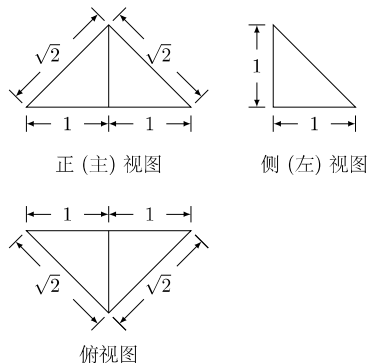


2015 普通高等学校招生考试 (安徽卷理)

一、选择题

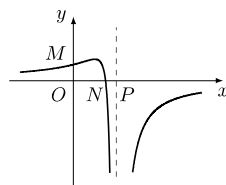
- 设 i 是虚数单位, 则复数 $\frac{2i}{1-i}$ 在复平面内所对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 下列函数中, 既是偶函数又存在零点的是 ()
(A) $y = \cos x$ (B) $y = \sin x$ (C) $y = \ln x$ (D) $y = x^2 + 1$
- 设 $p: 1 < x < 2, q: 2^x > 1$, 则 p 是 q 成立的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 下列双曲线中, 焦点在 y 轴上且渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 的是 ()
(A) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
(C) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ (D) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$
- 已知 m, n 是两条不同直线, α, β 是两个不同平面, 则下列命题正确的是 ()
(A) 若 α, β 垂直于同一平面, 则 α 与 β 平行
(B) 若 m, n 平行于同一平面, 则 m 与 n 平行
(C) 若 α, β 不平行, 则在 α 内不存在与 β 平行的直线
(D) 若 m, n 不平行, 则 m 与 n 不可能垂直于同一平面
- 若样本数据 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的标准差为 8, 则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的标准差为 ()
(A) 8 (B) 15 (C) 16 (D) 32
- 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积是 ()



- (A) $1 + \sqrt{3}$ (B) $2 + \sqrt{3}$ (C) $1 + 2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

- $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足, $\vec{AB} = 2\vec{a}$, $\vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 则下列结论正确的是 ()
(A) $|\vec{b}| = 1$ (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$
(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ (D) $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{BC}$

- 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示, 则下列结论成立的是 ()

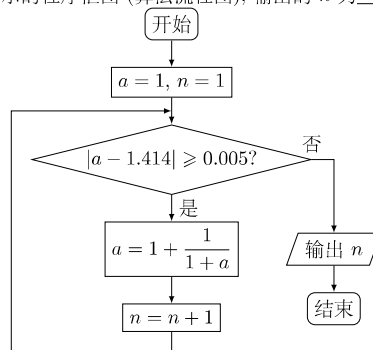


- (A) $a > 0, b > 0, c < 0$ (B) $a < 0, b > 0, c > 0$
(C) $a < 0, b > 0, c < 0$ (D) $a < 0, b < 0, c < 0$

- 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 均为正的常数) 的最小正周期为 π , 当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 则下列结论正确的是 ()
(A) $f(2) < f(-2) < f(0)$ (B) $f(0) < f(2) < f(-2)$
(C) $f(-2) < f(0) < f(2)$ (D) $f(2) < f(0) < f(-2)$

二、填空题

- $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中 x^5 的系数是_____. (用数字填写答案)
- 在极坐标系中, 圆 $\rho = 8 \sin \theta$ 上的点到直线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 距离的最大值是_____.
- 执行如图所示的程序框图 (算法流程图), 输出的 n 为_____.



- 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 + a_4 = 9, a_2 a_3 = 8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和等于_____.
- 设 $x^3 + ax + b = 0$, 其中 a, b 均为实数, 下列条件中, 使得该三次方程仅有一个实根的是_____. (写出所有正确条件的编号)
① $a = -3, b = -3$; ② $a = -3, b = 2$; ③ $a = -3, b > 2$;
④ $a = 0, b = 2$; ⑤ $a = 1, b = 2$.

三、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{3\pi}{4}, AB = 6, AC = 3\sqrt{2}$, 点 D 在 BC 边上, $AD = BD$, 求 AD 的长.

- 已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起, 现需要通过检测将其区分, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.
(1) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率;
(2) 已知每检测一件产品需要费用 100 元, 设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用 (单位: 元), 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

18. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, x_n 是曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2$, 证明: $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

20. 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

(1) 求 E 的离心率 e ;

(2) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 点 N 关于直线 AB 的对称点的纵坐标为 $\frac{7}{2}$, 求 E 的方程.

21. 设函数 $f(x) = x^2 - ax + b$.

(1) 讨论函数 $f(\sin x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值;

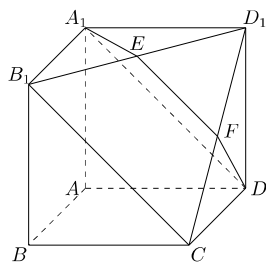
(2) 记 $f_0(x) = x^2 - a_0x + b_0$, 求函数 $|f(\sin x) - f_0(\sin x)|$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值 D ;

(3) 在 (2) 中, 取 $a_0 = b_0 = 0$, 求 $z = b - \frac{a^2}{4}$ 满足 $D \leq 1$ 时的最大值.

19. 如图所示, 在多面体 $A_1B_1D_1DCBA$, 四边形 AA_1B_1B , ADD_1A_1 , $ABCD$ 均为正方形, E 为 B_1D_1 的中点, 过 A_1 , D , E 的平面交 CD_1 于 F .

(1) 证明: $EF \parallel B_1C$;

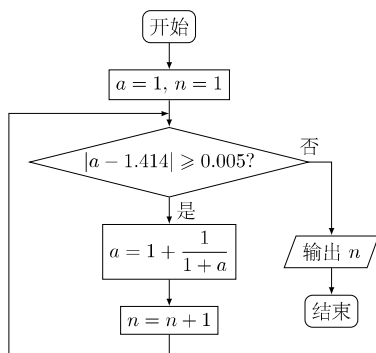
(2) 求二面角 $E - A_1D - B_1$ 的余弦值.



2015 普通高等学校招生考试 (安徽卷文)

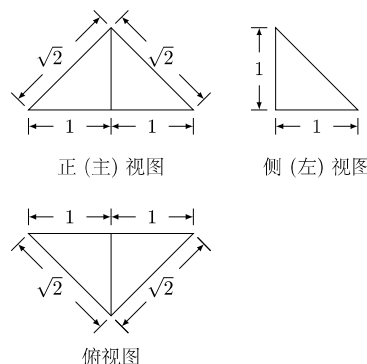
一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, 则复数 $(1-i)(1+2i) =$ ()
(A) $3+3i$ (B) $-1+3i$ (C) $3+i$ (D) $-1+i$
2. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()
(A) $\{1, 2, 5, 6\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$
3. 设 $p: x < 3$, $q: -1 < x < 3$, 则 p 是 q 成立的 ()
(A) 充分必要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件
4. 下列函数中, 既是偶函数又存在零点的是 ()
(A) $y = \cos x$ (B) $y = \sin x$ (C) $y = \ln x$ (D) $y = x^2 + 1$
5. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ x+y-4 \leq 0, \\ y \geq 1, \end{cases}$ 则 $z = -2x + y$ 的最大值是 ()
(A) -1 (B) -2 (C) -5 (D) 1
6. 下列双曲线中, 渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 的是 ()
(A) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
(C) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$
7. 执行如图所示的程序框图 (算法流程图), 输出的 n 为 ()



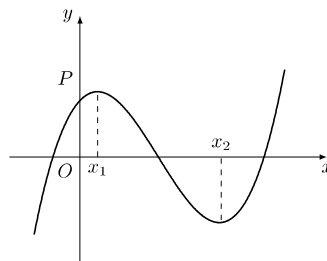
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
8. 直线 $3x + 4y = b$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 相切, 则 b 的值是 ()
(A) -2 或 12 (B) 2 或 -12 (C) -2 或 -12 (D) 2 或 12

9. 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积是



- (A) $1 + \sqrt{3}$ (B) $2 + \sqrt{3}$ (C) $1 + 2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

10. 函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象如图所示, 则下列结论成立的是 ()



- (A) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ (B) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$
(C) $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$ (D) $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$

二、填空题

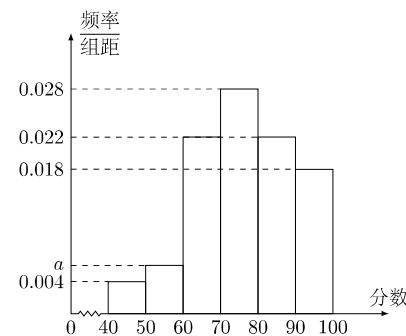
11. 计算: $\lg \frac{5}{2} + 2 \lg 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$ _____.
12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{6}$, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, 则 $AC =$ _____.
13. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ ($n \geq 2$), 则数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和等于_____.
14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |x - a| - 1$ 的图象只有一个交点, 则 a 的值为_____.
15. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 则下列结论中正确的是_____. (写出所有正确结论的序号)
① \mathbf{a} 为单位向量; ② \mathbf{b} 为单位向量; ③ $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$;
④ $\mathbf{b} \parallel \overrightarrow{BC}$; ⑤ $(4\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \overrightarrow{BC}$.

三、解答题

- () 16. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x$.

- (1) 求 $f(x)$ 最小正周期;
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. 某企业为了解下属某部门对本企业职工的服务情况, 随机访问 50 名职工, 根据这 50 名职工对该部门的评分, 绘制频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据分组区间为: $[40, 50)$, $[50, 60)$, \dots , $[80, 90)$, $[90, 100]$.



- (1) 求频率分布直方图中 a 的值;
- (2) 估计该企业的职工对该部门评分不低于 80 的概率;
- (3) 从评分在 $[40, 60)$ 的受访职工中, 随机抽取 2 人, 求此 2 人评分都在 $[40, 50)$ 的概率.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1 + a_4 = 9$, $a_2 a_3 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

(1) 求 E 的离心率 e ;

(2) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 证明: $MN \perp AB$.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{(x+r)^2}$ ($a > 0, r > 0$).

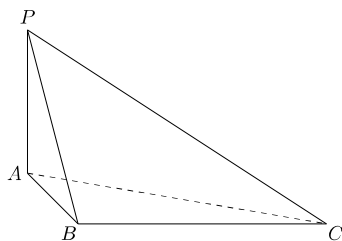
(1) 求 $f(x)$ 的定义域, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $\frac{a}{r} = 400$, 求 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的极值.

19. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 1$, $AB = 1$, $AC = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$,

(1) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积;

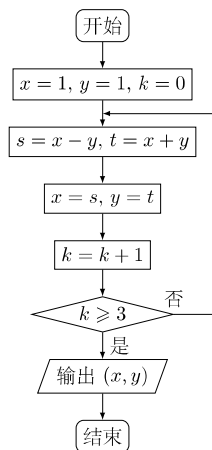
(2) 证明: 在线段 PC 上存在点 M , 使得 $AC \perp BM$, 并求 $\frac{PM}{MC}$ 的值.



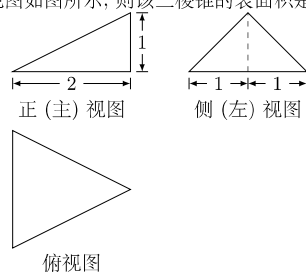
2015 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

- 复数 $i(2-i) =$ ()
(A) $1+2i$ (B) $1-2i$ (C) $-1+2i$ (D) $-1-2i$
- 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-y \leq 0, \\ x+y \leq 1, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x+2y$ 最大值为 ()
(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2
- 执行如图所示的程序框图, 输出的结果为 ()



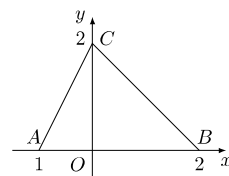
- (A) $(-2, 2)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(-4, -4)$ (D) $(0, 8)$
- 设 α, β 是两个不同的平面, m 是直线且 $m \subset \alpha$, “ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的表面积是 ()



- (A) $2+\sqrt{5}$ (B) $4+\sqrt{5}$ (C) $2+2\sqrt{5}$ (D) 5

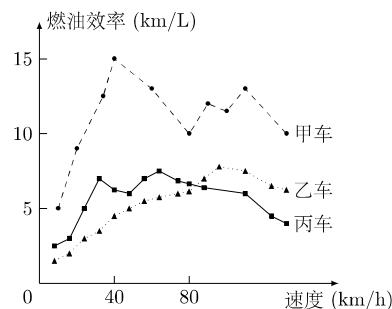
- 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中正确的是 ()
(A) 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$
(B) 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_1 + a_2 < 0$
(C) 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
(D) 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

- 如图, 函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB , 则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是 ()



- (A) $\{x | -1 < x \leq 0\}$ (B) $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$
(C) $\{x | -1 < x \leq 1\}$ (D) $\{x | -1 < x \leq 2\}$

- 汽车的“燃油效率”, 是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程, 下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况. 下列叙述中正确的是 ()



- (A) 消耗 1 升汽油, 乙车最多可行驶 5 千米
(B) 以相同速度行驶相同路程, 三辆车中, 甲车消耗汽油最多
(C) 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时, 消耗 10 升汽油
(D) 某城市机动车最高限速 80 千米/小时. 相同条件下, 在该市用丙车比用乙车更省油

二、填空题

- 在 $(2+x)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为_____. (用数字作答)
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + y = 0$, 则 $a =$ _____.
- 在极坐标系中, 点 $(2, \frac{\pi}{3})$ 到直线 $\rho(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) = 6$ 的距离为_____.

- 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____; $y =$ _____.
- 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1, \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1. \end{cases}$
① 若 $a = 1$, 则 $f(x)$ 的最小值为_____;
② 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的最小值.

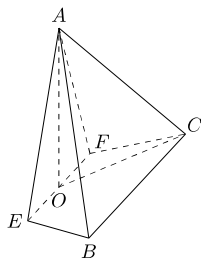
- A, B 两组各有 7 位病人, 他们服用某种药物后的康复时间 (单位: 天) 记录如下:

A 组: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16;
 B 组: 12, 13, 15, 16, 17, 14, a .

假设所有病人的康复时间相互独立, 从 A, B 两组随机各选 1 人, A 组选出的人记为甲, B 组选出的人记为乙.

- 求甲的康复时间不少于 14 天的概率;
- 如果 $a = 25$, 求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率;
- 当 a 为何值时, A, B 两组病人康复时间的方差相等? (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $A-EFCB$ 中, $\triangle AEF$ 为等边三角形, 平面 $AEF \perp$ 平面 $EFCB$, $EF \parallel BC$, $BC = 4$, $EF = 2a$, $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$, O 为 EF 的中点.
- (1) 求证: $AO \perp BE$;
 - (2) 求二面角 $F-AE-B$ 的余弦值;
 - (3) 若 $BE \perp$ 平面 AOC , 求 a 的值.



19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$ 和点 $A(m, n)$ ($m \neq 0$) 都在椭圆 C 上, 直线 PA 交 x 轴于点 M .
- (1) 求椭圆 C 的方程, 并求点 M 的坐标; (用 m, n 表示)
 - (2) 设 O 为原点, 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N , 问: y 轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 \in \mathbf{N}^*$, $a_1 \leq 36$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18, \\ 2a_n - 36, & a_n > 18, \end{cases}$ ($n = 1, 2, \dots$). 记集合 $M = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.
- (1) 若 $a_1 = 6$, 写出集合 M 的所有元素;
 - (2) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 证明: M 的所有元素都是 3 的倍数;
 - (3) 求集合 M 的元素个数的最大值.

18. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
 - (2) 求证: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$;
 - (3) 设实数 k 使得 $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

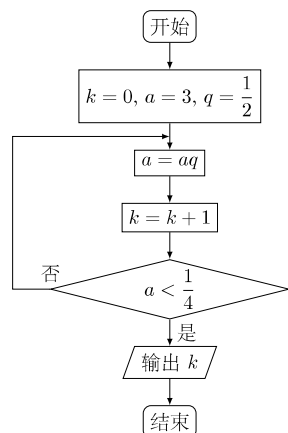
2015 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

- 若集合 $A = \{x \mid -5 < x < 2\}$, $B = \{x \mid -3 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{x \mid -3 < x < 2\}$ (B) $\{x \mid -5 < x < 2\}$
 (C) $\{x \mid -3 < x < 3\}$ (D) $\{x \mid -5 < x < 3\}$
- 圆心为 $(1, 1)$ 且过原点的圆的方程是 ()
 (A) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
 (C) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ (D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
- 下列函数中为偶函数的是 ()
 (A) $y = x^2 \sin x$ (B) $y = x^2 \cos x$
 (C) $y = |\ln x|$ (D) $y = 2^{-x}$
- 某校老年、中年和青年教师的人数见下表, 采用分层抽样的方法调查教师的身体状况, 在抽取的样本中, 青年教师有 320 人, 则该样本中的老年教师人数为 ()

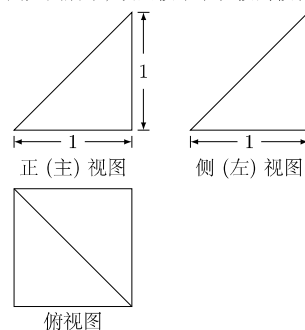
类别	人数
老年教师	900
中年教师	1800
青年教师	1600
合计	4300

- (A) 90 (B) 100 (C) 180 (D) 300
5. 执行如图所示的程序框图, 输出 k 的值为 ()



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

- 设 a, b 是非零向量, “ $a \cdot b = |a||b|$ ”是“ $a \parallel b$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥最长棱的棱长为 ()



- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

- 某辆汽车每次加油都把油箱加满, 下表记录了该车相邻两次加油时的情况

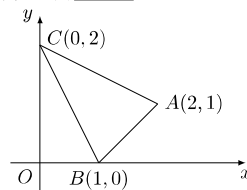
加油时间	加油量 (升)	加油时的累计里程 (千米)
2015 年 5 月 1 日	12	35000
2015 年 5 月 15 日	48	35600

注: “累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程.

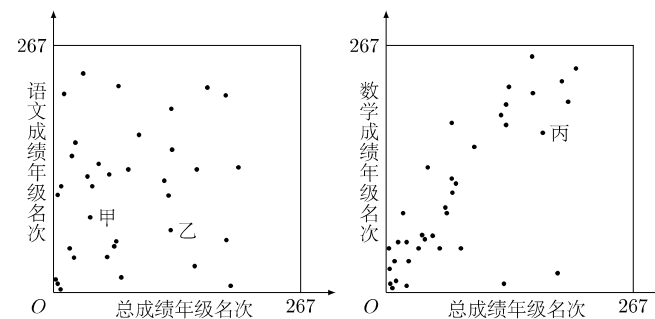
- 在这段时间内, 该车每 100 千米平均耗油量为 ()
 (A) 6 升 (B) 8 升 (C) 10 升 (D) 12 升

二、填空题

- 复数 $i(1 + i)$ 的实部为_____.
- 2^{-3} , $3^{\frac{1}{2}}$, $\log_2 5$ 三个数中最大的数是_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b = \sqrt{6}$, $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle B =$ _____.
- 已知 $(2, 0)$ 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的一个焦点, 则 $b =$ _____.
- 如图, $\triangle ABC$ 及其内部的点组成的集合记为 D , $P(x, y)$ 为 D 中任意一点, 则 $z = 2x + 3y$ 的最大值为_____.



- 高三年级 267 位学生参加期末考试, 某班 37 位学生的语文成绩、数学成绩与总成绩在全年级中的排名情况如图所示, 甲、乙、丙为该班三位学生.



从这次考试成绩看,

- 在甲、乙两人中, 其语文成绩名次比其总成绩名次靠前的学生是_____;
- 在语文和数学两个科目中, 丙同学的成绩名次更靠前的科目是_____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sin x - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{2}$.
 (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值.

- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 10$, $a_4 - a_3 = 2$.

- 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = a_3$, $b_3 = a_7$, 问: b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等?

17. 某超市随机选取 1000 位顾客, 记录了他们购买甲、乙、丙、丁四种商品的情况, 整理成如下统计表, 其中“√”表示购买, “×”表示未购买.

商品 顾客人数	甲	乙	丙	丁
100	√	×	√	√
217	×	√	×	√
200	√	√	√	×
300	√	×	√	×
85	√	×	×	×
98	×	√	×	×

- 估计顾客同时购买乙和丙的概率;
- 估计顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率;
- 如果顾客购买了甲, 则该顾客同时购买乙、丙、丁中哪种商品的可能性最大?

19. 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - k \ln x, k > 0$.

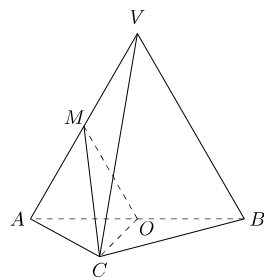
- 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

20. 已知椭圆 $C: x^2 + 3y^2 = 3$, 过点 $D(1, 0)$ 且不过点 $E(2, 1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 直线 AE 与直线 $x = 3$ 交于点 M .

- 求椭圆 C 的离心率;
- 若直线 AB 垂直于 x 轴, 求直线 BM 的斜率;
- 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系, 并说明理由.

18. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, 平面 $VAB \perp$ 平面 ABC , $\triangle VAB$ 为等边三角形, $AC \perp BC$ 且 $AC = BC = \sqrt{2}$, O, M 分别为 AB, VA 的中点.

- 求证: $VB \parallel$ 平面 MOC ;
- 求证: 平面 $MOC \perp$ 平面 VAB ;
- 求三棱锥 $V-ABC$ 的体积.



