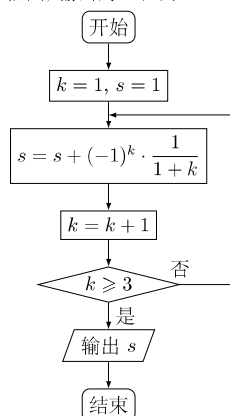


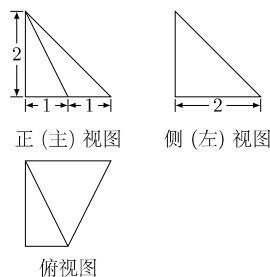
2018 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 2\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 1\}$ (C) $\{-2, 0, 1, 2\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2\}$
- 在复平面内, 复数 $\frac{1}{1-i}$ 的共轭复数对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ()



- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{7}{12}$
- “十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率为 f , 则第八个单音的频率为 ()
(A) $\sqrt[3]{2}f$ (B) $\sqrt[3]{2^2}f$ (C) $\sqrt[3]{2^5}f$ (D) $\sqrt[3]{2^7}f$
 - 某四棱锥的三视图如图所示, 在此四棱锥的侧面中, 直角三角形的个数为 ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- 设 a, b 均为单位向量, 则“ $|a - 3b| = |3a + b|$ ”是“ $a \perp b$ ”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 在平面直角坐标系中, 记 d 为点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 到直线 $x - my - 2 = 0$ 的距离. 当 θ, m 变化时, d 的最大值为 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 设集合 $A = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\}$, 则 ()
(A) 对任意实数 a , $(2, 1) \in A$ (B) 对任意实数 a , $(2, 1) \notin A$
(C) 当且仅当 $a < 0$ 时, $(2, 1) \notin A$ (D) 当且仅当 $a \leq \frac{3}{2}$ 时, $(2, 1) \notin A$

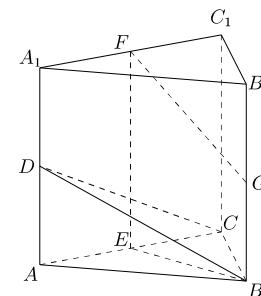
二、填空题

- 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = 3, a_2 + a_5 = 36$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.
- 在极坐标系中, 直线 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = a$ ($a > 0$) 与圆 $\rho = 2 \cos \theta$ 相切, 则 $a =$ _____.
- 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$). 若 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立, 则 ω 的最小值为_____.
- 若 x, y 满足 $x + 1 \leq y \leq 2x$, 则 $2y - x$ 的最小值是_____.
- 能说明“若 $f(x) > f(0)$ 对任意的 $x \in (0, 2]$ 都成立, 则 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是增函数”为假命题的一个函数是_____.
- 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 双曲线 $N: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$. 若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点, 则椭圆 M 的离心率为_____; 双曲线 N 的离心率为_____.

三、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 7, b = 8, \cos B = -\frac{1}{7}$.
(1) 求 $\angle A$;
(2) 求 AC 边上的高.

- 如图, 在三棱锥 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , D, E, F, G 分别为 AA_1, AC, A_1C_1, BB_1 的中点, $AB = BC = \sqrt{5}, AC = AA_1 = 2$.
(1) 求证: $AC \perp$ 平面 BEF ;
(2) 求二面角 $B - CD - C_1$ 的余弦值;
(3) 证明: 直线 FG 与平面 BCD 相交.



- 电影公司随机收集了电影的有关数据, 经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指: 一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

- 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;
- 从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 估计恰有 1 部获得好评的概率;
- 假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等. 用“ $\xi_k = 1$ ”表示第 k 类电影得到人们喜欢, “ $\xi_k = 0$ ”表示第 k 类电影没有得到人们喜欢 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). 写出方差 $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5, D\xi_6$ 的大小关系.

18. 设函数 $f(x) = [ax^2 - (4a+1)x + 4a+3]e^x$.
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a ;
 - (2) 若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.
19. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(1, 2)$. 过点 $Q(0, 1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B , 且直线 PA 交 y 轴于 M , 直线 PB 交 y 轴于 N .
- (1) 求直线 l 的斜率的取值范围;
 - (2) 设 O 为原点, $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$, 求证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.
20. 设 n 为正整数, 集合 $A = \{\alpha | \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n\}$. 对于集合 A 中的任意元素 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 记 $M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[(x_1 + y_1 - |x_1 - y_1|) + (x_2 + y_2 - |x_2 - y_2|) + \dots + (x_n + y_n - |x_n - y_n|)]$.
- (1) 当 $n = 3$ 时, 若 $\alpha = (1, 1, 0)$, $\beta = (0, 1, 1)$, 求 $M(\alpha, \alpha)$ 和 $M(\alpha, \beta)$ 的值;
 - (2) 当 $n = 4$ 时, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意元素 α, β , 当 α, β 相同时, $M(\alpha, \beta)$ 是奇数; 当 α, β 不同时, $M(\alpha, \beta)$ 是偶数. 求集合 B 中元素个数的最大值;
 - (3) 给定不小于 2 的 n , 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意两个不同的元素 α, β , $M(\alpha, \beta) = 0$. 写出一个集合 B , 使其元素个数最多, 并说明理由.

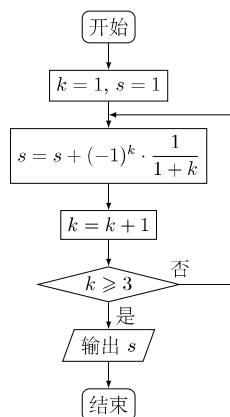
2018 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 2\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 1\}$ (C) $\{-2, 0, 1, 2\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 在复平面内, 复数 $\frac{1}{1-i}$ 的共轭复数对应的点位于 ()
 (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ()



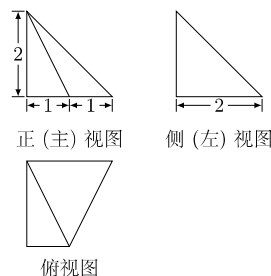
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{7}{12}$

4. 设 a, b, c, d 是非零实数, 则“ $ad = bc$ ”是“ a, b, c, d 成等比数列”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. “十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率为 f , 则第八个单音的频率为 ()

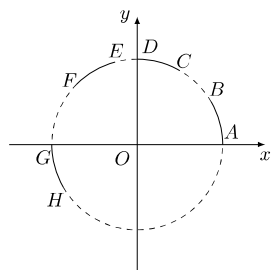
- (A) $\sqrt[3]{2}f$ (B) $\sqrt[3]{2^2}f$ (C) $\sqrt[12]{2^5}f$ (D) $\sqrt[12]{2^7}f$

6. 某四棱锥的三视图如图所示, 在此四棱锥的侧面中, 直角三角形的个数为 ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 在平面直角坐标系中, \widehat{AB} , \widehat{CD} , \widehat{EF} , \widehat{GH} 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的四段弧 (如图), 点 P 在其中一段上, 角 α 以 Ox 为始边, OP 为终边. 若 $\tan \alpha < \cos \alpha < \sin \alpha$, 则 P 所在的圆弧是 ()



- (A) \widehat{AB} (B) \widehat{CD} (C) \widehat{EF} (D) \widehat{GH}

8. 设集合 $A = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\}$, 则 ()

- (A) 对任意实数 a , $(2, 1) \in A$ (B) 对任意实数 a , $(2, 1) \notin A$
 (C) 当且仅当 $a < 0$ 时, $(2, 1) \notin A$ (D) 当且仅当 $a \leq \frac{3}{2}$ 时, $(2, 1) \notin A$

二、填空题

9. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, m)$. 若 $\mathbf{a} \perp (m\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 则 $m =$ _____.

