

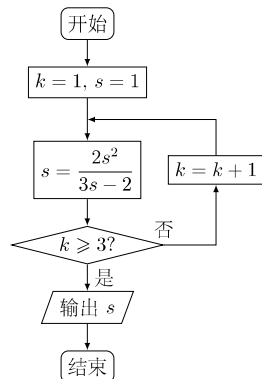
2019 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 已知复数 $z = 2 + i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 5

2. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 4t, \end{cases}$ (t 为参数), 则点 $(1, 0)$ 到直线 l 的距离是 ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{6}{5}$

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则 ()

- (A) $a^2 = 2b^2$ (B) $3a^2 = 4b^2$ (C) $a = 2b$ (D) $3a = 4b$

5. 若 x, y 满足 $|x| \leq 1 - y$, 且 $y \geq -1$, 则 $3x + y$ 的最大值为 ()

- (A) -7 (B) 1 (C) 5 (D) 7

6. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k = 1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()

- (A) $10^{10.1}$ (B) 10.1 (C) $\lg 10.1$ (D) $10^{-10.1}$

7. 设点 A, B, C 不共线, 则“ \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”的 ()

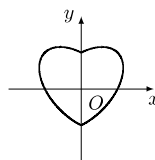
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 曲线 $C: x^2 + y^2 = 1 + |x|y$ 就是其中之一 (如图). 给出下列三个结论:

- ① 曲线 C 恰好经过 6 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);
② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$;
③ 曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中, 所有正确结论的序号是

()



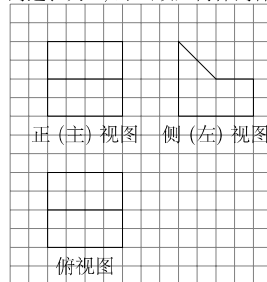
- (A) ① (B) ② (C) ①② (D) ①②③

二、填空题

9. 函数 $f(x) = \sin^2 2x$ 的最小正周期是_____.

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = -3$, $S_5 = -10$, 则 $a_5 =$ _____, S_n 的最小值为_____.

11. 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为_____.



12. 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

- ① $l \perp m$;
② $m \parallel \alpha$;
③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____.

13. 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____; 若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 则 a 的取值范围是_____.

14. 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

- ① 当 $x = 10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付_____元;
② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为_____.

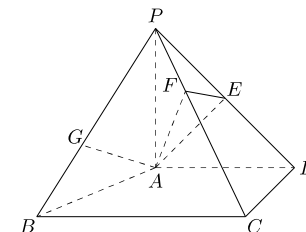
三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b - c = 2$, $\cos B = -\frac{1}{2}$.

- (1) 求 b, c 的值;
(2) 求 $\sin(B - C)$ 的值.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA = AD = CD = 2$, $BC = 3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$.

- (1) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ;
(2) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;
(3) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.



17. 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的 usage 情况, 从全校学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付方式 \ 支付金额 (元)	(0, 1000]	(1000, 2000]	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

- (1) 从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率;
- (2) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人, 以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数, 求 X 的分布列和数学期望;
- (3) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 A 的学生中, 随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元. 根据抽查结果, 能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

18. 已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(1) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(2) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N , 直线 $y = -1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B . 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

19. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;

(2) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;

(3) 设 $F(x) = |f(x) - (x + a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、 \cdots 、第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \cdots < i_m$), 若 $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_m}$, 则称新数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列. 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.

(1) 写出数列 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 的一个长度为 4 的递增子列;

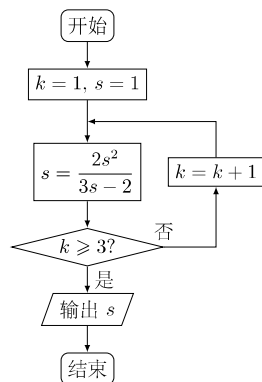
(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0} , 长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0} . 若 $p < q$, 求证: $a_{m_0} < a_{n_0}$;

(3) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s - 1$, 且长度为 s 末项为 $2s - 1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 ($s = 1, 2, \cdots$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

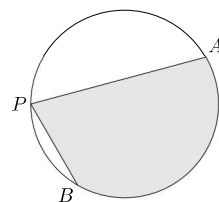
2019 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(-1, +\infty)$ (D) $(1, +\infty)$
- 已知复数 $z = 2 + i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()
(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 5
- 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()
(A) $y = x^{\frac{1}{2}}$ (B) $y = 2^{-x}$ (C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (D) $y = \frac{1}{x}$
- 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ()



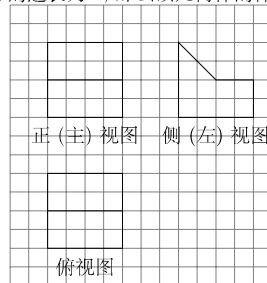
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的离心率是 $\sqrt{5}$, 则 $a =$ ()
(A) $\sqrt{6}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$
- 设函数 $f(x) = \cos x + b \sin x$ (b 为常数), 则“ $b = 0$ ”是“ $f(x)$ 为偶函数”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k = 1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()
(A) $10^{10.1}$ (B) 10.1 (C) $\lg 10.1$ (D) $10^{-10.1}$
- 如图, A, B 是半径为 2 的圆周上的定点, P 为圆周上的动点, $\angle APB$ 是锐角, 大小为 β . 图中阴影区域的面积的最大值为 ()



- 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b - c = 2$, $\cos B = -\frac{1}{2}$.
(1) 求 b, c 的值;
(2) 求 $\sin(B + C)$ 的值.

二、填空题

- 已知向量 $\mathbf{a} = (-4, 3)$, $\mathbf{b} = (6, m)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $m =$ _____.
- 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \geq -1, \\ 4x - 3y + 1 \geq 0, \end{cases}$, 则 $y - x$ 的最小值为_____, 最大值为_____.
- 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 则以 F 为圆心, 且与 l 相切的圆的方程为_____.
- 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为_____.



- 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:
① $l \perp m$;
② $m \parallel \alpha$;
③ $l \perp \alpha$.
以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____.
- 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.
① 当 $x = 10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付_____元;
② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为_____.

三、解答题

17. 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的 usage 情况, 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

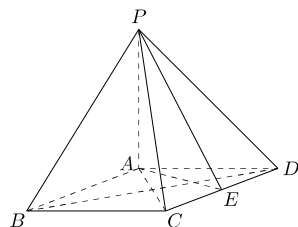
支付方式 \ 支付金额	不大于 2000 元	大于 2000 元
仅使用 A	27 人	3 人
仅使用 B	24 人	1 人

- (1) 估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数;
- (2) 从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人, 求该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率;
- (3) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人, 发现他本月的支付金额大于 2000 元. 结合 (2) 的结果, 能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$, 且经过点 $A(0, 1)$.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
 - (2) 设 O 为原点, 直线 $l: y = kx + t$ ($t \neq \pm 1$) 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q , 直线 AP 与 x 轴交于点 M , 直线 AQ 与 x 轴交于点 N , 若 $|OM| \cdot |ON| = 2$, 求证: 直线 l 经过定点.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.
- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;
 - (2) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;
 - (3) 设 $F(x) = |f(x) - (x + a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

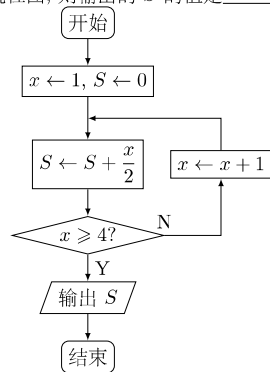
18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底部 $ABCD$ 为菱形, E 为 CD 的中点.
- (1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;
 - (2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 求证: $PAB \perp$ 平面 PAE ;
 - (3) 棱 PB 上是否存在点 F , 使得 $CF \parallel$ 平面 PAE ? 说明理由.



