知双曲线 $E$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$. 矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 $E$ 上, $AB$, $CD$ 的中点为 $E$ 的两个焦点, 且 $2|AB|=3|BC|$, 则 $E$ 的离心率是______.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} |x|, & x\leqslant m, \\ x^2-2mx+4m, & x>m, \end{cases}$ 其中 $m>0$. 若存在实数 $b$, 使得关于 $x$ 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根, 则 $m$ 的取值范围是______.

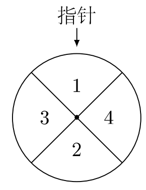
## 三、解答题

16. 某儿童乐园在"六一"儿童节推出了一项趣味活动. 参加活动的儿童需转动如图所示的转盘两次, 每次转动后, 待转盘停止转动时, 记录指针所指区域中的数. 设两次记录的数分别为 $x$, $y$. 奖励规则如下:

① 若 $xy\leqslant 3$, 则奖励玩具一个;
② 若 $xy\geqslant 8$, 则奖励水杯一个;
③ 其余情况奖励饮料一瓶.

假设转盘质地均匀, 四个区域划分均匀. 小亮准备参加此项活动.

(1) 求小亮获得玩具的概率;
(2) 请比较小亮获得水杯与获得饮料的概率的大小, 并说明理由.



17. 设 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin x-(\sin x-\cos x)^2$.

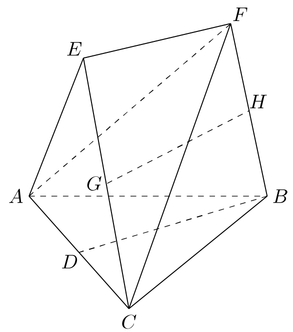
(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 把 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再把得到的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

18. 在如图所示的几何体中, $D$ 是 $AC$ 的中点, $EF\parallel DB$.

(1) 已知 $AB=BC$, $AE=EC$. 求证: $AC\perp FB$;

(2) 已知 $G$, $H$ 分别是 $EC$ 和 $FB$ 的中点, 求证: $GH\parallel$ 平面 $ABC$.




19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=3n^2+8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n=b_n+b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

20. 设函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+(2a-1)x$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 令 $g(x)=f'(x)$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 求实数 $a$ 的取值范围.

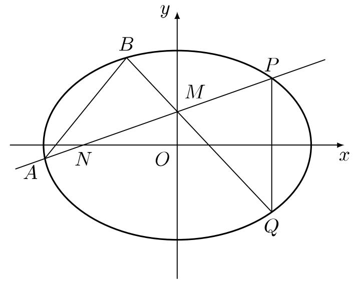
21. 已知椭圆 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的长轴长为 4, 焦距为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程;

(2) 过动点 $M(0,m)\ (m>0)$ 的直线交 $x$ 轴于点 $N$, 交 $C$ 于点 $A$, $P$ ($P$ 在第一象限), 且 $M$ 是线段 $PN$ 的中点, 过点 $P$ 作 $x$ 轴的垂线交 $C$ 于另一点 $Q$, 延长线 $QM$ 交 $C$ 于点 $B$.

① 设直线 $PM$、$QM$ 的斜率分别为 $k$、$k'$, 证明 $\dfrac{k'}{k}$ 为定值;

② 求直线 $AB$ 的斜率的最小值.



# 2016 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

## 一、填空题

1. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则不等式 $|x-3|<1$ 的解集为______.

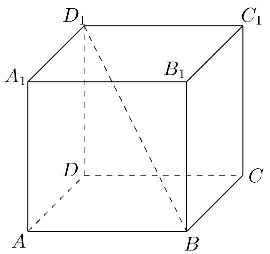
2. 设 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\operatorname{Im} z=$______.

3. 已知平行直线 $l_1$: $2x+y-1=0$, $l_2$: $2x+y+1=0$, 则 $l_1$ 与 $l_2$ 的距离是______.

4. 某次体检, 6 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.75, 1.80, 1.69, 1.77, 则这组数据的中位数是______(米).

5. 已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图象上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 的边长为 3, $BD_1$ 与底面所成角的大小为 $\arctan\dfrac{2}{3}$, 则该正四棱柱的高等于______.




7. 方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的解为______.

8. 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于______.

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于______.

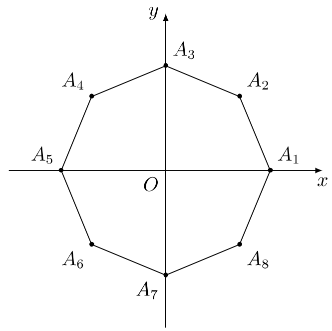
10. 设 $a>0$, $b>0$, 若关于 $x$, $y$ 的方程组 $\begin{cases}ax+y=1,\\ x+by=1\end{cases}$ 无解, 则 $a+b$ 的取值范围是______.

11. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 $k$ 个不同的数组成, $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n\in\{2,\ 3\}$, 则 $k$ 的最大值为______.

12. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1,0)$, $B(0,-1)$, $P$ 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是______.

13. 设 $a$, $b\in\mathbf{R}$, $c\in[0,2\pi)$, 若对任意实数 $x$ 都有 $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=a\sin(bx+c)$, 则满足条件的有序实数组 $(a,b,c)$ 的组数为______.

14. 如图, 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, $O$ 为正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的中心, $A_1(1,0)$, 任取不同的两点 $A_i$, $A_j$, 点 $P$ 满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}=\vec{0}$, 则点 $P$ 落在第一象限的概率是______.



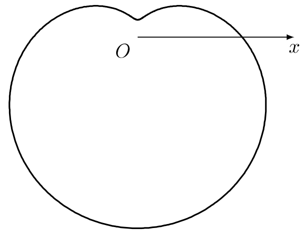

## 二、选择题

15. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则"$a>1$"是"$a^2>1$"的 ( )

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

16. 下列极坐标方程中, 对应的曲线为下图的是 ( )




(A) $\rho=6+5\cos\theta$　　(B) $\rho=6+5\sin\theta$

(C) $\rho=6-5\cos\theta$　　(D) $\rho=6-5\sin\theta$

17. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$, 前 $n$ 项和为 $S_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, 下列条件中, 使得 $2S_n<S$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立的是 ( )

(A) $a_1>0$, $0.6<q<0.7$　　(B) $a_1<0$, $-0.7<q<-0.6$

(C) $a_1>0$, $0.7<q<0.8$　　(D) $a_1<0$, $-0.8<q<-0.7$

18. 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数, 对于命题: ① 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个为增函数; ② 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数, 下列判断正确的是 ( )

(A) ①和②均为真命题　　(B) ①和②均为假命题

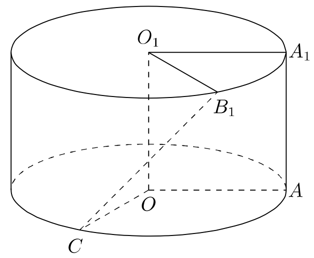
(C) ①为真命题, ②为假命题　　(D) ①为假命题, ②为真命题

## 三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形 $AA_1O_1O$ (及其内部) 绕 $OO_1$ 旋转一周形成圆柱, 如图, $\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\dfrac{2\pi}{3}$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$, 其中 $B_1$ 与 $C$ 在平面 $AA_1O_1O$ 的同侧.

(1) 求三棱锥 $C-O_1A_1B_1$ 的体积.