10. 已知直线 l 过点 $(1, 0)$ 且垂直于 x 轴. 若 l 被抛物线 $y^2 = 4ax$ 截得的线段长为 4, 则抛物线的焦点坐标为_____.

11. 能说明“若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”为假命题的一组 a, b 的值依次为_____.

12. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ ($a > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $a =$ _____.

13. 若 x, y 满足 $x + 1 \leq y \leq 2x$, 则 $2y - x$ 的最小值是_____.

14. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$, 且 $\angle C$ 为钝角, 则 $\angle B =$ _____; $\frac{c}{a}$ 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = \ln 2$, $a_2 + a_3 = 5 \ln 2$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 求 $e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_n}$.

16. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, m]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$, 求 m 的最小值.

17. 电影公司随机收集了电影的有关数据, 经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指: 一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

- (1) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;
- (2) 随机选取 1 部电影, 估计这部电影没有获得好评的概率;
- (3) 电影公司为增加投资回报, 拟改变投资策略, 这将导致不同类型电影的好评率发生变化. 假设表格中只有两类电影的好评率数据发生变化, 那么哪类电影的好评率增加 0.1, 哪类电影的好评率减少 0.1, 使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大? (只需写出结论)

19. 设函数 $f(x) = [ax^2 - (3a+1)x + 3a+2]e^x$.

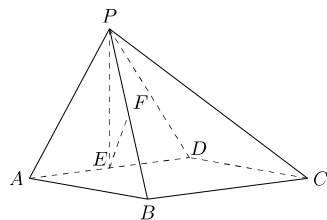
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 0, 求 a ;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

20. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B .

- (1) 求椭圆 M 的方程;
- (2) 若 $k = 1$, 求 $|AB|$ 的最大值;
- (3) 设 $P(-2, 0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D . 若 C, D 和点 $Q\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 共线, 求 k .

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA = PD$, E, F 分别为 AD, PB 的中点.

- (1) 求证: $PE \perp BC$;
- (2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ;
- (3) 求证: $EF \parallel$ 平面 PCD ;



2018 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 8\}$, $B = \{-1, 1, 6, 8\}$, 那么 $A \cap B =$ _____.
2. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 1 + 2i$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的实部为_____.
3. 已知 5 位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示, 那么这 5 位裁判打出的分数的平均数为_____.

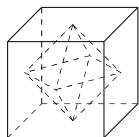
8	9	9
9	0	1 1

4. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 S 的值为_____.

```

I ← 1
S ← 1
While I < 6
    I ← I + 2
    S ← 2S
End While
Print S
    
```

5. 函数 $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 1}$ 的定义域为_____.
6. 某兴趣小组有 2 名男生和 3 名女生, 现从中任选 2 名学生去参加活动, 则恰好选中 2 名女生的概率为_____.
7. 已知函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值为_____.
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点 $F(c, 0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, 则其离心率的值为_____.
9. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$), 且在区间 $(-2, 2]$ 上, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ \left| x + \frac{1}{2} \right|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(15))$ 的值为_____.
10. 如图所示, 正方体的棱长为 2, 以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为_____.

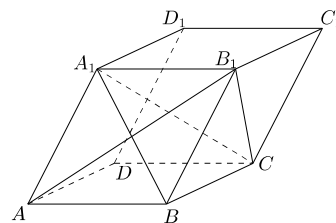


11. 若函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1$ ($a \in \mathbf{R}$) 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值的和为_____.
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $l: y = 2x$ 上在第一象限内的点, $B(5, 0)$, 以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D . 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 则点 A 的横坐标为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为_____.
14. 已知集合 $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbf{N}^*\}$. 将 $A \cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 $S_n > 12a_{n+1}$ 成立的 n 的最小值为_____.

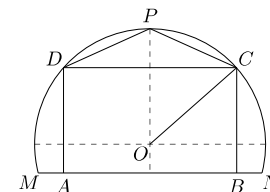
二、解答题

15. 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB$, $AB_1 \perp B_1C_1$. 求证:
 - (1) $AB \parallel$ 平面 A_1B_1C ;
 - (2) 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1B_1C .

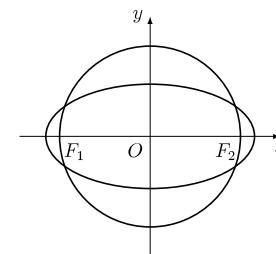


16. 已知 α, β 为锐角, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.
 - (1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;
 - (2) 求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值.

17. 某农场有一块农田, 如图所示, 它的边界由圆 O 的一段圆弧 MPN (P 为此圆弧的中点) 和线段 MN 构成. 已知圆 O 的半径为 40 米, 点 P 到 MN 的距离为 50 米. 现规划在此农田上修建两个温室大棚, 大棚 I 内的地块形状为矩形 $ABCD$, 大棚 II 内的地块形状为 $\triangle CDP$, 要求 A, B 均在线段 MN 上, C, D 均在圆弧上. 设 OC 与 MN 所成的角为 θ .
 - (1) 用 θ 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle CDP$ 的面积, 并确定 $\sin \theta$ 的取值范围;
 - (2) 若大棚 I 内种植甲种蔬菜, 大棚 II 内种植乙种蔬菜, 且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 $4:3$. 求当 θ 为何值时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 圆 O 的直径为 F_1F_2 .
 - (1) 求椭圆 C 及圆 O 的方程;
 - (2) 设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P .
 - ① 若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点, 求点 P 的坐标;
 - ② 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, 求直线 l 的方程.

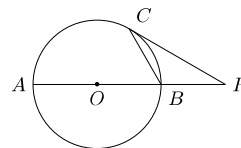


19. 记 $f'(x)$, $g'(x)$ 分别为函数 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数. 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x_0) = g(x_0)$ 且 $f'(x_0) = g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S 点”.

- (1) 证明: 函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + 2x - 2$ 不存在“S 点”;
- (2) 若函数 $f(x) = ax^2 - 1$ 与 $g(x) = \ln x$ 存在“S 点”, 求实数 a 的值;
- (3) 已知函数 $f(x) = -x^2 + a$, $g(x) = \frac{be^x}{x}$. 对任意 $a > 0$, 判断是否存在 $b > 0$, 使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在“S 点”, 并说明理由.

21. 四选二.

【A】如图, 圆 O 的半径为 2, AB 为圆 O 的直径, P 为 AB 延长线上一点, 过 P 作圆 O 的切线, 切点为 C . 若 $PC = 2\sqrt{3}$, 求 BC 的长.



【B】已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

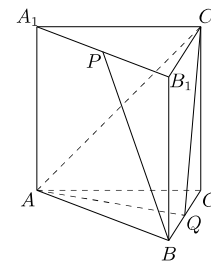
- (1) 求 A 的逆矩阵 A^{-1} ;
- (2) 若点 P 在矩阵 A 对应的变换作用下得到点 $P'(3, 1)$, 求点 P 的坐标.

【C】在极坐标系中, 直线 l 的方程为 $\rho \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 2$, 曲线 C 的方程为 $\rho = 4 \cos \theta$, 求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

【D】若 x, y, z 为实数, 且 $x + 2y + 2z = 6$, 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值.

22. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, 点 P, Q 分别为 A_1B_1, BC 的中点.

- (1) 求异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值;
- (2) 求直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值.



20. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为 b_1 , 公比为 q 的等比数列.

- (1) 设 $a_1 = 0, b_1 = 1, q = 2$, 若 $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 1, 2, 3, 4$ 均成立, 求 d 的取值范围;
- (2) 若 $a_1 = b_1 > 0, m \in \mathbf{N}^*, q \in (1, \sqrt[3]{2}]$, 证明: 存在 $d \in \mathbf{R}$, 使得 $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 2, 3, \dots, m+1$ 均成立, 并求 d 的取值范围 (用 b_1, m, q 表示).

23. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 对 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $i_1 i_2 \dots i_n$, 如果当 $s < t$ 时, 有 $i_s > i_t$, 则称 (i_s, i_t) 是排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的一个逆序, 排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其逆序数. 例如: 对 $1, 2, 3$ 的一个排列 231 , 只有两个逆序 $(2, 1), (3, 1)$, 则排列 231 的逆序数为 2. 记 $f_n(k)$ 为 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列中逆序数为 k 的全部排列的个数.

- (1) 求 $f_3(2), f_4(2)$ 的值;
- (2) 求 $f_n(2)$ ($n \geq 5$) 的表达式 (用 n 表示).

2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

一、选择题

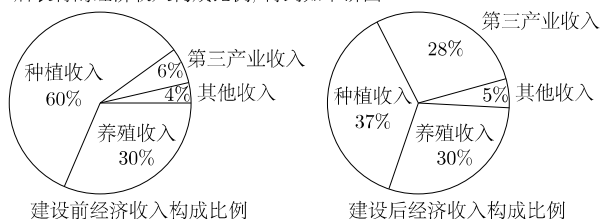
1. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$ ()

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} A =$

- (A) $\{x | -1 < x < 2\}$ (B) $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
(C) $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$ (D) $\{x | x \leq -1\} \cup \{x | x \geq 2\}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



则下面结论中不正确的是 ()

- (A) 新农村建设后, 种植收入减少
(B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上
(C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍
(D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $3S_3 = S_2 + S_4$, $a_1 = 2$, 则 $a_5 =$ ()

- (A) -12 (B) -10 (C) 10 (D) 12

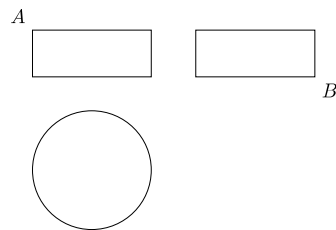
5. 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 ()

- (A) $y = -2x$ (B) $y = -x$ (C) $y = 2x$ (D) $y = x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} =$ ()

- (A) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (B) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
(C) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (D) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A , 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B , 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 ()



- (A) $2\sqrt{17}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 2

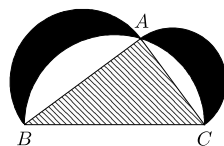
8. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} =$ ()

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $[-1, 0)$ (B) $[0, +\infty)$ (C) $[-1, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$

10. 如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC , 直角边 AB, AC . $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I, 黑色部分记为 II, 其余部分记为 III. 在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为 p_1, p_2, p_3 , 则 ()



- (A) $p_1 = p_2$ (B) $p_1 = p_3$ (C) $p_2 = p_3$ (D) $p_1 = p_2 + p_3$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N . 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 则 $|MN| =$ ()

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4

12. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角相等, 则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 ()

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ y \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为_____.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = 2a_n + 1$, 则 $S_6 =$ _____.

15. 从 2 位女生, 4 位男生中选 3 人参加科技比赛, 且至少有 1 位女生入选, 则不同的选法共有_____种. (用数字填写答案)

16. 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

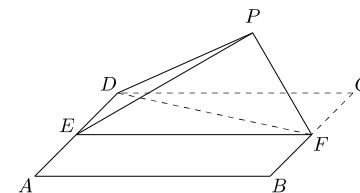
三、解答题

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $AB = 2$, $BD = 5$.

- (1) 求 $\cos \angle ADB$;
(2) 若 $DC = 2\sqrt{2}$, 求 BC .

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕, 把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF \perp BF$.

- (1) 证明: 平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$;
(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.
- (1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;
- (2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$.

20. 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱 200 件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取 20 件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验, 设每件产品为不合格品的概率都为 p ($0 < p < 1$), 且各件产品是否为不合格品相互独立.
- (1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 ;
- (2) 现对一箱产品检验了 20 件, 结果恰有 2 件不合格品, 以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.
- ① 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X , 求 EX ;
- ② 以检验费用与赔偿费用之和的期望值为决策依据, 是否该对这箱余下的所有产品作检验?

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 3 = 0$.
- (1) 求 C_2 的直角坐标方程;
- (2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x) = |x + 1| - |ax - 1|$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;
- (2) 若 $x \in (0, 1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立, 求 a 的取值范围.

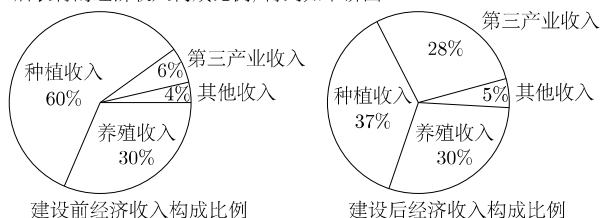
2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{0, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{0, 2\}$ (B) $\{1, 2\}$
 (C) $\{0\}$ (D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$ ()
 (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



则下面结论中不正确的是 ()

- (A) 新农村建设后, 种植收入减少
 (B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上
 (C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍
 (D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点为 $(2, 0)$, 则 C 的离心率为 ()
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1, O_2 , 过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形, 则该圆柱的表面积为 ()
 (A) $12\sqrt{2}\pi$ (B) 12π (C) $8\sqrt{2}\pi$ (D) 10π

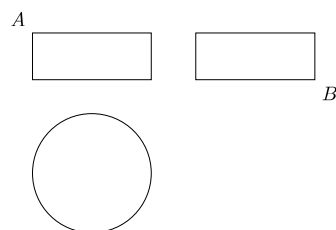
6. 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 ()
 (A) $y = -2x$ (B) $y = -x$ (C) $y = 2x$ (D) $y = x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} =$ ()
 (A) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (B) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
 (C) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (D) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

8. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2$, 则

- (A) $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 3
 (B) $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 4
 (C) $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 3
 (D) $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 4

9. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A , 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B , 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 ()



- (A) $2\sqrt{17}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 2

10. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° , 则该长方体的体积为 ()

- (A) 8 (B) $6\sqrt{2}$ (C) $8\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{3}$

11. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有两点 $A(1, a)$, $B(2, b)$, 且 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $|a - b| =$ ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) 1

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, -1]$ (B) $(0, +\infty)$ (C) $(-1, 0)$ (D) $(-\infty, 0)$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$, 若 $f(3) = 1$, 则 $a =$ _____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ y \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为_____.

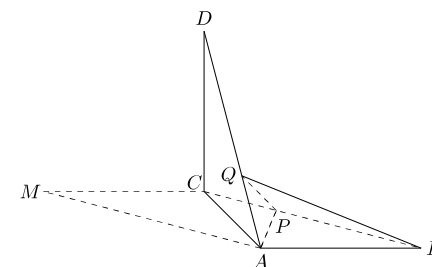
15. 直线 $y = x + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$, $b^2 + c^2 - a^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

() 三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$, 设 $b_n = \frac{a_n}{n}$.
 (1) 求 b_1, b_2, b_3 ;
 (2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并说明理由;
 (3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 如图, 在平行四边形 $ABCM$ 中, $AB = AC = 3$, $\angle ACM = 90^\circ$, 以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起, 使点 M 到达点 D 的位置, 且 $AB \perp DA$.
 (1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;
 (2) Q 为线段 AD 上一点, P 为线段 BC 上一点, 且 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$, 求三棱锥 $Q - ABP$ 的体积.