2015 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, 则
(A) $A = B$ (B) $A \cap B = \emptyset$ (C) $A \subsetneq B$ (D) $B \subsetneq A$
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 = 4$, $a_4 = 2$, 则 $a_6 =$ ()
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 6

- 重庆市 2013 年各月的平均气温 ($^{\circ}\text{C}$) 数据的茎叶图如下:

0	8	9			
1	2	5	8		
2	0	0	3	3	8
3	1	2			

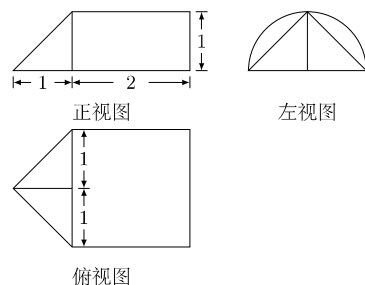
则这组数据的中位数是 ()

- (A) 19 (B) 20 (C) 21.5 (D) 23

- “ $x > 1$ ”是“ $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) < 0$ ”的 ()

- (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积 ()

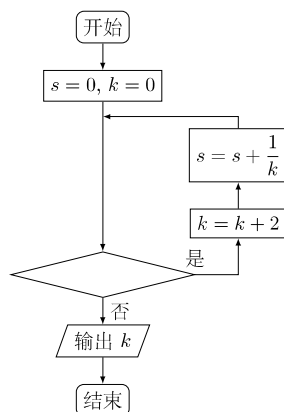


- (A) $\frac{1}{3} + \pi$ (B) $\frac{2}{3} + \pi$ (C) $\frac{1}{3} + 2\pi$ (D) $\frac{2}{3} + 2\pi$

- 若非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}|\mathbf{b}|$, 且 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 ()

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) π

- 执行如图所示的程序框图, 若输出 k 的值为 8, 则判断框内可填入的条件是 ()



- (A) $s \leq \frac{3}{4}$ (B) $s \leq \frac{5}{6}$ (C) $s \leq \frac{11}{12}$ (D) $s \leq \frac{25}{24}$

- 已知直线 $l: x + ay - 1 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 是圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 的对称轴. 过点 $A(-4, a)$ 作圆 C 的一条切线, 切点为 B , 则 $|AB| =$ ()

- (A) 2 (B) $4\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $2\sqrt{10}$

- 若 $\tan \alpha = 2 \tan \frac{\pi}{5}$, 则 $\frac{\cos(\alpha - \frac{3\pi}{10})}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{5})} =$ ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 过 F 作 AF 的垂线与双曲线交于 B, C 两点, 过 B, C 分别作 AC, AB 的垂线, 两垂线交于点 D . 若 D 到直线 BC 的距离小于 $a + \sqrt{a^2 + b^2}$, 则该双曲线的渐近线斜率的取值范围是 ()

- (A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
(C) $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$ (D) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

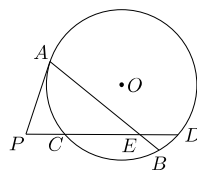
二、填空题

- 设复数 $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的模为 $\sqrt{3}$, 则 $(a + bi)(a - bi) =$ _____.

- $\left(x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^8 的系数是_____. (用数字作答)

- 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 120^{\circ}$, $AB = \sqrt{2}$, A 的角平分线 $AD = \sqrt{3}$, 则 $AC =$ _____.

- 如图, 圆 O 的弦 AB, CD 相交于点 E , 过点 A 作圆 O 的切线与 DC 的延长线交于点 P , 若 $PA = 6$, $AE = 9$, $PC = 3$, $CE : ED = 2 : 1$, 则 $BE =$ _____.



- 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + t, \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 4$ ($\rho > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$), 则直线 l 与曲线 C 的交点的极坐标为_____.

- 若函数 $f(x) = |x + 1| + 2|x - a|$ 的最小值为 5, 则实数 $a =$ _____.

三、解答题

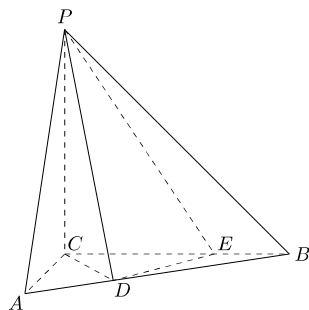
- 端午节吃粽子是我国的传统习俗. 设一盘中装有 10 个粽子, 其中豆沙粽 2 个, 肉粽 3 个, 白粽 5 个, 这三种粽子的外观完全相同从中任意选取 3 个.

- (1) 求三种粽子各取到 1 个的概率;
(2) 设 X 表示取到的豆沙粽个数, 求 X 的分布列与数学期望.

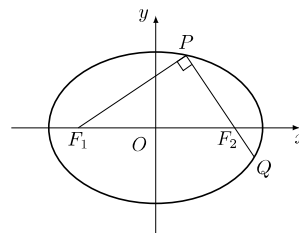
- 已知函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x - \sqrt{3} \cos^2 x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;
(2) 讨论 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调性.

19. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp$ 平面 ABC , $PC = 3$, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$. D , E 分别为线段 AB , BC 上的点, 且 $CD = DE = \sqrt{2}$, $CE = 2EB = 2$.
- (1) 证明: $DE \perp$ 平面 PCD ;
- (2) 求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值.



21. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 且 $PQ \perp PF_1$.
- (1) 若 $|PF_1| = 2 + \sqrt{2}$, $|PF_2| = 2 - \sqrt{2}$, 求椭圆标准方程;
- (2) 若 $|PF_1| = |PQ|$, 求椭圆的离心率 e .



22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1}a_n + \lambda a_{n+1} + \mu a_n^2 = 0$ ($n \in \mathbf{N}_+$).
- (1) 若 $\lambda = 0$, $\mu = -2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $\lambda = \frac{1}{k_0}$ ($k_0 \in \mathbf{N}_+$, $k_0 \geq 2$), $\mu = -1$, 证明: $2 + \frac{1}{3k_0 + 1} < a_{k_0+1} < 2 + \frac{1}{2k_0 + 1}$.

20. 设函数 $f(x) = \frac{3x^2 + ax}{e^x}$ ($a \in \mathbf{R}$).
- (1) 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极值, 确定 a 的值, 并求此时曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上为减函数, 求 a 的取值范围.

2015 普通高等学校招生考试 (重庆卷文)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{2\}$ (B) $\{1, 2\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{1, 2, 3\}$
- “ $x = 1$ ”是“ $x^2 - 2x + 1 = 0$ ”的 ()
(A) 充要条件 (B) 充分而不必要条件
(C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 函数 $f(x) = \log_2(x^2 + 2x - 3)$ 的定义域是 ()
(A) $[-3, 1]$ (B) $(-3, 1)$
(C) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ (D) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

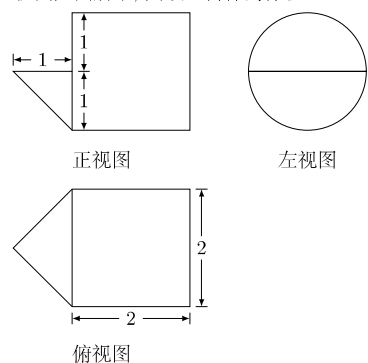
- 重庆市 2013 年各月的平均气温 ($^{\circ}\text{C}$) 数据的茎叶图如下:

0	8	9			
1	2	5	8		
2	0	0	3	3	8
3	1	2			

则这组数据的中位数是 ()

- (A) 19 (B) 20 (C) 21.5 (D) 23

- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积 ()



- (A) $\frac{1}{3} + 2\pi$ (B) $\frac{13\pi}{6}$ (C) $\frac{7\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{2}$

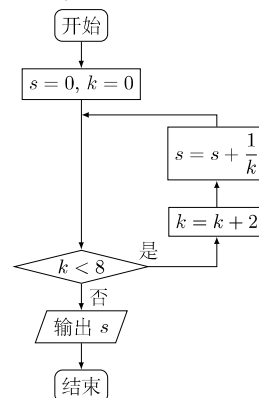
- 若 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan \beta =$ ()

- (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{5}{6}$

- 已知非零向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{b}| = 4|\mathbf{a}|$, 且 $\mathbf{a} \perp (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 ()

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

- 执行如图所示的程序框图, 则输出 s 的值为



- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{11}{12}$ (D) $\frac{25}{24}$

- 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点是 F , 左、右顶点分别是 A_1, A_2 , 过 F 作 A_1A_2 的垂线与双曲线交于 B, C 两点. 若 $A_1B \perp A_2C$, 则该双曲线的渐近线的斜率为 ()

- (A) $\pm \frac{1}{2}$ (B) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) ± 1 (D) $\pm \sqrt{2}$

- 若不等式组 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x + 2y - 2 \geq 0, \\ x - y + 2m \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为三角形, 且其面积等于 $\frac{4}{3}$, 则 m 的值为 ()

- (A) -3 (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$ (D) 3

二、填空题

- 复数 $(1 + 2i)i$ 的实部为_____.
- 若点 $P(1, 2)$ 在以坐标原点为圆心的圆上, 则该圆在点 P 处的切线方程为_____.
- 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = 2, \cos C = -\frac{1}{4}, 3\sin A = 2\sin B$, 则 $c =$ _____.
- 设 $a, b > 0, a + b = 5$, 则 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值为_____.
- 在区间 $[0, 5]$ 上随机地选择一个数 p , 则方程 $x^2 + 2px + 3p - 2 = 0$ 有两个负根的概率为_____.

() 三、解答题

- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 2$, 前 3 项和 $S_3 = \frac{9}{2}$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1, b_4 = a_{15}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

- 随着我国经济的发展, 居民的储蓄存款逐年增长. 设某地区城乡居民人民币储蓄存款 (年底余额) 如下表:

年份	2010	2011	2012	2013	2014
时间代号 t	1	2	3	4	5
储蓄存款 y (千亿元)	5	6	7	8	10

- 求 y 关于 t 的回归方程 $\hat{y} = \hat{b}t + \hat{a}$;
- 用所求回归方程预测该地区 2015 年 ($t = 6$) 的人民币储蓄存款.

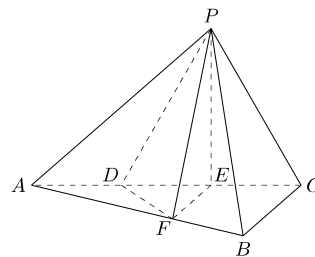
附: 回归方程 $\hat{y} = \hat{b}t + \hat{a}$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最小值;
- (2) 将函数 $f(x)$ 的图象上每一点的横坐标伸长到原来的两倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, 求 $g(x)$ 的值域.

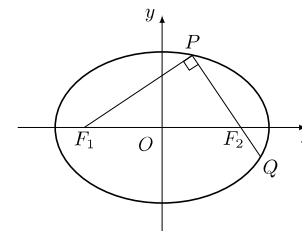
20. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 点 D, E 在线段 AC 上, 且 $AD = DE = EC = 2$, $PD = PC = 4$, 点 F 在线段 AB 上, 且 $EF \parallel BC$.

- (1) 证明: $AB \perp$ 平面 PFE ;
- (2) 若四棱锥 $P-DFBC$ 的体积为 7, 求线段 BC 的长.



21. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 且 $PQ \perp PF_1$.

- (1) 若 $|PF_1| = 2 + \sqrt{2}$, $|PF_2| = 2 - \sqrt{2}$, 求椭圆标准方程;
- (2) 若 $|PQ| = \lambda |PF_1|$, 且 $\frac{3}{4} \leq \lambda < \frac{4}{3}$, 试确定椭圆离心率 e 的取值范围.



19. 已知函数 $f(x) = ax^3 + x^2$ ($a \in \mathbf{R}$) 在 $x = -\frac{4}{3}$ 处取得极值.

- (1) 确定 a 的值;
- (2) 若 $g(x) = f(x) e^x$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

2015 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

一、选择题

- 若集合 $A = \{i, i^2, i^3, i^4\}$ (i 是虚数单位), $B = \{1, -1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{-1\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{1, -1\}$ (D) \emptyset
- 下列函数为奇函数的是 ()
(A) $y = \sqrt{x}$ (B) $y = |\sin x|$ (C) $y = \cos x$ (D) $y = e^x - e^{-x}$
- 若双曲线 $E: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线 E 上, 且 $|PF_1| = 3$, 则 $|PF_2|$ 等于 ()
(A) 11 (B) 9 (C) 5 (D) 3
- 为了了解某社区居民的家庭年收入与年支出的关系, 随机调查了该社区 5 户家庭, 得到如下统计数据表:

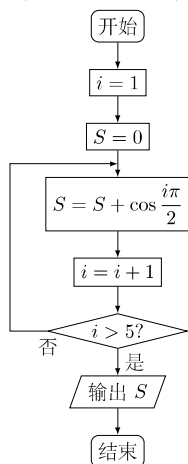
收入 x (万元)	8.2	8.6	10.0	11.3	11.9
支出 y (万元)	6.2	7.5	8.0	8.5	9.8

根据上表可得回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 其中 $\hat{b} = 0.76$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$. 据此估计, 该社区一户年收入为 15 万元家庭的年支出为 ()

- (A) 11.4 万元 (B) 11.8 万元 (C) 12.0 万元 (D) 12.2 万元

- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 0, \\ x - y \leq 0, \\ x - 2y + 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的最小值等于 ()
(A) $-\frac{5}{2}$ (B) -2 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) 2

- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出的结果为 ()



- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

- 若 l, m 是两条不同的直线, m 垂直于平面 α , 则“ $l \perp m$ ”是“ $l \parallel \alpha$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

- 若 a, b 是函数 $f(x) = x^2 - px + q$ ($p > 0, q > 0$) 的两个不同的零点, 且 $a, b, -2$ 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列, 则 $p + q$ 的值等于 ()

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

- 已知 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{t}$, $|\overrightarrow{AC}| = t$. 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值等于 ()

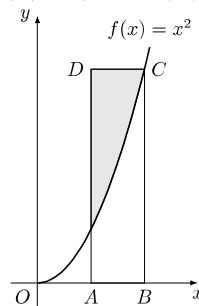
- (A) 13 (B) 15 (C) 19 (D) 21

- 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = -1$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) > k > 1$, 则下列结论中一定错误的是 ()

- (A) $f\left(\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$ (B) $f\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k-1}$
(C) $f\left(\frac{1}{k-1}\right) < \frac{1}{k-1}$ (D) $f\left(\frac{1}{k-1}\right) > \frac{k}{k-1}$

二、填空题

- $(x+2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于_____. (用数字作答)
- 若锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, 且 $AB = 5, AC = 8$, 则 BC 等于_____.
- 如图, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 C 的坐标为 $(2, 4)$, 函数 $f(x) = x^2$. 若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率等于_____.



- 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 2, \\ 3+\log_a x, & x > 2, \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的值域是 $[4, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

- 一个二进制码是由 0 和 1 组成的数字串 $x_1 x_2 \cdots x_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 其中 x_k ($k = 1, 2, \cdots, n$) 称为第 k 位码元. 二进制码是通信中常用的码, 但在通信过程中有时会发生码元错误 (即码元由 0 变为 1, 或者由 1 变为 0). 已知某种二元

码 $x_1 x_2 \cdots x_7$ 的码元满足如下校验方程组:
$$\begin{cases} x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \\ x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0, \end{cases}$$
 其中

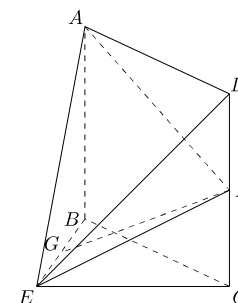
运算 \oplus 定义为: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$. 现已知一个这种二进制码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101, 那么利用上述校验方程组可判定 k 等于_____.

三、解答题

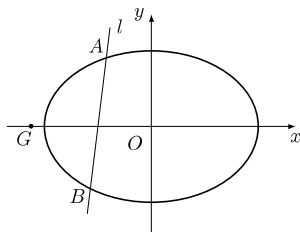
- 某银行规定, 一张银行卡若在一天内出现 3 次密码尝试错误, 该银行卡将被锁定. 小王到该银行取钱时, 发现自己忘记了银行卡的密码, 但可以确认该银行卡的正确密码是他常用的 6 个密码之一, 小王决定从中不重复地随机选择 1 个进行尝试. 若密码正确, 则结束尝试; 否则继续尝试, 直至该银行卡被锁定.
(1) 求当天小王的该银行卡被锁定的概率;
(2) 设当天小王用该银行卡尝试密码的次数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

- 如图, 在几何体 $ABCDE$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB \perp$ 平面 BEC , $BE \perp EC$, $AB = BE = EC = 2$, G, F 分别是线段 BE, DC 的中点.

- 求证: $GF \parallel$ 平面 ADE ;
(2) 求平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值.



18. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(0, \sqrt{2})$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 设直线 $l: x = my - 1$ ($m \in \mathbf{R}$) 交椭圆 E 于 A, B 两点, 判断点 $G\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系, 并说明理由.



19. 已知函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $g(x) = \cos x$ 的图象经如下变换得到: 先将 $g(x)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 再将所得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并求其图象的对称轴方程;
- (2) 已知关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = m$ 在 $[0, 2\pi)$ 内有两个不同的解 α, β .
- ① 求实数 m 的取值范围;
- ② 证明: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2m^2}{5} - 1$.

20. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = kx$ ($k \in \mathbf{R}$).

- (1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < x$;
- (2) 证明: 当 $k < 1$ 时, 存在 $x_0 > 0$, 使得对任意的 $x \in (0, x_0)$, 恒有 $f(x) > g(x)$;
- (3) 确定 k 的所有可能取值, 使得存在 $t > 0$, 对任意的 $x \in (0, t)$, 恒有 $|f(x) - g(x)| < x^2$.

21. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (1) 求 A 的逆矩阵 A^{-1} ;
- (2) 求矩阵 C , 使得 $AC = B$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 3\cos t, \\ y = -2 + 3\sin t, \end{cases}$ (t 为参数). 在极坐标系 (与平面直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴非负半轴为极轴) 中, 直线 l 的方程为 $\sqrt{2}\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = m$ ($m \in \mathbf{R}$).

- (1) 求圆 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程;
- (2) 设圆心 C 到直线 l 的距离等于 2, 求 m 的值.

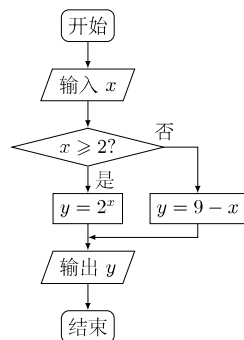
23. 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 函数 $f(x) = |x+a| + |x-b| + c$ 的最小值为 4.

- (1) 求 $a+b+c$ 的值;
- (2) 求 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 + c^2$ 的最小值.

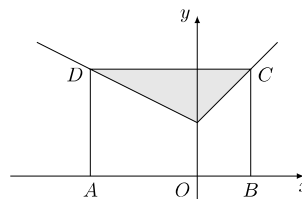
2015 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

一、选择题

- 若 $(1+i) + (2-3i) = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位), 则 a, b 的值分别等于 ()
(A) 3, -2 (B) 3, 2 (C) 3, -3 (D) -1, 4
- 若集合 $M = \{x | -2 \leq x < 2\}$, $N = \{0, 1, 2\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
(A) $\{0\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{0, 1, 2\}$ (D) $\{0, 1\}$
- 下列函数为奇函数的是 ()
(A) $y = \sqrt{x}$ (B) $y = e^x$ (C) $y = \cos x$ (D) $y = e^x - e^{-x}$
- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为 1, 则输出 y 的值为 ()

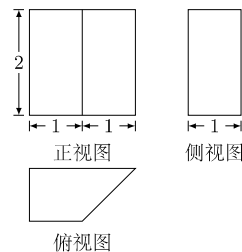


- (A) 2 (B) 7 (C) 8 (D) 128
- 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 过点 $(1, 1)$, 则 $a+b$ 的最小值等于 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 若 $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\tan \alpha$ 的值等于 ()
(A) $\frac{12}{5}$ (B) $-\frac{12}{5}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $-\frac{5}{12}$
- 设 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + k\mathbf{b}$. 若 $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, 则实数 k 的值等于 ()
(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{5}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$
- 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 A 在 x 轴上, 点 B 的坐标为 $(1, 0)$, 且点 C 与点 D 在函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x+1, & x < 0, \end{cases}$ 的图象上. 若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率等于 ()



- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积等于 ()



- (A) $8+2\sqrt{2}$ (B) $11+2\sqrt{2}$ (C) $14+2\sqrt{2}$ (D) 15

- 变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 0, \\ x-2y+2 \geq 0, \\ mx-y \leq 0, \end{cases}$ 若 $z=2x-y$ 的最大值为 2, 则实数 m 等于 ()
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

- 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F , 短轴的一个端点为 M , 直线 $l: 3x-4y=0$ 交椭圆 E 于 A, B 两点. 若 $|AF| + |BF| = 4$, 点 M 到直线 l 的距离不小于 $\frac{4}{5}$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是 ()
(A) $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ (B) $\left(0, \frac{3}{4}\right]$ (C) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ (D) $\left[\frac{3}{4}, 1\right)$

- “对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k \sin x \cos x < x$ ”是“ $k < 1$ ”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

二、填空题

- 某校高一年级有 900 名学生, 其中女生 400 名, 按男女比例用分层抽样的方法, 从该年级学生中抽取一个容量为 45 的样本, 则应抽取的男生人数为_____.
- 若 $\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{3}$, $A = 45^\circ$, $C = 75^\circ$, 则 $BC =$ _____.
- 若函数 $f(x) = 2^{|x-a|}$ ($a \in \mathbf{R}$) 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $f(x)$ 在 $[m, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 m 的最小值等于_____.

- 若 a, b 是函数 $f(x) = x^2 - px + q$ ($p > 0, q > 0$) 的两个不同的零点, 且 $a, b, -2$ 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列, 则 $p+q$ 的值等于_____.

三、解答题

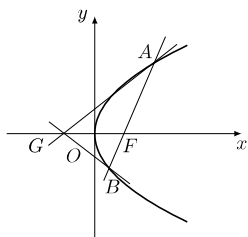
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 4$, $a_4 + a_7 = 15$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = 2^{a_n-2} + n$, 求 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10}$ 的值.

- 全网传播的融合指数是衡量电视媒体在中国网民中影响力的综合指标. 根据相关报道提供的全网传播 2015 年某全国性大型活动的“省级卫视新闻台”融合指数的数据, 对名列前 20 名的“省级卫视新闻台”的融合指数进行分组统计, 结果如表所示.