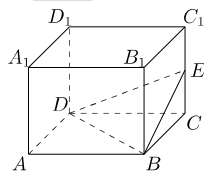
2019 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、填空题

- 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 6\}$, $B = \{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
- 已知复数 $(a + 2i)(1 + i)$ 的实部为 0, 其中 i 为虚数单位, 则实数 a 的值是_____.
- 如图是一个算法流程图, 则输出的 S 的值是_____.

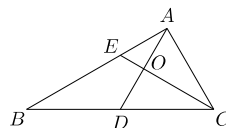


- 函数 $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$ 的定义域是_____.
- 已知一组数据 6, 7, 8, 8, 9, 10, 则该组数据的方差是_____.
- 从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务, 则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是_____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 经过点 $(3, 4)$, 则该双曲线的渐近线方程是_____.
- 已知数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_2 a_5 + a_8 = 0$, $S_9 = 27$, 则 S_8 的值是_____.
- 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120, E 为 CC_1 的中点, 则三棱锥 $E - BCD$ 的体积是_____.



- 在平面直角坐标系 xOy 中, P 是曲线 $y = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 上的一个动点, 则点 P 到直线 $x + y = 0$ 的距离的最小值是_____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在曲线 $y = \ln x$ 上, 且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e, -1)$ (e 为自然对数的底数), 则点 A 的坐标是_____.

- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE = 2EA$, AD 与 CE 交于点 O . 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$, 则 $\frac{AB}{AC}$ 的值是_____.

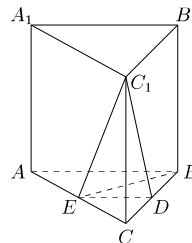


- 已知 $\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})} = -\frac{2}{3}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值是_____.
- 设 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的两个周期函数, $f(x)$ 的周期为 4, $g(x)$ 的周期为 2, 且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$, $g(x) = \begin{cases} k(x + 2), & 0 < x \leq 1, \\ -\frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 其中 $k > 0$. 若在区间 $(0, 9]$ 上, 关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

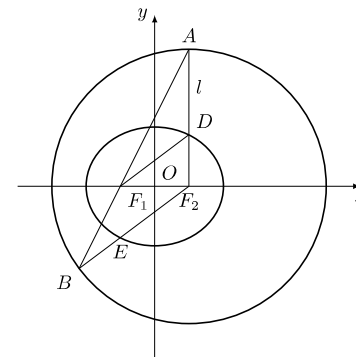
二、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .
(1) 若 $a = 3c$, $b = \sqrt{2}$, $\cos B = \frac{2}{3}$, 求 c 的值;
(2) 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{2b}$, 求 $\sin(B + \frac{\pi}{2})$ 的值.

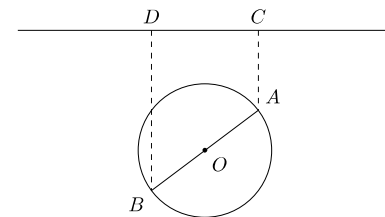
- 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 BC, AC 的中点, $AB = BC$. 求证:
(1) $A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1 ;
(2) $BE \perp C_1E$.



- 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l , 在 x 轴的上方, l 与圆 $F_2: (x - 1)^2 + y^2 = 4a^2$ 交于点 A , 与椭圆 C 交于点 D . 连接 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B , 连接 BF_2 交椭圆 C 于点 E , 连接 DF_1 . 已知 $DF_1 = \frac{5}{2}$.
(1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 求点 E 的坐标.



- 如图, 一个湖的边界是圆心为 O 的圆, 湖的一侧有一条直线型公路 l , 湖上有桥 AB (AB 是圆 O 的直径). 规划在公路 l 上选两个点 P, Q , 并修建两段直线型道路 PB, QA . 规划要求: 线段 PB, QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A, B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD (C, D 为垂足), 测得 $AB = 10$, $AC = 6$, $BD = 12$ (单位: 百米).
(1) 若道路 PB 与桥 AB 垂直, 求道路 PB 的长;
(2) 在规划要求下, P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处? 并说明理由;
(3) 在规划要求下, 若道路 PB 和 QA 的长度均为 d (单位: 百米). 求当 d 最小时, P, Q 两点间的距离.



19. 设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 若 $a = b = c$, $f(4) = 8$, 求 a 的值;
- (2) 若 $a \neq b$, $b = c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值;
- (3) 若 $a = 0$, $0 < b \leq 1$, $c = 1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M , 求证: $M \leq \frac{4}{27}$.

21. 三选二.

【A】已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

- (1) 求 A^2 ;
- (2) 求矩阵 A 的特征值.

【B】在极坐标系中, 已知两点 $A\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 直线 l 的方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3.$$

- (1) 求 A, B 两点间的距离;
- (2) 求点 B 到直线 l 的距离.

20. 定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“ M -数列”.

- (1) 已知等比数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 满足: $a_2 a_4 = a_5$, $a_3 - 4a_2 + 4a_1 = 0$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为“ M -数列”;
- (2) 已知数列 $\{b_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 满足: $b_1 = 1$, $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{b_n} - \frac{2}{b_{n+1}}$, 其中 S_n 为数列 b_n 的前 n 项和.
 - ① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - ② 设 m 为正整数, 若存在“ M -数列” $\{c_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 对任意正整数 k , 当 $k \leq m$ 时, 都有 $c_k \leq b_k \leq c_{k+1}$ 成立, 求 m 的最大值.

22. 设 $(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $n \geq 4$, $n \in \mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2 = 2a_2 a_4$.

- (1) 求 n 的值;
- (2) 设 $(1+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, 其中 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 求 $a^2 - 3b^2$ 的值.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设点集 $A_n = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$, $B_n = \{(0, 1), (n, 1)\}$, $C_n = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), \dots, (n, 2)\}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 令 $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n$. 从集合 M_n 中任取两个不同的点, 用随机变量 X 表示它们之间的距离.

- (1) 当 $n = 1$ 时, 求 X 的概率分布;
- (2) 对给定的正整数 n ($n \geq 3$), 求概率 $P(X \leq n)$ (用 n 表示).

【C】设 $x \in \mathbf{R}$, 解不等式 $|x| + |2x - 1| > 2$.