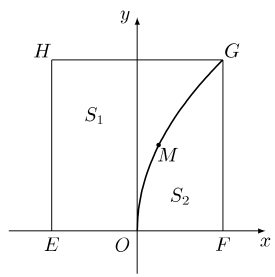
(2) 求异面直线 $B_1C$ 与 $AA_1$ 所成角的大小.




20. 有一块正方形菜地 $EFGH$, $EH$ 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 $F$ 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 $S_1$ 和 $S_2$, 其中 $S_1$ 中的蔬菜运到河边较近, $S_2$ 中的蔬菜运到 $F$ 点较近, 而菜地内 $S_1$ 和 $S_2$ 的分界线 $C$ 上的点到河边与到 $F$ 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 $O$ 为 $EF$ 的中点, 点 $F$ 的坐标为 $(1,0)$, 如图.

(1) 求菜地内的分界线 $C$ 的方程.

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 $S_1$ 面积是 $S_2$ 面积的两倍, 由此得到 $S_1$ 面积的"经验值"为 $\dfrac{8}{3}$. 设 $M$ 是 $C$ 上纵坐标为 1 的点, 请计算以 $EH$ 为一边, 另一边过点 $M$ 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 $S_1$ 面积的经验值.



21. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$, 直线 $l$ 过 $F_2$ 且与双曲线交于 $A$、$B$ 两点.

(1) 若 $l$ 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.

(2) 设 $b=\sqrt{3}$, 若 $l$ 的斜率存在, 且 $\left(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 求 $l$ 的斜率.

22. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)$.

(1) 当 $a=5$ 时, 解不等式 $f(x)>0$.

(2) 若关于 $x$ 的方程 $f(x)-\log_2[(a-4)x+2a-5]=0$ 的解集中恰有一个元素, 求 $a$ 的取值范围.

(3) 设 $a>0$, 若对任意 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值和最小值的差不超过 1, 求 $a$ 的取值范围.

23. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 只要 $a_p=a_q\ (p,\ q\in\mathbf{N}^*)$, 必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 $P$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 $P$. 且 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_4=3$, $a_5=2$, $a_6+a_7+a_8=21$, 求 $a_3$.

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $b_1=c_5=1$, $b_5=c_1=81$, $a_n=b_n+c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 $P$, 并说明理由;

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列, 已知 $a_{n+1}=b_n+\sin a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: "对任意 $a_1$, $\{a_n\}$ 都具有性质 $P$"的充要条件为"$\{b_n\}$ 是常数列".

# 2016 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

## 一、填空题

1. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则不等式 $|x-3|<1$ 的解集为______.

2. 设 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z$ 的虚部等于______.

3. 已知平行直线 $l_1$: $2x+y-1=0$, $l_2$: $2x+y+1=0$, 则 $l_1$ 与 $l_2$ 的距离是______.

4. 某次体检, 5 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.80, 1.69, 1.76, 则这组数据的中位数是______(米).

5. 若函数 $f(x)=4\sin x+a\cos x$ 的最大值为 5, 则常数 $a=$______.

6. 已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图象上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

7. 若 $x$, $y$ 满足 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ y\geqslant x+1,\end{cases}$ 则 $x-2y$ 的最大值为______.

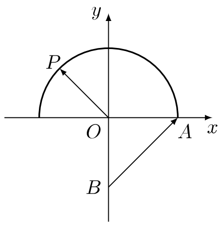
8. 方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的解为______.

9. 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于______.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于______.

11. 某食堂规定, 每份午餐可以在四种水果中任选两种, 则甲、乙两同学各自所选的两种水果相同的概率为______.

12. 如图, 已知点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,-1)$, $P$ 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是______.




13. 设 $a>0$, $b>0$, 若关于 $x$, $y$ 的方程组 $\begin{cases}ax+y=1,\\ x+by=1\end{cases}$ 无解, 则 $a+b$ 的取值范围是______.

14. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 $k$ 个不同的数组成, $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和. 若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n\in\{2,\ 3\}$, 则 $k$ 的最大值为______.

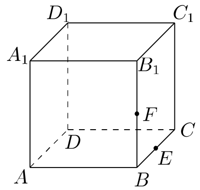
## 二、选择题

15. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则"$a>1$"是"$a^2>1$"的 ( )

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $E$, $F$ 分别为 $BC$, $BB_1$ 的中点, 则下列直线中与直线 $EF$ 相交的是 ( )




(A) 直线 $AA_1$ (B) 直线 $A_1B_1$ (C) 直线 $A_1D_1$ (D) 直线 $B_1C_1$

17. 设 $a\in\mathbf{R}$, $b\in[0,2\pi)$. 若对任意实数 $x$ 都有 $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin(ax+b)$, 则满足条件的有序实数对 $(a,b)$ 的对数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18. 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数, 对于命题: ① 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个为增函数; ② 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数, 下列判断正确的是 ( )

(A) ①和②均为真命题 (B) ①和②均为假命题

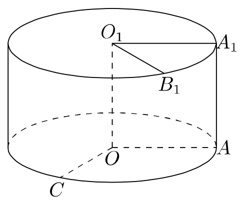
(C) ①为真命题, ②为假命题 (D) ①为假命题, ②为真命题

## 三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形 $AA_1O_1O$ (及其内部) 绕 $OO_1$ 旋转一周形成圆柱, 如图, $\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\dfrac{5\pi}{6}$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$, 其中 $B_1$ 与 $C$ 在平面 $AA_1O_1O$ 的同侧.

(1) 求圆柱的体积与侧面积;

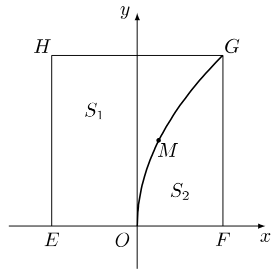
(2) 求异面直线 $O_1B_1$ 与 $OC$ 所成的角的大小.




20. 有一块正方形菜地 $EFGH$, $EH$ 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 $F$ 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 $S_1$ 和 $S_2$, 其中 $S_1$ 中的蔬菜运到河边较近, $S_2$ 中的蔬菜运到 $F$ 点较近, 而菜地内 $S_1$ 和 $S_2$ 的分界线 $C$ 上的点到河边与到 $F$ 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 $O$ 为 $EF$ 的中点, 点 $F$ 的坐标为 $(1,0)$, 如图.

(1) 求菜地内的分界线 $C$ 的方程.

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 $S_1$ 面积是 $S_2$ 面积的两倍, 由此得到 $S_1$ 面积的"经验值"为 $\dfrac{8}{3}$. 设 $M$ 是 $C$ 上纵坐标为 1 的点, 请计算以 $EH$ 为一边, 另一边过点 $M$ 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 $S_1$ 面积的经验值.



21. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$, 直线 $l$ 过 $F_2$ 且与双曲线交于 $A$、$B$ 两点.
(1) 若 $l$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.
(2) 设 $b=\sqrt{3}$, 若 $l$ 的斜率存在, 且 $|AB|=4$, 求 $l$ 的斜率.