组号	分组	频数
1	[4, 5)	2
2	[5, 6)	8
3	[6, 7)	7
4	[7, 8]	3

- 现从融合指数在 $[4, 5)$ 和 $[7, 8]$ 内的“省级卫视新闻台”中随机抽取 2 家进行调研, 求至少有 1 家的融合指数在 $[7, 8]$ 内的概率;
- 根据分组统计表求这 20 家“省级卫视新闻台”的融合指数的平均数.

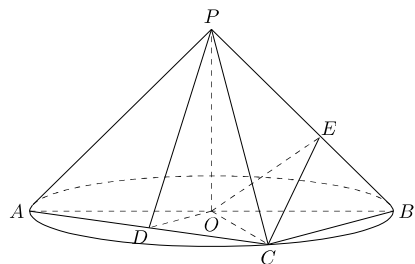
19. 已知点 F 为抛物线 $E: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 点 $A(2, m)$ 在抛物线 E 上, 且 $|AF| = 3$.
- (1) 求抛物线 E 的方程;
 - (2) 已知点 $G(-1, 0)$, 延长 AF 交抛物线 E 于点 B , 证明: 以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆, 必与直线 GB 相切.



21. 已知函数 $f(x) = 10\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 10\cos^2\frac{x}{2}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
 - (2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再向下平移 a ($a > 0$) 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 且函数 $g(x)$ 的最大值为 2.
 - ① 求函数 $g(x)$ 的解析式;
 - ② 证明: 存在无穷多个互不相同的正整数 x_0 , 使得 $g(x_0) > 0$.

22. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{(x-1)^2}{2}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;
 - (2) 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < x - 1$;
 - (3) 确定实数 k 的所有可能取值, 使得存在 $x_0 > 1$, 当 $x \in (1, x_0)$, 恒有 $f(x) > k(x - 1)$.

20. 如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A, B 的点, PO 垂直于圆 O 所在的平面, 且 $PO = OB = 1$.
- (1) 若 D 为线段 AC 的中点, 求证: $AC \perp$ 平面 PDO ;
 - (2) 求三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值;
 - (3) 若 $BC = \sqrt{2}$, 点 E 在线段 PB 上, 求 $CE + OE$ 的最小值.



2015 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

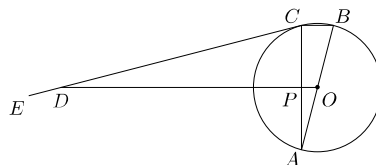
一、选择题

- 若集合 $M = \{x | (x+4)(x+1) = 0\}$, $N = \{x | (x-4)(x-1) = 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $\{1, 4\}$ (B) $\{-1, -4\}$ (C) $\{0\}$ (D) \emptyset
- 若复数 $z = i(3-2i)$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()
(A) $2-3i$ (B) $2+3i$ (C) $3+2i$ (D) $3-2i$
- 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是 ()
(A) $y = \sqrt{1+x^2}$ (B) $y = x + \frac{1}{x}$ (C) $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ (D) $y = x + e^x$
- 袋中共有 15 个除了颜色外完全相同的球, 其中有 10 个白球, 5 个红球. 从袋中任取 2 个球, 所取的 2 个球中恰有 1 个白球, 1 个红球的概率为 ()
(A) $\frac{5}{21}$ (B) $\frac{10}{21}$ (C) $\frac{11}{21}$ (D) 1
- 平行于直线 $2x+y+1=0$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线的方程是 ()
(A) $2x+y+5=0$ 或 $2x+y-5=0$
(B) $2x+y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x+y-\sqrt{5}=0$
(C) $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$
(D) $2x-y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-\sqrt{5}=0$
- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x+5y \geq 8, \\ 1 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 2, \end{cases}$ 则 $z = 3x+2y$ 的最小值为 ()
(A) 4 (B) $\frac{23}{5}$ (C) 6 (D) $\frac{31}{5}$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{5}{4}$, 且其右焦点为 $F_2(5, 0)$, 则双曲线 C 的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ (C) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$
- 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等, 则正整数 n 的取值 ()
(A) 至多等于 3 (B) 至多等于 4 (C) 等于 5 (D) 大于 5

二、填空题

- 在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中, x 的系数为_____.
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 25$, 则 $a_2 + a_8 =$ _____.
- 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{3}$, $\sin B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$, 则 $b =$ _____.
- 某高三毕业班有 40 人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言. (用数字作答)

- 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 若 $E(X) = 30$, $D(X) = 20$, 则 $p =$ _____.
- 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 点 A 的极坐标为 $A\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$, 则点 A 到直线 l 的距离为_____.
- 如图, 已知 AB 是圆 O 的直径, $AB = 4$, EC 是圆 O 的切线, 切点为 C , $BC = 1$. 过圆心 O 作 BC 的平行线, 分别交 EC 和 AC 于点 D 和点 P , 则 $OD =$ _____.



三、解答题

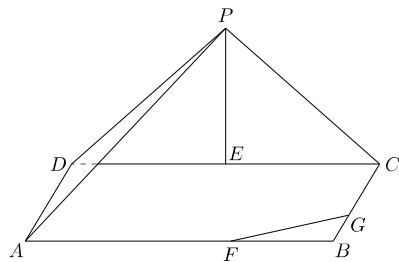
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\boldsymbol{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boldsymbol{n} = (\sin x, \cos x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
(1) 若 $\boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{n}$, 求 $\tan x$ 的值;
(2) 若 \boldsymbol{m} 与 \boldsymbol{n} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 x 的值.

- 某工厂 36 名工人的年龄数据如下表.

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

- 用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本, 且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为 44, 列出样本的年龄数据;
- 计算 (1) 中样本的均值 \bar{x} 和方差 s^2 ;
- 36 名工人中年龄在 $\bar{x} - s$ 与 $\bar{x} + s$ 之间有多少人? 所占的百分比是多少 (精确到 0.01%)?

18. 如图, 三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD = PC = 4$, $AB = 6$, $BC = 3$. 点 E 是 CD 边的中点, 点 F, G 分别在线段 AB, BC 上, 且 $AF = 2FB$, $CG = 2GB$.
- (1) 证明: $PE \perp FG$;
 - (2) 求二面角 $P-AD-C$ 的正切值;
 - (3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.



19. 设 $a > 1$, 函数 $f(x) = (1 + x^2)e^x - a$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点;
 - (3) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行, 且在点 $M(m, n)$ 处的切线与直线 OP 平行 (O 是坐标原点), 证明: $m \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}} - 1$.

20. 已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相交于不同的两点 A, B .
- (1) 求圆 C_1 的圆心坐标;
 - (2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;
 - (3) 是否存在实数 k , 使得直线 $L: y = k(x - 4)$ 与曲线 C 只有一个交点? 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求 a_3 的值;
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;
 - (3) 令 $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)a_n$ ($n \geq 2$), 证明: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n < 2 + 2\ln n$.

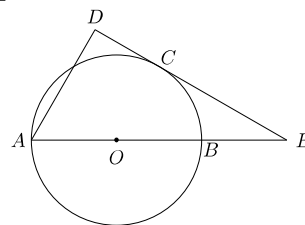
2015 普通高等学校招生考试 (广东卷文)

一、选择题

- 若集合 $M = \{-1, 1\}$, $N = \{-2, 1, 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $\{0, -1\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{-1, 1\}$
- 已知 i 是虚数单位, 则复数 $(1+i)^2 =$ ()
(A) $2i$ (B) $-2i$ (C) 2 (D) -2
- 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是 ()
(A) $y = x + \sin 2x$ (B) $y = x^2 - \cos x$
(C) $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ (D) $y = x^2 + \sin x$
- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \leq 2, \\ x + y \geq 0, \\ x \leq 4, \end{cases}$ 则 $z = 2x + 3y$ 的最大值为 ()
(A) 2 (B) 5 (C) 8 (D) 10
- 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = 2, c = 2\sqrt{3}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $b < c$, 则 $b =$ ()
(A) 3 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{3}$
- 若直线 l_1 和 l_2 是异面直线, l_1 在平面 α 内, l_2 在平面 β 内, l 是平面 α 与平面 β 的交线, 则下列命题正确的是 ()
(A) l 与 l_1, l_2 都不相交 (B) l 与 l_1, l_2 都相交
(C) l 至多与 l_1, l_2 中的一条相交 (D) l 至少与 l_1, l_2 中的一条相交
- 已知 5 件产品中有 2 件次品, 其余为合格品, 现从 5 件产品中任取 2 件, 恰有一件次品的概率为 ()
(A) 0.4 (B) 0.6 (C) 0.8 (D) 1
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1$ ($m > 0$) 的左焦点为 $F_1(-4, 0)$, 则 $m =$ ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 1)$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ()
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2
- 若集合 $E = \{(p, q, r, s) \mid 0 \leq p < s \leq 4, 0 \leq q < s \leq 4, 0 \leq r < s \leq 4 \text{ 且 } p, q, r, s \in \mathbf{N}\}$, $F = \{(t, u, v, w) \mid 0 \leq t < u \leq 4, 0 \leq v < w \leq 4 \text{ 且 } t, u, v, w \in \mathbf{N}\}$, 用 $\text{card}(X)$ 表示集合 X 中元素个数, 则 $\text{card}(E) + \text{card}(F) =$ ()
(A) 200 (B) 150 (C) 100 (D) 50

二、填空题

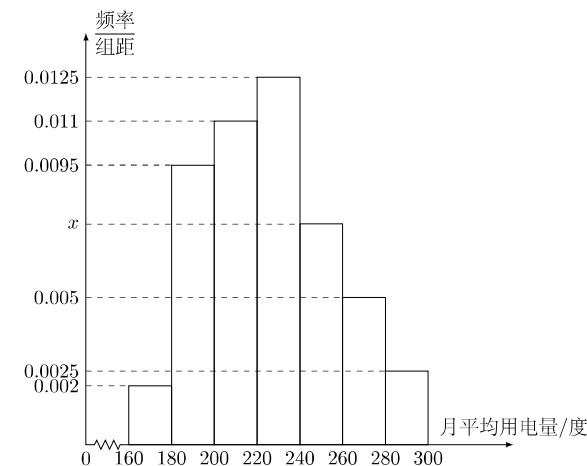
- 不等式 $-x^2 - 3x + 4 > 0$ 的解集为_____. (用区间表示)
- 已知样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的均值 $\bar{x} = 5$, 则样本数据 $2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_n + 1$ 的均值为_____.
- 若三个正数 a, b, c 成等比数列, 其中 $a = 5 + 2\sqrt{6}$, $c = 5 - 2\sqrt{6}$, 则 $b =$ _____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = -2$, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2\sqrt{2}t, \end{cases}$ (t 为参数), 则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.
- 如图, AB 为圆 O 的直径, E 为 AB 延长线上一点, 过 E 作圆 O 的切线, 切点为 C , 过 A 作直线 EC 的垂线, 垂足为 D . 若 $AB = 4$, $CE = 2\sqrt{3}$, 则 $AD =$ _____.



三、解答题

- 已知 $\tan \alpha = 2$.
(1) 求 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值;
(2) 求 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha - 1}$ 的值.

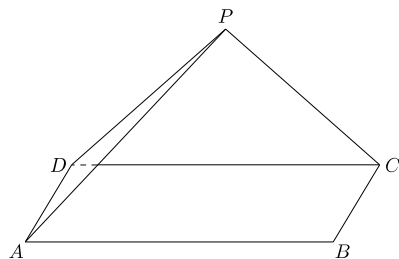
- 某城市 100 户居民的月平均用电量 (单位: 度), 以 $[160, 180)$, $[180, 200)$, $[200, 220)$, $[220, 240)$, $[240, 260)$, $[260, 280)$, $[280, 300)$ 分组的频率分布直方图如图.



- 求直方图中 x 的值;
- 求月平均用电量的众数和中位数;
- 在月平均用电量为 $[220, 240)$, $[240, 260)$, $[260, 280)$, $[280, 300)$ 的四组用户中, 用分层抽样的方法抽取 11 户居民, 则月平均用电量在 $[220, 240)$ 的用户中应抽取多少户?

18. 如图, 三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD = PC = 4$, $AB = 6$, $BC = 3$.

- (1) 证明: $BC \parallel$ 平面 PDA ;
- (2) 证明: $BC \perp PD$;
- (3) 求点 C 到平面 PDA 的距离.



20. 已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相交于不同的两点 A, B .

- (1) 求圆 C_1 的圆心坐标;
- (2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;
- (3) 是否存在实数 k , 使得直线 $L: y = k(x - 4)$ 与曲线 C 只有一个交点? 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = (x - a)^2 + |x - a| - a(a - 1)$.

- (1) 若 $f(0) \leq 1$, 求 a 的取值范围;
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (3) 当 $a \geq 2$ 时, 讨论 $f(x) + \frac{4}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的零点个数.

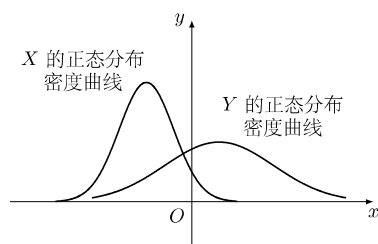
19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $n \in \mathbf{N}^*$, 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{4}$, 且当 $n \geq 2$ 时, $4S_{n+2} + 5S_n = 8S_{n+1} + S_{n-1}$.

- (1) 求 a_4 的值;
- (2) 证明: $\left\{a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right\}$ 为等比数列;
- (3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2015 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

- i 为虚数单位, i^{607} 的共轭复数为 ()
(A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1
- 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 ()
(A) 134 石 (B) 169 石 (C) 338 石 (D) 1365 石
- 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 则奇数项的二项式系数和为 ()
(A) 2^{12} (B) 2^{11} (C) 2^{10} (D) 2^9
- 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这两个正态分布密度曲线如图所示, 下列结论中正确的是 ()

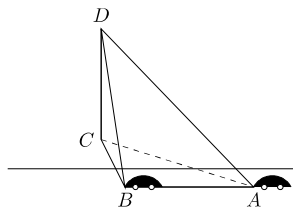


- (A) $P(Y \geq \mu_2) \geq P(Y \geq \mu_1)$
(B) $P(X \leq \sigma_2) \leq P(X \leq \sigma_1)$
(C) 对任意正数 t , $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$
(D) 对任意正数 t , $P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$
- 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \geq 3$. 若 $p: a_1, a_2, \dots, a_n$ 成等比数列; $q: (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)^2$, 则 ()
(A) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件
(B) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件
(C) p 是 q 的充分必要条件
(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件
- 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, $g(x) = f(x) - f(ax)$ ($a > 1$), 则 ()
(A) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ (B) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$
(C) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ (D) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

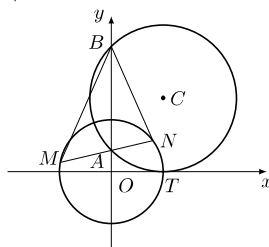
- 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 记 p_1 为事件“ $x+y \geq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_2 为事件“ $|x-y| \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_3 为事件“ $xy \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, 则 ()
(A) $p_1 < p_2 < p_3$ (B) $p_2 < p_3 < p_1$ (C) $p_3 < p_1 < p_2$ (D) $p_3 < p_2 < p_1$
- 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b ($a \neq b$) 同时增加 m ($m > 0$) 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2 , 则 ()
(A) 对任意的 $a, b, e_1 > e_2$
(B) 当 $a > b$ 时, $e_1 > e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 < e_2$
(C) 对任意的 $a, b, e_1 < e_2$
(D) 当 $a > b$ 时, $e_1 < e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 > e_2$
- 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ()
(A) 77 (B) 49 (C) 45 (D) 30
- 设 $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若存在实数 t , 使得 $[t] = 1$, $[t^2] = 2, \dots, [t^n] = n$ 同时成立, 则正整数 n 的最大值是 ()
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

二、填空题

- 已知向量 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{OA}| = 3$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ _____.
- 函数 $f(x) = 4\cos^2 \frac{x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\sin x - |\ln(x+1)|$ 的零点个数为_____.
- 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30° , 则此山的高度 $CD =$ _____m.

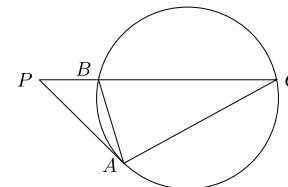


- 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB| = 2$.



- (1) 圆 C 的标准方程为_____;
- (2) 过点 A 任作一条直线与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点, 下列三个结论:
① $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$; ② $\frac{|NB|}{|NA|} - \frac{|MA|}{|MB|} = 2$; ③ $\frac{|NB|}{|NA|} + \frac{|MA|}{|MB|} = 2\sqrt{2}$.
其中正确结论的序号是_____. (写出所有正确结论的序号)

- 如图, PA 是圆的切线, A 为切点, PBC 是圆的割线, 且 $BC = 3PB$, 则 $\frac{AB}{AC} =$ _____.



- 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin \theta - 3\cos \theta) = 0$, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - \frac{1}{t}, \\ y = t + \frac{1}{t}, \end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

三、解答题

- 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

- (1) 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ ($\theta > 0$) 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 求 θ 的最小值.

18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 已知 $b_1 = a_1, b_2 = 2, q = d, S_{10} = 100$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 当 $d > 1$ 时, 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

20. 某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 A, B 两种奶制品. 生产 1 吨 A 产品需鲜牛奶 2 吨, 使用设备 1 小时, 获利 1000 元; 生产 1 吨 B 产品需鲜牛奶 1.5 吨, 使用设备 1.5 小时, 获利 1200 元. 要求每天 B 产品的产量不超过 A 产品产量的 2 倍, 设备每天生产 A, B 两种产品时间之和不超过 12 小时. 假定每天可获取的鲜牛奶数量 W (单位: 吨) 是一个随机变量, 其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产, 使其获利最大, 因此每天的最大获利 Z (单位: 元) 是一个随机变量.

- (1) 求 Z 的分布列和均值;
- (2) 若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立, 求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

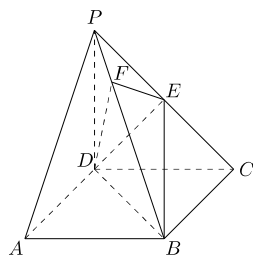
22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $b_n = n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n$ ($n \in \mathbf{N}_+$), e 为自然对数的底数.
- (1) 求函数 $f(x) = 1 + x - e^x$ 的单调区间, 并比较 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与 e 的大小;
- (2) 计算 $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}, \frac{b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2 a_3}$, 由此推测计算 $\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的公式, 并给出证明;
- (3) 令 $c_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, 数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n, T_n , 证明: $T_n < e S_n$.

19. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD = CD$, 过棱 PC 的中点 E , 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F , 连接 DE, DF, BD, BE .

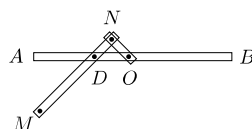
(1) 证明: $PB \perp$ 平面 DEF . 试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 说明理由.

(2) 若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求 $\frac{DC}{BC}$ 的值.

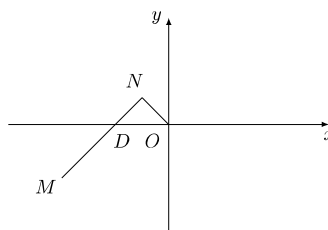


21. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1, MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.

- (1) 求曲线 C 的方程;
- (2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x - 2y = 0$ 和 $l_2: x + 2y = 0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



①



②

2015 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

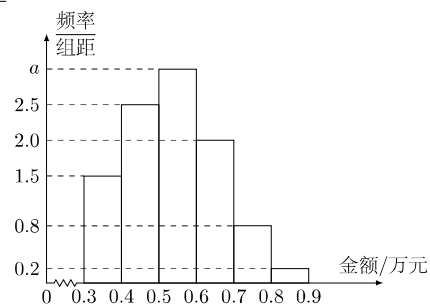
一、选择题

- i 为虚数单位, $i^{607} =$ ()
(A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1
- 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 ()
(A) 134 石 (B) 169 石 (C) 338 石 (D) 1365 石
- 命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 = x_0 - 1$ ”的否定是 ()
(A) $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 \neq x_0 - 1$ (B) $\exists x_0 \notin (0, +\infty), \ln x_0 = x_0 - 1$
(C) $\forall x \in (0, +\infty), \ln x \neq x - 1$ (D) $\forall x \notin (0, +\infty), \ln x = x - 1$
- 已知变量 x 和 y 满足关系 $y = -0.1x + 1$, 变量 y 与 z 正相关. 下列结论中正确的是 ()
(A) x 与 y 正相关, x 与 z 负相关 (B) x 与 y 正相关, x 与 z 正相关
(C) x 与 y 负相关, x 与 z 负相关 (D) x 与 y 负相关, x 与 z 正相关
- l_1, l_2 表示空间中的两条直线, 若 $p: l_1, l_2$ 是异面直线; $q: l_1, l_2$ 不相交, 则 ()
(A) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件
(B) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件
(C) p 是 q 的充分必要条件
(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件
- 函数 $f(x) = \sqrt{4 - |x|} + \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ 的定义域为 ()
(A) $(2, 3)$ (B) $(2, 4]$
(C) $(2, 3) \cup (3, 4]$ (D) $(-1, 3) \cup (3, 6]$
- 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则 ()
(A) $|x| = x|\operatorname{sgn} x|$ (B) $|x| = x\operatorname{sgn}|x|$
(C) $|x| = |x|\operatorname{sgn} x$ (D) $|x| = x\operatorname{sgn} x$
- 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 记 p_1 为事件“ $x + y \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_2 为事件“ $xy \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, 则
(A) $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ (B) $p_2 < \frac{1}{2} < p_1$ (C) $\frac{1}{2} < p_2 < p_1$ (D) $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$

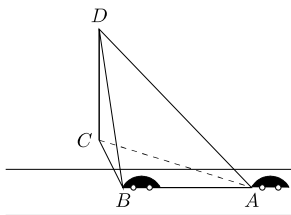
- 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b ($a \neq b$) 同时增加 m ($m > 0$) 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2 , 则 ()
(A) 对任意的 $a, b, e_1 > e_2$
(B) 当 $a > b$ 时, $e_1 > e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 < e_2$
(C) 对任意的 $a, b, e_1 < e_2$
(D) 当 $a > b$ 时, $e_1 < e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 > e_2$
- 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ()
(A) 77 (B) 49 (C) 45 (D) 30

二、填空题

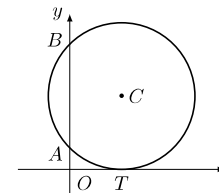
- 已知向量 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{OA}| = 3$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ _____.
- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 4, \\ x - y \leq 2, \\ 3x - y \geq 0, \end{cases}$ 则 $3x + y$ 的最大值是_____.
- 函数 $f(x) = 2\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x^2$ 的零点个数为_____.
- 某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计, 发现消费金额 (单位: 万元) 都在区间 $[0.3, 0.9]$ 内, 其频率分布直方图如图所示.
(1) 直方图中的 $a =$ _____.
(2) 在这些购物者中, 消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内的购物者的人数为_____.