2019 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

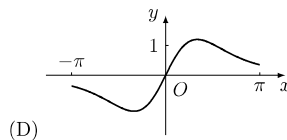
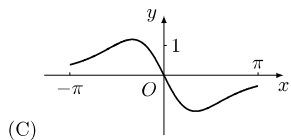
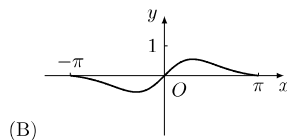
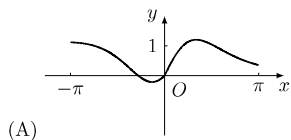
一、选择题

- 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $\{x | -4 < x < 3\}$ (B) $\{x | -4 < x < -2\}$
(C) $\{x | -2 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$
- 设复数 z 满足 $|z - i| = 1$, z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则 ()
(A) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ (B) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
(C) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ (D) $x^2 + (y + 1)^2 = 1$
- 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则 ()
(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < a < b$ (D) $b < c < a$
- 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 ()



- (A) 165 cm (B) 175 cm (C) 185 cm (D) 190 cm

- 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为 ()

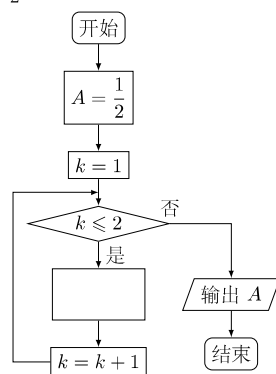


- 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是 ()



- (A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{11}{32}$ (C) $\frac{21}{32}$ (D) $\frac{11}{16}$
- 已知非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$, 且 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 ()
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

- 如图是求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 ()



- (A) $A = \frac{1}{2+A}$ (B) $A = 2 + \frac{1}{A}$ (C) $A = \frac{1}{1+2A}$ (D) $A = 1 + \frac{1}{2A}$

- 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则 ()
(A) $a_n = 2n - 5$ (B) $a_n = 3n - 10$ (C) $S_n = 2n^2 - 8n$ (D) $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

- 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2| = 2|F_2B|$, $|AB| = |BF_1|$, 则 C 的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (B) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

- 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:
① $f(x)$ 是偶函数;
② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增;
③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点;
④ $f(x)$ 的最大值为 2.
其中所有正确结论的编号是 ()

- (A) ①②④ (B) ②④ (C) ①④ (D) ①③

- 已知三棱锥 $P - ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$, 则球 O 的体积为 ()
(A) $8\sqrt{6}\pi$ (B) $4\sqrt{6}\pi$ (C) $2\sqrt{6}\pi$ (D) $\sqrt{6}\pi$

二、填空题

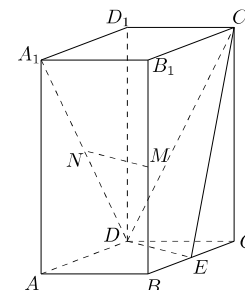
- 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.
- 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_4^2 = a_6$, 则 $S_5 =$ _____.
- 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4 : 1 获胜的概率是_____.
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题

- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$.
(1) 求 A ;
(2) 若 $\sqrt{2}a + b = 2c$, 求 $\sin C$.

- 如图, 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1 = 4$, $AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

- 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;
- 求二面角 $A - MA_1 - N$ 的正弦值.



19. 已知抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点为 F , 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 与 x 轴的交点为 P .

(1) 若 $|AF| + |BF| = 4$, 求 l 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$.

20. 已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为 X .

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, p_i ($i = 0, 1, \dots, 8$) 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0 = 0$, $p_8 = 1$, $p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, 7$), 其中 $a = P(X = -1)$, $b = P(X = 0)$, $c = P(X = 1)$. 假设 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$.

① 证明: $\{p_{i+1} - p_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 7$) 为等比数列;

② 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2}. \end{cases}$ (t 为参数), 以

坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta + 11 = 0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc = 1$. 证明:

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;

(2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.

2019 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

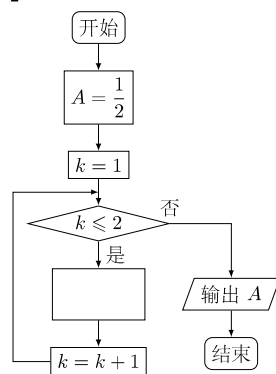
1. 设 $z = \frac{3-i}{1+2i}$, 则 $|z| =$ ()
(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1
2. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$, 则 $B \cap \complement_U A =$ ()
(A) $\{1, 6\}$ (B) $\{1, 7\}$ (C) $\{6, 7\}$ (D) $\{1, 6, 7\}$
3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则 ()
(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < a < b$ (D) $b < c < a$
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 ()



- (A) 165 cm (B) 175 cm (C) 185 cm (D) 190 cm
5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为 ()
(A) (B)
(C) (D)
 6. 某学校为了解 1000 名新生的身体素质, 将这些学生编号为 1, 2, ..., 1000, 从这些新生中用系统抽样方法等距抽取 100 名学生进行体质测验. 若 46 号学生被抽到, 则下面 4 名学生中被抽到的是 ()
(A) 8 号学生 (B) 200 号学生 (C) 616 号学生 (D) 815 号学生

7. $\tan 255^\circ =$ ()
(A) $-2 - \sqrt{3}$ (B) $-2 + \sqrt{3}$ (C) $2 - \sqrt{3}$ (D) $2 + \sqrt{3}$
8. 已知非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$, 且 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 ()
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

9. 如图是求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 ()



- (A) $A = \frac{1}{2+A}$ (B) $A = 2 + \frac{1}{A}$ (C) $A = \frac{1}{1+2A}$ (D) $A = 1 + \frac{1}{2A}$
10. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线的倾斜角为 130° , 则 C 的离心率为 ()
(A) $2 \sin 40^\circ$ (B) $2 \cos 40^\circ$ (C) $\frac{1}{\sin 50^\circ}$ (D) $\frac{1}{\cos 50^\circ}$
 11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 则 $\frac{b}{c} =$ ()
(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
 12. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2| = 2|F_2B|$, $|AB| = |BF_1|$, 则 C 的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (B) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

二、填空题

13. 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.
14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = 1, S_3 = \frac{3}{4}$, 则 $S_4 =$ _____.
15. 函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) - 3 \cos x$ 的最小值为_____.
16. 已知 $\angle ACB = 90^\circ$, P 为平面 ABC 外一点, $PC = 2$, 点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC, BC 的距离均为 $\sqrt{3}$, 那么 P 到平面 ABC 的距离为_____.

三、解答题

17. 某商场为提高服务质量, 随机调查了 50 名男顾客和 50 名女顾客, 每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价, 得到如表列联表:

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

- (1) 分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率;
- (2) 能否有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异?

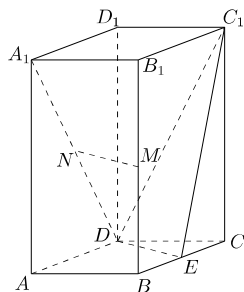
$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_9 = -a_5$.
(1) 若 $a_3 = 4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $a_1 > 0$, 求使得 $S_n \geq a_n$ 的 n 的取值范围.

19. 如图, 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1 = 4$, $AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

- (1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;
- (2) 求点 C 到平面 C_1DE 的距离.



20. 已知函数 $f(x) = 2\sin x - x\cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

- (1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点;
- (2) 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

21. 已知点 A, B 关于坐标原点 O 对称, $|AB| = 4$, $\odot M$ 过点 A, B 且与直线 $x + 2 = 0$ 相切.

- (1) 若 A 在直线 $x + y = 0$ 上, 求 $\odot M$ 的半径;
- (2) 是否存在定点 P , 使得当 A 运动时, $|MA| - |MP|$ 为定值? 并说明理由.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2}. \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以

坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.