22. 对于无穷数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, 记 $A=\{x\mid x=a_n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{x\mid x=b_n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$, 若同时满足条件: ① $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均单调递增; ② $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\mathbf{N}^*$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列.
(1) 若 $a_n=2n-1$, $b_n=4n-2$, 判断 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是否为无穷互补数列, 并说明理由;
(2) 若 $a_n=2^n$ 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 16 项的和;
(3) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列, $\{a_n\}$ 为等差数列且 $a_{16}=36$, 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

23. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\log_2\left(\frac{1}{x}+a\right)$.
(1) 当 $a=1$ 时, 解不等式 $f(x)>1$;
(2) 若关于 $x$ 的方程 $f(x)+\log_2(x^2)=0$ 的解集中恰有一个元素, 求 $a$ 的值;
(3) 设 $a>0$, 若对任意 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 $a$ 的取值范围.

# 2016 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

## 一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 2\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则 $A\cap\mathbf{Z}$ 中元素的个数是(　)

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

2. 设 i 为虚数单位, 则 $(x+\mathrm{i})^6$ 的展开式中含 $x^4$ 的项为　(　)

(A) $-15x^4$　(B) $15x^4$　(C) $-20\mathrm{i}x^4$　(D) $20\mathrm{i}x^4$

3. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点　(　)

(A) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度　(B) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　(D) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

4. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 其中奇数的个数为　(　)

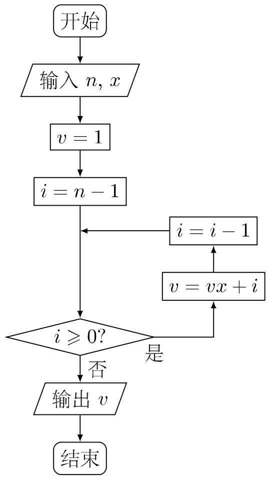
(A) 24　(B) 48　(C) 60　(D) 72

5. 公司为激励创新, 计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元, 在此基础上, 每年投入的研发资金比上一年增长 12%, 则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是　(　)

(*参考数据*: $\lg 1.12\approx 0.05$, $\lg 1.3\approx 0.11$, $\lg 2\approx 0.30$)

(A) 2018 年　(B) 2019 年　(C) 2020 年　(D) 2021 年

6. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州 (现四川省安岳县) 人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例, 若输入 $n$, $x$ 的值分别为 3, 2, 则输出 $v$ 的值为　(　)




(A) 9　(B) 18　(C) 20　(D) 35

7. 设 $p$: 实数 $x,y$ 满足 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$, $q$: 实数 $x,y$ 满足 $\begin{cases} y\geqslant x-1,\\ y\geqslant 1-x,\\ y\leqslant 1.\end{cases}$ 则 $p$ 是 $q$ 的　(　)

(A) 必要不充分条件　(B) 充分不必要条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 设 $O$ 为坐标原点, $P$ 是以 $F$ 为焦点的抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上任意一点, $M$ 是线段 $PF$ 上的点, 且 $|PM|=2|MF|$, 则直线 $OM$ 的斜率的最大值为　(　)

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) 1

9. 设直线 $l_1$, $l_2$ 分别是函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 图象上点 $P_1$, $P_2$ 处的切线, $l_1$ 与 $l_2$ 垂直相交于点 $P$, 且 $l_1$, $l_2$ 分别与 $y$ 轴相交于点 $A$, $B$, 则 $\triangle PAB$ 的面积的取值范围是　(　)

(A) $(0,1)$　(B) $(0,2)$　(C) $(0,+\infty)$　(D) $(1,+\infty)$

10. 在平面内, 定点 $A$, $B$, $C$, $D$ 满足 $\left|\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=-2$, 动点 $P$, $M$ 满足 $\left|\overrightarrow{AP}\right|=1$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$, 则 $\left|\overrightarrow{BM}\right|^2$ 的最大值是　(　)

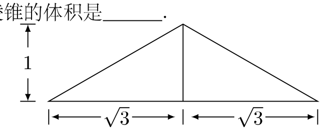
(A) $\dfrac{43}{4}$　(B) $\dfrac{49}{4}$　(C) $\dfrac{37+6\sqrt{3}}{4}$　(D) $\dfrac{37+2\sqrt{33}}{4}$

## 二、填空题

11. $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}=$______.

12. 同时抛掷两枚质地均匀的硬币, 当至少有一枚硬币正面向上时, 就说这次试验成功, 则在 2 次试验中成功次数 $X$ 的均值是______.

13. 已知三棱锥的四个面都是腰长为 2 的等腰三角形, 该三棱锥的正视图如图所示, 则该三棱锥的体积是______.




正视图

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)=4^x$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)+f(1)=$______.

15. 在平面直角坐标系中, 当 $P(x,y)$ 不是原点时, 定义 $P$ 的"伴随点"为 $P'\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$; 当 $P$ 是原点时, 定义 $P$ 的"伴随点"为它自身, 平面曲线 $C$ 上所以点的"伴随点"所构成的曲线 $C'$ 定义为曲线 $C$ 的"伴随曲线", 现有下列命题:

① 若点 $A$ 的"伴随点"是点 $A'$, 则点 $A'$ 的"伴随点"是点 $A$;

② 单位圆的"伴随曲线"是它自身;

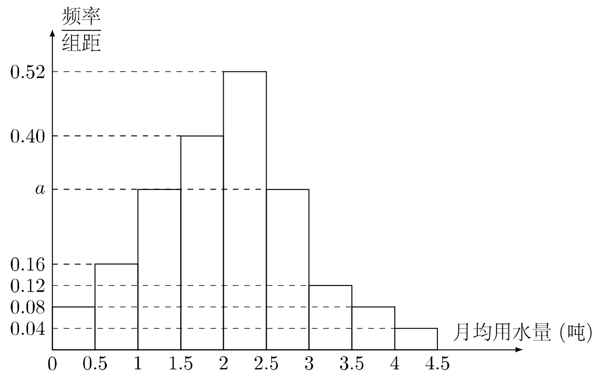
③ 若曲线 $C$ 关于 $x$ 轴对称, 则其"伴随曲线"$C'$ 关于 $y$ 轴对称;

④ 一条直线的"伴随曲线"是一条直线.

其中的真命题是______. (写出所以真命题的序列)

## 三、解答题

16. 我国是世界上严重缺水的国家, 某市政府为了鼓励居民节约用水, 计划调整居民生活用水收费方案, 拟确定一个合理的月用水量标准 $x$ (吨), 一位居民的月用水量不超过 $x$ 的部分按平价收费, 超出 $x$ 的部分按议价收费, 为了了解居民用水情况, 通过抽样, 获得了某年 100 位居民每人的月均用水量 (单位: 吨), 将数据按照 $[0,0.5)$, $[0.5,1)$, $\cdots$, $[4,4.5)$ 分成 9 组, 制成了如图所示的频率分布直方图.




(1) 求直方图中 $a$ 的值;

(2) 设该市有 30 万居民, 估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数, 并说明理由;

(3) 若该市政府希望使 85% 的居民每月的用水量不超过标准 $x$ (吨), 估计 $x$ 的值, 并说明理由.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A$, $B$, $C$ 所对的边分别是 $a$, $b$, $c$, 且 $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

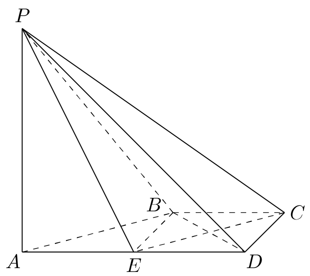
(1) 证明: $\sin A\sin B=\sin C$;

(2) 若 $b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle ADC=\angle PAB=90^\circ$, $BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$, $E$ 为边 $AD$ 的中点, 异面直线 $PA$ 与 $CD$ 所成的角为 $90^\circ$.