- 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30° , 则此山的高度 $CD =$ _____m.



- 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB| = 2$.



- 圆 C 的标准方程为_____;
- 圆 C 在点 B 处的切线在 x 轴上的截距为_____.

- a 为实数, 函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值记为 $g(a)$. 当 $a =$ _____时, $g(a)$ 的值最小.

三、解答题

- 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

- 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;
- 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象. 求 $y = g(x)$ 的图象离原点 O 最近的对称中心.

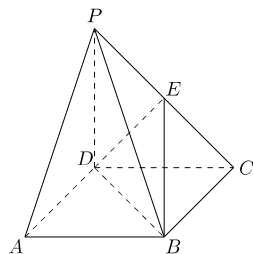
19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 已知 $b_1 = a_1, b_2 = 2, q = d, S_{10} = 100$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 当 $d > 1$ 时, 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

20. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD = CD$, 点 E 是 PC 的中点, 连接 DE, BD, BE .

- (1) 证明: $DE \perp$ 平面 PBC . 试判断四面体 $EBCD$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 请说明理由;
(2) 记阳马 $P-ABCD$ 的体积为 V_1 , 四面体 $EBCD$ 的体积为 V_2 , 求 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值.

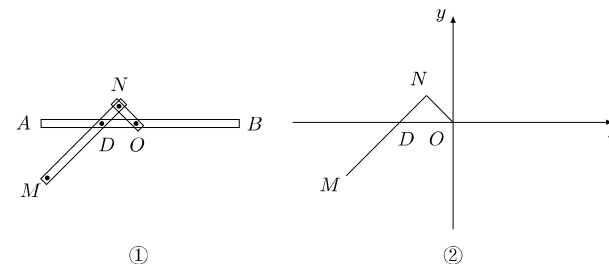


21. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(x) + g(x) = e^x$, 其中 e 为自然对数的底数.

- (1) 求 $f(x), g(x)$ 的解析式, 并证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0, g(x) > 1$;
(2) 设 $a \leq 0, b \geq 1$, 证明: 当 $x > 0$ 时, $ag(x) + (1-a) < \frac{f(x)}{x} < bg(x) + (1-b)$.

22. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1, MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.

- (1) 求曲线 C 的方程;
(2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x - 2y = 0$ 和 $l_2: x + 2y = 0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



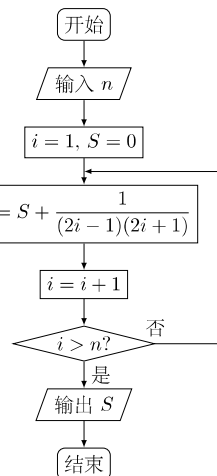
2015 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 已知 $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z =$ ()
 (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

2. 设 A, B 是两个集合, 则“ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $n = 3$, 则输出的 $S =$ ()



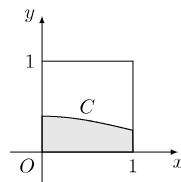
- (A) $\frac{6}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq -1, \\ 2x-y \leq 1, \\ y \leq 1. \end{cases}$ 则 $z = 3x - y$ 的最小值为 ()
 (A) -7 (B) -1 (C) 1 (D) 2

5. 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是 ()
 (A) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数 (B) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数
 (C) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数 (D) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数

6. 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则 $a =$ ()
 (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) 6 (D) -6

7. 在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点, 则落入阴影部分 (曲线 C 为正态分布 $N(0,1)$ 的密度曲线) 的点的个数的估计值为 ()



附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

- (A) 2386 (B) 2718 (C) 3413 (D) 4772

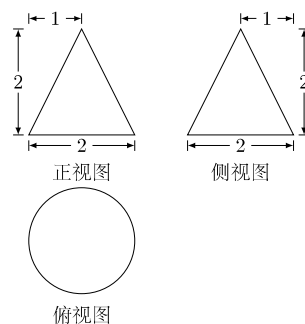
8. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 且 $AB \perp BC$. 若点 P 的坐标为 $(2,0)$, 则 $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}|$ 的最大值为 ()

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

9. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ ()

- (A) $\frac{5\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的长方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 = $\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) ()



- (A) $\frac{8}{9\pi}$ (B) $\frac{16}{9\pi}$ (C) $\frac{4(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$ (D) $\frac{12(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

二、填空题

11. $\int_0^2 (x-1) dx =$ _____.

12. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9						
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3										

若将运动员按成绩由好到差编为 1 ~ 35 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间 $[139, 151]$ 上的运动员的人数是_____.

13. 设 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点, 若 C 上存在点 P , 使线段 PF 的中点恰为其虚轴的一个端点, 则 C 的离心率为_____.

14. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 1$, 且 $3S_1, 2S_2, S_3$ 成等差数列, 则 $a_n =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a, \\ x^2, & x > a, \end{cases}$ 若存在实数 b , 使函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是_____.

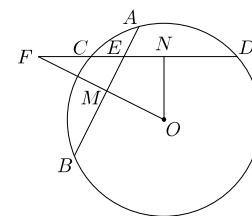
三、解答题

16. 三选二.

【A】如图, 在 $\odot O$ 中, 相交于点 E 的两弦 AB, CD 的中点分别是 M, N , 直线 MO 与直线 CD 相交于点 F . 证明:

(1) $\angle MEN + \angle NOM = 180^\circ$;

(2) $FE \cdot FN = FM \cdot FO$.



【B】已知直线 $l: \begin{cases} x = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \sqrt{3} + \frac{1}{2}t, \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$.

(1) 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 M 的直角坐标为 $(5, \sqrt{3})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B , 求 $|MA| \cdot |MB|$ 的值.

【C】设 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 证明:

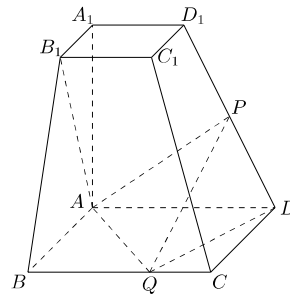
(1) $a + b \geq 2$;

(2) $a^2 + a < 2$ 与 $b^2 + b < 2$ 不可能同时成立.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = b \tan A$, 且 B 为钝角.
- (1) 证明: $B - A = \frac{\pi}{2}$;
- (2) 求 $\sin A + \sin C$ 的取值范围.

18. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 每次抽奖都是从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中, 各随机摸出 1 个球. 在摸出的 2 个球中, 若都是红球, 则获一等奖; 若只有 1 个红球, 则获二等奖; 若没有红球, 则不获奖.
- (1) 求顾客抽奖 1 次能获奖的概率;
- (2) 若某顾客有 3 次抽奖的机会, 记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

19. 如图, 已知四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形, $AA_1 = 6$, 且 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BC 上.
- (1) 若点 P 是 DD_1 的中点, 证明: $AB_1 \perp PQ$;
- (2) 若 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 二面角 $P - QD - A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$, 求四面体 $ADPQ$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$.
- (1) 求 C_2 的方程;
- (2) 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 与 C_2 相交于 C, D 两点, 且 \vec{AC} 与 \vec{BD} 同向.
- ① 若 $|AC| = |BD|$, 求直线 l 的斜率;
- ② 设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M , 证明: 直线 l 绕点 F 旋转时, $\triangle MFD$ 总是钝角三角形.

21. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = e^{ax} \sin x$ ($x \in [0, +\infty)$), 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个极值点. 证明:
- (1) 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;
- (2) 若 $a \geq \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}$, 则对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n < |f(x_n)|$ 恒成立.

2015 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 已知 $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z =$ ()
 (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

2. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

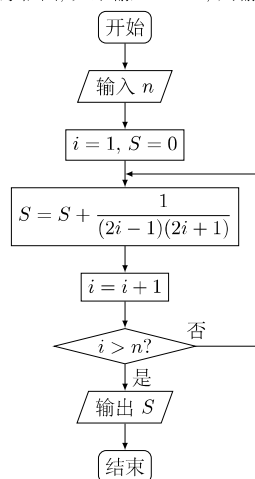
13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5
15	0	1	2	2	3	3	3				

若将运动员按成绩由好到差编为 1~35 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间 $[139, 151]$ 上的运动员的人数是 ()

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 1$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 1, \\ y-x \leq 1, \\ x \leq 1, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的最小值为 ()
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

5. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $n = 3$, 则输出的 $S =$ ()



- (A) $\frac{6}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$
6. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线经过点 $(3, -4)$, 则此双曲线的离心率为 ()

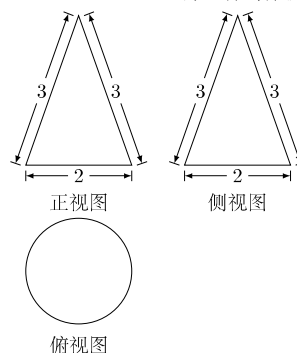
- (A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

7. 若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$, 则 ab 的最小值为 ()
 (A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

8. 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是 ()
 (A) 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 是增函数 (B) 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数
 (C) 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 是增函数 (D) 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数

9. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 且 $AB \perp BC$. 若点 P 的坐标为 $(2, 0)$, 则 $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}|$ 的最大值为 ()
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的正方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 = $\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) ()



- (A) $\frac{8}{9\pi}$ (B) $\frac{8}{27\pi}$ (C) $\frac{24(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$ (D) $\frac{8(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

二、填空题

11. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \cup (\complement_U B) =$ _____.
12. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$, 则曲线 C 的直角坐标方程为_____.
13. 若直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B 两点, 且 $\angle AOB = 120^\circ$ (O 为坐标原点), 则 $r =$ _____.
14. 若函数 $f(x) = |2^x - 2| - b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是_____.
15. 已知 $\omega > 0$, 在函数 $y = 2\sin\omega x$ 与 $y = 2\cos\omega x$ 的图象的交点中, 距离最短的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 $\omega =$ _____.

三、解答题

16. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 抽奖方法是: 从装有 2 个红球 A_1, A_2 和 1 个白球 B 的甲箱与装有 2 个红球 a_1, a_2 和 2 个白球 b_1, b_2 的乙箱中, 各随机摸出 1 个球, 若摸出的 2 个球都是红球则中奖, 否则不中奖.

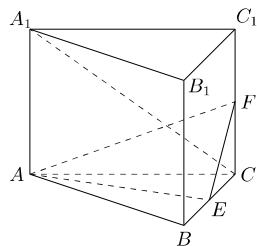
- (1) 用球的标号列出所有可能的摸出结果;
 (2) 有人认为: 两个箱子中的红球比白球多, 所以中奖的概率大于不中奖的概率, 你认为正确吗? 请说明理由.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = b \tan A$.

- (1) 证明: $\sin B = \cos A$;
 (2) 若 $\sin C - \sin A \cos B = \frac{3}{4}$, 且 B 为钝角, 求 A, B, C .

18. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 BC, CC_1 的中点.

- (1) 证明: 平面 $AEF \perp$ 平面 B_1BCC_1 ;
(2) 若直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成的角为 45° , 求三棱锥 $F - AEC$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$. 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 与 C_2 相交于 C, D 两点, 且 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{BD} 同向.
- (1) 求 C_2 的方程;
(2) 若 $|AC| = |BD|$, 求直线 l 的斜率.

21. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ae^x \cos x$ ($x \in [0, +\infty)$). 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个极值点.

- (1) 证明: 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;
(2) 若对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \leq |f(x_n)|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $a_{n+2} = 3S_n - S_{n+1} + 3, n \in \mathbf{N}^*$.

- (1) 证明: $a_{n+2} = 3a_n$;
(2) 求 S_n .

2015 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、填空题

- 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为_____.
- 已知一组数据 4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为_____.
- 设复数 z 满足 $z^2 = 3 + 4i$ (i 是虚数单位), 则 z 的模为_____.
- 根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 S 为_____.

```

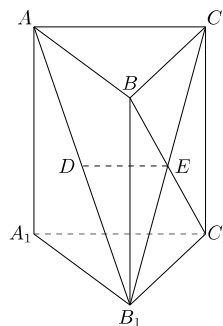
S ← 1
I ← 1
While I < 8
    S ← S + 2
    I ← I + 3
End While
Print S
    
```

- 袋中有形状、大小都相同的 4 只球, 其中 1 只白球、1 只红球、2 只黄球, 从中一次随机摸出 2 只球, 则这 2 只球颜色不同的概率为_____.
- 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, 若 $m\mathbf{a} + n\mathbf{b} = (9, -8)$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 则 $m - n$ 的值为_____.
- 不等式 $2^{x^2-x} < 4$ 的解集为_____.
- 已知 $\tan \alpha = -2$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{7}$, 则 $\tan \beta$ 的值为_____.
- 现有橡皮泥制作的底面半径为 5, 高为 4 的圆锥和底面半径为 2, 高为 8 的圆柱各一个. 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为_____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0$ ($m \in \mathbf{R}$) 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为_____.
- 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} - a_n = n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 前 10 项的和为_____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, P 为双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 右支上的一个动点, 若点 P 到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离大于 c 恒成立, 则实数 c 的最大值为_____.
- 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1, \end{cases}$ 则方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为_____.
- 设向量 $\mathbf{a}_k = \left(\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6}\right)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 12$), 则 $\sum_{k=0}^{11} (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{k+1})$ 的值为_____.

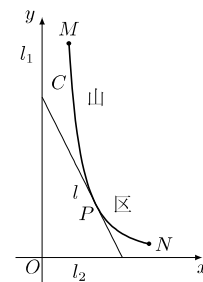
二、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2$, $AC = 3$, $A = 60^\circ$.
(1) 求 BC 的长;
(2) 求 $\sin 2C$ 的值.

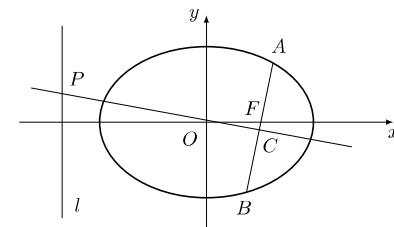
- 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC \perp BC$, $BC = CC_1$, 设 AB_1 的中点为 D , $B_1C \cap BC_1 = E$. 求证:
(1) $DE \parallel$ 平面 AA_1C_1C ;
(2) $BC_1 \perp AB_1$.



- 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路. 记两条相互垂直的公路为 l_1, l_2 , 山区边界曲线为 C , 计划修建的公路为 l . 如图所示, M, N 为 C 的两个端点, 测得点 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 5 千米和 40 千米, 点 N 到 l_1, l_2 的距离分别为 20 千米和 2.5 千米. 以 l_2, l_1 所在的直线分别为 x, y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy . 假设曲线 C 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (其中 a, b 为常数) 模型.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t .
① 请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;
② 当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度.



- 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3.
(1) 求椭圆的标准方程;
(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P, C , 若 $PC = 2AB$, 求直线 AB 的方程.



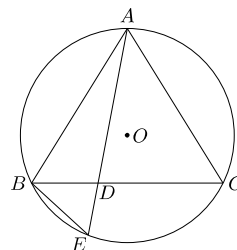
19. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b = c - a$ (实数 c 是与 a 无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, 求 c 的值.

21. 四选二.

【A】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦 AE 交 BC 于点 D . 求证: $\triangle ABD \sim \triangle AEB$.



【B】已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量, 求矩阵 A 以及它的另一个特征值.

20. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项为正数且公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列.

(1) 证明: $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$ 依次构成等比数列;

(2) 是否存在 a_1, d , 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由;

(3) 是否存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列? 并说明理由.

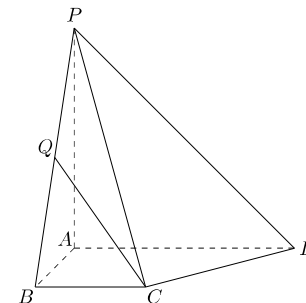
【C】已知圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 4 = 0$, 求圆 C 的半径.

【D】解不等式 $x + |2x + 3| \geq 2$.

22. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $PA = AD = 2$, $AB = BC = 1$.

(1) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;

(2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成的角最小时, 求线段 BQ 的长.



23. 已知集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 设 $S_n = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b \text{ 或 } b \text{ 整除 } a, a \in X, b \in Y_n\}$, 令 $f(n)$ 表示集合 S_n 所含元素的个数.

(1) 写出 $f(6)$ 的值;

(2) 当 $n \geq 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.

2015 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z} = i$, 则 $|z| =$ ()

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

2. $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ =$ ()

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. 设命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为 ()

- (A) $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$ (B) $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$
(C) $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$ (D) $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 = 2^n$

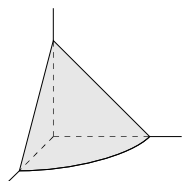
4. 投篮测试中, 每人投 3 次, 至少投中 2 次才能通过测试. 已知某同学每次投篮中的概率为 0.6, 且各次投篮是否投中相互独立, 则该同学通过测试的概率为 ()

- (A) 0.648 (B) 0.432 (C) 0.36 (D) 0.312

5. 已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的两个焦点. 若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$, 则 y_0 的取值范围是 ()

- (A) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (B) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
(C) $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ (D) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” 其意思是: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?” 已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 ()

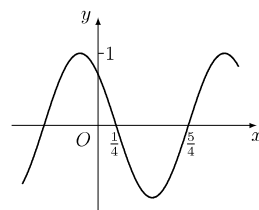


- (A) 14 斛 (B) 22 斛 (C) 36 斛 (D) 66 斛

7. 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CD}$, 则 ()

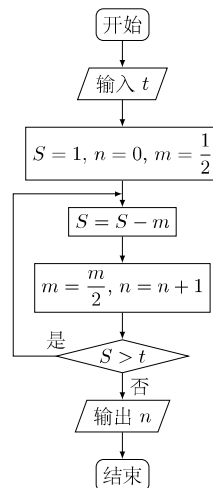
- (A) $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
(C) $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

8. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()



- (A) $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (B) $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
(C) $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (D) $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t = 0.01$, 则输出的 $n =$ ()

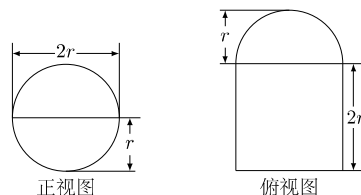


- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

10. $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中, $x^5 y^2$ 的系数为 ()

- (A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 60

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16 + 20\pi$, 则 $r =$ ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

12. 设函数 $f(x) = e^x(2x - 1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $\left[-\frac{3}{2e}, 1\right)$ (B) $\left[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$ (C) $\left[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$ (D) $\left[\frac{3}{2e}, 1\right)$

二、填空题

13. 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

14. 一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 则该圆的标准方程为_____.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - y \leq 0, \\ x + y - 4 \leq 0, \end{cases}$ 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.

16. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是_____.

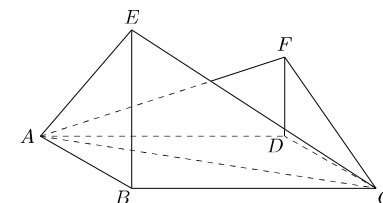
三、解答题

17. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$.

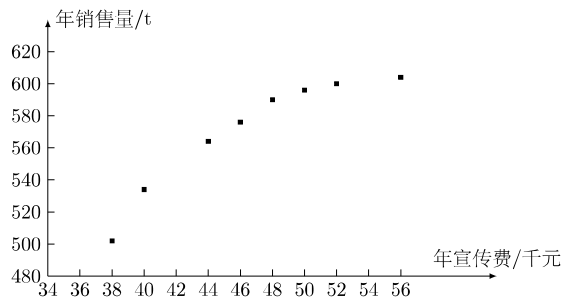
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, E, F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $DF \perp$ 平面 $ABCD$, $BE = 2DF$, $AE \perp EC$.

- (1) 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 AFC ;
(2) 求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



\bar{x}	\bar{y}	\bar{w}	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6
$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$		$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$		
1.469		108.8		

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$.

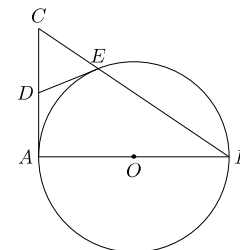
- 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)
- 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;
- 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 0.2y - x$. 根据 (2) 的结果回答下列问题:

- ① 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
- ② 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$.

20. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a$ ($a > 0$) 交于 M, N 两点.
- 当 $k = 0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;
 - y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? 说明理由.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E .
- 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;
 - 若 $OA = \sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.
- 求 C_1, C_2 的极坐标方程;
 - 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho \in \mathbf{R}$), 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

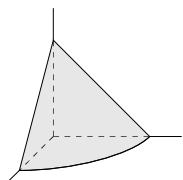
21. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$.
- 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线;
 - 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($x > 0$), 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

24. 已知函数 $f(x) = |x + 1| - 2|x - a|$, $a > 0$.
- 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;
 - 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.