- (1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
- (2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc = 1$. 证明:

- (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;
- (2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.

一、选择题

10. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $2 \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 (\quad)

- (A) $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ (B) $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$ (C) $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ (D) $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

二、填空题

13. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.

14. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -e^{ax}$. 若 $f(\ln 2) = 8$, 则 $a =$ _____.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $b = 6, a = 2c, B = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 中国有悠久的金石文化,印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体,但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体,它的所有顶点都在同一个正方体的表面上,且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有 _____ 个面,其棱长为 _____.



图 1

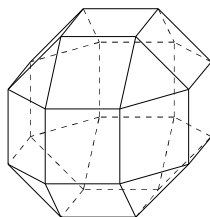


图 2

() 三、解答题

17. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE \perp EC_1$.

- (1) 证明: $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 ;
(2) 若 $AE = A_1E$, 求二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值.

18. 11 分制乒乓球比赛, 每赢一球得 1 分, 当某局打成 10 : 10 平后, 每球交换发球权, 先多得 2 分的一方获胜, 该局比赛结束. 甲、乙两位同学进行单打比赛, 假设甲发球时甲得分的概率为 0.5, 乙发球时甲得分的概率为 0.4, 各球的结果相互独立. 在某局双方 10 : 10 平后, 甲先发球, 两人又打了 X 个球该局比赛结束.

- (1) 求 $P(X=2)$;
- (2) 求事件“ $X=4$ 且甲获胜”的概率.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $4a_{n+1} = 3a_n - b_n + 4$, $4b_{n+1} = 3b_n - a_n - 4$.
 (1) 证明: $\{a_n + b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n - b_n\}$ 是等差数列;
 (2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.
20. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$.
 (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;
 (2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线.
21. 已知点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 动点 $M(x, y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$. 记 M 的轨迹为曲线 C .
 (1) 求 C 的方程, 并说明 C 是什么曲线;
 (2) 过坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点, 点 P 在第一象限, $PE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 连接 QE 并延长交 C 于点 G .
 ① 证明: $\triangle PQG$ 是直角三角形;
 ② 求 $\triangle PQG$ 面积的最大值.
22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0, \theta_0)$ ($\rho_0 > 0$) 在曲线 $C: \rho = 4 \sin \theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4, 0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P .
 (1) 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;
 (2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.
23. 已知 $f(x) = |x - a|x + |x - 2|(x - a)$.
 (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集;
 (2) 若 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.

2019 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | x > -1\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $(-1, +\infty)$ (B) $(-\infty, 2)$ (C) $(-1, 2)$ (D) \emptyset
- 设 $z = i(2 + i)$, 则 $\bar{z} =$ ()
(A) $1 + 2i$ (B) $-1 + 2i$ (C) $1 - 2i$ (D) $-1 - 2i$
- 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2)$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$ ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $5\sqrt{2}$ (D) 50
- 生物实验室有 5 只兔子, 其中只有 3 只测量过某项指标, 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只, 则恰有 2 只测量过该指标的概率为 ()
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$
- 在“一带一路”知识测验后, 甲、乙、丙三人对成绩进行预测.
甲: 我的成绩比乙高.
乙: 丙的成绩比我和甲的都高.
丙: 我的成绩比乙高.
成绩公布后, 三人成绩互不相同且只有一个人预测正确, 那么三人按成绩由高到低的次序为 ()
(A) 甲、乙、丙 (B) 乙、甲、丙 (C) 丙、乙、甲 (D) 甲、丙、乙
- 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ()
(A) $e^{-x} - 1$ (B) $e^{-x} + 1$ (C) $-e^{-x} - 1$ (D) $-e^{-x} + 1$
- 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是 ()
(A) α 内有无数条直线与 β 平行 (B) α 内有两条相交直线与 β 平行
(C) α, β 平行于同一条直线 (D) α, β 垂直于同一平面
- 若 $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 两个相邻的极值点, 则 $\omega =$ ()
(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$
- 若抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$ 的一个焦点, 则 $p =$ ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8
- 曲线 $y = 2 \sin x + \cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为 ()
(A) $x - y - \pi - 1 = 0$ (B) $2x - y - 2\pi - 1 = 0$
(C) $2x + y - 2\pi + 1 = 0$ (D) $x + y - \pi + 1 = 0$
- 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2 \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$ ()
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

- 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

二、填空题

- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x - y$ 的最大值是_____.
- 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A + a \cos B = 0$, 则 $B =$ _____.
- 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有_____个面, 其棱长为_____.



图 1

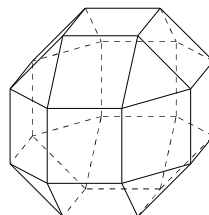
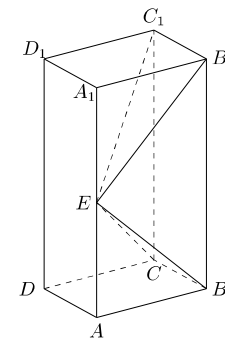


图 2

三、解答题

- 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE \perp EC_1$.
(1) 证明: $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 ;
(2) 若 $AE = A_1E$, $AB = 3$, 求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.



- 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1 = 2$, $a_3 = 2a_2 + 16$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. 某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况, 随机调查了 100 个企业, 得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.

y 的分组	$[-0.20, 0)$	$[0, 0.20)$	$[0.20, 0.40)$	$[0.40, 0.60)$	$[0.60, 0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

- (1) 分别估计这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例、产值负增长的企业比例;
- (2) 求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (精确到 0.01)
- 附: $\sqrt{74} \approx 8.602$.

20. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点, P 为 C 上一点, O 为坐标原点.

(1) 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 求 C 的离心率;

(2) 如果存在点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16, 求 b 的值和 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = (x - 1) \ln x - x - 1$. 证明:

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0, \theta_0)$ ($\rho_0 > 0$) 在曲线 $C: \rho = 4 \sin \theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4, 0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P .

(1) 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;

(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

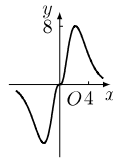
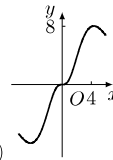
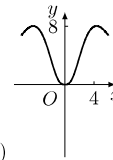
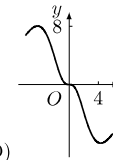
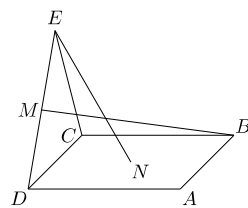
23. 已知 $f(x) = |x - a|x + |x - 2|(x - a)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集;

(2) 若 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.

