1 2024 年普通高等学校招生全国统一考试 · 新课标Ⅰ卷

专家评卷 浙江省杭州市余杭教育发展研究学院 全国优秀教师、特级教师、正高级教师(二级) 曹凤山

2024 年新课标Ⅰ卷坚持"立德树人、服务选才、引导教学"的命题原则,依据《课程标准》命题,突出考查理性思维,体现数学学科本质,通过创设新颖情境,考查关键能力,稳步推进改革,服务创新人才选拔,为中学数学教学改革起到了很好的引导作用.

■体现"变"

变试卷结构:题量首次由 22 减少到 19,这是自 1989 年实行标准化考试以来,总题量首次回到 20 以下,同时增加解答题分值.

变难度结构:第 1—17 题大多为中低档试题,第 18,19 题难度加大,由原来的分层把关转变为主要依靠后面两道大题实现难度区分.

变试题排序:在解答题中,解析几何出现在第 16 题,立体几何出现在第 17 题,函数与导数出现在第 18 题,概率只在第 19 题有简单体现.

变思维强度:加大试卷思维量,如第 19 题新定义试题,基本上没有数值计算,考查推理能力;第 16 题解析几何试题进一步加强了对几何性质的考查,通过对图形特点的分析,减少计算量,更深入地考查思维能力.

■体现"稳"

以上"变"也是依据《课程标准》命题的新体现,是《课程标准》中明确的高考命题原则建议的逐步落实. 如《普通高中数学课程标准》(2017 年版 2020 年修订)中指出:……重点考查学生的思维过程、实践能力和创新意识,问题情境的设计应自然、合理……处理好考试时间和题量的关系,合理设置题量,给学生充足的思考时间;逐步减少选择题、填空题的题量;适度增加试题的思维量……数学高考命题还应依据人才选拔要求,发挥数学高考的选拔功能.

■体现"新"

情境新. 新定义解答题试题面世,第 19 题考查数列、概率,结合新定义,着重于对新定义、新符号的理解,通过分层设问逐步提升对思维能力的要求.

内容安排新. 微调主干内容占比,函数与导数约为 38 分,解析几何约为 26 分,三角函数与解三角形约为 23 分,立体几何约为 20 分,与以往高考试题或者九省联考试题都有不同.

■亮点纷呈

除了第 19 题新定义试题让人眼前一亮,其他可圈可点的试题也很多. 如第 8 题,以函数不等式形式出现,形式新颖. 试卷起点低、立意高,从第 1 题开始,就体现反题型、反套路、反刷题的特点,第 16,17 题体现得更加充分,第 14 题更加侧重于对学生思维能力的考查.

名师解题 河北省高级教师 李金泉 优秀教师 卫锋 付瑞

▶本卷答案仅供参考

答案速查 1—5 ACDAB 6—8 BCB 9. BC 10. ACD 11. ABD 12. $\frac{3}{2}$ 13. ln 2 14. $\frac{1}{2}$

1. A 集合的交运算 + 三次不等式的解法(理性思维、数学探索)

通解(直接法) 因为 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}=\{x\mid -\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\}$,(题眼)(注:$a<b\Leftrightarrow a^3<b^3$)$B=\{-3,-1,0,2,3\}$,所以 $A\cap B=\{-1,0\}$,故选 A.

优解(验证法) 因为 $(-3)^3=-27<-5$,$(-1)^3=-1\in(-5,5)$,$0^3=0\in(-5,5)$,$2^3=8>5$,$3^3=27>5$,所以 $-1\in A$,$0\in A$,$-3\notin A$,$2\notin A$,$3\notin A$,所以 $A\cap B=\{-1,0\}$,故选 A.

考教衔接 本题源自人教 A 版必修第一册第 14 页习题 1.3 第 1,2 题.

2. C 复数的四则运算(理性思维、数学探索) **解法一(解方程法)**

因为 $\frac{z}{z-1}=1+i$,所以 $z=(z-1)(1+i)$,即 $z=z-1+zi-i$,即 $zi=1+i$,(题眼)所以 $z=\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)(-i)}{i(-i)}=1-i$,故选 C.