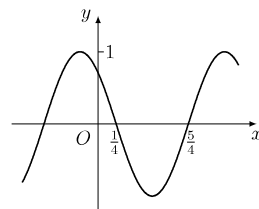
2015 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, 则集合 $A \cap B$ 中的元素个数为 ()
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2
- 已知点 $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, 向量 $\overrightarrow{AC} = (-4, -3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC} =$ ()
(A) $(-7, -4)$ (B) $(7, 4)$ (C) $(-1, 4)$ (D) $(1, 4)$
- 已知复数 z 满足 $(z - 1)i = 1 + i$, 则 $z =$ ()
(A) $-2 - i$ (B) $-2 + i$ (C) $2 - i$ (D) $2 + i$
- 如果 3 个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这 3 个数为一组勾股数, 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个不同的数, 则这 3 个数构成一组勾股数的概率为 ()
(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{20}$
- 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点重合, A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点, 则 $|AB| =$ ()
(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12
- 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” 其意思是: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?” 已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 ()



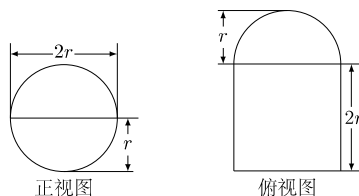
- (A) 14 斛 (B) 22 斛 (C) 36 斛 (D) 66 斛
- 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8 = 4S_4$, 则 $a_{10} =$ ()
(A) $\frac{17}{2}$ (B) $\frac{19}{2}$ (C) 10 (D) 12
- 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()



- (A) $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (B) $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
(C) $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (D) $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
 - 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t = 0.01$, 则输出的 $n =$ ()
- ```

graph TD
 Start([开始]) --> Input[/输入 t/]
 Input --> Init[S = 1, n = 0, m = 1/2]
 Init --> LoopStart(())
 LoopStart --> Sminus[S = S - m]
 Sminus --> Mdiv[m = m/2, n = n + 1]
 Mdiv --> Decision{S > t}
 Decision -- 是 --> Output[/输出 n/]
 Output --> End([结束])
 Decision -- 否 --> LoopStart

```
- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
  - 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1, \\ -\log_2(x+1), & x > 1, \end{cases}$  且  $f(a) = -3$ , 则  $f(6-a) =$  ( )  
(A)  $-\frac{7}{4}$  (B)  $-\frac{5}{4}$  (C)  $-\frac{3}{4}$  (D)  $-\frac{1}{4}$
  - 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为  $r$ ) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为  $16 + 20\pi$ , 则  $r =$  ( )



- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

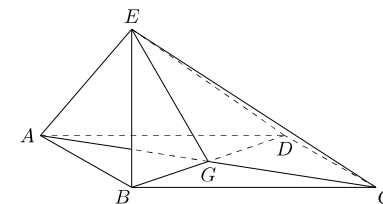
- 设函数  $y = f(x)$  的图象与  $y = 2^{x+a}$  的图象关于直线  $y = -x$  对称, 且  $f(-2) + f(-4) = 1$ , 则  $a =$  ( )  
(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

## 二、填空题

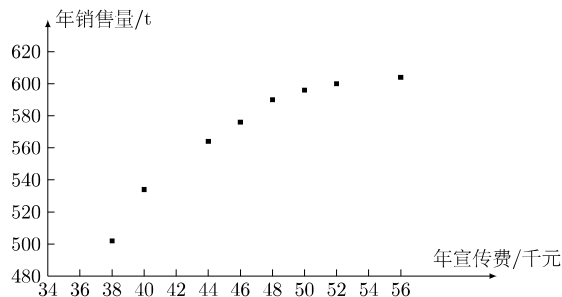
- 数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$ ,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $S_n = 126$ , 则  $n =$ \_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x) = ax^3 + x + 1$  的图象在点  $(1, f(1))$  处的切线过点  $(2, 7)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - 2y + 1 \leq 0, \\ 2x - y + 2 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 3x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 已知  $F$  是双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$  的右焦点,  $P$  是  $C$  左支上一点,  $A(0, 6\sqrt{6})$ , 当  $\triangle APF$  周长最小时, 该三角形的面积为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 已知  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边,  $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C$ .  
(1) 若  $a = b$ , 求  $\cos B$ ;  
(2) 若  $B = 90^\circ$ , 且  $a = \sqrt{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.
- 如图, 四边形  $ABCD$  为菱形,  $G$  为  $AC$  与  $BD$  的交点,  $BE \perp$  平面  $ABCD$ .  
(1) 证明: 平面  $AEC \perp$  平面  $BED$ ;  
(2) 若  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AE \perp EC$ , 三棱锥  $E-ACD$  的体积为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 求该三棱锥的侧面积.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费  $x$  (单位: 千元) 对年销售量  $y$  (单位:  $t$ ) 和年利润  $z$  (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费  $x_i$  和年销售量  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



| $\bar{x}$                                     | $\bar{y}$ | $\bar{w}$                                     | $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$ | $\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$ |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 46.6                                          | 563       | 6.8                                           | 289.8                            | 1.6                              |
| $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ |           | $\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$ |                                  |                                  |
| 1.469                                         |           | 108.8                                         |                                  |                                  |

表中  $w_i = \sqrt{x_i}$ ,  $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$ .

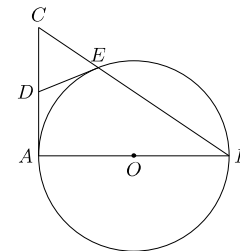
- 根据散点图判断,  $y = a + bx$  与  $y = c + d\sqrt{x}$  哪一个适宜作为年销售量  $y$  关于年宣传费  $x$  的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)
- 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立  $y$  关于  $x$  的回归方程;
- 已知这种产品的年利润  $z$  与  $x, y$  的关系为  $z = 0.2y - x$ . 根据 (2) 的结果回答下列问题:

- ① 年宣传费  $x = 49$  时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
- ② 年宣传费  $x$  为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归直线  $v = \alpha + \beta u$  的斜率和截距的最小二乘估计分别为  $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$ ,  $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$ .

20. 已知过点  $A(0, 1)$  且斜率为  $k$  的直线  $l$  与圆  $C: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$  交于  $M, N$  两点.
- 求  $k$  的取值范围;
  - 若  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 12$ , 其中  $O$  为坐标原点, 求  $|MN|$ .

22. 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $AC$  是  $\odot O$  的切线,  $BC$  交  $\odot O$  于点  $E$ .
- 若  $D$  为  $AC$  的中点, 证明:  $DE$  是  $\odot O$  的切线;
  - 若  $OA = \sqrt{3}CE$ , 求  $\angle ACB$  的大小.



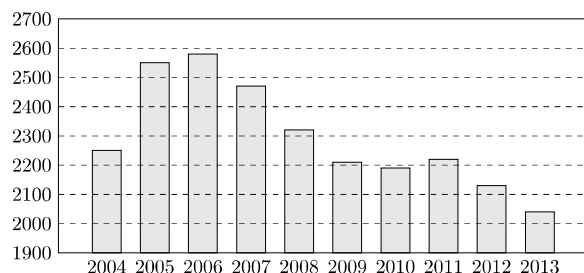
23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $C_1: x = -2$ , 圆  $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系.
- 求  $C_1, C_2$  的极坐标方程;
  - 若直线  $C_3$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ), 设  $C_2$  与  $C_3$  的交点为  $M, N$ , 求  $\triangle C_2MN$  的面积.

24. 已知函数  $f(x) = |x + 1| - 2|x - a|$ ,  $a > 0$ .
- 当  $a = 1$  时, 求不等式  $f(x) > 1$  的解集;
  - 若  $f(x)$  的图象与  $x$  轴围成的三角形面积大于 6, 求  $a$  的取值范围.

# 2015 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

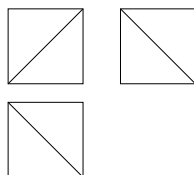
## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x | (x-1)(x+2) < 0\}$ , 则  $A \cap B$  等于 ( )  
(A)  $\{-1, 0\}$  (B)  $\{0, 1\}$  (C)  $\{-1, 0, 1\}$  (D)  $\{0, 1, 2\}$
- 若  $a$  为实数, 且  $(2+ai)(a-2i) = -4i$ , 则  $a =$  ( )  
(A)  $-1$  (B)  $0$  (C)  $1$  (D)  $2$
- 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 ( )



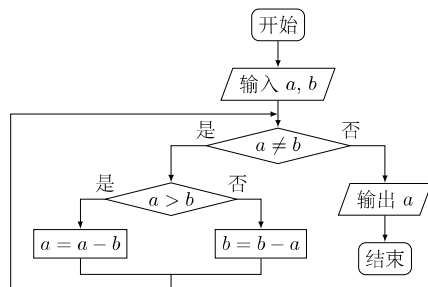
- (A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著  
(B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效  
(C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势  
(D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

- 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ,  $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ , 则  $a_3 + a_5 + a_7 =$  ( )  
(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84
- 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1, \\ 2^{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(-2) + f(\log_2 12) =$  ( )  
(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12
- 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ( )



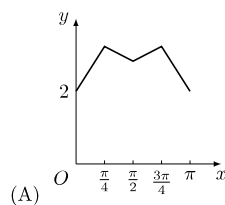
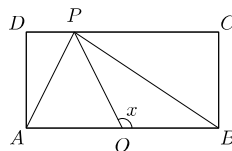
- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{7}$  (C)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{5}$

- 过三点  $A(1, 3)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $C(1, -7)$  的圆交  $y$  轴于  $M$ ,  $N$  两点, 则  $|MN| =$  ( )  
(A)  $2\sqrt{6}$  (B) 8 (C)  $4\sqrt{6}$  (D) 10
- 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的  $a, b$  分别为 14, 18, 则输出的  $a =$  ( )

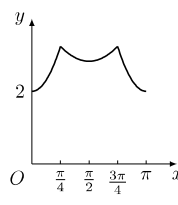


- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 14

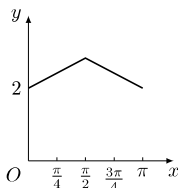
- 已知  $A, B$  是球  $O$  的球面上两点,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $C$  为该球面上的动点, 若三棱锥  $O-ABC$  体积的最大值为 36, 则球  $O$  的表面积为 ( )  
(A)  $36\pi$  (B)  $64\pi$  (C)  $144\pi$  (D)  $256\pi$
- 如图, 长方形  $ABCD$  的边  $AB = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $O$  是  $AB$  的中点, 点  $P$  沿着边  $BC, CD$  与  $DA$  运动, 记  $\angle BOP = x$ . 将动点  $P$  到  $A, B$  两点距离之和表示为  $x$  的函数  $f(x)$ , 则  $y = f(x)$  的图象大致为 ( )



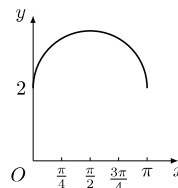
(A)



(B)



(C)



(D)

- 已知  $A, B$  为双曲线  $E$  的左、右顶点, 点  $M$  在  $E$  上,  $\triangle ABM$  为等腰三角形, 且顶角为  $120^\circ$ , 则  $E$  的离心率为 ( )  
(A)  $\sqrt{5}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{3}$  (D)  $\sqrt{2}$

- 设函数  $f'(x)$  是奇函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的导函数,  $f(-1) = 0$ , 当  $x > 0$  时,  $xf'(x) - f(x) < 0$ , 则使得  $f(x) > 0$  成立的  $x$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$  (B)  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$   
(C)  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$  (D)  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

## 二、填空题

- 设向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  不平行, 向量  $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$  与  $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$  平行, 则实数  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x - 2y \leq 0, \\ x + 2y - 2 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- $(a+x)(1+x)^4$  的展开式中  $x$  的奇数次幂项的系数之和为 32, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1 = -1$ ,  $a_{n+1} = S_n S_{n+1}$ , 则  $S_n =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  上的点,  $AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $\triangle ABD$  面积是  $\triangle ADC$  面积的 2 倍.  
(1) 求  $\frac{\sin B}{\sin C}$ ;  
(2) 若  $AD = 1$ ,  $DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 求  $BD$  和  $AC$  的长.

- 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从  $A, B$  两地区分别随机调查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

|         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $A$ 地区: | 62 | 73 | 81 | 92 | 95 | 85 | 74 | 64 | 53 | 76 |
|         | 78 | 86 | 95 | 66 | 97 | 78 | 88 | 82 | 76 | 89 |
| $B$ 地区: | 73 | 83 | 62 | 51 | 91 | 46 | 53 | 73 | 64 | 82 |
|         | 93 | 48 | 65 | 81 | 74 | 56 | 54 | 76 | 65 | 79 |

- 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度 (不要求计算出具体值, 给出结论即可);

| $A$ 地区 |   | $B$ 地区 |
|--------|---|--------|
|        | 4 |        |
|        | 5 |        |
|        | 6 |        |
|        | 7 |        |
|        | 8 |        |
|        | 9 |        |

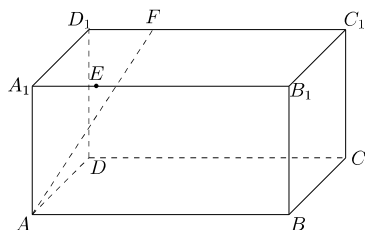
(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分三个等级:

|       |         |            |          |
|-------|---------|------------|----------|
| 满意度评分 | 低于 70 分 | 70 分到 89 分 | 不低于 90 分 |
| 满意度等级 | 不满意     | 满意         | 非常满意     |

记事件  $C$ : “ $A$  地区用户的满意度等级高于  $B$  地区用户的满意度等级”. 假设两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据, 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率, 求  $C$  的概率.

19. 如图, 长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 16$ ,  $BC = 10$ ,  $AA_1 = 8$ , 点  $E, F$  分别在  $A_1B_1, D_1C_1$  上,  $A_1E = D_1F = 4$ . 过点  $E, F$  的平面  $\alpha$  与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.

- (1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
- (2) 求直线  $AF$  与平面  $\alpha$  所成角的正弦值.



20. 已知椭圆  $C: 9x^2 + y^2 = m^2$  ( $m > 0$ ), 直线  $l$  不过原点  $O$  且不平行于坐标轴,  $l$  与  $C$  有两个交点  $A, B$ , 线段  $AB$  的中点为  $M$ .

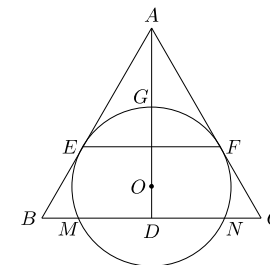
- (1) 证明: 直线  $OM$  的斜率与  $l$  的斜率的乘积为定值;
- (2) 若  $l$  过点  $(\frac{m}{3}, m)$ , 延长线段  $OM$  与  $C$  交于点  $P$ , 四边形  $OAPB$  能否为平行四边形? 若能, 求此时  $l$  的斜率; 若不能, 说明理由.

21. 设函数  $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$ .

- (1) 证明:  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增;
- (2) 若对于任意  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$ , 求  $m$  的取值范围.

22. 如图,  $O$  为等腰三角形  $ABC$  内一点,  $\odot O$  与  $\triangle ABC$  的底边  $BC$  交于  $M, N$  两点, 与底边上的高  $AD$  交于点  $G$ , 且与  $AB, AC$  分别相切于  $E, F$  两点.

- (1) 证明:  $EF \parallel BC$ ;
- (2) 若  $AG$  等于  $\odot O$  的半径, 且  $AE = MN = 2\sqrt{3}$ , 求四边形  $EBCF$  的面积.



23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha, \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $t \neq 0$ ), 其中  $0 \leq \alpha < \pi$ . 在以  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C_2: \rho = 2 \sin \theta$ ,  $C_3: \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta$ .
- (1) 求  $C_2$  与  $C_3$  交点的直角坐标;
  - (2) 若  $C_1$  与  $C_2$  相交于点  $A$ ,  $C_1$  与  $C_3$  相交于点  $B$ , 求  $|AB|$  的最大值.

24. 设  $a, b, c, d$  均为正数, 且  $a + b = c + d$ , 证明:

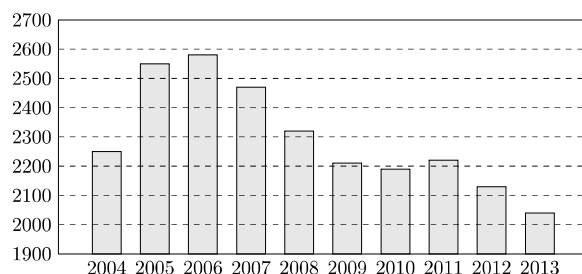
- (1) 若  $ab > cd$ , 则  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ;
- (2)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$  是  $|a - b| < |c - d|$  的充要条件.



# 2015 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

## 一、选择题

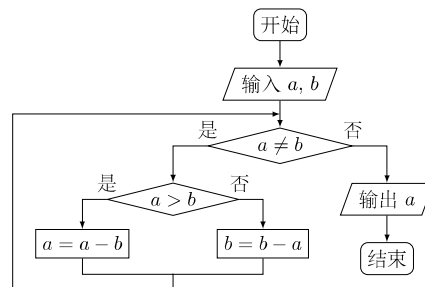
- 已知集合  $A = \{x | -1 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | 0 < x < 3\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )  
(A)  $(-1, 3)$  (B)  $(-1, 0)$  (C)  $(0, 2)$  (D)  $(2, 3)$
- 若  $a$  为实数, 且  $\frac{2+ai}{1+i} = 3+i$ , 则  $a =$  ( )  
(A)  $-4$  (B)  $-3$  (C)  $3$  (D)  $4$
- 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 ( )



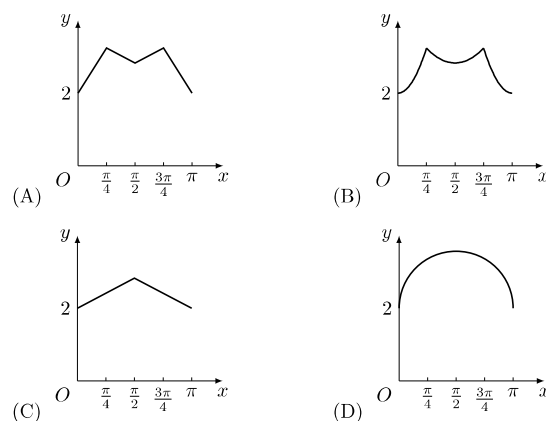
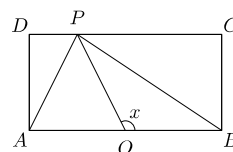
- (A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著  
(B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效  
(C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势  
(D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关
- 已知  $a = (1, -1)$ ,  $b = (-1, 2)$ , 则  $(2a + b) \cdot a =$  ( )  
(A)  $-1$  (B)  $0$  (C)  $1$  (D)  $2$
- 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_1 + a_3 + a_5 = 3$ , 则  $S_5 =$  ( )  
(A)  $5$  (B)  $7$  (C)  $9$  (D)  $11$
- 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{7}$  (C)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{5}$
- 已知三点  $A(1, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3})$ ,  $C(2, \sqrt{3})$ , 则  $\triangle ABC$  外接圆的圆心到原点的距离为

- (A)  $\frac{5}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{21}}{3}$  (C)  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$  (D)  $\frac{4}{3}$

- 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的  $a, b$  分别为 14, 18, 则输出的  $a =$  ( )



- (A)  $0$  (B)  $2$  (C)  $4$  (D)  $14$
- 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$ , 则  $a_2 =$  ( )  
(A)  $2$  (B)  $1$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{8}$
- 已知  $A, B$  是球  $O$  的球面上两点,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $C$  为该球面上的动点, 若三棱锥  $O-ABC$  体积的最大值为 36, 则球  $O$  的表面积为 ( )  
(A)  $36\pi$  (B)  $64\pi$  (C)  $144\pi$  (D)  $256\pi$
- 如图, 长方形  $ABCD$  的边  $AB = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $O$  是  $AB$  的中点, 点  $P$  沿着边  $BC, CD$  与  $DA$  运动, 记  $\angle BOP = x$ . 将动点  $P$  到  $A, B$  两点距离之和表示为  $x$  的函数  $f(x)$ , 则  $y = f(x)$  的图象大致为 ( )



- 设函数  $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$ , 则使得  $f(x) > f(2x-1)$  成立的  $x$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(\frac{1}{3}, 1)$  (B)  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$   
(C)  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  (D)  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

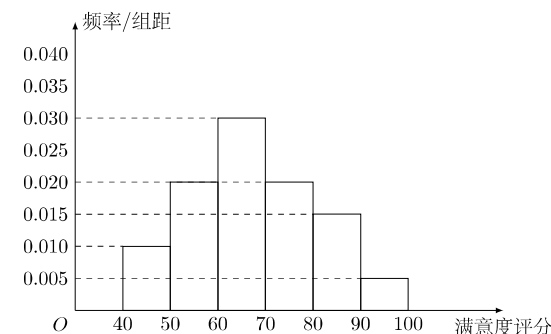
## 二、填空题

- 已知函数  $f(x) = ax^3 - 2x$  的图象过点  $(-1, 4)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-5 \leq 0, \\ 2x-y-1 \geq 0, \\ x-2y+1 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 已知双曲线过点  $(4, \sqrt{3})$ , 且渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 则该双曲线的标准方程为\_\_\_\_\_.
- 已知曲线  $y = x + \ln x$  在点  $(1, 1)$  处的切线与曲线  $y = ax^2 + (a+2)x + 1$  相切, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  上的点,  $AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $BD = 2DC$ .  
(1) 求  $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$ ;  
(2) 若  $\angle BAC = 60^\circ$ , 求  $\angle B$ .
- 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从  $A, B$  两地区分别随机调查了 40 个用户, 根据用户对其产品的满意度的评分, 得到  $A$  地区用户满意度评分的频率分布直方图和  $B$  地区用户满意度评分的频率分布表.