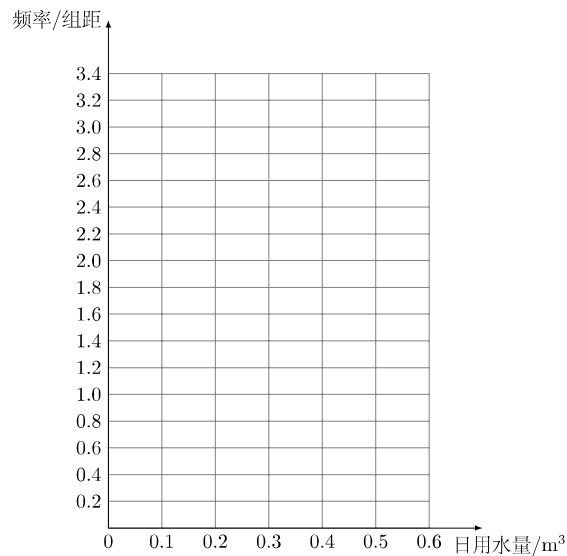
19. 某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据 (单位: m^3) 和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表				
日用水量	[0, 0.1)	[0.1, 0.2)	[0.2, 0.3)	[0.3, 0.4)
频数	1	3	2	4
日用水量	[0.4, 0.5)	[0.5, 0.6)	[0.6, 0.7)	
频数	9	26	5	

使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	[0, 0.1)	[0.1, 0.2)	[0.2, 0.3)
频数	1	5	13
日用水量	[0.3, 0.4)	[0.4, 0.5)	[0.5, 0.6)
频数	10	16	5

- (1) 在答题卡上作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图:



- (2) 估计该家庭使用节水龙头后, 日用水量小于 0.35 m^3 的概率;
 (3) 估计该家庭使用节水龙头后, 一年能节省多少水? (一年按 365 天计算, 同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表.)

20. 设抛物线 $C: y^2 = 2x$, 点 $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点.
 (1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 BM 的方程;
 (2) 证明: $\angle ABM = \angle ABN$.

21. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.
 (1) 设 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点. 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 3 = 0$.
 (1) 求 C_2 的直角坐标方程;
 (2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x) = |x + 1| - |ax - 1|$.
 (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;
 (2) 若 $x \in (0, 1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立, 求 a 的取值范围.

2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

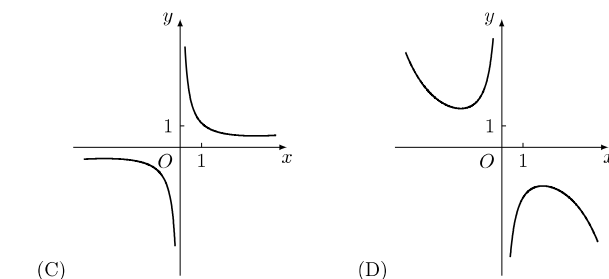
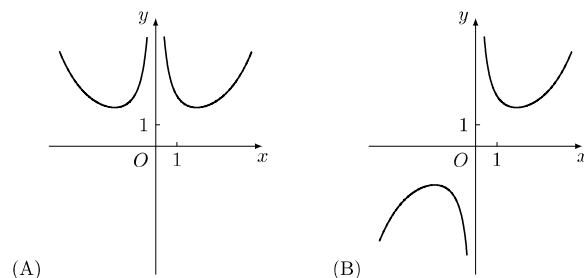
1. $\frac{1+2i}{1-2i} =$ ()

- (A) $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ (B) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ (C) $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ (D) $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为 ()

- (A) 9 (B) 8 (C) 5 (D) 4

3. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ()



4. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$, 则 $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) =$ ()

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0

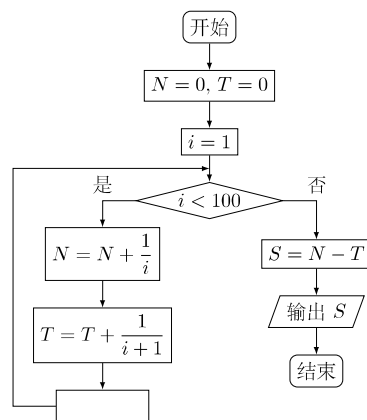
5. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 ()

- (A) $y = \pm\sqrt{2}x$ (B) $y = \pm\sqrt{3}x$ (C) $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, BC = 1, AC = 5$, 则 $AB =$ ()

- (A) $4\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{30}$ (C) $\sqrt{29}$ (D) $2\sqrt{5}$

7. 为计算 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 ()



- (A) $i = i + 1$ (B) $i = i + 2$ (C) $i = i + 3$ (D) $i = i + 4$

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”, 如 $30 = 7 + 23$. 在不超过 30 的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于 30 的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{18}$

9. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 1, AA_1 = \sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ()

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) π

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$ ()

- (A) -50 (B) 0 (C) 2 (D) 50

12. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左, 右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, 则 C 的离心率为 ()

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

二、填空题

13. 曲线 $y = 2 \ln(x+1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0, \\ x - 2y + 3 \geq 0, \\ x - 5 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

15. 已知 $\sin \alpha + \cos \beta = 1, \cos \alpha + \sin \beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

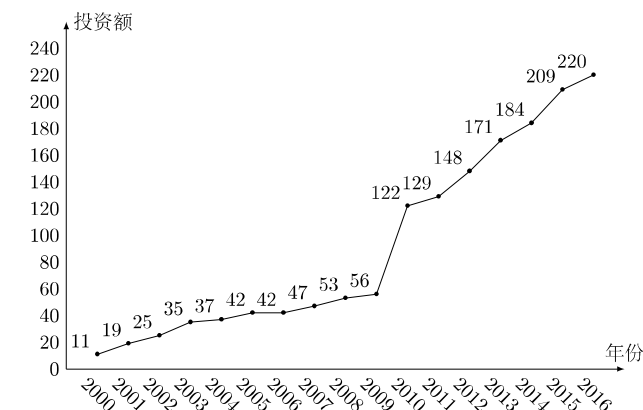
16. 已知圆锥的顶点为 S , 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45° , 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为_____.

三、解答题

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -7, S_3 = -15$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 17$) 建立模型①: $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 7$) 建立模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$.
(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;
(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.

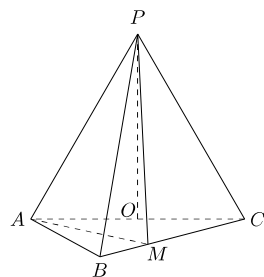


19. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = 8$.
 (1) 求 l 的方程;
 (2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

21. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.
 (1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;
 (2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta, \\ y = 4 \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数).
 (1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
 (2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$, 求 l 的斜率.

20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $PA = PB = PC = AC = 4$, O 为 AC 的中点.
 (1) 证明: $PO \perp$ 平面 ABC ;
 (2) 若点 M 在棱 BC 上, 且二面角 $M-PA-C$ 为 30° , 求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.