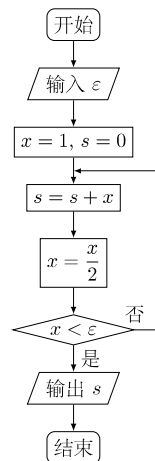
2019 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 1\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$
- 若 $z(1+i) = 2i$, 则 $z =$ ()
(A) $-1-i$ (B) $-1+i$ (C) $1-i$ (D) $1+i$
- 《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝, 并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况, 随机调查了 100 位学生, 其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位, 阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位, 阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位, 则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为 ()
(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8
- $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为 ()
(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24
- 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15, 且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$, 则 $a_3 =$ ()
(A) 16 (B) 8 (C) 4 (D) 2
- 已知曲线 $y = ae^x + x \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$, 则 ()
(A) $a = e, b = -1$ (B) $a = e, b = 1$
(C) $a = e^{-1}, b = 1$ (D) $a = e^{-1}, b = -1$
- 函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 的图象大致为 ()
(A)  (B)  (C)  (D) 
- 如图, 点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心, $\triangle ECD$ 为正三角形, 平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 ED 的中点, 则 ()
(A) 

- $BM = EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线
- $BM \neq EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线
- $BM = EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线
- $BM \neq EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

- 执行如图的程序框图, 如果输入的 ε 为 0.01, 则输出 s 的值等于 ()



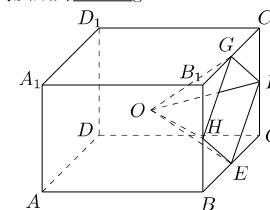
- $2 - \frac{1}{24}$ (B) $2 - \frac{1}{25}$ (C) $2 - \frac{1}{26}$ (D) $2 - \frac{1}{27}$
- 双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点为 F , 为点 P 在 C 的一条渐近线上, O 为坐标原点, 若 $|PO| = |PF|$, 则 $\triangle PFO$ 的面积为 ()
(A) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{2}$
 - 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 则 ()
(A) $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$
(B) $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$
(C) $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$
(D) $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

- 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$ ($\omega > 0$), 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点. 下述四个结论:
① $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点;
② $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点;
③ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 单调递增;
④ ω 的取值范围是 $\left[\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right)$.
其中所有正确结论的编号是 ()

- ①④ (B) ②③ (C) ①②③ (D) ①③④

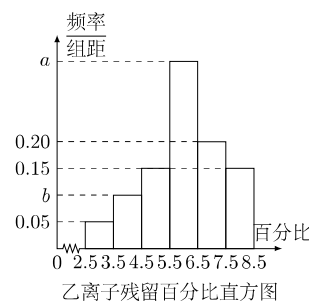
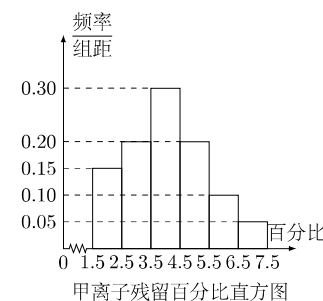
二、填空题

- 已知 a, b 为单位向量, 且 $a \cdot b = 0$, 若 $c = 2a - \sqrt{5}b$, 则 $\cos\langle a, c \rangle =$ _____.
- 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 \neq 0, a_2 = 3a_1$, 则 $\frac{S_{10}}{S_5} =$ _____.
- 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{\frac{36}{5}} + \frac{y^2}{20} = 1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为_____.
- 学生到工厂劳动实践, 利用 3D 打印技术制作模型. 如图, 该模型为长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O - EFGH$ 后所得的几何体, 其中 O 为长方体的中心, E, F, G, H 分别为所在棱的中点, $AB = BC = 6$ cm, $AA_1 = 4$ cm, 3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm³, 不考虑打印损耗, 制作该模型所需原料的质量为_____g.



三、解答题

- 为了了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度, 进行如下试验: 将 200 只小鼠随机分成 A, B 两组, 每组 100 只, 其中 A 组小鼠给服甲离子溶液, B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图:



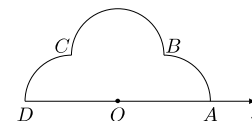
记 C 为事件: “乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”, 根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

- 求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值;
- 分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表).

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$.
- (1) 求 B ;
 - (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 - (2) 是否存在 a, b , 使得 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1 ? 若存在, 求出 a, b 的所有值; 若不存在, 说明理由.

22. 如图, 在极坐标系 Ox 中, $A(2, 0), B\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), C\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right), D(2, \pi)$, 弧 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1, 0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right), (1, \pi)$, 曲线 M_1 是弧 \widehat{AB} , 曲线 M_2 是弧 \widehat{BC} , 曲线 M_3 是弧 \widehat{CD} .
- (1) 分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程;
 - (2) 曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成, 若点 P 在 M 上, 且 $|OP| = \sqrt{3}$, 求 P 的极坐标.



19. 图 1 是由矩形 $ADEB$, $\text{Rt}\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB = 1, BE = BF = 2, \angle FBC = 60^\circ$. 将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG , 如图 2.
- (1) 证明: 图 2 中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$;
 - (2) 求图 2 中的二面角 $B - CG - A$ 的大小.

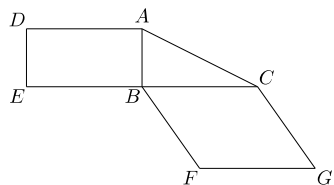


图 1

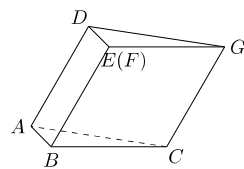


图 2

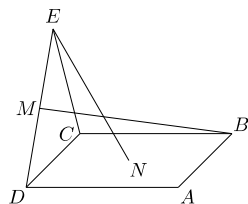
21. 已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B .
- (1) 证明: 直线 AB 过定点;
 - (2) 若以 $E\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求四边形 $ADBE$ 的面积.

23. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 且 $x + y + z = 1$.
- (1) 求 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值;
 - (2) 若 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geq \frac{1}{3}$ 成立, 证明: $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$.

2019 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 文)

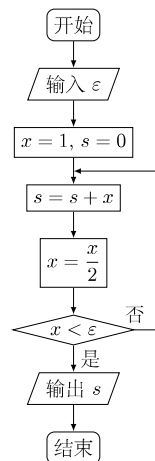
一、选择题

- 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 1\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$
- 若 $z(1+i) = 2i$, 则 $z =$ ()
(A) $-1-i$ (B) $-1+i$ (C) $1-i$ (D) $1+i$
- 两位男同学和两位女同学随机排成一列, 则两位女同学相邻的概率是 ()
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
- 《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝, 并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况, 随机调查了 100 位学生, 其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位, 阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位, 阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位, 则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为 ()
(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8
- 函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ 在 $[0, 2\pi]$ 的零点个数为 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15, 且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$, 则 $a_3 =$ ()
(A) 16 (B) 8 (C) 4 (D) 2
- 已知曲线 $y = ae^x + x \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$, 则 ()
(A) $a = e, b = -1$ (B) $a = e, b = 1$
(C) $a = e^{-1}, b = 1$ (D) $a = e^{-1}, b = -1$
- 如图, 点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心, $\triangle ECD$ 为正三角形, 平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 ED 的中点, 则 ()



- (A) $BM = EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线
(B) $BM \neq EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线
(C) $BM = EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线
(D) $BM \neq EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 ε 为 0.01, 则输出 s 的值等于 ()



- (A) $2 - \frac{1}{2^4}$ (B) $2 - \frac{1}{2^5}$ (C) $2 - \frac{1}{2^6}$ (D) $2 - \frac{1}{2^7}$