解法二(取倒数法) 因为 $\frac{z}{z-1}=1+i$,所以 $\frac{z-1}{z}=\frac{1}{1+i}$,(题眼)即 $1-\frac{1}{z}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$,即 $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1+i}{2}$,所以 $z=\frac{2}{1+i}=1-i$,故选 C.

考教衔接 本题源自人教 A 版必修第二册第 95 页复习参考题 7 第 6,7 题.

3. D 向量垂直 + 向量的数量积 + 向量的坐标运算(理性思维、数学探索) **解法一(向量法 + 坐标法)** 因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=0$,即 $\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.(题眼)因为 $\boldsymbol{a}=(0,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,x)$,所以 $\boldsymbol{b}^2=4+x^2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x$,得 $4+x^2=4x$,所以 $(x-2)^2=0$,解得 $x=2$,故选 D.

解法二(坐标法) 因为 $\boldsymbol{a}=(0,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,x)$,所以 $\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}=(2,x)-4(0,1)=(2,x)-(0,4)=(2,x-4)$. 因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=0$,所以 $2\times2+x(x-4)=0$,(题眼)所以 $(x-2)^2=0$,解得 $x=2$,故选 D.

考教衔接 本题源自人教 A 版必修第二册第 60 页复习参考题 6 第 8 题.

4. A 切化弦 + 两角和与差的余弦公式(理性思维、数学探索) 由 $\cos(\alpha+\beta)=m$ 得 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$ ①. 由 $\tan\alpha\tan\beta=2$ 得 $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2$ ②,由①②得 $\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta=-m\\ \sin\alpha\sin\beta=-2m\end{cases}$,(题眼)所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-3m$,故选 A.

真题互鉴 考法重现 本题与 2023 年新课标Ⅰ卷第 8 题考法大致相同,均注重三角函数公式的结构特点,利用方程组及整体思想解答,只是 2023 年新课标Ⅰ卷第 8 题多考查了二倍角的余弦公式这一知识点.

(2023 新课标Ⅰ,8)已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$,则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$

A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

答案:B

再看,2023 年新课标Ⅱ卷第 7 题,实质上考查了半角公式,或者说是二倍角的余弦公式的变形,即降幂公式:$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$.

(2023 新课标Ⅱ,7)已知 α 为锐角,$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$,则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

答案:D

考教衔接　本题源自人教 A 版必修第一册第 255 页复习参考题 5 第 15(1)题.

考向预见　预测 2025 年高考对三角函数公式的考查,还是会按照这个思路进行,即注重公式的结构特点、公式的变形及公式的灵活应用等.

5. B　圆柱、圆锥的侧面积 + 圆锥的体积(理性思维、数学探索)　设圆柱和圆锥的底面半径均为 r,因为它们的高均为 $\sqrt{3}$,且侧面积相等,所以 $2\pi r\times\sqrt{3}=\pi r\sqrt{(\sqrt{3})^2+r^2}$,(题眼)得 $r^2=9$,所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$,故选 B.

考情速递　强化综合性考查　本题将圆柱与圆锥结合,综合考查侧面积、体积的计算,考查知识之间的内在联系,引导中学通过深化基础知识、基本原理方法的教学,培养学生形成完整的知识体系和网络结构.

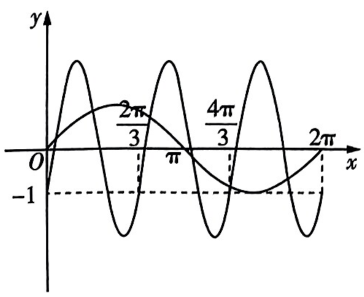
考教衔接　本题源自人教 A 版必修第二册第 119 页例 4.

6. B　分段函数的单调性 + 一元二次函数的单调性(理性思维、数学探索)　逻辑分析法 + 数形结合法　因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且当 $x<0$ 时,$f(x)=-x^2-2ax-a$,所以 $f(x)=-x^2-2ax-a$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,所以 $-a\geqslant0$,即 $a\leqslant0$;当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=e^x+\ln(x+1)$,所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 $-a\leqslant f(0)=1$,(题眼)即 $a\geqslant-1$. 综上,实数 a 的取值范围是 $[-1,0]$. 故选 B.