23. 设函数 $f(x) = 5 - |x + a| - |x - 2|$.
 (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;
 (2) 若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

一、选择题

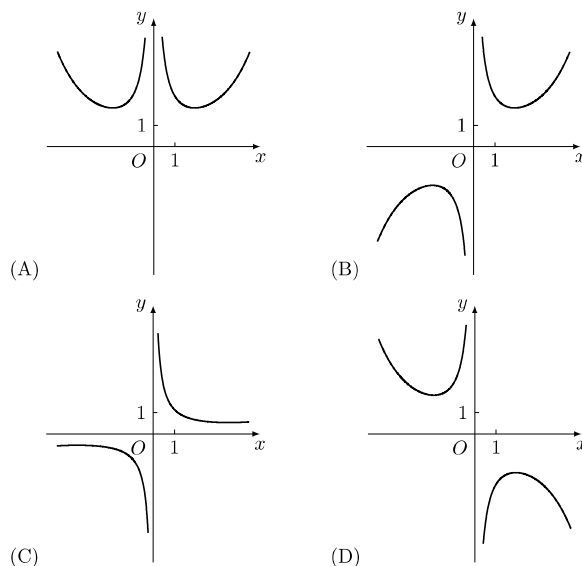
1. $i(2+3i) =$ ()

- (A) $3-2i$ (B) $3+2i$ (C) $-3-2i$ (D) $-3+2i$

2. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- (A) $\{3\}$ (B) $\{5\}$
(C) $\{3, 5\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

3. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ()



4. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1$, $a \cdot b = -1$, 则 $a \cdot (2a - b) =$ ()

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0

5. 从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务, 则选中的 2 人都是女同学的概率为 ()

- (A) 0.6 (B) 0.5 (C) 0.4 (D) 0.3

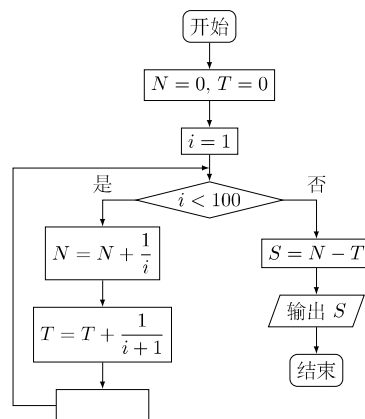
6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 ()

- (A) $y = \pm\sqrt{2}x$ (B) $y = \pm\sqrt{3}x$ (C) $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC = 1$, $AC = 5$, 则 $AB =$ ()

- (A) $4\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{30}$ (C) $\sqrt{29}$ (D) $2\sqrt{5}$

8. 为计算 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 ()



- (A) $i = i + 1$ (B) $i = i + 2$ (C) $i = i + 3$ (D) $i = i + 4$

9. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

10. 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[0, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ()

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) π

11. 已知 F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点, P 是 C 上的一点, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\angle PF_2F_1 = 60^\circ$, 则 C 的离心率为 ()

- (A) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $2 - \sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (D) $\sqrt{3}-1$

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$ ()

- (A) -50 (B) 0 (C) 2 (D) 50

二、填空题

13. 曲线 $y = 2 \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为_____.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0, \\ x - 2y + 3 \geq 0, \\ x - 5 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

15. 已知 $\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

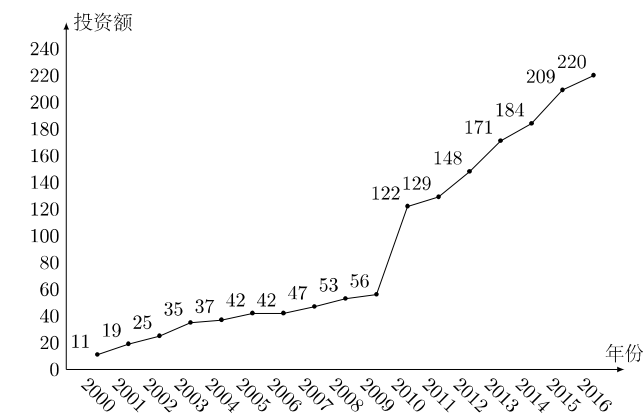
16. 已知圆锥的顶点为 S , 母线 SA, SB 互相垂直, SA 与圆锥底面所成角为 30° , 若 $\triangle SAB$ 的面积为 8, 则该圆锥的体积为_____.

三、解答题

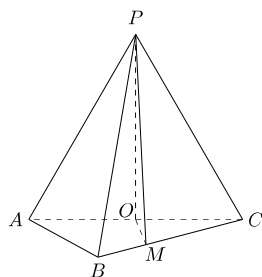
17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -7$, $S_3 = -15$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 17$) 建立模型①: $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 7$) 建立模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$.
(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;
(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.



19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $PA = PB = PC = AC = 4$, O 为 AC 的中点.
- (1) 证明: $PO \perp$ 平面 ABC ;
 - (2) 若点 M 在棱 BC 上, 且 $MC = 2MB$, 求点 C 到平面 POM 的距离.



21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.
- (1) 若 $a = 3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta, \\ y = 4 \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 直

线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数).

- (1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
- (2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$, 求 l 的斜率.

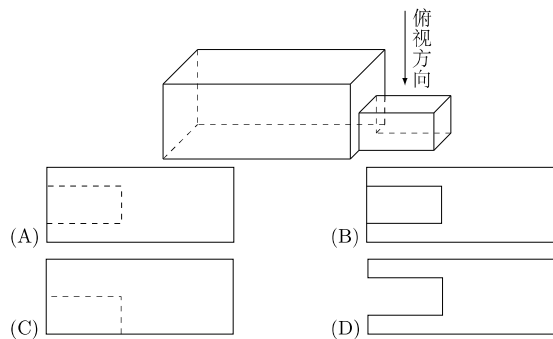
20. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = 8$.
- (1) 求 l 的方程;
 - (2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

23. 设函数 $f(x) = 5 - |x + a| - |x - 2|$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;
 - (2) 若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

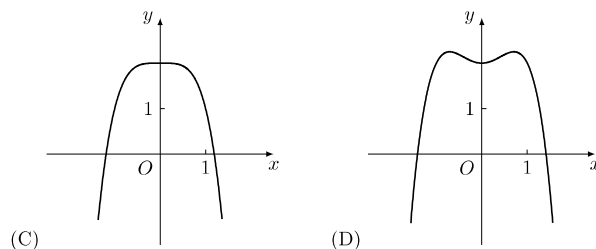
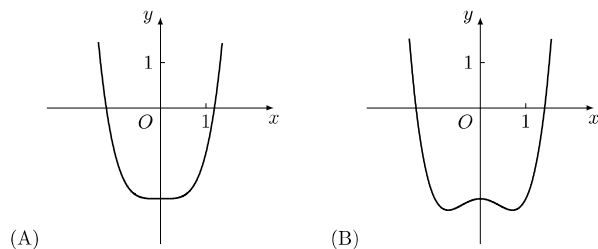
2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | x - 1 \geq 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{0\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{1, 2\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$
- $(1 + i)(2 - i) =$ ()
(A) $-3 - i$ (B) $-3 + i$ (C) $3 - i$ (D) $3 + i$
- 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来, 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是 ()



- 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()
(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $-\frac{7}{9}$ (D) $-\frac{8}{9}$
- $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为 ()
(A) 10 (B) 20 (C) 40 (D) 80
- 直线 $x + y + 2 = 0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 ()
(A) $[2, 6]$ (B) $[4, 8]$ (C) $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ (D) $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$
- 函数 $y = -x^4 + x^2 + 2$ 的图象大致为 ()



- 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p , 各成员的支付方式相互独立, 设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数, $DX = 2.4$, $P(X = 4) < P(X = 6)$, 则 $p =$ ()
(A) 0.7 (B) 0.6 (C) 0.4 (D) 0.3
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $C =$ ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$
- 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D - ABC$ 体积的最大值为 ()
(A) $12\sqrt{3}$ (B) $18\sqrt{3}$ (C) $24\sqrt{3}$ (D) $54\sqrt{3}$
- 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, O 是坐标原点. 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ()
(A) $\sqrt{5}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$
- 设 $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则 ()
(A) $a + b < ab < 0$ (B) $ab < a + b < 0$
(C) $a + b < 0 < ab$ (D) $ab < 0 < a + b$

二、填空题

- 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -2)$, $\mathbf{c} = (1, \lambda)$. 若 $\mathbf{c} \parallel (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则 $\lambda =$ _____.
- 曲线 $y = (ax + 1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率为 -2 , 则 $a =$ _____.
- 函数 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 的零点个数为_____.
- 已知点 $M(-1, 1)$ 和抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\angle AMB = 90^\circ$, 则 $k =$ _____.