(1) 在平面 $PAB$ 内找一点 $M$, 使得直线 $CM\parallel$ 平面 $PBE$, 并说明理由;

(2) 若二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $45^\circ$, 求直线 $PA$ 与平面 $PCE$ 所成角的正弦值.




19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, $S_{n+1}=qS_n+1$, 其中 $q>0$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $2a_2$, $a_3$, $a_2+2$ 成等差数列, 求 $a_n$ 的通项公式;

(2) 设双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{a_n^2}=1$ 的离心率为 $e_n$, 且 $e_2=\dfrac{5}{3}$, 证明: $e_1+e_2+\cdots+e_n>\dfrac{4^n-3^n}{3^{n-1}}$.

20. 已知椭圆 $E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的 3 个顶点, 直线 $l$: $y=-x+3$ 与椭圆 $E$ 有且只有一个公共点 $T$.

(1) 求椭圆 $E$ 的方程及点 $T$ 的坐标;

(2) 设 $O$ 是坐标原点, 直线 $l'$ 平行于 $OT$ 与椭圆 $E$ 交于不同的两点 $A$, $B$, 且与直线 $l$ 交于点 $P$, 证明: 存在常数 $\lambda$, 使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$, 并求 $\lambda$ 的值.

21. 设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 确定 $a$ 的所有可能取值, 使得 $f(x)>\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}^{1-x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立 ($\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数).

# 2016 普通高等学校招生考试 (四川卷文)

## 一、选择题

1. 设 i 为虚数单位, 则复数 $(1+\mathrm{i})^2=$ ( )

(A) 0 (B) 2 (C) 2i (D) 2 + 2i

2. 设集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中元素的个数是 ( )

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

3. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标是 ( )

(A) $(0,2)$ (B) $(0,1)$ (C) $(2,0)$ (D) $(1,0)$

4. 为了得到函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点 ( )

(A) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(B) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向上平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(D) 向下平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

5. 设 $p$: 实数 $x,y$ 满足 $x>1$ 且 $y>1$, $q$: 实数 $x,y$ 满足 $x+y>2$, 则 $p$ 是 $q$ 的 ( )

(A) 充分不必要条件

(B) 不要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

6. 已知 $a$ 函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点, 则 $a=$ ( )

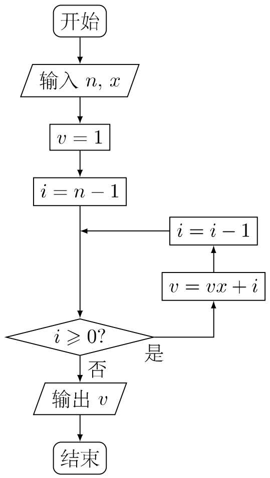
(A) $-4$ (B) $-2$ (C) 4 (D) 2

7. 公司为激励创新, 计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元, 在此基础上, 每年投入的研发资金比上一年增长 12%, 则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 ( )

(*参考数据*: $\lg 1.12\approx 0.05$, $\lg 1.3\approx 0.11$, $\lg 2\approx 0.30$)

(A) 2018 年 (B) 2019 年 (C) 2020 年 (D) 2021 年

8. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州 (现四川省安岳县) 人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例, 若输入 $n$, $x$ 的值分别为 3, 2, 则输出 $v$ 的值为 ( )




(A) 9 (B) 18 (C) 20 (D) 35

9. 已知正三角形 $ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面 $ABC$ 内的动点 $P$, $M$ 满足 $\left|\overrightarrow{AP}\right|=1$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$, 则 $\left|\overrightarrow{BM}\right|^2$ 的最大值是 ( )

(A) $\dfrac{43}{4}$ (B) $\dfrac{49}{4}$ (C) $\dfrac{37+6\sqrt{3}}{4}$ (D) $\dfrac{37+2\sqrt{33}}{4}$

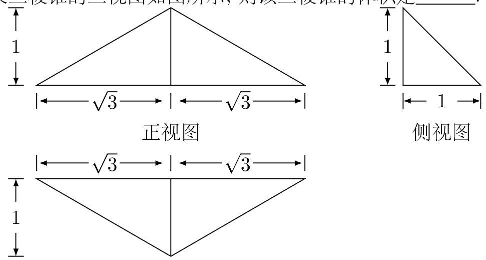
10. 设直线 $l_1$, $l_2$ 分别是函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 图象上点 $P_1$, $P_2$ 处的切线, $l_1$ 与 $l_2$ 垂直相交于点 $P$, 且 $l_1$, $l_2$ 分别与 $y$ 轴相交于点 $A$, $B$, 则 $\triangle PAB$ 的面积的取值范围是 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $(0,2)$ (C) $(0,+\infty)$ (D) $(1,+\infty)$

## 二、填空题

11. $\sin 750^\circ=$______.

12. 已知某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积是______.




正视图 侧视图

俯视图

13. 从 2, 3, 8, 9 任取两个不同的数值, 分别记为 $a$, $b$, 则 $\log_a b$ 为整数的概率是______.

14. 若函数 $f(x)$ 是定义 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)=4^x$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)+f(2)=$______.

15. 在平面直角坐标系中, 当 $P(x,y)$ 不是原点时, 定义 $P$ 的"伴随点"为 $P'\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$; 当 $P$ 是原点时, 定义 $P$ 的"伴随点"为它自身, 平面曲线 $C$ 上所以点的"伴随点"所构成的曲线 $C'$ 定义为曲线 $C$ 的"伴随曲线", 现有下列命题:

① 若点 $A$ 的"伴随点"是点 $A'$, 则点 $A'$ 的"伴随点"是点 $A$;

② 单位圆上的"伴随点"仍在单位圆上;

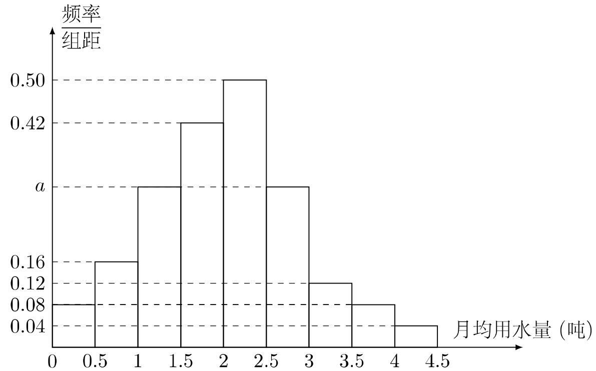
③ 若两点关于 $x$ 轴对称, 则他们的"伴随点"关于 $y$ 轴对称;

④ 若三点在同一条直线上, 则他们的"伴随点"一定共线.

其中的真命题是______. (写出所以真命题的序列)

## 三、解答题

16. 我国是世界上严重缺水的国家, 某市政府为了鼓励居民节约用水, 计划调整居民生活用水收费方案, 拟确定一个合理的月用水量标准 $x$ (吨), 一位居民的月用水量不超过 $x$ 的部分按平价收费, 超出 $x$ 的部分按议价收费, 为了了解居民用水情况, 通过抽样, 获得了某年 100 位居民每人的月均用水量 (单位: 吨), 将数据按照 $[0,0.5)$, $[0.5,1)$, $\cdots$, $[4,4.5)$ 分成 9 组, 制成了如图所示的频率分布直方图.