考情速递　回归课标,重视教材,重视概念教学　本题以判断函数单调性的方法为素材,考查学生的逻辑推理能力、运算求解能力. 引导中学教学遵循教育规律,突出数学教学本质,夯实学生学习基础,给学生预留思考和深度学习的空间,避免超纲学、超量学,助力减轻学生学业负担.

7. C　正弦函数的图象与性质(理性思维、数学探索)　数形结合法

因为函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{3}$,所以函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象恰好是三个周期的图象,(题眼)所以作出函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 与 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象如图所示,



由图可知,这两个图象共有 6 个交点,故选 C.

考教衔接　本题源自人教 A 版必修第一册第 237 页例 1.

8. B　抽象函数(理性思维、数学探索)　赋值法　因为当 $x<3$ 时,$f(x)=x$,所以 $f(1)=1,f(2)=2$. 对于 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$,(题眼)令 $x=3$,得 $f(3)>f(2)+f(1)=2+1=3$;令 $x=4$,得 $f(4)>f(3)+f(2)>3+2=5$;依次类推,得 $f(5)>f(4)+f(3)>5+3=8$;$f(6)>f(5)+f(4)>8+5=13$;$f(7)>f(6)+f(5)>13+8=21$;$f(8)>f(7)+f(6)>21+13=34$;$f(9)>f(8)+f(7)>34+21=55$;$f(10)>f(9)+f(8)>55+34=89$;$f(11)>f(10)+f(9)>89+55=144$;$f(12)>f(11)+f(10)>144+89=233$;$f(13)>f(12)+f(11)>233+144=377$;$f(14)>f(13)+f(12)>377+233=610$;$f(15)>f(14)+f(13)>610+377=987$;…. 显然 $f(16)>1\,000$,所以 $f(20)>1\,000$,故选 B.

考情速递　聚焦思维过程,突出数学本质　抽象函数是考查函数性质深刻且有力的工具,近几年高考均有考查,考查形式不断创新,考查内容也越来越深入,希望学生对抽象函数常见性质及解题方法要如数家珍.

真题互鉴　方法再现　本题以不等式为载体考查抽象函数问题,2023 年新课标Ⅰ卷第 11 题以等式为载体考查抽象函数,虽载体形式不同,但解题方法相似.

(2023 新课标Ⅰ,11)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,则

A. $f(0)=0$　　B. $f(1)=0$

C. $f(x)$ 是偶函数　　D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

答案:ABC

9. BC　正态分布(理性思维、数学探索、数学应用)　数形结合法

由题意可知,$X\sim N(1.8,0.1^2)$,(题眼)所以 $P(X>2)<P(X>1.8)=0.5$,$P(X<1.9)\approx0.841\,3$,所以 $P(X>2)<P(X\geqslant1.9)=1-P(X<1.9)\approx1-0.841\,3=0.158\,7<0.2$,所以 A 错误,B 正确.

因为 $Y\sim N(2.1,0.1^2)$,(题眼)所以 $P(Y<2.2)\approx0.841\,3$,$P(Y>2)>P(Y>2.1)=0.5$,所以 $P(2<Y<2.1)=P(2.1<Y<2.2)=P(Y<2.2)-P(Y\leqslant2.1)\approx0.841\,3-0.5=0.341\,3$,所以 $P(Y>2)=P(2<Y<2.1)+P(Y\geqslant2.1)\approx0.341\,3+0.5=0.841\,3>0.8$,(另解:$P(Y>2)=P(Y<2.2)\approx0.841\,3>0.8$)所以 C 正确,D 错误.

综上,选 BC.

考教衔接　本题源自人教 A 版选择性必修第三册第 87 页练习第 2 题,习题 7.5 第 2 题.

10. ACD　利用导数研究函数单调性和极值(理性思维、数学探索、数学应用)　代数推理法 + 作差比较法　因为 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$,所以 $f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2=3(x-1)(x-3)$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=1$ 或 $x=3$,当 $x<1$ 或 $x>3$ 时,$f'(x)>0$,当 $1<x<3$ 时,$f'(x)<0$,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$,$(3,+\infty)$,单调递减区间为 $(1,3)$,(题眼)故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点,$x=3$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,所以 A 正确.