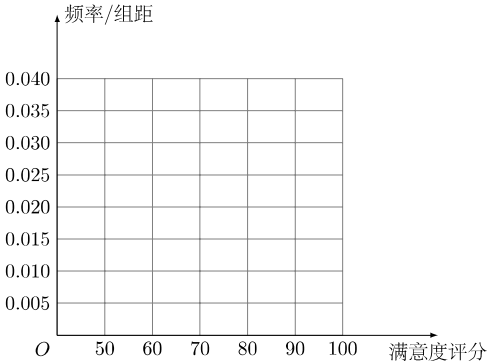
$A$  地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频率分布表

| 满意度评分分组 | [50, 60) | [60, 70) | [70, 80) | [80, 90) | [90, 100] |
|---------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 频数      | 2        | 8        | 14       | 10       | 6         |

(1) 在图中作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图, 并通过此图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度; (不要求计算出具体值, 给出结论即可)



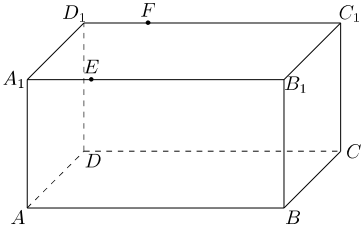
(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度评分分为三个等级:

| 满意度评分 | 低于 70 分 | 70 分到 89 分 | 不低于 90 分 |
|-------|---------|------------|----------|
| 满意度等级 | 不满意     | 满意         | 非常满意     |

估计哪个地区的用户的满意度等级为不满意的概率大, 说明理由.

19. 如图, 长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 16$ ,  $BC = 10$ ,  $AA_1 = 8$ , 点  $E, F$  分别在  $A_1B_1, D_1C_1$  上,  $A_1E = D_1F = 4$ . 过点  $E, F$  的平面  $\alpha$  与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.

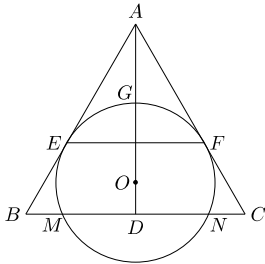
- (1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
- (2) 求平面  $\alpha$  将该长方体分成的两部分体积的比值.



20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $(2, \sqrt{2})$  在  $C$  上.
- (1) 求  $C$  的方程;
  - (2) 直线  $l$  不经过原点  $O$ , 且不平行于坐标轴,  $l$  与  $C$  有两个交点  $A, B$ , 线段  $AB$  中点为  $M$ , 证明: 直线  $OM$  的斜率与直线  $l$  的斜率乘积为定值.

21. 已知  $f(x) = \ln x + a(1 - x)$ .
- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
  - (2) 当  $f(x)$  有最大值, 且最大值大于  $2a - 2$  时, 求  $a$  的取值范围.

22. 如图,  $O$  为等腰三角形  $ABC$  内一点,  $\odot O$  与  $\triangle ABC$  的底边  $BC$  交于  $M, N$  两点, 与底边上的高  $AD$  交于点  $G$ , 且与  $AB, AC$  分别相切于  $E, F$  两点.
- (1) 证明:  $EF \parallel BC$ ;
  - (2) 若  $AG$  等于  $\odot O$  的半径, 且  $AE = MN = 2\sqrt{3}$ , 求四边形  $EBCF$  的面积.



23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha, \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $t \neq 0$ ), 其中  $0 \leq \alpha < \pi$ . 在以  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C_2: \rho = 2 \sin \theta, C_3: \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta$ .
- (1) 求  $C_2$  与  $C_3$  交点的直角坐标;
  - (2) 若  $C_1$  与  $C_2$  相交于点  $A$ ,  $C_1$  与  $C_3$  相交于点  $B$ , 求  $|AB|$  的最大值.

24. 设  $a, b, c, d$  均为正数, 且  $a + b = c + d$ , 证明:
- (1) 若  $ab > cd$ , 则  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ;
  - (2)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$  是  $|a - b| < |c - d|$  的充要条件.

# 2015 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

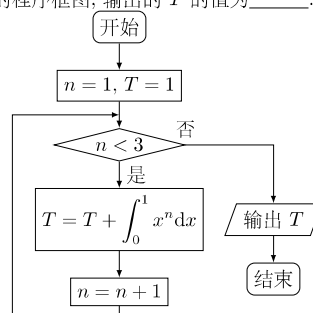
## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ,  $B = \{x | 2 < x < 4\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A) (1, 3) (B) (1, 4) (C) (2, 3) (D) (2, 4)
- 若复数  $z$  满足  $\frac{\bar{z}}{1-i} = i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z =$  ( )  
(A)  $1-i$  (B)  $1+i$  (C)  $-1-i$  (D)  $-1+i$
- 要得到函数  $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 只需要将函数  $y = \sin 4x$  的图象  
(A) 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位 (D) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位
- 已知菱形  $ABCD$  的边长为  $a$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ , 则  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$  ( )  
(A)  $-\frac{3}{2}a^2$  (B)  $-\frac{3}{4}a^2$  (C)  $\frac{3}{4}a^2$  (D)  $\frac{3}{2}a^2$
- 不等式  $|x-1| - |x-5| < 2$  的解集是 ( )  
(A)  $(-\infty, 4)$  (B)  $(-\infty, 1)$  (C) (1, 4) (D) (1, 5)
- 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ x+y \leq 2, \\ y \geq 0, \end{cases}$  若  $z = ax + y$  的最大值为 4, 则  $a =$  ( )  
(A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3
- 在梯形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $BC = 2AD = 2AB = 2$ . 将梯形  $ABCD$  绕  $AD$  所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为 ( )  
(A)  $\frac{2\pi}{3}$  (B)  $\frac{4\pi}{3}$  (C)  $\frac{5\pi}{3}$  (D)  $2\pi$
- 已知某批零件的长度误差 (单位: 毫米) 服从正态分布  $N(0, 3^2)$ , 从中随机取一件, 其长度误差落在区间 (3, 6) 内的概率为 ( )  
(附: 若随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 68.26\%$ ,  $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 95.44\%$ )  
(A) 4.56% (B) 13.59% (C) 27.18% (D) 31.74%
- 一条光线从点  $(-2, -3)$  射出, 经  $y$  轴反射后与圆  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$  相切, 则反射光线所在直线的斜率为 ( )  
(A)  $-\frac{5}{3}$  或  $-\frac{3}{5}$  (B)  $-\frac{3}{2}$  或  $-\frac{2}{3}$  (C)  $-\frac{5}{4}$  或  $-\frac{4}{5}$  (D)  $-\frac{4}{3}$  或  $-\frac{3}{4}$
- 设函数  $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1, \\ 2^x, & x \geq 1, \end{cases}$  则满足  $f(f(a)) = 2^{f(a)}$  的  $a$  取值范围是 ( )

- (A)  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$  (B)  $[0, 1]$  (C)  $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$  (D)  $[1, +\infty)$

## 二、填空题

- 观察下列各式:  
 $C_1^0 = 4^0$ ;  
 $C_3^0 + C_3^1 = 4^1$ ;  
 $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = 4^2$ ;  
 $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 4^3$ ;  
.....  
照此规律, 当  $n \in \mathbf{N}^*$  时,  $C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \dots + C_{2n-1}^{n-1} =$ \_\_\_\_\_.
- 若“ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \tan x \leq m$ ”是真命题, 则实数  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 执行如图所示的程序框图, 输出的  $T$  的值为\_\_\_\_\_.

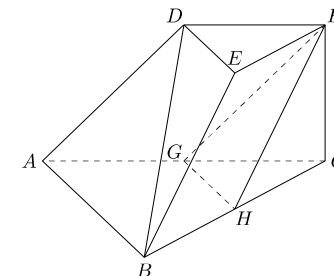


- 已知函数  $f(x) = a^x + b$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的定义域和值域都是  $[-1, 0]$ , 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.
- 平面直角坐标系  $xOy$  中, 双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线与抛物线  $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$  交于  $O, A, B$ . 若  $\triangle OAB$  的垂心为  $C_2$  的焦点, 则  $C_1$  的离心率为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 设  $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
(1) 求  $f(x)$  的单调区间;  
(2) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $f\left(\frac{A}{2}\right) = 0$ ,  $a = 1$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

- 如图, 在三棱台  $DEF-ABC$  中,  $AB = 2DE$ ,  $G, H$  分别为  $AC, BC$  的中点.  
(1) 求证:  $BD \parallel$  平面  $FGH$ ;  
(2) 若  $CF \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $CF = DE$ ,  $\angle BAC = 45^\circ$ , 求平面  $FGH$  与平面  $ACFD$  所成的角 (锐角) 的大小.



- 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知  $2S_n = 3^n + 3$ .  
(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $a_n b_n = \log_3 a_n$ , 求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

19. 若  $n$  是一个三位正整数, 且  $n$  的个位数字大于十位数字, 十位数字大于百位数字, 则称  $n$  为“三位递增数”(如 137, 359, 567 等). 在某次数学趣味活动中, 每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数, 且只能抽取一次. 得分规则如下: 若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除, 参加者得 0 分; 若能被 5 整除, 但不能被 10 整除, 得 -1 分; 若能被 10 整除, 得 1 分.
- (1) 写出所有个位数字是 5 的“三位递增数”;
- (2) 若甲参加活动, 求甲得分  $X$  的分布列和数学期望  $EX$ .
20. 平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ . 以  $F_1$  为圆心以 3 为半径的圆与以  $F_2$  为圆心以 1 为半径的圆相交, 且交点在椭圆  $C$  上.
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 设椭圆  $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ ,  $P$  为椭圆  $C$  上任意一点, 过点  $P$  的直线  $y = kx + m$  交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点, 射线  $PO$  交椭圆  $E$  于点  $Q$ .
- ① 求  $\frac{|OQ|}{|OP|}$  的值;
- ② 求  $\triangle ABQ$  面积的最大值.
21. 设函数  $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .
- (1) 讨论函数  $f(x)$  极值点的个数, 并说明理由;
- (2) 若  $\forall x > 0, f(x) \geq 0$  成立, 求  $a$  的取值范围.

# 2015 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{x \mid 2 < x < 4\}$ ,  $B = \{x \mid (x-1)(x-3) < 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $(1, 3)$  (B)  $(1, 4)$  (C)  $(2, 3)$  (D)  $(2, 4)$
- 若复数  $z$  满足  $\frac{\bar{z}}{1-i} = i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z =$  ( )  
(A)  $1-i$  (B)  $1+i$  (C)  $-1-i$  (D)  $-1+i$
- 设  $a = 0.6^{0.6}$ ,  $b = 0.6^{1.5}$ ,  $c = 1.5^{0.6}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )  
(A)  $a < b < c$  (B)  $a < c < b$  (C)  $b < a < c$  (D)  $b < c < a$
- 要得到函数  $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 只需要将函数  $y = \sin 4x$  的图象 ( )  
(A) 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位 (D) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位
- 若  $m \in \mathbf{R}$ , 命题“ $m > 0$ , 方程  $x^2 + x - m = 0$  有实根”的逆否命题是 ( )  
(A) 若方程  $x^2 + x - m = 0$  有实根, 则  $m > 0$   
(B) 若方程  $x^2 + x - m = 0$  有实根, 则  $m \leq 0$   
(C) 若方程  $x^2 + x - m = 0$  没有实根, 则  $m > 0$   
(D) 若方程  $x^2 + x - m = 0$  没有实根, 则  $m \leq 0$
- 为比较甲、乙两地某月 14 时的气温情况, 随机选取该月中的 5 天, 将这 5 天中 14 时的气温数据 (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 制成如图所示的茎叶图. 考虑以下结论:

| 甲     | 乙     |
|-------|-------|
| 9 8 6 | 8 9   |
| 1 1   | 0 1 2 |

- ① 甲地该月 14 时的平均气温低于乙地该月 14 时的平均气温;
- ② 甲地该月 14 时的平均气温高于乙地该月 14 时的平均气温;
- ③ 甲地该月 14 时的平均气温的标准差小于乙地该月 14 时的气温的标准差;
- ④ 甲地该月 14 时的平均气温的标准差大于乙地该月 14 时的气温的标准差.

其中根据茎叶图能得到的统计结论的标号为 ( )

- (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④
- 在区间  $[0, 2]$  上随机地取一个数  $x$ , 则事件“ $-1 \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 1$ ”发生的概率为 ( )  
(A)  $\frac{3}{4}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{4}$

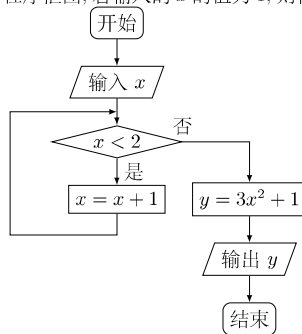
- 若函数  $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - a}$  是奇函数, 则使  $f(x) > 3$  成立的  $x$  的取值范围为 ( )  
(A)  $(-\infty, -1)$  (B)  $(-1, 0)$  (C)  $(0, 1)$  (D)  $(1, +\infty)$

- 已知等腰直角三角形的直角边的长为 2, 将该三角形绕其斜边所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为 ( )

- (A)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$  (B)  $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$  (C)  $2\sqrt{2}\pi$  (D)  $4\sqrt{2}\pi$
- 设函数  $f(x) = \begin{cases} 3x-b, & x < 1, \\ 2^x, & x \geq 1, \end{cases}$  若  $f\left(f\left(\frac{5}{6}\right)\right) = 4$ , 则  $b =$  ( )  
(A) 1 (B)  $\frac{7}{8}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$

## 二、填空题

- 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $x$  的值为 1, 则输出的  $y$  的值是\_\_\_\_\_.



- 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y - x \leq 1, \\ x + y \leq 3, \\ y \geq 1, \end{cases}$  则  $z = x + 3y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 过点  $P(1, \sqrt{3})$  作圆  $x^2 + y^2 = 1$  的两条切线, 切点分别为  $A, B$ , 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ \_\_\_\_\_.
- 定义运算“ $\otimes$ ”:  $x \otimes y = \frac{x^2 - y^2}{xy}$  ( $x, y \in \mathbf{R}, xy \neq 0$ ). 当  $x > 0, y > 0$  时,  $x \otimes y + (2y) \otimes x$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 过双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点作一条与其渐近线平行的直线, 交  $C$  于点  $P$ . 若点  $P$  的横坐标为  $2a$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 某中学调查了某班全部 45 名同学参加书法社团和演讲社团的情况, 数据如下表: (单位: 人)

|         | 参加书法社团 | 未参加书法社团 |
|---------|--------|---------|
| 参加演讲社团  | 8      | 5       |
| 未参加演讲社团 | 2      | 30      |

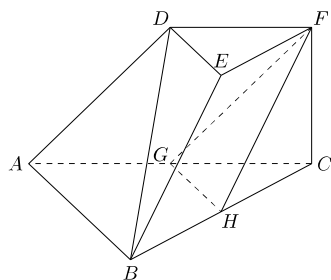
- (1) 从该班随机选 1 名同学, 求该同学至少参加上述一个社团的概率;
- (2) 在既参加书法社团又参加演讲社团的 8 名同学中, 有 5 名男同学  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , 3 名女同学  $B_1, B_2, B_3$ . 现从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人, 求  $A_1$  被选中且  $B_1$  未被选中的概率.

- $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{6}}{9}$ ,  $ac = 2\sqrt{3}$ , 求  $\sin A$  和  $c$  的值.

18. 如图, 在三棱台  $DEF-ABC$  中,  $AB = 2DE$ ,  $G, H$  分别为  $AC, BC$  的中点.

(1) 求证:  $BD \parallel$  平面  $FGH$ ;

(2) 若  $CF \perp BC$ ,  $AB \perp BC$ , 求证: 平面  $BCD \perp$  平面  $EGH$ .



20. 设函数  $f(x) = (x+a)\ln x$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ . 已知曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $2x - y = 0$  平行.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 是否存在自然数  $k$ , 使得方程  $f(x) = g(x)$  在  $(k, k+1)$  内存在唯一的根? 如果存在, 求出  $k$ ; 如果不存在, 请说明理由;

(3) 设函数  $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  ( $\min\{p, q\}$  表示  $p, q$  中的较小值), 求  $m(x)$  的最大值.

21. 平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 且点  $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$  在椭圆  $C$  上.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设椭圆  $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ ,  $P$  为椭圆  $C$  上任意一点, 过点  $P$  的直线  $y = kx + m$  交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点, 射线  $PO$  交椭圆  $E$  于点  $Q$ .

① 求  $\frac{|OQ|}{|OP|}$  的值;

② 求  $\triangle ABQ$  面积的最大值.

19. 已知数列  $\{a_n\}$  是首项为正数的等差数列, 数列  $\left\{\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\right\}$  的前  $n$  项和

为  $\frac{n}{2n+1}$ .

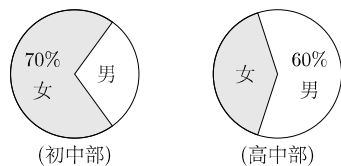
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = (a_n + 1) \cdot 2^{a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

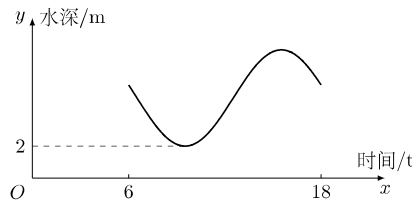
# 2015 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

## 一、选择题

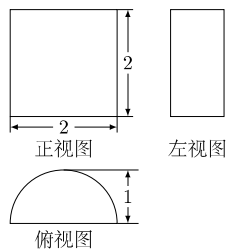
1. 设集合  $M = \{x | x^2 = x\}$ ,  $N = \{x | \lg x \leq 0\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )  
(A)  $[0, 1]$  (B)  $(0, 1]$  (C)  $[0, 1)$  (D)  $(-\infty, 1]$
2. 某中学初中部共有 110 名教师, 高中部共有 150 名教师, 其性别比例如图所示, 则该校女教师的人数为 ( )



- (A) 93 (B) 123 (C) 137 (D) 167
3. 如图, 某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数  $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}x + \varphi\right) + k$ . 据此函数可知, 这段时间水深 (单位: m) 的最大值为 ( )

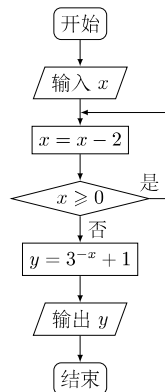


- (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10
4. 二项式  $(x+1)^n$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ) 的展开式中  $x^2$  的系数为 15, 则  $n =$  ( )  
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4
5. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ( )



- (A)  $3\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $2\pi + 4$  (D)  $3\pi + 4$
6. “ $\sin \alpha = \cos \alpha$ ”是“ $\cos 2\alpha = 0$ ”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

- (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要
7. 对任意向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 下列关系式中不恒成立的是 ( )  
(A)  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$  (B)  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$   
(C)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$  (D)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$
8. 根据框图, 当输入  $x$  为 2006 时, 输出的  $y =$  ( )



- (A) 28 (B) 10 (C) 4 (D) 2
9. 设  $f(x) = \ln x$ ,  $0 < a < b$ , 若  $p = f(\sqrt{ab})$ ,  $q = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ,  $r = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ , 则下列关系式中正确的是 ( )  
(A)  $q = r < p$  (B)  $q = r > p$  (C)  $p = r < q$  (D)  $p = r > q$

10. 某企业生产甲、乙两种产品均需用 A, B 两种原料, 已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示. 如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元, 则该企业每天可获得最大利润为 ( )

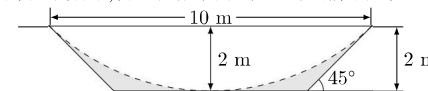
|       | 甲 | 乙 | 原料限额 |
|-------|---|---|------|
| A (吨) | 3 | 2 | 12   |
| B (吨) | 1 | 2 | 8    |

- (A) 12 万元 (B) 16 万元 (C) 17 万元 (D) 18 万元
11. 设复数  $z = (x-1) + yi$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ), 若  $|z| \leq 1$ , 则  $y \geq x$  的概率为 ( )  
(A)  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}$  (B)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$  (C)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$  (D)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$
12. 对二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a$  为非零整数), 四位同学分别给出下列结论, 其中有且只有一个结论是错误的, 则错误的结论是 ( )  
(A)  $-1$  是  $f(x)$  的零点 (B)  $1$  是  $f(x)$  的极值点  
(C)  $3$  是  $f(x)$  的极值 (D) 点  $(2, 8)$  在曲线  $y = f(x)$  上

## 二、填空题

13. 中位数为 1010 的一组数构成等差数列, 其末项为 2015, 则该数列的首项为\_\_\_\_\_.

14. 若抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的准线经过双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  的一个焦点, 则  $p =$ \_\_\_\_\_.
15. 设曲线  $y = e^x$  在点  $(0, 1)$  处的切线与曲线  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) 上点  $P$  处的切线垂直, 则  $P$  的坐标为\_\_\_\_\_.
16. 如图, 一横截面为等腰梯形的水渠, 因泥沙沉积, 导致水渠截面边界呈抛物线型 (图中虚线所示), 则原始的最大流量与当前最大流量的比值为\_\_\_\_\_.



## 三、解答题

17.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 向量  $\mathbf{m} = (a, \sqrt{3}b)$  与  $\mathbf{n} = (\cos A, \sin B)$  平行.  
(1) 求  $A$ ;  
(2) 若  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.
18. 如图 1, 在直角梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,  $AB = BC = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $E$  是  $AD$  的中点,  $O$  是  $AC$  与  $BE$  的交点. 将  $\triangle ABE$  沿  $BE$  折起到  $\triangle A_1BE$  的位置, 如图 2.  
(1) 证明:  $CD \perp$  平面  $A_1OC$ ;  
(2) 若平面  $A_1BE \perp$  平面  $BCDE$ , 求平面  $A_1BC$  与平面  $A_1CD$  夹角的余弦值.

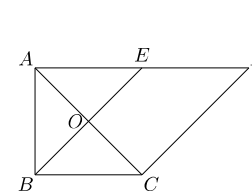


图 1

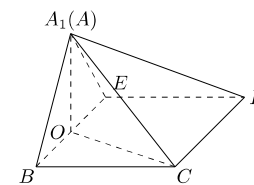


图 2

19. 设某校新、老校区之间开车单程所需时间为  $T$ ,  $T$  只与道路畅通状况有关, 对其容量为 100 的样本进行统计, 结果如下:

|          |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|
| $T$ (分钟) | 25 | 30 | 35 | 40 |
| 频数 (次)   | 20 | 30 | 40 | 10 |

- (1) 求  $T$  的分布列与数学期望  $ET$ ;  
 (2) 刘教授驾车从老校区出发, 前往新校区做一个 50 分钟的讲座, 结束后立即返回老校区, 求刘教授从离开老校区到返回老校区共用时间不超过 120 分钟的概率.