三、解答题

- 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_5 = 4a_3$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m = 63$, 求 m .

- 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如图茎叶图:

第一种生产方式										第二种生产方式													
										8	6	5	5	6	8	9							
9 7 6 2										7	0	1	2	2	3	4	5	6	6	8			
9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	8	1	4	4	5									
2 1 1 0 0										9	0												

- 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;
- 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m , 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

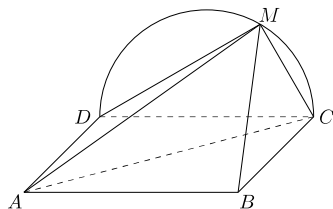
- 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 \widehat{CD} 所在平面垂直, M 是 \widehat{CD} 上异于 C, D 的点.

- (1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ;
(2) 当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时, 求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x) = (2 + x + ax^2) \ln(1 + x) - 2x$.

- (1) 若 $a = 0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;
(2) 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

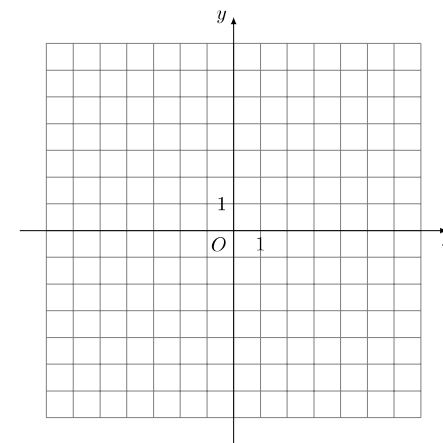
- (1) 求 α 的取值范围;
(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$).

- (1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$;
(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$. 证明: $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FP}|, |\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

23. 设函数 $f(x) = |2x + 1| + |x - 1|$.

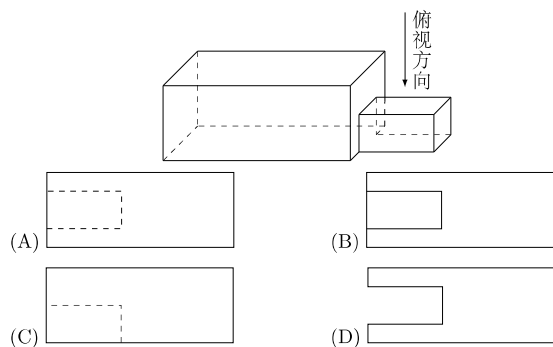
- (1) 画出 $y = f(x)$ 的图象;
(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax + b$, 求 $a + b$ 的最小值.



2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 文)

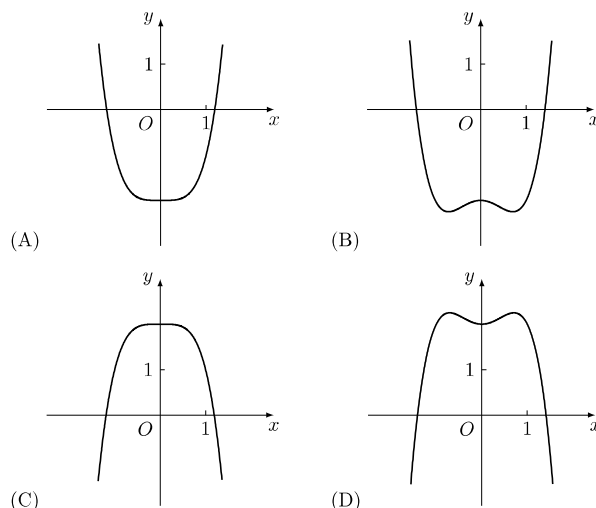
一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | x - 1 \geq 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{0\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{1, 2\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$
- $(1+i)(2-i) =$ ()
(A) $-3-i$ (B) $-3+i$ (C) $3-i$ (D) $3+i$
- 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来, 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是 ()



- 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()
(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $-\frac{7}{9}$ (D) $-\frac{8}{9}$
- 若某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.45, 既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15, 则不用现金支付的概率为 ()
(A) 0.3 (B) 0.4 (C) 0.6 (D) 0.7
- 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ 的最小正周期为 ()
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π
- 下列函数中, 其图象与函数 $y = \ln x$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称的是 ()
(A) $y = \ln(1-x)$ (B) $y = \ln(2-x)$
(C) $y = \ln(1+x)$ (D) $y = \ln(2+x)$
- 直线 $x + y + 2 = 0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 ()
(A) $[2, 6]$ (B) $[4, 8]$ (C) $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ (D) $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

- 函数 $y = -x^4 + x^2 + 2$ 的图象大致为



- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}$, 则点 $(4, 0)$ 到 C 的渐近线的距离为 ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $C =$ ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$
- 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 ()
(A) $12\sqrt{3}$ (B) $18\sqrt{3}$ (C) $24\sqrt{3}$ (D) $54\sqrt{3}$

二、填空题

- 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -2)$, $\mathbf{c} = (1, \lambda)$. 若 $\mathbf{c} \parallel (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则 $\lambda =$ _____.
- 某公司有大量客户, 且不同年龄段客户对其服务的评价有较大差异. 为了解客户的评价, 该公司准备进行抽样调查, 可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样, 则最合适的抽样方法是_____.
- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + y + 3 \geq 0, \\ x - 2y + 4 \geq 0, \\ x - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + \frac{1}{3}y$ 的最大值是_____.
- 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) =$ _____.

三、解答题

- 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_5 = 4a_3$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m = 63$, 求 m .

- 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如图茎叶图:

第一种生产方式					第二种生产方式				
				8	6	5	5	6	8
			9	7	6	2	7	0	1
		9	8	7	7	6	5	4	3
				2	1	1	0	0	9

- 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;
- 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m , 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

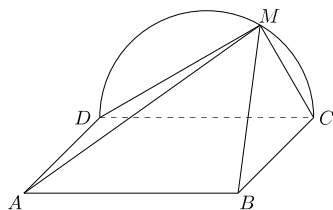
- 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 \widehat{CD} 所在平面垂直, M 是 \widehat{CD} 上异于 C, D 的点.

- (1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ;
(2) 在线段 AM 上是否存在点 P , 使得 $MC \parallel$ 平面 PBD ? 说明理由.



21. 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程;
(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

- (1) 求 α 的取值范围;
(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

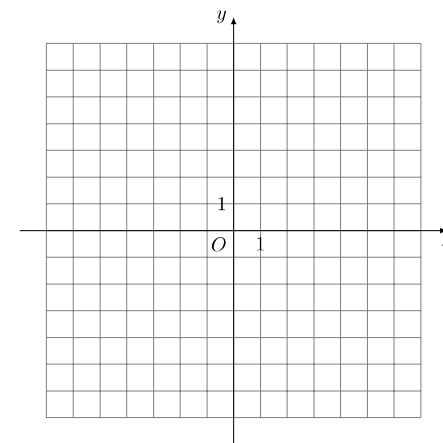
20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$).

- (1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$;

- (2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$. 证明: $2|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}|$.

23. 设函数 $f(x) = |2x + 1| + |x - 1|$.

- (1) 画出 $y = f(x)$ 的图象;
(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax + b$, 求 $a + b$ 的最小值.



2018 普通高等学校招生考试 (上海卷)

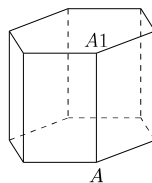
一、填空题

- 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为_____.
- 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为_____.
- 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为_____. (结果用数值表示)
- 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(3, 1)$, 则 $a =$ _____.
- 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 1-7i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$ _____.
- 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_3 = 0$, $a_6 + a_7 = 14$, 则 $S_7 =$ _____.
- 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha =$ _____.
- 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, E, F 是 y 轴上的两个动点, 且 $|\overrightarrow{EF}| = 2$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为_____.
- 有编号互不相同的五个砝码, 其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个, 2 克砝码两个. 从中随机选取三个, 则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是_____. (结果用最简分数表示)
- 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 前 n 项和为 S_n , 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$, 则 $q =$ _____.
- 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图象经过点 $P\left(p, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(q, -\frac{1}{5}\right)$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a =$ _____.
- 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x_2^2 + y_2^2 = 1$, $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____.