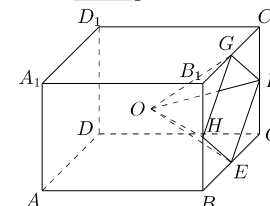
10. 已知 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的一个焦点, 点 P 在 C 上, O 为坐标原点, 若 $|OP| = |OF|$, 则 $\triangle OPF$ 的面积为 ()
(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) $\frac{9}{2}$
11. 记不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 6, \\ 2x-y \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D . 命题 $p: \exists (x, y) \in D$, $2x+y \geq 9$; 命题 $q: \forall (x, y) \in D$, $2x+y \leq 12$. 下面给出了四个命题:
① $p \vee q$; ② $\neg p \vee q$; ③ $p \wedge \neg q$; ④ $\neg p \wedge \neg q$.
这四个命题中, 所有真命题的编号是 ()
(A) ①③ (B) ①② (C) ②③ (D) ③④

12. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 则 ()
(A) $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{4}}\right)$
(B) $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{4}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$
(C) $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{4}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$
(D) $f\left(2^{-\frac{3}{4}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

二、填空题

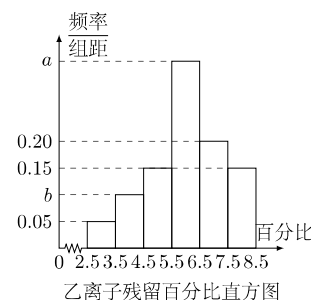
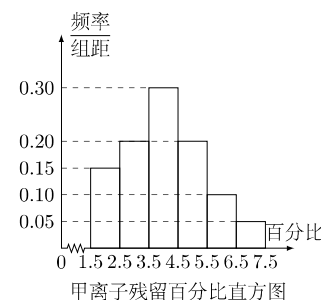
13. 已知向量 $a = (2, 2)$, $b = (-8, 6)$, 则 $\cos\langle a, b \rangle =$ _____.
14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 = 5$, $a_7 = 13$, 则 $S_{10} =$ _____.
15. 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为_____.

16. 学生到工厂劳动实践, 利用 3D 打印技术制作模型. 如图, 该模型为长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体, 其中 O 为长方体的中心, E, F, G, H 分别为所在棱的中点, $AB = BC = 6$ cm, $AA_1 = 4$ cm, 3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm³, 不考虑打印损耗, 制作该模型所需原料的质量为_____g.



三、解答题

17. 为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度, 进行如下试验: 将 200 只小鼠随机分成 A, B 两组, 每组 100 只, 其中 A 组小鼠给服甲离子溶液, B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图:



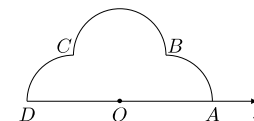
- 记 C 为事件: “乙离子残留体内的百分比不低于 5.5”, 根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.
(1) 求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值;
(2) 分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表).

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$.
- (1) 求 B ;
 - (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $0 < a < 3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $M - m$ 的取值范围.

22. 如图, 在极坐标系 Ox 中, $A(2, 0), B\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), C\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right), D(2, \pi)$, 弧 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1, 0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right), (1, \pi)$, 曲线 M_1 是弧 \widehat{AB} , 曲线 M_2 是弧 \widehat{BC} , 曲线 M_3 是弧 \widehat{CD} .
- (1) 分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程;
 - (2) 曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成, 若点 P 在 M 上, 且 $|OP| = \sqrt{3}$, 求 P 的极坐标.



19. 图 1 是由矩形 $ADEB$, $\text{Rt}\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB = 1, BE = BF = 2, \angle FBC = 60^\circ$. 将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG , 如图 2.

- (1) 证明: 图 2 中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$;
- (2) 求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积.

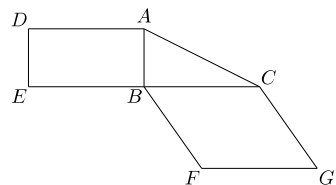


图 1

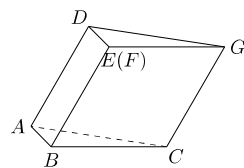


图 2

21. 已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B .
- (1) 证明: 直线 AB 过定点;
 - (2) 若以 $E\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求该圆的方程.

23. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 且 $x + y + z = 1$.

- (1) 求 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值;
- (2) 若 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geq \frac{1}{3}$ 成立, 证明: $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$.

2019 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 已知集合 $A = (-\infty, 3)$, $B = (2, +\infty)$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 已知 $z \in \mathbf{C}$ 且满足 $\frac{1}{z-5} = i$, 求 $z =$ _____.
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为_____.
4. 已知二项式 $(2x+1)^5$, 则展开式中含 x^2 项的系数为_____.
5. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq 2, \end{cases}$ 求 $z = 2x - 3y$ 的最小值为_____.
6. 已知函数 $f(x)$ 周期为 1, 且当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = -\log_2 x$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____.
7. 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $\frac{1}{x} + 2y = 3$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n + a_n = 2$, 则 $S_5 =$ _____.
9. 过 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与 $y^2 = 4x$ 交于 A, B , A 在 B 上方, M 为抛物线上一点, $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + (\lambda - 2) \overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda =$ _____.
10. 某三位数密码锁, 每位数字在 $0-9$ 数字中选取, 其中恰有两位数字相同的概率是_____.
11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 若点 $P_n(n, a_n)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n P_{n+1}| =$ _____.
12. 常数 $a > 0$, 将函数 $y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) 的图象先向右平移 1 个单位, 再向下平移 a 个单位, 然后将所得的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴向上翻折, 其余部分保持不变, 得到函数 $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right|$ ($x > 1$) 的图象 L , 当 $a = a_0$ 时, L 与 x 轴交点为 A , 在 L 上任意一点 P (P 异于 A), 总存在一点 Q 使得 $AP \perp AQ$ 且 $|AP| = |AQ|$, 则 $a_0 =$ _____.

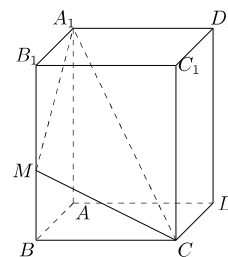
二、选择题

13. 已知直线方程 $2x - y + c = 0$ 的一个方向向量 \mathbf{d} 可以是 ()
(A) $(2, -1)$ (B) $(2, 1)$ (C) $(-1, 2)$ (D) $(1, 2)$
14. 一个直角三角形的两条直角边长分别为 1 和 2, 将该三角形分别绕其两个直角边旋转得到的两个圆锥的体积之比为 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8
15. 已知 $\omega \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = (x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$, 存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 可能的值为 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{5}$

16. 已知 $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)$. ① 存在角 α 在第一象限, 角 β 在第三象限; ② 存在角 α 在第二象限, 角 β 在第四象限; 那么 ()
(A) ①②均正确 (B) ①②均错误
(C) ①正确, ②错误 (D) ①错误, ②正确

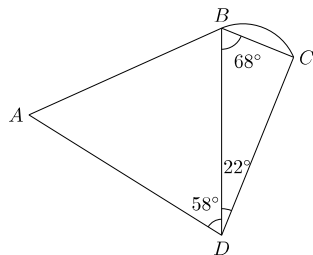
三、解答题

17. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 BB_1 上一点, 已知 $BM = 2$, $AD = 4$, $CD = 3$, $AA_1 = 5$.
(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角;
(2) 求点 A 到平面 A_1MC 的距离.