21. 设  $f_n(x)$  是等比数列  $1, x, x^2, \dots, x^n$  的各项和, 其中  $x > 0, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ .

- (1) 证明: 函数  $F_n(x) = f_n(x) - 2$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  内有且仅有一个零点 (记为  $x_n$ ), 且  $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_n^{n+1}$ ;  
 (2) 设有一个与上述等比数列的首项、末项、项数分别相同的等差数列, 其各项和为  $g_n(x)$ , 比较  $f_n(x)$  和  $g_n(x)$  的大小, 并加以证明.

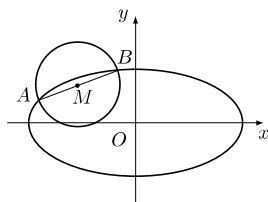
23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases}$  ( $t$  为参数),

以原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系,  $\odot C$  的极坐标方程为  $\rho = 2\sqrt{3}\sin\theta$ .

- (1) 写出  $\odot C$  的直角坐标方程;  
 (2)  $P$  为直线  $l$  上一动点, 当  $P$  到圆心  $C$  的距离最小时, 求  $P$  的直角坐标.

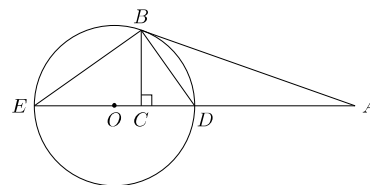
20. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的半焦距为  $c$ , 原点  $O$  到经过两点  $(c, 0), (0, b)$  的直线的距离为  $\frac{1}{2}c$ .

- (1) 求椭圆  $E$  的离心率;  
 (2) 如图,  $AB$  是圆  $M: (x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$  的一条直径, 若椭圆  $E$  经过  $A, B$  两点, 求椭圆  $E$  的方程.



22. 如图,  $AB$  切  $\odot O$  于点  $B$ , 直线  $AO$  交  $\odot O$  于  $D, E$  两点,  $BC \perp DE$ , 垂足为  $C$ .

- (1) 证明:  $\angle CBD = \angle DBA$ ;  
 (2) 若  $AD = 3DC, BC = \sqrt{2}$ , 求  $\odot O$  的直径.



24. 已知关于  $x$  的不等式  $|x+a| < b$  的解集为  $\{x \mid 2 < x < 4\}$ .

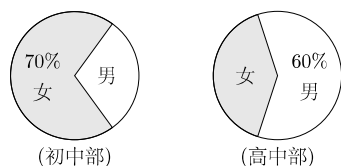
- (1) 求实数  $a, b$  的值;  
 (2) 求  $\sqrt{at+12} + \sqrt{bt}$  的最大值.



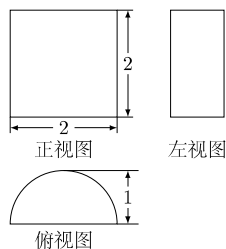
# 2015 普通高等学校招生考试 (陕西卷文)

## 一、选择题

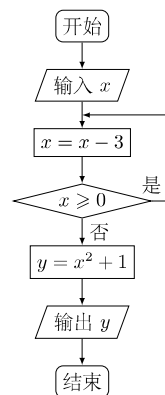
1. 设集合  $M = \{x \mid x^2 = x\}$ ,  $N = \{x \mid \lg x \leq 0\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )  
(A)  $[0, 1]$  (B)  $(0, 1]$  (C)  $[0, 1)$  (D)  $(-\infty, 1]$
2. 某中学初中部共有 110 名教师, 高中部共有 150 名教师, 其性别比例如图所示, 则该校女教师的人数为 ( )



- (A) 93 (B) 123 (C) 137 (D) 167
3. 已知抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的准线经过点  $(-1, 1)$ , 则该抛物线焦点坐标为 ( )  
(A)  $(-1, 0)$  (B)  $(1, 0)$  (C)  $(0, -1)$  (D)  $(0, 1)$
4. 设  $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 2^x, & x < 0, \end{cases}$  则  $f(f(-2)) =$  ( )  
(A)  $-1$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{3}{2}$
5. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ( )



- (A)  $3\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $2\pi + 4$  (D)  $3\pi + 4$
6. “ $\sin \alpha = \cos \alpha$ ”是“ $\cos 2\alpha = 0$ ”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要
7. 根据框图, 当输入  $x$  为 6 时, 输出的  $y =$  ( )



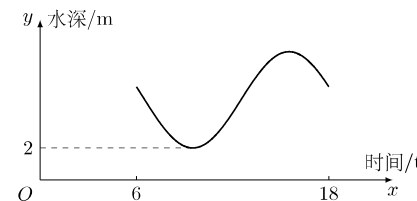
- (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10
8. 对任意向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 下列关系式中不恒成立的是 ( )  
(A)  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$  (B)  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$   
(C)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$  (D)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$
9. 设  $f(x) = x - \sin x$ , 则  $f(x)$  ( )  
(A) 既是奇函数又是减函数 (B) 既是奇函数又是增函数  
(C) 是有零点的减函数 (D) 是没有零点的奇函数
10. 设  $f(x) = \ln x$ ,  $0 < a < b$ , 若  $p = f(\sqrt{ab})$ ,  $q = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ,  $r = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ , 则下列关系式中正确的是 ( )  
(A)  $q = r < p$  (B)  $q = r > p$  (C)  $p = r < q$  (D)  $p = r > q$
11. 某企业生产甲、乙两种产品均需用  $A, B$  两种原料, 已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示. 如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元, 则该企业每天可获得最大利润为 ( )

|       | 甲 | 乙 | 原料限额 |
|-------|---|---|------|
| A (吨) | 3 | 2 | 12   |
| B (吨) | 1 | 2 | 8    |

- (A) 12 万元 (B) 16 万元 (C) 17 万元 (D) 18 万元
12. 设复数  $z = (x - 1) + yi$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ), 若  $|z| \leq 1$ , 则  $y \geq x$  的概率为 ( )  
(A)  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}$  (B)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$  (C)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$  (D)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$

## 二、填空题

13. 中位数为 1010 的一组数构成等差数列, 其末项为 2015, 则该数列的首项为\_\_\_\_\_.
14. 如图, 某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}x + \varphi\right) + k$ . 据此函数可知, 这段时间水深 (单位: m) 的最大值为\_\_\_\_\_.



15. 函数  $y = xe^x$  在其极值点处的切线方程为\_\_\_\_\_.
16. 观察下列等式:  
 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$   
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$   
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$   
 ...  
 据此规律, 第  $n$  个等式可为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 向量  $\mathbf{m} = (a, \sqrt{3}b)$  与  $\mathbf{n} = (\cos A, \sin B)$  平行.  
(1) 求  $A$ ;  
(2) 若  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.
18. 如图 1, 在直角梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,  $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$ ,  $E$  是  $AD$  的中点,  $O$  是  $AC$  与  $BE$  的交点. 将  $\triangle ABE$  沿  $BE$  折起如图 2 中  $\triangle A_1BE$  的位置, 得到四棱锥  $A_1 - BCDE$ .  
(1) 证明:  $CD \perp$  平面  $A_1OC$ ;  
(2) 若平面  $A_1BE \perp$  平面  $BCDE$ , 四棱锥  $A_1 - BCDE$  的体积为  $36\sqrt{2}$ , 求  $a$  的值.

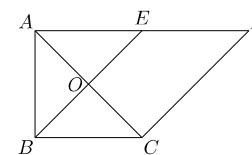


图 1

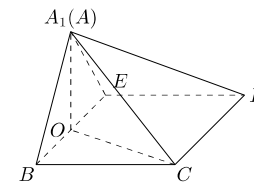


图 2

19. 随机抽取一个年份,对西安市该年4月份的天气情况进行统计,结果如下:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 日期 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 天气 | 晴  | 雨  | 阴  | 阴  | 阴  | 雨  | 阴  | 晴  | 晴  | 晴  |
| 日期 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 天气 | 阴  | 晴  | 晴  | 晴  | 晴  | 晴  | 阴  | 雨  | 阴  | 阴  |
| 日期 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 天气 | 晴  | 阴  | 晴  | 晴  | 晴  | 阴  | 晴  | 晴  | 晴  | 雨  |

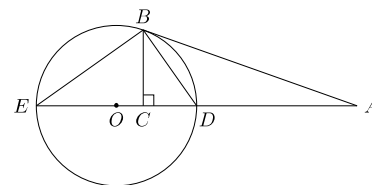
- (1) 在4月份任取一天,估计西安市在该天不下雨的概率;  
 (2) 西安市某学校拟从4月份的一个晴天开始举行连续2天的运动会,估计运动会期间不下雨的概率.

21. 设  $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1, x \geq 0, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ .

- (1) 求  $f'_n(2)$ ;  
 (2) 证明:  $f_n(x)$  在  $\left(0, \frac{2}{3}\right)$  内有且仅有一个零点 (记为  $a_n$ ), 且  $0 < a_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

22. 如图,  $AB$  切  $\odot O$  于点  $B$ , 直线  $AO$  交  $\odot O$  于  $D, E$  两点,  $BC \perp DE$ , 垂足为  $C$ .

- (1) 证明:  $\angle CBD = \angle DBA$ ;  
 (2) 若  $AD = 3DC, BC = \sqrt{2}$ , 求  $\odot O$  的直径.



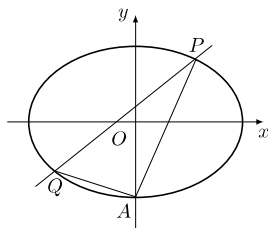
23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases} (t \text{ 为参数}),$

以原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系,  $\odot C$  的极坐标方程为  $\rho = 2\sqrt{3}\sin\theta$ .

- (1) 写出  $\odot C$  的直角坐标方程;  
 (2)  $P$  为直线  $l$  上一动点, 当  $P$  到圆心  $C$  的距离最小时, 求  $P$  的直角坐标.

20. 如图, 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $A(0, -1)$ , 且离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- (1) 求椭圆  $E$  的方程;  
 (2) 经过点  $(1, 1)$ , 且斜率为  $k$  的直线与椭圆  $E$  交于不同的两点  $P, Q$  (均异于点  $A$ ), 证明: 直线  $AP$  与  $AQ$  的斜率之和为 2.



24. 已知关于  $x$  的不等式  $|x + a| < b$  的解集为  $\{x | 2 < x < 4\}$ .

- (1) 求实数  $a, b$  的值;  
 (2) 求  $\sqrt{at+12} + \sqrt{bt}$  的最大值.

## 2015 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

### 一、填空题

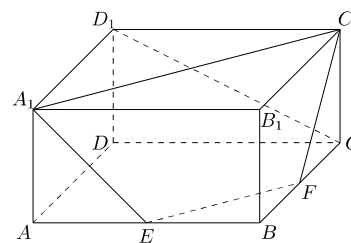
1. 设全集  $U = \mathbf{R}$ . 若集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$ , 则  $A \cap \complement_U B = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2. 若复数  $z$  满足  $3z + \bar{z} = 1 + i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z = \underline{\hspace{2cm}}$ .
3. 若线性方程组的增广矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$ , 解为  $\begin{cases} x = 3, \\ y = 5, \end{cases}$  则  $c_1 - c_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .
4. 若正三棱柱的所有棱长均为  $a$ , 且其体积为  $16\sqrt{3}$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
5. 抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的动点  $Q$  到焦点的距离的最小值为 1, 则  $p = \underline{\hspace{2cm}}$ .
6. 若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为  $2\pi$ , 则其母线与轴的夹角的大小为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
7. 方程  $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$  的解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
8. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (结果用数值表示)
9. 已知点  $P$  和  $Q$  的横坐标相同,  $P$  的纵坐标是  $Q$  的纵坐标的 2 倍,  $P$  和  $Q$  的轨迹分别为双曲线  $C_1$  和  $C_2$ . 若  $C_1$  的渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$ , 则  $C_2$  的渐近线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
10. 设  $f^{-1}(x)$  为  $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$ ,  $x \in [0, 2]$  的反函数, 则  $y = f(x) + f^{-1}(x)$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
11. 在  $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$  的展开式中,  $x^2$  项的系数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (结果用数值表示)
12. 赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金 (单位: 元); 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金 (单位: 元). 若随机变量  $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则  $E\xi_1 - E\xi_2 = \underline{\hspace{2cm}}$  (元).
13. 已知函数  $f(x) = \sin x$ . 若存在  $x_1, x_2, \dots, x_m$  满足  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$ . 且  $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$  ( $m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $m$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
14. 在锐角三角形  $ABC$  中,  $\tan A = \frac{1}{2}$ ,  $D$  为边  $BC$  上的点,  $\triangle ABD$  与  $\triangle ACD$  的面积分别为 2 和 4. 过  $D$  作  $DE \perp AB$  于  $E$ ,  $DF \perp AC$  于  $F$ , 则  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 二、选择题

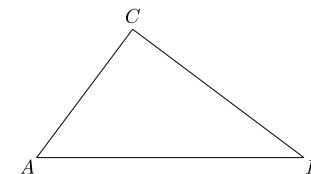
15. 设  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ , 则“ $z_1, z_2$  中至少有一个数是虚数”是“ $z_1 - z_2$  是虚数”的 ( )  
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
16. 已知点  $A$  的坐标为  $(4\sqrt{3}, 1)$ , 将  $OA$  绕坐标原点  $O$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{3}$  至  $OB$ , 则点  $B$  的纵坐标为 ( )  
(A)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{11}{2}$  (D)  $\frac{13}{2}$
17. 记方程①:  $x^2 + a_1x + 1 = 0$ , 方程②:  $x^2 + a_2x + 2 = 0$ , 方程③:  $x^2 + a_3x + 4 = 0$ , 其中  $a_1, a_2, a_3$  是正实数. 当  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列时, 下列选项中, 能推出方程③无实根的是 ( )  
(A) 方程①有实根, 且②有实根 (B) 方程①有实根, 且②无实根  
(C) 方程①无实根, 且②有实根 (D) 方程①无实根, 且②无实根
18. 设  $P_n(x_n, y_n)$  是直线  $2x - y = \frac{n}{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 与圆  $x^2 + y^2 = 2$  在第一象限的交点, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( )  
(A) -1 (B)  $-\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2

### 三、解答题

19. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 1$ ,  $AB = AD = 2$ ,  $E, F$  分别是棱  $AB, BC$  的中点. 证明  $A_1, C_1, F, E$  四点共面, 并求直线  $CD_1$  与平面  $A_1C_1FE$  所成角的正弦值.



20. 如图,  $A, B, C$  三地有直道相通,  $AB = 5$  千米,  $AC = 3$  千米,  $BC = 4$  千米. 现甲、乙两警员同时从  $A$  地出发匀速前往  $B$  地, 过  $t$  小时, 他们之间的距离为  $f(t)$  (单位: 千米). 甲的路线是  $AB$ , 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是  $ACB$ , 速度为 8 千米/小时. 乙到达  $B$  地后在原地等待. 设  $t = t_1$  时, 乙到达  $C$  地.  
(1) 求  $t_1$  与  $f(t_1)$  的值;  
(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当  $t_1 \leq t \leq 1$  时, 求  $f(t)$  的表达式, 并判断  $f(t)$  在  $[t_1, 1]$  上的最大值是否超过 3? 说明理由.



21. 已知椭圆  $x^2 + 2y^2 = 1$ , 过原点的两条直线  $l_1$  和  $l_2$  分别与椭圆交于点  $A, B$  和  $C, D$ . 记得到的平行四边形  $ACBD$  的面积为  $S$ .
- (1) 设  $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ . 用  $A, C$  的坐标表示点  $C$  到直线  $l_1$  的距离, 并证明  $S = 2|x_1y_2 - x_2y_1|$ ;
- (2) 设  $l_1$  与  $l_2$  的斜率之积为  $-\frac{1}{2}$ , 求面积  $S$  的值.
22. 已知数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足  $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n), n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1) 若  $b_n = 3n + 5$ , 且  $a_1 = 1$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $\{a_n\}$  的第  $n_0$  项是最大项, 即  $a_{n_0} \geq a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ . 求证:  $\{b_n\}$  的第  $n_0$  项是最大项;
- (3) 设  $a_1 = \lambda < 0, b_n = \lambda^n (n \in \mathbf{N}^*)$ . 求  $\lambda$  的取值范围, 使得  $\{a_n\}$  有最大值  $M$  与最小值  $m$ , 且  $\frac{M}{m} \in (-2, 2)$ .
23. 对于定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $g(x)$ , 若存在正常数  $T$ , 使得  $\cos g(x)$  是以  $T$  为周期的函数, 则称  $g(x)$  为余弦周期函数, 且称  $T$  为其余弦周期. 已知  $f(x)$  是以  $T$  为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为  $\mathbf{R}$ . 设  $f(x)$  单调递增,  $f(0) = 0, f(T) = 4\pi$ .
- (1) 验证  $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$  是以  $6\pi$  为余弦周期的余弦周期函数;
- (2) 设  $a < b$ , 证明对任意  $c \in [f(a), f(b)]$ , 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = c$ ;
- (3) 证明: “ $u_0$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[0, T]$  上的解”的充要条件是“ $u_0 + T$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[T, 2T]$  上的解”, 并证明对任意  $x \in [0, T]$  都有  $f(x + T) = f(x) + f(T)$ .

# 2015 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

## 一、填空题

- 函数  $f(x) = 1 - 3\sin^2 x$  的最小正周期为\_\_\_\_\_.
- 设全集  $U = \mathbf{R}$ . 若集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$ , 则  $A \cap \complement_U B =$ \_\_\_\_\_.
- 若复数  $z$  满足  $3z + \bar{z} = 1 + i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $f^{-1}(x)$  为  $f(x) = \frac{x}{2x+1}$  的反函数, 则  $f^{-1}(2) =$ \_\_\_\_\_.
- 若线性方程组的增广矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$ , 解为  $\begin{cases} x = 3, \\ y = 5, \end{cases}$  则  $c_1 - c_2 =$ \_\_\_\_\_.
- 若正三棱柱的所有棱长均为  $a$ , 且其体积为  $16\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的动点  $Q$  到焦点的距离的最小值为 1, 则  $p =$ \_\_\_\_\_.
- 方程  $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$  的解为\_\_\_\_\_.
- 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y \leq 2, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则目标函数  $f = x + 2y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为\_\_\_\_\_. (结果用数值表示)
- 在  $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^6$  的二项展开式中, 常数项等于\_\_\_\_\_. (结果用数值表示)
- 已知双曲线  $C_1, C_2$  的顶点重合,  $C_1$  的方程为  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ , 若  $C_2$  的一条渐近线的斜率是  $C_1$  的一条渐近线的斜率的 2 倍, 则  $C_2$  的方程为\_\_\_\_\_.
- 已知平面向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  满足  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 且  $\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|, |\mathbf{c}|\} = \{1, 2, 3\}$ , 则  $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$  的最大值是\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x) = \sin x$ . 若存在  $x_1, x_2, \dots, x_m$  满足  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$ . 且  $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$  ( $m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_.

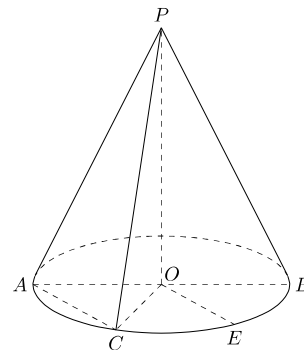
## 二、选择题

- 设  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ , 则“ $z_1, z_2$  均为实数”是“ $z_1 - z_2$  是实数”的 ( )  
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
- 下列不等式中, 与不等式  $\frac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$  解集相同的是 ( )  
(A)  $(x+8)(x^2+2x+3) < 2$  (B)  $x+8 < 2(x^2+2x+3)$   
(C)  $\frac{1}{x^2+2x+3} < \frac{2}{x+8}$  (D)  $\frac{x^2+2x+3}{x+8} > \frac{1}{2}$

- 已知点  $A$  的坐标为  $(4\sqrt{3}, 1)$ , 将  $OA$  绕坐标原点  $O$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{3}$  至  $OB$ , 则点  $B$  的纵坐标为 ( )  
(A)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{11}{2}$  (D)  $\frac{13}{2}$
- 设  $P_n(x_n, y_n)$  是直线  $2x - y = \frac{n}{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 与圆  $x^2 + y^2 = 2$  在第一象限的交点, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} =$  ( )  
(A) -1 (B)  $-\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2

## 三、解答题

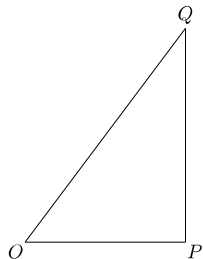
- 如图, 圆锥的顶点为  $P$ , 底面圆心为  $O$ , 底面的一条直径为  $AB$ ,  $C$  为半圆弧  $\widehat{AB}$  的中点,  $E$  为劣弧  $\widehat{CB}$  的中点, 已知  $PO = 2, OA = 1$ , 求三棱锥  $P - AOC$  的体积, 并求异面直线  $PA$  与  $OE$  所成角的余弦值.



21. 如图,  $O, P, Q$  三地有直道相通,  $OP = 3$  千米,  $PQ = 4$  千米,  $OQ = 5$  千米. 现甲、乙两警员同时从  $O$  地出发匀速前往  $Q$  地, 经过  $t$  小时, 他们之间的距离为  $f(t)$  (单位: 千米). 甲的路线是  $OQ$ , 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是  $OPQ$ , 速度为 8 千米/小时. 乙到达  $Q$  地后在原地等待. 设  $t = t_1$  时, 乙到达  $P$  地;  $t = t_2$  时, 乙到达  $Q$  地.