二、选择题

- 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, 则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为 ()
(A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{2}$
- 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的 ()
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

- 《九章算术》中, 称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱, 如图. 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点, 以 AA_1 为底面矩形的一边, 则这样的阳马的个数是 ()



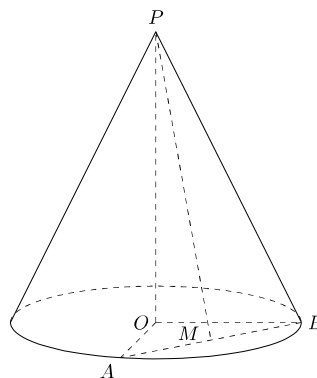
- (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

- 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图象重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) 0

三、解答题

- 已知圆锥的顶点为 P , 底面圆心为 O , 半径为 2.
(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;
(2) 设 $PO = 4$, OA, OB 是底面半径, 且 $\angle AOB = 90^\circ$, M 为线段 AB 的中点, 如图, 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.



19. 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为 $f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30, \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100, \end{cases}$ (单位: 分钟) 而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟. 试根据上述分析结果回答下列问题:
- (1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?
- (2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.
20. 设常数 $t > 2$. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(2, 0)$, 直线 $l: x = t$, 曲线 $\Gamma: y^2 = 8x$ ($0 \leq x \leq t, y \geq 0$). l 与 x 轴交于点 A , 与 Γ 交于点 B . P, Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.
- (1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;
- (2) 设 $t = 3, |FQ| = 2$, 线段 OQ 的中点在直线 FP 上, 求 $\triangle AQP$ 的面积;
- (3) 设 $t = 8$, 是否存在以 FP, FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$, 使得点 E 在 Γ 上? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.
21. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.
- (1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1, n \in \mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x \mid x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m ;
- (3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列. 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.

2018 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

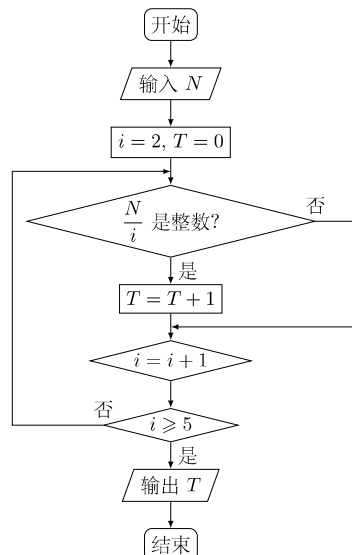
1. 设全集为 \mathbf{R} , 集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ ()

(A) $\{x | 0 < x \leq 1\}$ (B) $\{x | 0 < x < 1\}$
(C) $\{x | 1 \leq x < 2\}$ (D) $\{x | 0 < x < 2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 5, \\ 2x - y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为 ()

(A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 20, 则输出 T 的值为 ()



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是 $x^3 < 1$ 的 ()

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $a = \log_2 e$, $b = \ln 2$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

(A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$

6. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ()

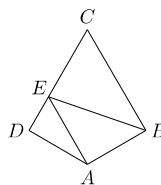
(A) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增 (B) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递减

(C) 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增 (D) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 上单调递减

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为 ()

(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ (B) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ (C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

8. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$. 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ()



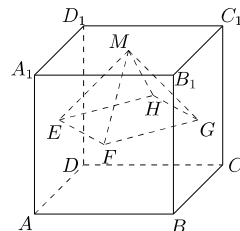
(A) $\frac{21}{16}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) 3

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7i}{1+2i} =$ _____.

10. 在 $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 _____.

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 除面 $ABCD$ 外, 该正方体其余各面的中心分别为点 E, F, G, H, M (如图), 则四棱锥 $M - EFGH$ 的体积为 _____.



12. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的圆心为 C , 直线 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$ (t 为参数) 与该圆相交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

13. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 _____.

14. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

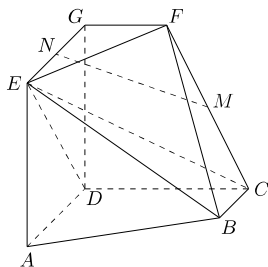
三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$.
(1) 求角 B 的大小;
(2) 设 $a = 2, c = 3$, 求 b 和 $\sin(2A - B)$ 的值.

16. 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 24, 16, 16. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 人, 进行睡眠时间的调查.

- (1) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?
(2) 若抽出的 7 人中有 4 人睡眠不足, 3 人睡眠充足, 现从这 7 人中随机抽取 3 人做进一步的身体健康检查.
① 用 X 表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量 X 的分布列与数学期望;
② 设 A 为事件“抽取的 3 人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工”, 求事件 A 发生的概率.

17. 如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$, $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.
- (1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE ;
 - (2) 求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值;
 - (3) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° , 求线段 DP 的长.



19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 上顶点为 B . 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 点 A 的坐标为 $(b, 0)$, 且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$.
- (1) 求椭圆的方程;
 - (2) 设直线 $l: y = kx$ ($k > 0$) 与椭圆在第一象限的交点为 P , 且 l 与直线 AB 交于点 Q . 若 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ (O 为原点), 求 k 的值.

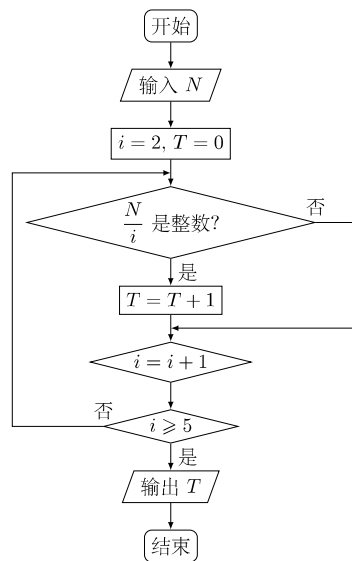
20. 已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.
- (1) 求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间;
 - (2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行, 证明 $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$;
 - (3) 证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在直线 l , 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是等差数列. 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$).
 - ① 求 T_n ;
 - ② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

2018 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

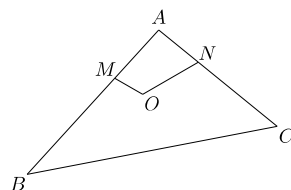
一、选择题

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 2\}$, 则 $(A \cup B) \cap C =$ ()
(A) $\{-1, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 0, 1\}$ (D) $\{2, 3, 4\}$
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 5, \\ 2x - y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为 ()
(A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45
3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^3 > 8$ ”是“ $|x| > 2$ ”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
4. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 20, 则输出 T 的值为 ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
5. 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
(A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$

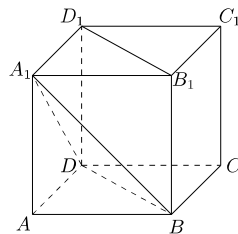
6. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ()
(A) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增 (B) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 上单调递减
(C) 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增 (D) 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减
7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ (D) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$
8. 在如图的平面图形中, 已知 $OM = 1$, $ON = 2$, $\angle MON = 120^\circ$, $\vec{BM} = 2\vec{MA}$, $\vec{CN} = 2\vec{NA}$, 则 $\vec{BC} \cdot \vec{OM}$ 的值为 ()



- (A) -15 (B) -9 (C) -6 (D) 0

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7i}{1+2i} =$ _____.
10. 已知函数 $f(x) = e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为_____.
11. 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 的体积为_____.