19. 如图, 某段海岸线可近似看作一条曲线, 该曲线由线段 AB 和四分之一圆周 \widehat{BC} 构成, D 为一海岛, B 在 D 的正北方向, 且 B 、 D 相距 39.2 千米, A 在 D 的北偏西 58° 方向, C 在 D 的北偏东 22° 方向, C 在 B 的南偏东 68° 方向.

- (1) 若沿 \widehat{BC} 建观光道, 计算该观光道的长度; (精确到 0.001 千米)
(2) 现规划在该海岸线上选取一点 E , 修建从 E 直通 D 的公路桥, 已知 A 、 B 相距 40 千米, 求公路桥 DE 的最短长度. (精确到 0.001 千米)



20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, F_1, F_2 分别为左、右焦点, 直线 l 过 F_2 交椭圆于 A, B 两点.
- (1) 若直线 l 垂直于 x 轴, 求 $|AB|$;
 - (2) 当 $\angle F_1AB = 90^\circ$ 时, 点 A 在 x 轴上方, 求 A, B 的坐标;
 - (3) 设直线 AF_1 交 y 轴于点 M , 直线 BF_1 交 y 轴于点 N , 是否存在直线 l , 使得 $S_{\triangle F_1AB} = S_{\triangle F_1MN}$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ 有 100 项, $a_1 = a$, 对任意 $n \in [2, 100]$, 存在 i 使得 $a_n = a_i + d$, $i \in [1, n-1]$, 若 a_k 与其之前中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P .
- (1) 若 $a_1 = 1, d = 2$, 求 a_4 所有可能的值;
 - (2) 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 求证: $\{a_n\}$ 中存在具有性质 P 的项;
 - (3) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P , 这三项和为 C , 试用 a, d, c 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$.

2019 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

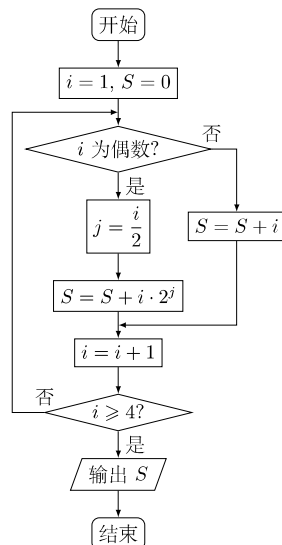
一、选择题

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < 3\}$, 则 $(A \cap C) \cup B =$ ()
 (A) $\{2\}$ (B) $\{2, 3\}$ (C) $\{-1, 2, 3\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = -4x + y$ 的最
 大值为 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为 ()



- (A) 5 (B) 8 (C) 24 (D) 29

5. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 ()
 (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

6. 已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_{0.5} 0.2$, $c = 0.5^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 (A) $a < c < b$ (B) $a < b < c$ (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 是奇函数, 将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π , 且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$ ()
 (A) -2 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

8. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 则 a 的取值范围为 ()
 (A) $[0, 1]$ (B) $[0, 2]$ (C) $[0, e]$ (D) $[1, e]$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 则 $\left| \frac{5-i}{1+i} \right|$ 的值为_____.

10. $\left(2x - \frac{1}{8x^3}\right)^8$ 的展开式中的常数项为_____.

11. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为_____.

12. 设 $a \in \mathbf{R}$, 直线 $ax - y + 2 = 0$ 和圆 $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta, \\ y = 1 + 2 \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数) 相切, 则 a 的值为_____.

13. 设 $x > 0, y > 0, x + 2y = 5$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB = 2\sqrt{3}, AD = 5, \angle A = 30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ _____.

三、解答题

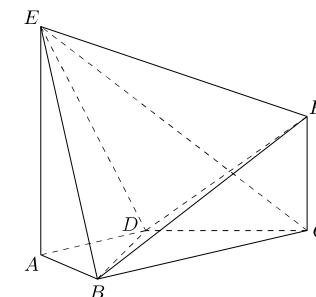
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a, 3c \sin B = 4a \sin C$.
 (1) 求 $\cos B$ 的值;
 (2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

16. 设甲、乙两位同学上学期间, 每天 7:30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立.

- (1) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;
 (2) 设 M 为事件“上学期间的三天中, 甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”, 求事件 M 发生的概率.

17. 如图, $AE \perp$ 平面 $ABCD, CF \parallel AE, AD \parallel BC, AD \perp AB, AB = AD = 1, AE = BC = 2$.

- (1) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;
 (2) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;
 (3) 若二面角 $E - BD - F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.



18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 上顶点为 B . 已知椭圆的短轴长为 4, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设点 P 在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点, 点 N 在 y 轴的负半轴上. 若 $|ON| = |OF|$ (O 为原点), 且 $OP \perp MN$, 求直线 PB 的斜率.
19. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列. 已知 $a_1 = 4, b_1 = 6, b_2 = 2a_2 - 2, b_3 = 2a_3 + 4$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1, c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1}, \\ b_k, & n = 2^k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.
- ① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式;
- ② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
20. 设函数 $f(x) = e^x \cos x, g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$;
- (3) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明 $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

2019 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < 3\}$, 则 $(A \cap C) \cup B =$ ()

- (A) $\{2\}$ (B) $\{2, 3\}$ (C) $\{-1, 2, 3\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$

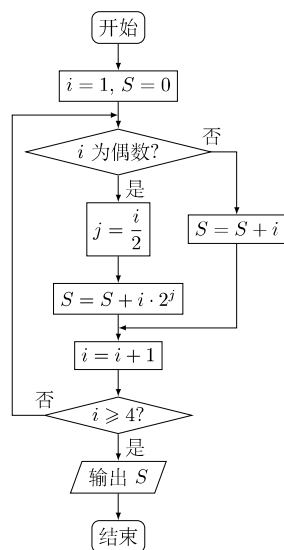
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0, \\ x-y+2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = -4x + y$ 的最大值为 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的 ()

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为 ()



- (A) 5 (B) 8 (C) 24 (D) 29

5. 已知 $a = \log_2 7$, $b = \log_3 8$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

(A) $c < b < a$ (B) $a < b < c$ (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

6. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 是奇函数, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$ ()

(A) -2 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为 ()

(A) $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ (B) $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ (C) $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right) \cup \{1\}$ (D) $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 则 $\left|\frac{5-i}{1+i}\right|$ 的值为_____.

10. 设 $x \in \mathbf{R}$, 使不等式 $3x^2 + x - 2 < 0$ 成立的 x 的取值范围为_____.

11. 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为_____.

12. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为_____.

13. 设 $x > 0, y > 0, x + 2y = 5$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB = 2\sqrt{3}, AD = 5, \angle A = 30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 则 $\vec{BD} \cdot \vec{AE} =$ _____.

三、解答题

15. 2019 年, 我国施行个人所得税专项附加扣除办法, 涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有 72, 108, 120 人, 现采用分层抽样的方法, 从该单位上述员工中抽取 25 人调查专项附加扣除的享受情况.

员工 项目	A	B	C	D	E	F
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

(1) 应从老、中、青员工中分别抽取多少人?

(2) 抽取的 25 人中, 享受至少两项专项附加扣除的员工有 6 人, 分别记为 A, B, C, D, E, F . 享受情况如表, 其中“○”表示享受, “×”表示不享受. 现从这 6 人中随机抽取 2 人接受采访.