(1) 求直方图中 $a$ 的值;

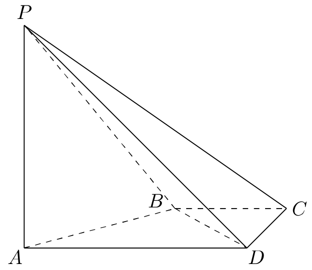
(2) 设该市有 30 万居民, 估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数, 并说明理由;

(3) 估计居民月均用水量的中位数.

17. 如图, 在四棱锥中 $P-ABCD$ 中, $PA\perp CD$, $AD \parallel BC$, $\angle ADC=\angle PAB=90^\circ$, $BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$.

(1) 在平面 $PAD$ 内找一点 $M$, 使得直线 $CM\parallel$ 平面 $PAB$, 并说明理由;

(2) 证明: 平面 $PAB\perp$ 平面 $PBD$.




18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A$, $B$, $C$ 所对的边分别是 $a$, $b$, $c$, 且 $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

(1) 证明: $\sin A\sin B=\sin C$;

(2) 若 $b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, $S_{n+1}=qS_n+1$, 其中 $q>0$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_2$, $a_3$, $a_2+a_3$ 成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{a_n^2}=1$ 的离心率为 $e_n$, 且 $e_2=2$, 求 $e_1^2+e_2^2\cdots+e_n^2$.

20. 已知椭圆 $E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点, 点 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 $E$ 上.

(1) 求椭圆 $E$ 的方程;

(2) 设不过原点 $O$ 且斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 $l$ 与椭圆 $E$ 交于不同的两点 $A$, $B$, 线段 $AB$ 的中点为 $M$, 直线 $OM$ 与椭圆 $E$ 交于 $C$, $D$, 证明: $|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

21. 设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, $\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $x>1$ 时, $g(x)>0$;

(3) 确定 $a$ 的所有可能取值, 使得 $f(x)>g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立.

# 2016 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

## 一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{y\mid y=3x-2,\ x\in A\}$, 则 $A\cap B=$(　)

(A) $\{1\}$　　(B) $\{4\}$　　(C) $\{1,\ 3\}$　　(D) $\{1,\ 4\}$

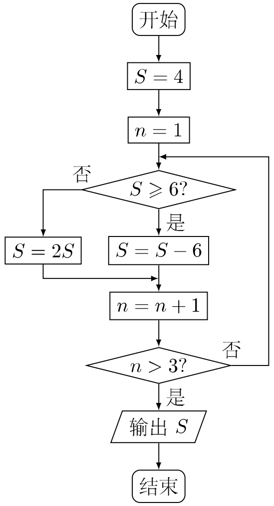
2. 设变量 $x$, $y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\geqslant 0,\\ 2x+3y-6\geqslant 0,\\ 3x+2y-9\leqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+5y$ 的最小值为 (　)

(A) $-4$　　(B) 6　　(C) 10　　(D) 17

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB=\sqrt{13}$, $BC=3$, $\angle C=120°$, 则 $AC=$ (　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 阅读如下的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 $S$ 的值为 (　)




(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

5. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列, 公比为 $q$, 则"$q<0$"是"对任意的正整数 $n$, $a_{2n-1}+a_{2n}<0$"的 (　)

(A) 充要条件　　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$, 以原点为圆心, 双曲线的实半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于 $A$, $B$, $C$, $D$ 四点, 四边形 $ABCD$ 的面积为 $2b$, 则双曲线的方程为 (　)

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3y^2}{4}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4y^2}{3}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 $D$, $E$ 分别是边 $AB$, $BC$ 的中点, 连接 $DE$ 并延长到点 $F$, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为 (　)

(A) $-\dfrac{8}{5}$　　(B) $\dfrac{1}{8}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{11}{8}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0,\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 $x$ 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 $a$ 的取值范围是 (　)

(A) $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right]$

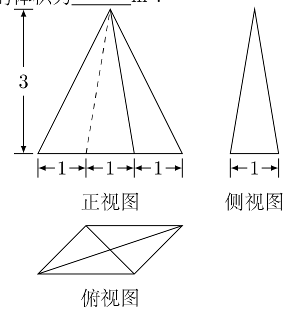
(C) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$　　(D) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

## 二、填空题

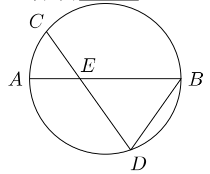
9. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $(1+\mathrm{i})(1-b\mathrm{i})=a$, 则 $\dfrac{a}{b}$ 的值为______.

10. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中 $x^7$ 的系数为______. (用数字作答)

11. 已知一个四棱锥的底面是平行四边形, 该四棱锥的三视图如图所示 (单位: m), 则该四棱锥的体积为______m$^3$.




12. 如图, $AB$ 是圆的直径, 弦 $CD$ 与 $AB$ 相交于点 $E$, $BE=2AE=2$, $BD=ED$, 则线段 $CE$ 的长为______.




13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 若实数 $a$ 满足 $f\left(2^{|a-1|}\right)>f\left(-\sqrt{2}\right)$, 则 $a$ 的取值范围是______.

14. 设抛物线 $\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt,\end{cases}$ ($t$ 为参数, $p>0$) 的焦点为 $F$, 准线为 $l$. 过抛物线上一点 $A$ 作 $l$ 的垂线, 垂足为 $B$. 设 $C\left(\dfrac{7}{2}p,0\right)$, $AF$ 与 $BC$ 相交于点 $E$. 若 $|CF|=2|AF|$, 且 $\triangle ACE$ 的面积为 $3\sqrt{2}$, 则 $p$ 的值为______.

## 三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=4\tan x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

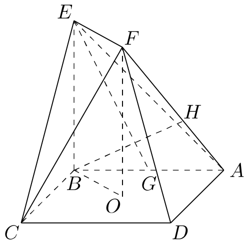
(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性.

16. 某小组共 10 人, 利用假期参加义工活动, 已知参加义工活动次数为 1, 2, 3 的人数分别为 3, 3, 4. 现从这 10 人中随机选出 2 人作为该组代表参加座谈会.

(1) 设 $A$ 为事件"选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4", 求事件 $A$ 发生的概率;

(2) 设 $X$ 为选出的 2 人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量 $X$ 的分布列和数学期望.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 $O$, 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF\perp$ 平面 $ABCD$, 点 $G$ 为 $AB$ 的中点, $AB=BE=2$.
(1) 求证: $EG\parallel$ 平面 $ADF$;
(2) 求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值;
(3) 设 $H$ 为线段 $AF$ 上的点, 且 $AH=\dfrac{2}{3}HF$, 求直线 $BH$ 和平面 $CEF$ 所成角的正弦值.




18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 公差为 $d$, 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $b_n$ 是 $a_n$ 和 $a_{n+1}$ 的等比中项.
(1) 设 $c_n=b_{n+1}^2-b_n^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列;
(2) 设 $a_1=d$, $T_n=\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k b_k^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求证: $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{T_k}<\dfrac{1}{2d^2}$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ $(a>\sqrt{3})$ 的右焦点为 $F$, 右顶点为 $A$. 已知 $\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$, 其中 $O$ 为原点, $e$ 为椭圆的离心率.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设过点 $A$ 的直线 $l$ 与椭圆交于点 $B$ ($B$ 不在 $x$ 轴上), 垂直于 $l$ 的直线与 $l$ 交于点 $M$, 与 $y$ 轴交于点 $H$. 若 $BF\perp HF$, 且 $\angle MOA\leqslant\angle MAO$, 求直线 $l$ 的斜率的取值范围.