当 $0<x<1$ 时,$x-x^2=x(1-x)>0$,即 $0<x^2<x<1$,又函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,所以 $f(x^2)<f(x)$,所以 B 错误.

当 $1<x<2$ 时,$1<2x-1<3$,函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减,所以 $-4=f(3)<f(2x-1)<f(1)=0$,所以 C 正确.

当 $-1<x<0$ 时,$f(2-x)-f(x)=(2-x-1)^2(2-x-4)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(-x-2)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(-2x+2)=-2(x-1)^3>0$,所以 $f(2-x)>f(x)$,所以 D 正确.

综上,选 ACD.

考教衔接　本题源自人教 A 版选择性必修第二册第 104 页复习参考题 5 第 9 题,第 99 页习题 5.3 第 13 题.

11. ABD　轨迹方程 + 求最值(理性思维、数学探索、数学应用)　定

义法＋逻辑推理法＋放缩法 因为坐标原点 O 在曲线 C 上，所以 $2\times|a|=4$，又 $a<0$，所以 $a=-2$，所以 A 正确.

因为点 $(2\sqrt{2},0)$ 到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=-2$ 的距离之积为 $(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)=4$，所以点 $(2\sqrt{2},0)$ 在曲线 C 上，所以 B 正确.

设 $P(x,y)(x>0,y>0)$ 是曲线 C 在第一象限的点，则有 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}(x+2)=4$，所以 $y^2=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$，令 $f(x)=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$，则 $f'(x)=-\frac{32}{(x+2)^3}-2(x-2)$，因为 $f(2)=1$，且 $f'(2)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 附近单调递减，（若 $f'(x_0)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近单调递增；若 $f'(x_0)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近单调递减）即必定存在一小区间 $(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$ 使得 $f(x)$ 单调递减，所以在区间 $(2-\varepsilon,2)$ 上均有 $f(x)>1$，所以 $P(x,y)$ 的纵坐标的最大值一定大于 1，所以 C 错误.

因为点 (x_0,y_0) 在 C 上，所以 $x_0>-2$ 且 $\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}(x_0+2)=4$，（题眼）得 $y_0^2=\frac{16}{(x_0+2)^2}-(x_0-2)^2\leqslant\frac{16}{(x_0+2)^2}$，所以 $y_0\leqslant|y_0|\leqslant\sqrt{\frac{16}{(x_0+2)^2}}=\frac{4}{x_0+2}$，所以 D 正确.

综上，选 ABD.

考情速递 突出考教衔接，聚焦学科素养 本题是新定义曲线问题，曲线上的点到定点的距离与到定直线的距离之积为定值，而我们所学的椭圆、双曲线、抛物线上的点到定点的距离与到定直线的距离之比为定值，因此本题的考查内容并不会使学生有陌生感，反而会使学生有一种探索的冲动，所用的探索方法即曲线与方程思想及利用方程研究曲线性质的方法，需要学生有良好的学科素养和知识迁移能力.

12. $\frac{3}{2}$ **双曲线的定义、离心率、对称性（理性思维）** **解法一（直接法）** 由 $|AB|=10$ 及双曲线的对称性得 $|AF_2|=\frac{|AB|}{2}=5$，（题眼）因为 $|AF_1|=13$，所以 $2a=|AF_1|-|AF_2|=13-5=8$，$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2-|AF_2|^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，所以 $a=4$，$c=6$，则 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

解法二（二级结论） 因为 $|AB|=10$，所以 $\frac{2b^2}{a}=10$，所以 $\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}=5$，又 $|AF_1|=13$，所以 $|F_1F_2|=2c=\sqrt{|AF_1|^2-(\frac{|AB|}{2})^2}=12$，得 $c=6$，所以 $a^2+5a-36=0$，得 $a=4$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

（二级结论：椭圆和双曲线的通径长均为 $\frac{2b^2}{a}$）

考情速递 合理控制试题的计算量，尽量避免繁难运算 本题通过应用双曲线的定义和对称性，可以避免较为复杂的坐标计算以及联立方程求解，从而有效地减少计算量，节省考试时间.