① 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

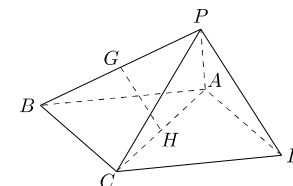
② 设 M 为事件“抽取的 2 人享受的专项附加扣除至少有一项相同”, 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a, 3c \sin B = 4a \sin C$.

- (1) 求 $\cos B$ 的值;
(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC \perp$ 平面 $PCD, PA \perp CD, CD = 2, AD = 3$.

- (1) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 PAD ;
(2) 求证: $PA \perp$ 平面 PCD ;
(3) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

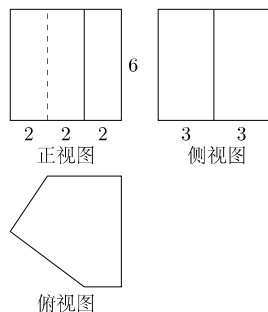


18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 已知 $a_1 = b_1 = 3$, $b_2 = a_3$, $b_3 = 4a_2 + 3$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 左顶点为 A , 上顶点为 B . 已知 $\sqrt{3}|OA| = 2|OB|$ (O 为原点).
- (1) 求椭圆的离心率;
- (2) 设经过点 F 且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P , 圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切, 圆心 C 在直线 $x = 4$ 上, 且 $OC \parallel AP$, 求椭圆的方程.
20. 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.
- (1) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$,
- ① 证明 $f(x)$ 恰有两个零点;
- ② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明 $3x_0 - x_1 > 2$.

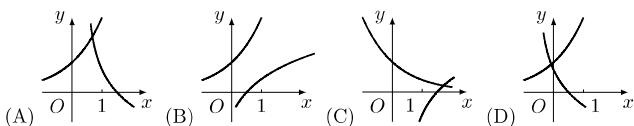
2019 普通高等学校招生考试 (浙江卷)

一、选择题

- 已知全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()
(A) $\{-1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 2, 3\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 3\}$
- 渐近线方程为 $x \pm y = 0$ 的双曲线的离心率是 ()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
- 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 3y + 4 \geq 0, \\ 3x - y - 4 \leq 0, \\ x + y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是 ()
(A) -1 (B) 1 (C) 10 (D) 12
- 祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家, 他提出的“幂势既同, 则积不容异”称为祖暅原理, 利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{\text{柱体}} = Sh$, 其中 S 是柱体的底面积, h 是柱体的高. 若某柱体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该柱体的体积 (单位: cm^3) 是 ()



- (A) 158 (B) 162 (C) 182 (D) 324
- 若 $a > 0, b > 0$, 则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
 - 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}, y = \log_a \left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 ()



- 设 $0 < a < 1$, 则随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0, 1)$ 内增大时 ()

- (A) $D(X)$ 增大 (B) $D(X)$ 减小
(C) $D(X)$ 先增大后减小 (D) $D(X)$ 先减小后增大
- 设三棱锥 $V-ABC$ 的底面是正三角形, 侧棱长均相等, P 是棱 VA 上的点 (不含端点), 记直线 PB 与直线 AC 所成角为 α , 直线 PB 与平面 ABC 所成角为 β , 二面角 $P-AC-B$ 的平面角为 γ , 则 ()
(A) $\beta < \gamma, \alpha < \gamma$ (B) $\beta < \alpha, \beta < \gamma$
(C) $\beta < \alpha, \gamma < \alpha$ (D) $\alpha < \beta, \gamma < \beta$
 - 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0, \end{cases}$ 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有 3 个零点, 则 ()
(A) $a < -1, b < 0$ (B) $a < -1, b > 0$
(C) $a > -1, b < 0$ (D) $a > -1, b > 0$
 - 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a_n^2 + b, n \in \mathbf{N}^*$, 则 ()
(A) 当 $b = \frac{1}{2}$ 时, $a_{10} > 10$ (B) 当 $b = \frac{1}{4}$ 时, $a_{10} > 10$
(C) 当 $b = -2$ 时, $a_{10} > 10$ (D) 当 $b = -4$ 时, $a_{10} > 10$

二、填空题

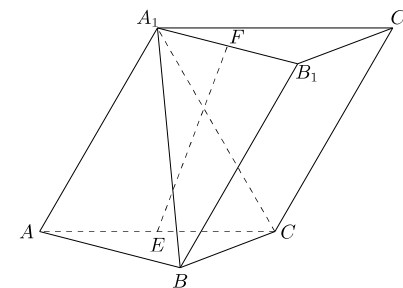
- 复数 $z = \frac{1}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____.
- 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$, 半径长是 r . 若直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆相切于点 $A(-2, -1)$, 则 $m =$ _____, $r =$ _____.
- 在二项式 $(\sqrt{2} + x)^9$ 的展开式中, 常数项是_____, 系数为有理数的项的个数是_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, AB = 4, BC = 3$, 点 D 在线段 AC 上, 若 $\angle BDC = 45^\circ$, 则 $BD =$ _____, $\cos \angle ABD =$ _____.
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点为 F , 点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方, 若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心, $|OF|$ 为半径的圆上, 则直线 PF 的斜率是_____.
- 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^3 - x$, 若存在 $t \in \mathbf{R}$, 使得 $|f(t+2) - f(t)| \leq \frac{2}{3}$, 则实数 a 的最大值是_____.
- 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 当每个 λ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 取遍 ± 1 时, $|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

三、解答题

- 设函数 $f(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 已知 $\theta \in [0, 2\pi)$, 函数 $f(x + \theta)$ 是偶函数, 求 θ 的值;
(2) 求函数 $y = \left[f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right]^2 + \left[f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$ 的值域.

- 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 $ABC, \angle ABC = 90^\circ, \angle BAC = 30^\circ, A_1A = A_1C = AC, E, F$ 分别是 AC, A_1B_1 的中点.
(1) 证明: $EF \perp BC$;
(2) 求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.



20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 4$, $a_4 = S_3$. 数列 $\{b_n\}$ 满足: 对每个 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n + b_n$, $S_{n+1} + b_n$, $S_{n+2} + b_n$ 成等比数列.

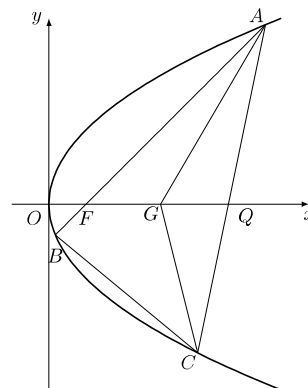
(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = \sqrt{\frac{a_n}{2b_n}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

21. 如图, 已知点 $F(1, 0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 C 在抛物线上, 使得 $\triangle ABC$ 的重心 G 在 x 轴上, 直线 AC 交 x 轴于点 Q , 且 Q 在点 F 的右侧. 记 $\triangle AFG$, $\triangle CQG$ 的面积分别为 S_1, S_2 .

(1) 求 p 的值及抛物线的准线方程;

(2) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时点 G 的坐标.



22. 已知实数 $a \neq 0$, 设函数 $f(x) = a \ln x + \sqrt{x+1}$, $x > 0$.

(1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ 均有 $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围.

注: $e = 2.71828 \cdots$ 为自然对数的底数.