12. 在平面直角坐标系中, 经过三点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ 的圆的方程为_____.
13. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

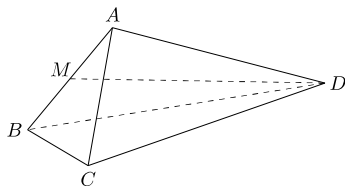
14. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若对任意 $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 已知某校甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数分别为 240, 160, 160. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学去某敬老院参加献爱心活动.
(1) 应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取多少人?
(2) 设抽出的 7 名同学分别用 A, B, C, D, E, F, G 表示, 现从中随机抽取 2 名同学承担敬老院的卫生工作.
① 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;
② 设 M 为事件“抽取的 2 名同学来自同一年级”, 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$.
(1) 求角 B 的大小;
(2) 设 $a = 2, c = 3$, 求 b 和 $\sin(2A - B)$ 的值.

17. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 点 M 为棱 AB 的中点, $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$, $\angle BAD = 90^\circ$.
- (1) 求证: $AD \perp BC$;
 - (2) 求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值;
 - (3) 求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点为 A , 上顶点为 B . 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $|AB| = \sqrt{13}$.
- (1) 求椭圆的方程;
 - (2) 设直线 $l: y = kx$ ($k < 0$) 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M , 且点 P, M 均在第四象限. 若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍, 求 k 的值.

20. 设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.
- (1) 若 $t_2 = 0, d = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
 - (2) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值;
 - (3) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$). 已知 $b_1 = 1, b_3 = b_2 + 2, b_4 = a_3 + a_5, b_5 = a_4 + 2a_6$.
- (1) 求 S_n 和 T_n ;
 - (2) 若 $S_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = a_n + 4b_n$, 求正整数 n 的值.

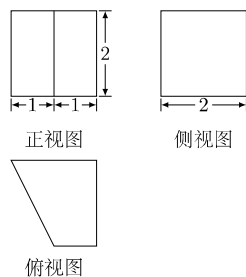
2018 普通高等学校招生考试 (浙江卷)

一、选择题

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
 (A) \emptyset (B) $\{1, 3\}$ (C) $\{2, 4, 5\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的焦点坐标是 ()
 (A) $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$ (B) $(-2, 0), (2, 0)$
 (C) $(0, -\sqrt{2}), (0, \sqrt{2})$ (D) $(0, -2), (0, 2)$

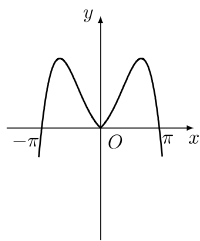
3. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 ()



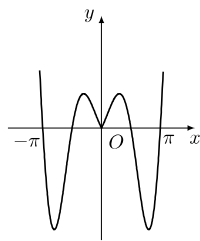
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

4. 复数 $\frac{2}{1-i}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是 ()
 (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

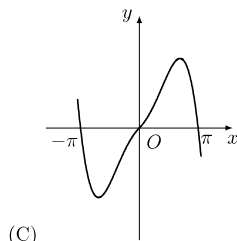
5. 函数 $y = 2^{|x|} \sin 2x$ 的图象可能是



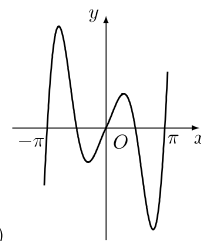
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 已知平面 α , 直线 m, n 满足 $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$, 则“ $m \parallel n$ ”是“ $m \parallel \alpha$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
7. 设 $0 < p < 1$, 随机变量 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当 p 在 $(0, 1)$ 内增大时, ()

- (A) $D(\xi)$ 减小 (B) $D(\xi)$ 增大
 (C) $D(\xi)$ 先减小后增大 (D) $D(\xi)$ 先增大后减小

8. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, 侧棱长均相等, E 是线段 AB 上的点 (不含端点), 设 SE 与 BC 所成的角为 θ_1 , SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2 , 二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3 , 则 ()
 (A) $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$ (B) $\theta_3 \leq \theta_2 \leq \theta_1$ (C) $\theta_1 \leq \theta_3 \leq \theta_2$ (D) $\theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_1$

9. 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ 是平面向量, \mathbf{e} 是单位向量. 若非零向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{e} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 向量 \mathbf{b} 满足 $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + 3 = 0$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的最小值是 ()
 (A) $\sqrt{3} - 1$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) 2 (D) $2 - \sqrt{3}$

10. 已知 a_1, a_2, a_3, a_4 成等比数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3)$. 若 $a_1 > 1$, 则 ()
 (A) $a_1 < a_3, a_2 < a_4$ (B) $a_1 > a_3, a_2 < a_4$
 (C) $a_1 < a_3, a_2 > a_4$ (D) $a_1 > a_3, a_2 > a_4$

二、填空题

11. 我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题: “今有鸡翁一, 值钱五; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一. 凡百钱, 买鸡百只, 问鸡翁、母、雏各几何?” 设鸡翁, 鸡母, 鸡雏个数分别为 x, y, z , 则 $\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100, \end{cases}$ 当 $z = 81$ 时, $x =$ _____, $y =$ _____.

12. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ 2x+y \leq 6, \\ x+y \geq 2, \end{cases}$ 则 $z = x + 3y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{7}, b = 2, A = 60^\circ$, 则 $\sin B =$ _____, $c =$ _____.

14. 二项式 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式的常数项是_____.

15. 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq \lambda, \\ x^2-4x+3, & x < \lambda, \end{cases}$ 当 $\lambda = 2$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是_____. 若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则 λ 的取值范围是_____.

16. 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6 中任取 2 个数字, 一共可以组成_____个没有重复数字的四位数. (用数字作答)

17. 已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ ($m > 1$) 上两点 A, B 满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 则当 $m =$ _____时, 点 B 横坐标的绝对值最大.

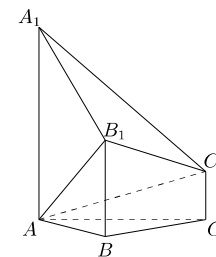
三、解答题

18. 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

- (1) 求 $\sin(\alpha + \pi)$ 的值;
 (2) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos \beta$ 的值.

19. 如图, 已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$, A_1A, B_1B, C_1C 均垂直于平面 ABC , $\angle ABC = 120^\circ, A_1A = 4, C_1C = 1, AB = BC = B_1B = 2$.

- (1) 证明: $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$;
 (2) 求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.

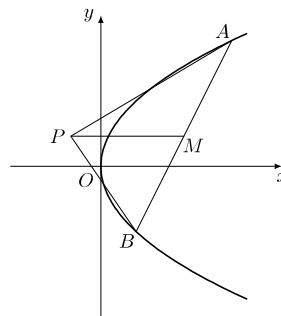


20. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$, 且 $a_3 + a_4 + a_5 = 28$, $a_4 + 2$ 是 a_3, a_5 的等差中项. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 数列 $\{(b_{n+1} - b_n)a_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2 + n$.

- (1) 求 q 的值;
- (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

21. 如图, 已知点 P 是 y 轴左侧 (不含 y 轴) 一点, 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上存在不同的两点 A, B 满足 PA, PB 的中点均在 C 上.

- (1) 设 AB 中点为 M , 证明: PM 垂直于 y 轴;
- (2) 若 P 是半椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ($x < 0$) 上的动点, 求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.



22. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $x = x_1, x_2$ ($x_1 \neq x_2$) 处导数相等, 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8 \ln 2$;
- (2) 若 $a \leq 3 - 4 \ln 2$, 证明: 对于任意 $k > 0$, 直线 $y = kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点.