考教衔接 本题源自人教 A 版选择性必修第一册第 124 页练习第 1 题.

13. $\ln 2$ **导数的几何意义（理性思维、数学探索）** 由题，令 $f(x)=e^x+x$，则 $f'(x)=e^x+1$，所以 $f'(0)=2$，所以曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=2x+1$. 令 $g(x)=\ln(x+1)+a$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}$，设直线 $y=2x+1$ 与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 (x_0,y_0)，则 $\frac{1}{x_0+1}=2$，得 $x_0=-\frac{1}{2}$，则 $y_0=2x_0+1=0$，（题眼）所以 $0=\ln(-\frac{1}{2}+1)+a$，所以 $a=\ln 2$.

考教衔接 本题源自人教 A 版选择性必修第二册第 104 页复习参考题 5 第 13 题.

14. $\frac{1}{2}$ **古典概型（理性思维、数学探索、数学应用）** 因为甲出卡片 1 一定输，出其他卡片有可能赢，所以四轮比赛后，甲的总得分最多为 3.（题眼）

若甲的总得分为 3，则甲出卡片 3，5，7 时都赢，所以只有 1 种组合：3－2，5－4，7－6，1－8.

若甲的总得分为 2，有以下三类情况：

第一类，当甲出卡片 3 和 5 时赢，只有 1 种组合，为 3－2，5－4，1－6，7－8；

第二类，当甲出卡片 3 和 7 时赢，有 3－2，7－4，1－6，5－8 或 3－2，7－4，1－8，5－6 或 3－2，7－6，1－4，5－8，共 3 种组合；

第三类，当甲出卡片 5 和 7 时赢，有 5－2，7－4，1－6，3－8 或 5－2，7－4，1－8，3－6 或 5－4，7－2，1－6，3－8 或 5－4，7－2，1－8，3－6 或 5－2，7－6，1－4，3－8 或 5－2，7－6，1－8，3－4 或 5－4，7－6，1－2，3－8，共 7 种组合.

综上，甲的总得分不小于 2 共有 12 种组合，（题眼）而所有不同的组合共有 $4\times3\times2\times1=24$（种），所以甲的总得分不小于 2 的概率 $P=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

15. 正弦定理＋余弦定理＋三角形的面积公式（理性思维、数学探索）

解：(1) **第 1 步：利用余弦定理求 C**

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， （2 分）

又 $0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$. （3 分）

第 2 步：将 C 代入已知等式求 B

$\therefore\sqrt{2}\cos B=\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\cos B=\frac{1}{2}$， （5 分）

又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. （6 分）

(2) **第 1 步：求 A**

由(1)得 $A=\pi-B-C=\frac{5\pi}{12}$， （8 分）

第 2 步：利用正弦定理得出 a,c 的关系

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\frac{a}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\therefore a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}c$. （10 分）

第 3 步：利用三角形面积公式求 c

$\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1+\sqrt{3}}{4}c^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3+\sqrt{3}$，

得 $c=2\sqrt{2}$. （13 分）

考教衔接 本题源自人教 A 版必修第二册第 54 页习题 6.4 第 22 题.

归纳总结 掌握并加以识记一些常见的三角函数值，如 $\cos\frac{\pi}{12}=\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，可以提升解题效率.

16. 椭圆的离心率 + 三角形的面积公式(理性思维、数学应用)

解:(1)第 1 步:代入 A,P 坐标求解 a,b

由题知 $\begin{cases}\dfrac{9}{b^2}=1\\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{3}\\ b=3\end{cases}$, (3 分)

第 2 步:根据 a,b,c 的关系求解 c,得出 C 的离心率 e

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$,$\therefore C$ 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$. (5 分)

(2)**第 1 步:求解 $|PA|$**

$|PA|=\sqrt{3^2+(-\dfrac{3}{2})^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$, (7 分)

第 2 步:得出点 B 到直线 PA 的距离 h

设点 B 到直线 PA 的距离为 h,则 $\triangle ABP$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|PA|\cdot h=9$,解得 $h=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$. (9 分)

第 3 步:求解点 B 坐标

易知直线 $PA:x+2y-6=0$,设 $B(x,y)$,

则 $\begin{cases}\dfrac{|x+2y-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$ (11 分)