20. 设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $a,b\in\mathbf{R}$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 $x_0$, 且 $f(x_1)=f(x_0)$, 其中 $x_1\neq x_0$, 求证: $x_1+2x_0=3$;
(3) 设 $a>0$, 函数 $g(x)=|f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$.

# 2016 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

## 一、选择题

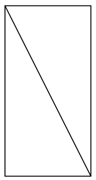
1. 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{y\mid y=2x-1,\ x\in A\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{1,\ 3\}$ (B) $\{1,\ 2\}$ (C) $\{2,\ 3\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3\}$

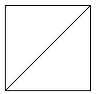
2. 甲、乙两人下棋, 两人下成和棋的概率是 $\dfrac{1}{2}$, 甲获胜的概率是 $\dfrac{1}{3}$, 则甲不输的概率为 ( )

(A) $\dfrac{5}{6}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

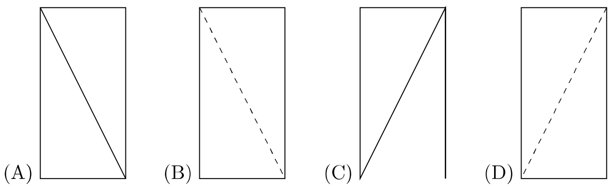
3. 将一个长方形沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥, 得到的几何体的正视图与俯视图如图所示, 则该几何体的侧 (左) 视图为 ( )



正视图



俯视图




4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且双曲线的一条渐近线与直线 $2x+y=0$ 垂直, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ (B) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ (C) $\dfrac{3x^2}{20}-\dfrac{3y^2}{5}=1$ (D) $\dfrac{3x^2}{5}-\dfrac{3y^2}{20}=1$

5. 设 $x>0$, $y\in\mathbf{R}$, 则"$x>y$"是"$x>|y|$"的 ( )

(A) 充要条件 (B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 若实数 $a$ 满足 $f\left(2^{|a-1|}\right)>f\left(-\sqrt{2}\right)$, 则 $a$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

(C) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 $D$, $E$ 分别是边 $AB$, $BC$ 的中点, 连接 $DE$ 并延长到点 $F$, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{8}{5}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{11}{8}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}\ (\omega>0)$, $x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点, 则 $\omega$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5}{8},1\right)$

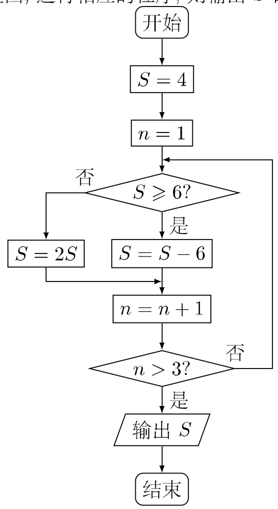
(C) $\left(0,\dfrac{5}{8}\right]$ (D) $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right]$

## 二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $z$ 满足 $(1+\mathrm{i})z=2$, 则 $z$ 的实部为______.

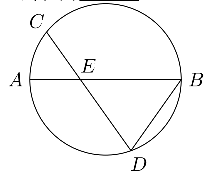
10. 已知函数 $f(x)=(2x+1)\,\mathrm{e}^x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(0)$ 的值为______.

11. 阅读如下的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 $S$ 的值为______.




12. 已知圆 $C$ 的圆心在 $x$ 轴的正半轴上, 点 $M\left(0,\sqrt{5}\right)$ 在圆 $C$ 上, 且圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, 则圆 $C$ 的方程为______.

13. 如图, $AB$ 是圆的直径, 弦 $CD$ 与 $AB$ 相交于点 $E$, $BE=2AE=2$, $BD=ED$, 则线段 $CE$ 的长为______.




14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0,\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 $x$ 的方程 $|f(x)|=2-\dfrac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 $a$ 的取值范围是______.

## 三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A$, $B$, $C$ 所对应的边分别为 $a$, $b$, $c$. 已知 $a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$.

(1) 求 $B$;

(2) 若 $\cos A=\dfrac{1}{3}$, 求 $\sin C$ 的值.

16. 某化肥厂生产甲、乙两种混合肥料, 需要 $A$, $B$, $C$ 三种主要原料. 生产 1 车皮甲种肥料和生产 1 车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如下表所示:

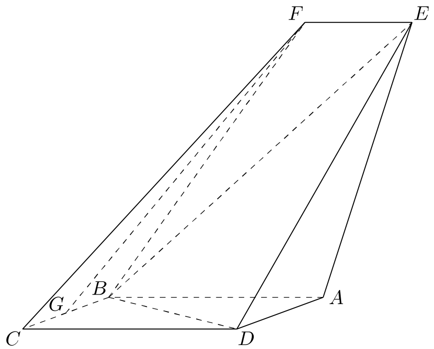
| 原料 / 肥料 | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| 甲 | 4 | 8 | 3 |
| 乙 | 5 | 5 | 10 |

现有 $A$ 种原料 200 吨, $B$ 种原料 360 吨, $C$ 种原料 300 吨, 在此基础上生产甲乙两种肥料. 已知生产 1 车皮甲种肥料, 产生的利润为 2 万元; 生产 1 车皮乙种肥料, 产生的利润为 3 万元. 分别用 $x$、$y$ 表示生产甲、乙两种肥料的车皮数.

(1) 用 $x$, $y$ 列出满足生产条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

(2) 问分别生产甲、乙两种肥料各多少车皮, 能够产生最大的利润? 并求出此最大利润.

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 平面 $AED\perp$ 平面 $ABCD$, $EF\parallel AB$, $AB=2$, $BC=EF=1$, $AE=\sqrt{6}$, $DE=3$, $\angle BAD=60^\circ$, $G$ 为 $BC$ 的中点.
(1) 求证: $FG\parallel$ 平面 $BED$;
(2) 求证: 平面 $BED\perp$ 平面 $AED$;
(3) 求直线 $EF$ 与平面 $BED$ 所成角的正弦值.




18. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 $n$ 项和为 $S_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 且 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{2}{a_3}$, $S_6=63$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $b_n$ 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ $(a>\sqrt{3})$ 的右焦点为 $F$, 右顶点为 $A$. 已知 $\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$, 其中 $O$ 为原点, $e$ 为椭圆的离心率.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设过点 $A$ 的直线 $l$ 与椭圆交于点 $B$ ($B$ 不在 $x$ 轴上), 垂直于 $l$ 的直线与 $l$ 交于点 $M$, 与 $y$ 轴交于点 $H$. 若 $BF\perp HF$, 且 $\angle MOA=\angle MAO$, 求直线 $l$ 的斜率.

20. 设函数 $f(x)=x^3-ax-b$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $a$, $b\in\mathbf{R}$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 $x_0$, 且 $f(x_1)=f(x_0)$, 其中 $x_1\neq x_0$, 求证: $x_1+2x_0=0$;
(3) 设 $a>0$, 函数 $g(x)=|f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$.