解得 $\begin{cases}x=0\\ y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$,$\therefore B(0,-3)$ 或 $B(-3,-\dfrac{3}{2})$, (13 分)

第 4 步:求直线 l 的方程

故 $l:y=\dfrac{3}{2}x-3$ 或 $y=\dfrac{1}{2}x$. (15 分)

考情速递　机动调整试题顺序　本卷将解析几何试题安排在解答题的第 2 题,数列内容则结合新定义安排在最后压轴题的位置,打破以往的命题模式,灵活、科学地确定试题的内容和顺序,有助于打破学生机械应试的套路,打破教学中僵化、刻板的训练模式,防止猜题押题,同时测试学生的应变能力和解决各种难度问题的能力.引导教学培养学生全面掌握主干知识、提升基本能力、灵活整合知识解决问题.

考教衔接　本题源自人教 A 版选择性必修第一册第 121 页练习第 1(2)题.

解后反思　注意到 PA 长度易知,由 $\triangle ABP$ 的面积求出点 B 到直线 PA 的距离,进而设出点 B 坐标,并列方程组求解,可以有效降低运算难度.

17. 线面垂直的判定与性质 + 勾股定理的逆定理 + 线面平行的判定 + 二面角(理性思维、数学探索)

解:(1)**第 1 步:证明 $AD\perp AB$**

由于 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$AD\subset$ 底面 $ABCD$,$\therefore PA\perp AD$, (1 分)

又 $AD\perp PB$,$PA\cap PB=P$,$PA,PB\subset$ 平面 PAB,$\therefore AD\perp$ 平面 PAB, (2 分)

又 $AB\subset$ 平面 PAB,$\therefore AD\perp AB$. (3 分)

第 2 步:证明 $AB\perp BC$,得出 $BC/\!/AD$

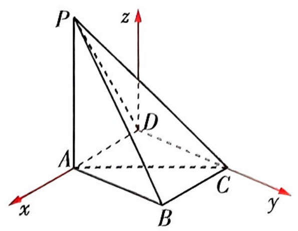
$\because AB^2+BC^2=AC^2$,$\therefore AB\perp BC$,$\therefore BC/\!/AD$, (5 分)

第 3 步:证明 $AD/\!/$ 平面 PBC

$\because AD\not\subset$ 平面 PBC,$BC\subset$ 平面 PBC,$\therefore AD/\!/$ 平面 PBC. (6 分)

(2)**第 1 步:建系,设出点 $A(a,0,0)$,写出相关向量的坐标**

由题意知 DC,AD,AP 两两垂直,以 D 为坐标原点,AD 所在直线为 x 轴,DC 所在直线为 y 轴,过点 D 且平行于 AP 的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$,设 $A(a,0,0)$,$a>0$,则 $CD=\sqrt{4-a^2}$,$C(0,\sqrt{4-a^2},0)$,$P(a,0,2)$,$\overrightarrow{CD}=(0,-\sqrt{4-a^2},0)$,$\overrightarrow{AC}=(-a,\sqrt{4-a^2},0)$,$\overrightarrow{CP}=(a,-\sqrt{4-a^2},2)$. (8 分)



第 2 步:得出平面 CPD 的一个法向量

设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}-\sqrt{4-a^2}y=0\\ ax-\sqrt{4-a^2}y+2z=0\end{cases}$,可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-a)$. (9 分)

第 3 步:得出平面 ACP 的一个法向量

设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}ax_1-\sqrt{4-a^2}y_1+2z_1=0\\ -ax_1+\sqrt{4-a^2}y_1=0\end{cases}$,可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{4-a^2},a,0)$. (10 分)

第 4 步:根据二面角 $A-CP-D$ 的正弦值列方程

$\because$ 二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$,

$\therefore$ 余弦值的绝对值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$, (11 分)

故 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{4-a^2+a^2}\cdot\sqrt{4+a^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$, (13 分)

第 5 步:得出 AD 的长

又 $a>0$,$\therefore a=\sqrt{3}$,即 $AD=\sqrt{3}$. (15 分)

考教衔接　本题源自人教 A 版必修第二册第 158 页练习第 3 题,第 164 页习题 8.6 第 20 题,人教 A 版选择性必修第一册第 49 页复习参考题 1 第 12 题.

18. 函数图象的对称性 + 利用导数研究函数的单调性(理性思维、数学探索、数学应用)

解:(1)**第 1 步:求函数 $f(x)$ 的定义域**

$f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$,(易错警示:容易忽略求解函数的定义域,从而致错) (1 分)

第 2 步:求解 $f'(x)$

若 $b=0$,则 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax$,$f'(x)=\dfrac{2-x}{x}\cdot\dfrac{(2-x)+x}{(2-x)^2}+a=\dfrac{2}{x(2-x)}+a$, (2 分)

第 3 步:根据 $f'(x)\geqslant 0$ 求 a 的最小值

当 $x\in(0,2)$ 时,$x(2-x)\in(0,1]$,$f'(x)_{\min}=2+a\geqslant 0$,则 $a\geqslant -2$, (4 分)

故 a 的最小值为 -2. (5 分)

(2)**第 1 步:求解 $f(2-x)$ 与 $f(x)$ 的关系式**

$f(2-x)=\ln\dfrac{2-x}{x}+a(2-x)+b(1-x)^3=-\ln\dfrac{x}{2-x}-ax-b(x-1)^3+$

$2a=-f(x)+2a$, (7分)

第2步:得出曲线$y=f(x)$的对称中心

故曲线$y=f(x)$关于点$(1,a)$中心对称.(归纳总结:若$f(2a-x)+f(x)=2b$,则函数$f(x)$的图象关于点(a,b)中心对称) (8分)

(3)**第1步:求a的值**

由题知$f(1)=a=-2$,(题眼) (9分)

第2步:求解$f'(x)$并变形整理

此时$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3$, (10分)

$f'(x)=\frac{2-x}{x}\cdot\frac{(2-x)+x}{(2-x)^2}-2+3b(x-1)^2=\frac{2}{x(2-x)}-2+3b(x-1)^2=(x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)}+3b\right]$.(难点突破:对导函数$f'(x)$进行通分、分解因式(提公因式)等,可以有效化繁为简,便于判断$f'(x)$的符号) (11分)

第3步:分类讨论,研究$f(x)$的单调性,并判断是否符合题意

记$g(x)=\frac{2}{x(2-x)}+3b,x\in(0,2)$,易知$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,2)$上单调递增,$g(1)=2+3b$, (12分)

当$b\geqslant-\frac{2}{3}$时,$g(x)\geqslant0,f'(x)\geqslant0,f(x)$在$(0,2)$上单调递增,

又$f(1)=-2$,故符合题意. (14分)

当$b<-\frac{2}{3}$时,$g(1)<0,g(x)=\frac{2}{x(2-x)}+3b=\frac{-3bx^2+6bx+2}{x(2-x)}$,

令$g(x)=0$,得$x=1\pm\sqrt{1+\frac{2}{3b}}$,

因为$b<-\frac{2}{3}$,所以$\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\in(0,1)$,故$1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\in(1,2)$,$1-\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\in(0,1)$,

所以当$x\in\left(1,1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\right)$时,$g(x)<0,f'(x)<0,f(x)$在$\left(1,1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\right)$上单调递减,故$f\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\right)<f(1)=-2$,不符合题意. (16分)

第4步:得出b的取值范围

综上,b的取值范围为$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$. (17分)

考情速递 重能力,考思想 本题考查函数与导数知识,深入考查逻辑推理能力、运算求解能力以及数形结合思想.其中第(2)问考查了函数图象的对称性,与2023年全国乙卷理科第21题考查方式相似,考查函数图象的对称性这一几何性质的代数表示,第(3)问的设问方式相对新颖,需要学生利用导数工具研究函数的单调性,进而解决问题.

考教衔接 本题源自人教A版必修第一册第87页习题3.2第13题.本题第(2)问中,由$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$,可知$y=f(x+1)-a=\ln\frac{x+1}{1-x}+ax+bx^3$为奇函数,故据教材结论可知,曲线$y=f(x)$关于点$(1,a)$成中心对称.