# 2016 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

## 一、选择题

1. 已知集合 $P = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$, $Q = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \geqslant 4\}$, 则 $P \cup (\complement_{\mathbf{R}} Q) =$ ( )

(A) $[2,3]$　(B) $(-2,3]$　(C) $[1,2)$　(D) $(-\infty,-2] \cup [1,+\infty)$

2. 已知互相垂直的平面 $\alpha$, $\beta$ 交于直线 $l$, 若直线 $m$, $n$ 满足 $m \parallel \alpha$, $n \perp \beta$, 则 ( )

(A) $m \parallel l$　(B) $m \parallel n$　(C) $n \perp l$　(D) $m \perp n$

3. 在平面上, 过点 $P$ 作直线 $l$ 的垂线所得的垂足称为点 $P$ 在直线 $l$ 上的投影. 由区域 $\begin{cases} x-2 \leqslant 0, \\ x+y \geqslant 0, \\ x-3y+4 \geqslant 0 \end{cases}$ 中的点在直线 $x+y-2=0$ 上的投影构成的线段记为 $AB$, 则 $|AB| =$ ( )

(A) $2\sqrt{2}$　(B) $4$　(C) $3\sqrt{2}$　(D) $6$

4. 命题"$\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n \geqslant x^2$"的否定形式是 ( )

(A) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n < x^2$　(B) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n < x^2$

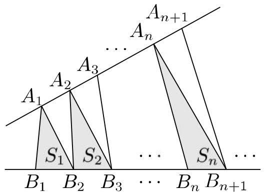
(C) $\exists x \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n < x^2$　(D) $\exists x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n < x^2$

5. 设函数 $f(x) = \sin^2 x + b\sin x + c$, 则 $f(x)$ 的最小正周期 ( )

(A) 与 $b$ 有关, 且与 $c$ 有关　(B) 与 $b$ 有关, 但与 $c$ 无关

(C) 与 $b$ 无关, 且与 $c$ 无关　(D) 与 $b$ 无关, 但与 $c$ 有关

6. 如图, 点列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 分别在某锐角的两边上, 且 $|A_nA_{n+1}| = |A_{n+1}A_{n+2}|$, $A_n \neq A_{n+2}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $|B_nB_{n+1}| = |B_{n+1}B_{n+2}|$, $B_n \neq B_{n+2}$, $n \in \mathbf{N}^*$ ($P \neq Q$ 表示点 $P$ 与 $Q$ 不重合). 若 $d_n = |A_nB_n|$, $S_n$ 为 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 的面积, 则 ( )




(A) $\{S_n\}$ 是等差数列　(B) $\{S_n^2\}$ 是等差数列

(C) $\{d_n\}$ 是等差数列　(D) $\{d_n^2\}$ 是等差数列

7. 已知椭圆 $C_1$: $\dfrac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$ $(m > 1)$ 与双曲线 $C_2$: $\dfrac{x^2}{n^2} - y^2 = 1$ $(n > 0)$ 的焦点重合, $e_1$, $e_2$ 分别为 $C_1$, $C_2$ 的离心率, 则 ( )

(A) $m > n$ 且 $e_1e_2 > 1$　(B) $m > n$ 且 $e_1e_2 < 1$

(C) $m < n$ 且 $e_1e_2 > 1$　(D) $m < n$ 且 $e_1e_2 < 1$

8. 已知实数 $a$, $b$, $c$. ( )

(A) 若 $|a^2+b+c| + |a+b^2+c| \leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2 < 100$

(B) 若 $|a^2+b+c| + |a^2+b-c| \leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2 < 100$

(C) 若 $|a+b+c^2| + |a+b-c^2| \leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2 < 100$

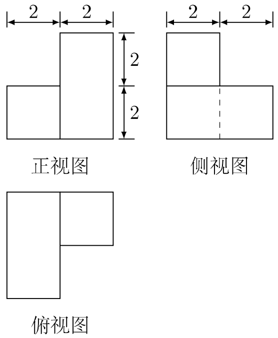
(D) 若 $|a^2+b+c| + |a+b^2-c| \leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2 < 100$

## 二、填空题

9. 若抛物线 $y^2 = 4x$ 上的点 $M$ 到焦点的距离为 10, 则 $M$ 到 $y$ 轴的距离是______.

10. 已知 $2\cos^2 x + \sin 2x = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ $(A > 0)$, 则 $A =$______, $b =$______.

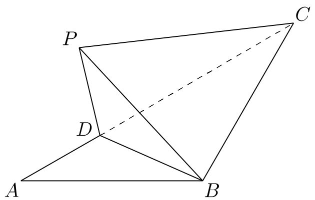
11. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的表面积是______ $\mathrm{cm}^2$, 体积是______ $\mathrm{cm}^3$.




12. 已知 $a > b > 1$. 若 $\log_a b + \log_b a = \dfrac{5}{2}$, $a^b = b^a$, 则 $a =$______, $b =$______.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$. 若 $S_2 = 4$, $a_{n+1} = 2S_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_1 =$______, $S_5 =$______.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 120°$. 若平面 $ABC$ 外的点 $P$ 和线段 $AC$ 上的点 $D$, 满足 $PD = DA$, $PB = BA$, 则四面体 $PBCD$ 的体积的最大值是______.




15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, 若对任意单位向量 $\boldsymbol{e}$, 均有 $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}| + |\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}| \leqslant \sqrt{6}$, 则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 的最大值是______.

## 三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A$, $B$, $C$ 所对的边分别为 $a$, $b$, $c$. 已知 $b + c = 2a\cos B$.

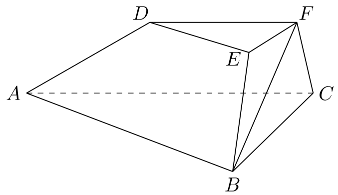
(1) 证明: $A = 2B$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \dfrac{a^2}{4}$, 求角 $A$ 的大小.

17. 如图, 在三棱台 $ABC-DEF$ 中, 平面 $BCFE \perp$ 平面 $ABC$, $\angle ACB = 90°$, $BE = EF = FC = 1$, $BC = 2$, $AC = 3$.

(1) 求证: $BF \perp$ 平面 $ACFD$;

(2) 求二面角 $B-AD-F$ 的平面角的余弦值.



18. 已知 $a \geqslant 3$, 函数 $F(x) = \min\{2|x-1|,\ x^2-2ax+4a-2\}$, 其中 $\min\{p,\ q\} = \begin{cases} p, & p \leqslant q, \\ q, & p > q. \end{cases}$

(1) 求使得等式 $F(x) = x^2-2ax+4a-2$ 成立的 $x$ 的取值范围;

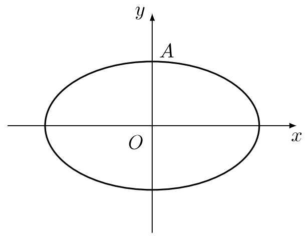
(2) ① 求 $F(x)$ 的最小值 $m(a)$;

② 求 $F(x)$ 在区间 $[0,6]$ 上的最大值 $M(a)$.

19. 如图, 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$.

(1) 求直线 $y=kx+1$ 被椭圆截得的线段长 (用 $a$, $k$ 表示);

(2) 若任意以点 $A(0,1)$ 为圆心的圆与椭圆至多有 3 个公共点, 求椭圆离心率的取值范围.




20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\left|a_n-\dfrac{a_{n+1}}{2}\right| \leqslant 1$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明: $|a_n| \geqslant 2^{n-1}(|a_1|-2)$, $n\in\mathbf{N}^*$;

(2) 若 $|a_n| \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $|a_n| \leqslant 2$, $n\in\mathbf{N}^*$.

# 2016 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

## 一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, 集合 $P=\{1,\ 3,\ 5\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 4\}$, 则 $(\complement_U P)\cup Q=$ ( )

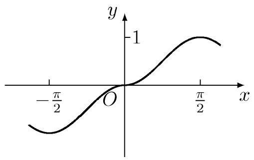
(A) $\{1\}$ (B) $\{3,\ 5\}$

(C) $\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

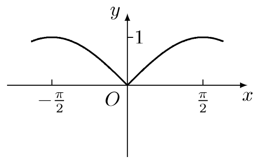
2. 已知互相垂直的平面 $\alpha$, $\beta$ 交于直线 $l$, 若直线 $m$, $n$ 满足 $m\parallel\alpha$, $n\perp\beta$, 则 ( )

(A) $m\parallel l$ (B) $m\parallel n$ (C) $n\perp l$ (D) $m\perp n$

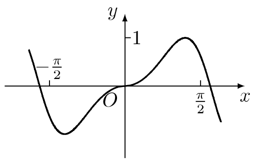
3. 函数 $y=\sin x^2$ 的图象是 ( )



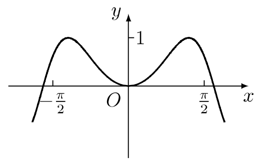
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 若平面区域 $\begin{cases}x+y-3\geqslant 0,\\ 2x-y-3\leqslant 0,\\ x-2y+3\geqslant 0\end{cases}$ 夹在两条斜率为 1 的平行直线之间, 则这两条平行直线间的距离的最小值是 ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{5}$

5. 已知 $a,b>0$, 且 $a\neq 1$, $b\neq 1$, 若 $\log_a b>1$, 则 ( )

(A) $(a-1)(b-1)<0$ (B) $(a-1)(a-b)>0$

(C) $(b-1)(b-a)<0$ (D) $(b-1)(b-a)>0$

6. 已知函数 $f(x)=x^2+bx$, 则"$b<0$"是"$f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

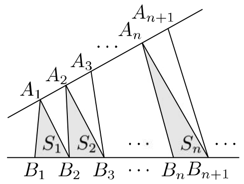
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(x)\geqslant |x|$ 且 $f(x)\geqslant 2^x$, $x\in\mathbf{R}$. ( )

(A) 若 $f(a)\leqslant |b|$, 则 $a\leqslant b$ (B) 若 $f(a)\leqslant 2^b$, 则 $a\leqslant b$

(C) 若 $f(a)\geqslant |b|$, 则 $a\geqslant b$ (D) 若 $f(a)\geqslant 2^b$, 则 $a\geqslant b$

8. 如图, 点列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 分别在某锐角的两边上, 且 $|A_nA_{n+1}|=|A_{n+1}A_{n+2}|$, $A_n\neq A_{n+2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, $|B_nB_{n+1}|=|B_{n+1}B_{n+2}|$, $B_n\neq B_{n+2}$, $n\in\mathbf{N}^*$ ($P\neq Q$ 表示点 $P$ 与 $Q$ 不重合). 若 $d_n=|A_nB_n|$, $S_n$ 为 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 的面积, 则 ( )

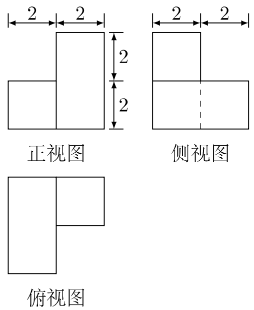


(A) $\{S_n\}$ 是等差数列 (B) $\{S_n^2\}$ 是等差数列

(C) $\{d_n\}$ 是等差数列 (D) $\{d_n^2\}$ 是等差数列

## 二、填空题

9. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的表面积是______ $\mathrm{cm}^2$, 体积是______$\mathrm{cm}^3$.



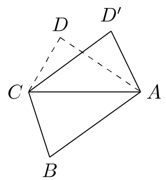

10. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+4x+8y+5a=0$ 表示圆, 则圆心坐标是______, 半径是______.

11. 已知 $2\cos^2 x+\sin 2x=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ $(A>0)$, 则 $A=$______, $B=$______.

12. 设函数 $f(x)=x^3+3x^2+1$, 已知 $a\neq 0$, 且 $f(x)-f(a)=(x-b)(x-a)^2$, $x\in\mathbf{R}$, 则实数 $a=$______, $b=$______.

13. 设双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左, 右焦点分别为 $F_1$, $F_2$, 若点 $P$ 在双曲线上, 且 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形, 则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围是______.

14. 如图, 已知平面四边形 $ABCD$, $AB=BC=3$, $CD=1$, $AD=\sqrt{5}$, $\angle ADC=90^\circ$. 沿直线 $AC$ 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle ACD'$, 直线 $AC$ 与 $BD'$ 所成角的余弦的最大值是______.




15. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. 若 $\boldsymbol{e}$ 为平面单位向量, 则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|$ 的最大值是______.

## 三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A$, $B$, $C$ 所对的边分别为 $a$, $b$, $c$. 已知 $b+c=2a\cos B$.

(1) 证明: $A=2B$;

(2) 若 $\cos B=\dfrac{2}{3}$, 求 $\cos C$ 的值.

17. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$. 已知 $S_2=4$, $a_{n+1}=2S_n+1$, $n\in\mathbf{N}^*$.

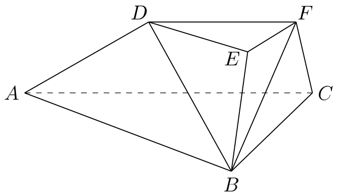
(1) 求通项公式 $a_n$;

(2) 求数列 $\{|a_n-n-2|\}$ 的前 $n$ 项和.

18. 如图, 在三棱台 $ABC-DEF$ 中, 平面 $BCFE\perp$ 平面 $ABC$, $\angle ACB=90^{\circ}$, $BE=EF=FC=1$, $BC=2$, $AC=3$.

(1) 求证: $BF\perp$ 平面 $ACFD$;

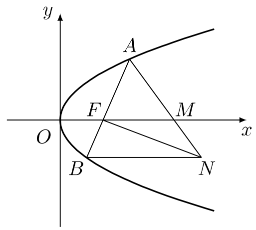
(2) 求直线 $BD$ 与平面 $ACFD$ 所成角的余弦值.




19. 如图, 设抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 $F$, 抛物线上的点 $A$ 到 $y$ 轴的距离等于 $|AF|-1$.

(1) 求 $p$ 的值;

(2) 若直线 $AF$ 交抛物线于另一点 $B$, 过 $B$ 与 $x$ 轴平行的直线和过 $F$ 与 $AB$ 垂直的直线交于点 $N$, $AN$ 与 $x$ 轴交于点 $M$. 求 $M$ 的横坐标的取值范围.




20. 设函数 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{1+x}$, $x\in[0,1]$. 证明:

(1) $f(x)\geqslant 1-x+x^2$;

(2) $\dfrac{3}{4}<f(x)\leqslant\dfrac{3}{2}$.