19. 等差数列+新定义+计数原理+概率(理性思维、数学探索、数学应用)

解题思路 第(1)问较为简单,学生可以通过列举法求解;第(2)问要注意思考$m=3$与$m>3$的联系,当$m>3$时,$a_{15},a_{16},\cdots,a_{4m+2}$显然可平均分为$m-3$组,每组的4个数都能构成等差数列,进而可以发现问题的关键在于证明$m=3$时符合题意,可通过列举法得出可行的分组方案;第(3)问难度较大,需注意第(1),(2)问的提示作用,基于第(1)问,应大胆猜想并证明1,2,$\cdots$,$4m+2$是$(4p+1,4q+2)$-可分数列,基于第(2)问,应大胆猜想并证明1,2,$\cdots$,$4m+2$是$(4p+2,4q+1)$-可分数列,其中$q-p>1$,并计算得出p,q的取值方法数,进而证明$P_m>\frac{1}{8}$.

解:(1)$(1,2),(1,6),(5,6)$. (3

(2)**第1步:分析当$m=3$时的分组情况**

当$m=3$时,删去a_2,a_{13},其余项可分为以下3组:a_1,a_4,a_7,a_{10}为组,a_3,a_6,a_9,a_{12}为第2组,a_5,a_8,a_{11},a_{14}为第3组, (5

第2步:分析当$m>3$时的分组情况,得结论

当$m>3$时,删去a_2,a_{13},其余项可分为以下m组:a_1,a_4,a_7,a_{10}为组,a_3,a_6,a_9,a_{12}为第2组,a_5,a_8,a_{11},a_{14}为第3组,$a_{15},a_{16},a_{17},$第4组,$a_{19},a_{20},a_{21},a_{22}$为第5组,……,$a_{4m-1},a_{4m},a_{4m+1},a_{4m+2}$为组,可知每组的4个数都能构成等差数列,故数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m}$ $(2,13)$-可分数列.

(3)**第1步:证明1,2,$\cdots$,$4m+2$是$(4p+1,4q+2)$-可分数列出方法数**

易知$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)-可分数列$\Rightarrow$1,2,$\cdots$,$4m+2$是$(4$ $4q+2)$-可分数列,其中$p,q\in\{0,1,\cdots,m\}$. (1

当$0\leqslant p\leqslant q\leqslant m$时,删去$4p+1,4q+2$,

其余项从小到大,每4项分为1组,可知每组的4个数都能构数列,

故数列1,2,$\cdots$,$4m+2$是$(4p+1,4q+2)$-可分数列,可分为3,4),$\cdots$,$(4p-3,4p-2,4p-1,4p)$,$\cdots$,$(4(q+1)-1,4(q$ $4(q+1)+1,4(q+1)+2)$,$\cdots$,$(4m-1,4m,4m+1,4m+2)$.

可能取值方法数为$C_{m+1}^2+m+1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$. (

第2步:证明1,2,$\cdots$,$4m+2$是$(4p+2,4q+1)$-可分数列,并法数

易知$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)-可分数列$\Rightarrow$1,2,$\cdots$,$4m+2$是($4q+1)$-可分数列,其中$p,q\in\{0,1,\cdots,m\}$.

当$q-p>1$时,删去$4p+2,4q+1$,

将$1\sim4p$与$4q+3\sim4m+2$从小到大,每4项分为1组,可知个数成等差数列.

考虑$4p+1,4p+3,4p+4,\cdots,4q,4q+2$是否可分,等同于考4,$\cdots$,$4t,4t+2$是否可分,其中$t=q-p>1$,可分为$(1,t+1$ $3t+1),(3,t+3,2t+3,3t+3),(4,t+4,2t+4,3t+4),\cdots,($ $4t),(t+2,2t+2,3t+2,4t+2)$,每组4个数都能构成等差数故数列1,2,$\cdots$,$4m+2$是$(4p+2,4q+1)$-可分数列,p,q且的可能取值方法数为$C_{m+1}^2-m=\frac{(m-1)m}{2}$.

第3步:证明$P_m>\frac{1}{8}$

从而$P_m\geqslant\frac{\frac{(m+1)(m+2)}{2}+\frac{(m-1)m}{2}}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\frac{1}{8}$.