(1) 求  $t_1$  与  $f(t_1)$  的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当  $t_1 \leq t \leq t_2$  时, 求  $f(t)$  的表达式, 并判断  $f(t)$  在  $[t_1, t_2]$  上的最大值是否超过 3? 说明理由.



22. 已知椭圆  $x^2 + 2y^2 = 1$ , 过原点的两条直线  $l_1$  和  $l_2$  分别与椭圆交于点  $A, B$  和  $C, D$ . 记  $\triangle AOC$  的面积为  $S$ .

(1) 设  $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ . 用  $A, C$  的坐标表示点  $C$  到直线  $l_1$  的距离, 并证明  $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ;

(2) 设  $l_1: y = kx, C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), S = \frac{1}{3}$ , 求  $k$  的值.

(3) 设  $l_1$  与  $l_2$  的斜率之积为  $m$ , 求  $m$  的值, 使得无论  $l_1$  与  $l_2$  如何变动, 面积  $S$  保持不变.

23. 已知数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足  $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n), n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 若  $b_n = 3n + 5$ , 且  $a_1 = 1$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $\{a_n\}$  的第  $n_0$  项是最大项, 即  $a_{n_0} \geq a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求证:  $\{b_n\}$  的第  $n_0$  项是最大项;

(3) 设  $a_1 = 3\lambda < 0, b_n = \lambda^n (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求  $\lambda$  的取值范围, 使得对任意  $m, n \in \mathbf{N}^*, a_n \neq 0$ , 且  $\frac{a_m}{a_n} \in \left(\frac{1}{6}, 6\right)$ .

## 2015 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

## 一、选择题

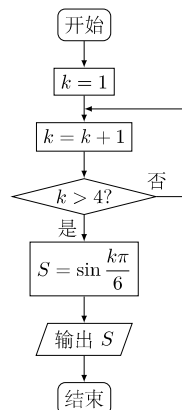
1. 设集合  $A = \{x | (x+1)(x-2) < 0\}$ , 集合  $B = \{x | 1 < x < 3\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

(A)  $\{x | -1 < x < 3\}$  (B)  $\{x | -1 < x < 1\}$   
(C)  $\{x | 1 < x < 2\}$  (D)  $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设  $i$  是虚数单位, 则复数  $i^3 - \frac{2}{i} =$  ( )

(A)  $-i$  (B)  $-3i$  (C)  $i$  (D)  $3i$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出  $S$  的值为 ( )



(A)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$

4. 下列函数中, 最小正周期为  $\pi$  且图象关于原点对称的函数是 ( )

(A)  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$  (B)  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$   
(C)  $y = \sin 2x + \cos 2x$  (D)  $y = \sin x + \cos x$

5. 过双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点且与  $x$  轴垂直的直线, 交该双曲线的两条渐近线于  $A, B$  两点,  $|AB| =$  ( )

(A)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C) 6 (D)  $4\sqrt{3}$

6. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 其中比 40000 大的偶数共有 ( )

(A) 144 个 (B) 120 个 (C) 96 个 (D) 72 个

7. 设四边形  $ABCD$  为平行四边形,  $|\vec{AB}| = 6$ ,  $|\vec{AD}| = 4$ . 若点  $M, N$  满足  $\vec{BM} = 3\vec{MC}$ ,  $\vec{DN} = 2\vec{NC}$ , 则  $\vec{AM} \cdot \vec{NM} =$  ( )

(A) 20 (B) 15 (C) 9 (D) 6

8. 设  $a, b$  都是不等于 1 的正数, 则“ $3^a > 3^b > 3$ ”是“ $\log_a 3 < \log_b 3$ ”的 ( )

(A) 充要条件 (B) 充分不必要条件  
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 如果函数  $f(x) = \frac{1}{2}(m-2)x^2 + (n-8)x + 1$  ( $m \geq 0, n \geq 0$ ) 在区间  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  上单调递减, 那么  $mn$  的最大值为 ( )

(A) 16 (B) 18 (C) 25 (D)  $\frac{81}{2}$

10. 设直线  $l$  与抛物线  $y^2 = 4x$  相交于  $A, B$  两点, 与圆  $(x-5)^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 相切于点  $M$ , 且  $M$  为线段  $AB$  的中点. 若这样的直线  $l$  恰有 4 条, 则  $r$  的取值范围是 ( )

(A) (1, 3) (B) (1, 4) (C) (2, 3) (D) (2, 4)

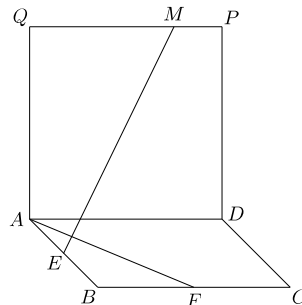
## 二、填空题

11. 在  $(2x-1)^5$  的展开式中, 含  $x^2$  的项的系数是\_\_\_\_\_. (用数字填写答案)

12.  $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$  的值是\_\_\_\_\_.

13. 某食品的保鲜时间  $y$  (单位: 小时) 与储藏温度  $x$  (单位:  $^\circ\text{C}$ ) 满足函数关系  $y = e^{kx+b}$  ( $e = 2.718\cdots$  为自然对数的底数,  $k, b$  为常数). 若该食品在  $0^\circ\text{C}$  的保鲜时间是 192 小时, 在  $22^\circ\text{C}$  的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在  $33^\circ\text{C}$  的保鲜时间是\_\_\_\_\_小时.

14. 如图, 四边形  $ABCD$  和  $ADPQ$  均为正方形, 它们所在的平面互相垂直, 动点  $M$  在线段  $PQ$  上,  $E, F$  分别为  $AB, BC$  的中点. 设异面直线  $EM$  与  $AF$  所成的角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta$  的最大值为\_\_\_\_\_.



15. 已知函数  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = x^2 + ax$  (其中  $a \in \mathbf{R}$ ). 对于不相等的实数  $x_1, x_2$ , 设  $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ,  $n = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$ , 现有如下命题:

- ① 对于任意不相等的实数  $x_1, x_2$ , 都有  $m > 0$ ;  
② 对于任意的  $a$  及任意不相等的实数  $x_1, x_2$ , 都有  $n > 0$ ;  
③ 对于任意的  $a$ , 存在不相等的实数  $x_1, x_2$ , 使得  $m = n$ ;  
④ 对于任意的  $a$ , 存在不相等的实数  $x_1, x_2$ , 使得  $m = -n$ .

其中的真命题有\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

16. 设数列  $\{a_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \cdots$ ) 的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n = 2a_n - a_1$ , 且  $a_1, a_2 + 1, a_3$  成等差数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求使得  $|T_n - 1| < \frac{1}{1000}$  成立的  $n$  的最小值.

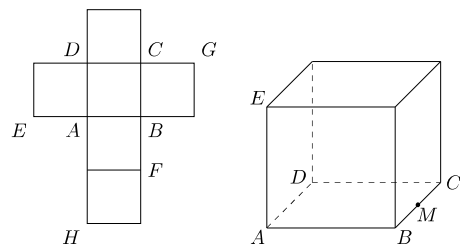
17. 某市  $A, B$  两所中学的学生组队参加辩论赛,  $A$  中学推荐了 3 名男生、2 名女生,  $B$  中学推荐了 3 名男生、4 名女生, 两校所推荐的学生一起参加集训. 由于集训后队员水平相当, 从参加集训的男生中随机抽取 3 人、女生中随机抽取 3 人组成代表队.

(1) 求  $A$  中学至少有 1 名学生入选代表队的概率;

(2) 某场比赛前, 从代表队的 6 名队员中随机抽取 4 人参赛, 设  $X$  表示参赛的男生人数, 求  $X$  的分布列和数学期望.

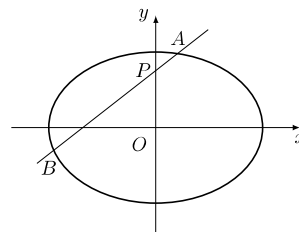
18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示. 在正方体中, 设  $BC$  的中点为  $M$ ,  $GH$  的中点为  $N$ .

- (1) 请将字母  $F, G, H$  标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);
- (2) 证明: 直线  $MN \parallel$  平面  $BDH$ ;
- (3) 求二面角  $A-EG-M$  的余弦值.



20. 如图, 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率是  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 过点  $P(0, 1)$  的动直线  $l$  与椭圆相交于  $A, B$  两点. 当直线  $l$  平行于  $x$  轴时, 直线  $l$  被椭圆  $E$  截得的线段长为  $2\sqrt{2}$ .

- (1) 求椭圆  $E$  的方程;
- (2) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 是否存在与点  $P$  不同的定点  $Q$ , 使得  $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$  恒成立? 若存在, 求出点  $Q$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

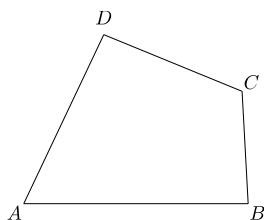


21. 已知函数  $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$ , 其中  $a > 0$ .

- (1) 设  $g(x)$  是  $f(x)$  的导函数, 讨论  $g(x)$  的单调性;
- (2) 证明: 存在  $a \in (0, 1)$ , 使得  $f(x) \geq 0$  在区间  $(1, +\infty)$  内恒成立, 且  $f(x) = 0$  在区间  $(1, +\infty)$  内有唯一解.

19. 如图,  $A, B, C, D$  为平面四边形  $ABCD$  的四个内角.

- (1) 证明:  $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$ ;
- (2) 若  $A + C = 180^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 3$ ,  $CD = 4$ ,  $AD = 5$ , 求  $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2}$  的值.

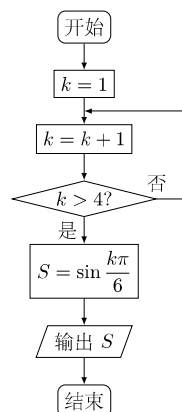




# 2015 普通高等学校招生考试 (四川卷文)

## 一、选择题

1. 设集合  $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$ , 集合  $B = \{x \mid 1 < x < 3\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid -1 < x < 3\}$  (B)  $\{x \mid -1 < x < 1\}$   
 (C)  $\{x \mid 1 < x < 2\}$  (D)  $\{x \mid 2 < x < 3\}$
2. 设向量  $\mathbf{a} = (2, 4)$  与向量  $\mathbf{b} = (x, 6)$  共线, 则实数  $x =$  ( )  
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6
3. 某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异, 拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查, 则最合理的抽样方法是 ( )  
 (A) 抽签法 (B) 系统抽样法 (C) 分层抽样法 (D) 随机数法
4. 设  $a, b$  为正实数, 则“ $a > b > 1$ ”是“ $\log_2 a > \log_2 b > 0$ ”的 ( )  
 (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件  
 (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件
5. 下列函数中, 最小正周期为  $\pi$  的奇函数是 ( )  
 (A)  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$  (B)  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$   
 (C)  $y = \sin 2x + \cos 2x$  (D)  $y = \sin x + \cos x$
6. 执行如图所示的程序框图, 输出  $S$  的值为 ( )



- (A)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$
7. 过双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点且与  $x$  轴垂直的直线, 交该双曲线的两条渐近线于  $A, B$  两点,  $|AB| =$  ( )  
 (A)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C) 6 (D)  $4\sqrt{3}$

8. 某食品的保鲜时间  $y$  (单位: 小时) 与储藏温度  $x$  (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 满足函数关系  $y = e^{kx+b}$  ( $e = 2.718 \dots$  为自然对数的底数,  $k, b$  为常数). 若该食品在  $0^{\circ}\text{C}$  的保鲜时间是 192 小时, 在  $22^{\circ}\text{C}$  的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在  $33^{\circ}\text{C}$  的保鲜时间是 ( )

(A) 16 小时 (B) 20 小时 (C) 24 小时 (D) 28 小时

9. 设实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} 2x + y \leq 10, \\ x + 2y \leq 14, \\ x + y \geq 6, \end{cases}$  则  $xy$  的最大值为 ( )

(A)  $\frac{25}{2}$  (B)  $\frac{49}{2}$  (C) 12 (D) 16

10. 设直线  $l$  与抛物线  $y^2 = 4x$  相交于  $A, B$  两点, 与圆  $(x-5)^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 相切于点  $M$ , 且  $M$  为线段  $AB$  的中点. 若这样的直线  $l$  恰有 4 条, 则  $r$  的取值范围是 ( )  
 (A) (1, 3) (B) (1, 4) (C) (2, 3) (D) (2, 4)

## 二、填空题

11. 设  $i$  是虚数单位, 则复数  $i - \frac{1}{i} =$ \_\_\_\_\_.
12.  $\lg 0.01 + \log_2 16$  的值是\_\_\_\_\_.
13. 已知  $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = 0$ , 则  $2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$  的值是\_\_\_\_\_.
14. 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^{\circ}$ , 其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形, 俯视图是直角边的长为 1 的等腰直角三角形. 设点  $M, N, P$  分别是棱  $AB, BC, B_1C_1$  的中点, 则三棱锥  $P - A_1MN$  的体积是\_\_\_\_\_.
15. 已知函数  $f(x) = 2^x, g(x) = x^2 + ax$  (其中  $a \in \mathbf{R}$ ). 对于不相等的实数  $x_1, x_2$ , 设  $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, n = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$ , 现有如下命题:  
 ① 对于任意不相等的实数  $x_1, x_2$ , 都有  $m > 0$ ;  
 ② 对于任意的  $a$  及任意不相等的实数  $x_1, x_2$ , 都有  $n > 0$ ;  
 ③ 对于任意的  $a$ , 存在不相等的实数  $x_1, x_2$ , 使得  $m = n$ ;  
 ④ 对于任意的  $a$ , 存在不相等的实数  $x_1, x_2$ , 使得  $m = -n$ .  
 其中的真命题有\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

16. 设数列  $\{a_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n = 2a_n - a_1$ , 且  $a_1, a_2 + 1, a_3$  成等差数列.  
 (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 记数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $T_n$ .

17. 一辆小客车上有 5 个座位, 其座位号为 1, 2, 3, 4, 5. 乘客  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  的座位号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 他们按照座位号从小到大的顺序先后上车. 乘客  $P_1$  因身体原因没有坐自己的 1 号座位, 这时司机要求余下的乘客按以下规则就座: 如果自己的座位空着, 就只能坐自己的座位; 如果自己的座位已有乘客就座, 就在这 5 个座位的剩余空位中任意选择座位.

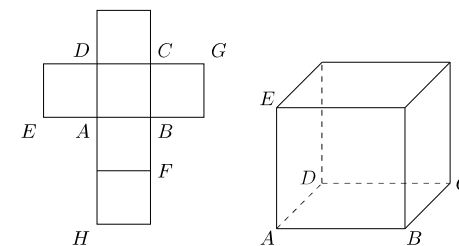
(1) 若乘客  $P_1$  坐到了 3 号座位, 其他乘客按规则就座, 则此时共有 4 种坐法. 下表给出了其中两种坐法, 请填入余下两种坐法 (将乘客就座的座位号填入表中空格处);

| 乘客  | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 座位号 | 3     | 2     | 1     | 4     | 5     |
|     | 3     | 2     | 4     | 5     | 1     |
|     |       |       |       |       |       |
|     |       |       |       |       |       |

(2) 若乘客  $P_1$  坐到了 2 号座位, 其他乘客按规则就座, 求乘客  $P_5$  坐到 5 号座位的概率.

18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示.

- (1) 请将字母  $F, G, H$  标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);
- (2) 判断平面  $BEG$  与平面  $ACH$  的位置关系, 并证明你的结论;
- (3) 证明: 直线  $DF \perp$  平面  $BEG$ .



19. 已知  $A, B, C$  为  $\triangle ABC$  的内角,  $\tan A, \tan B$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + \sqrt{3}px - p + 1 = 0$  ( $p \in \mathbf{R}$ ) 的两个实根.

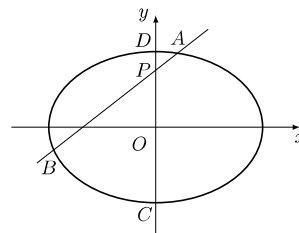
(1) 求  $C$  的大小;

(2) 若  $AB = 3, AC = \sqrt{6}$ , 求  $p$  的值.

20. 如图, 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率是  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $P(0, 1)$  在短轴  $CD$  上, 且  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -1$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 设  $O$  为坐标原点, 过点  $P$  的动直线与椭圆交于  $A, B$  两点. 是否存在常数  $\lambda$ , 使得  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  为定值? 若存在, 求  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数  $f(x) = -2x \ln x + x^2 - 2ax + a^2$ , 其中  $a > 0$ .

(1) 设  $g(x)$  是  $f(x)$  的导函数, 讨论  $g(x)$  的单调性;

(2) 证明: 存在  $a \in (0, 1)$ , 使得  $f(x) \geq 0$  恒成立, 且  $f(x) = 0$  在区间  $(1, +\infty)$  内有唯一解.

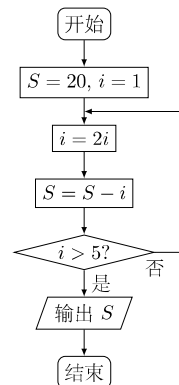
# 2015 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

## 一、选择题

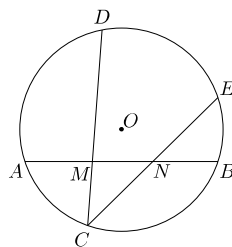
1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 集合  $A = \{2, 3, 5, 6\}$ , 集合  $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ , 则集合  $A \cap \complement_U B =$  ( )  
 (A)  $\{2, 5\}$  (B)  $\{3, 6\}$   
 (C)  $\{2, 5, 6\}$  (D)  $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - y + 3 \geq 0, \\ 2x + y - 3 \leq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z = x + 6y$  的最大值为 ( )  
 (A) 3 (B) 4 (C) 18 (D) 40

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 则输出  $S$  的值为 ( )



- (A) -10 (B) 6 (C) 14 (D) 18
4. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $|x - 2| < 1$ ”是“ $x^2 + x - 2 > 0$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
5. 如图, 在圆  $O$  中,  $M, N$  是弦  $AB$  的三等分点, 弦  $CD, CE$  分别经过点  $M, N$ , 若  $CM = 2, MD = 4, CN = 3$ , 则线段  $NE$  的长为 ( )



- (A)  $\frac{8}{3}$  (B) 3 (C)  $\frac{10}{3}$  (D)  $\frac{5}{2}$

6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线过点  $(2, \sqrt{3})$ , 且双曲线的一个焦点在抛物线  $y^2 = 4\sqrt{7}x$  的准线上, 则双曲线的方程为 ( )

- (A)  $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$   
 (C)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

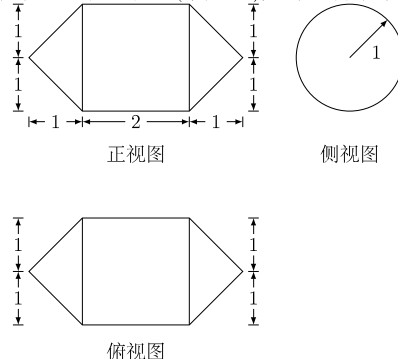
7. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$  ( $m$  为实数) 为偶函数, 记  $a = f(\log_{0.5} 3), b = f(\log_2 5), c = f(2m)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )  
 (A)  $a < b < c$  (B)  $a < c < b$  (C)  $c < a < b$  (D)  $c < b < a$

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2, \\ (x - 2)^2, & x > 2, \end{cases}$  函数  $g(x) = b - f(2 - x)$ , 其中  $b \in \mathbf{R}$ . 若函数  $y = f(x) - g(x)$  恰有 4 个零点, 则  $b$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $(\frac{7}{4}, +\infty)$  (B)  $(-\infty, \frac{7}{4})$  (C)  $(0, \frac{7}{4})$  (D)  $(\frac{7}{4}, 2)$

## 二、填空题

9.  $i$  是虚数单位, 若复数  $(1 - 2i)(a + i)$  是纯虚数, 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .



11. 曲线  $y = x^2$  与直线  $y = x$  所围成的封闭图形的面积为\_\_\_\_\_.

12. 在  $(x - \frac{1}{4x})^6$  的展开式中,  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_.

13. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{15}$ ,  $b - c = 2$ ,  $\cos A = -\frac{1}{4}$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 在等腰梯形  $ABCD$  中, 已知  $AB \parallel DC$ ,  $AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$ . 动点  $E$  和  $F$  分别在线段  $BC$  和  $DC$  上, 且  $\vec{BE} = \lambda \vec{BC}, \vec{DF} = \frac{1}{9\lambda} \vec{DC}$ , 则  $\vec{AE} \cdot \vec{AF}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \sin^2 x - \sin^2(x - \frac{\pi}{6})$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

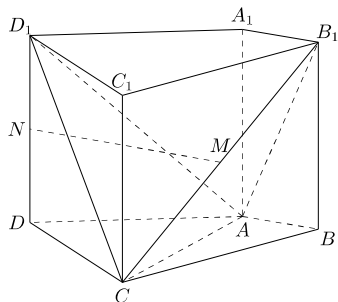
- (1) 求  $f(x)$  的最小正周期;  
 (2) 求  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$  上的最大值和最小值.

16. 为推动乒乓球运动的发展, 某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加. 现有来自甲协会的运动员 3 名, 其中种子选手 2 名; 乙协会的运动员 5 名, 其中种子选手 3 名. 从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛.

- (1) 设  $A$  为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手, 且这 2 名种子选手来自同一个协会”, 求事件  $A$  发生的概率;  
 (2) 设  $X$  为选出的 4 人中种子选手的人数, 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 侧棱  $A_1A \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AB = 1$ ,  $AC = AA_1 = 2$ ,  $AD = CD = \sqrt{5}$ , 且点  $M$  和  $N$  分别为  $B_1C$  和  $D_1D$  的中点.

- (1) 求证:  $MN \parallel$  平面  $ABCD$ ;
- (2) 求二面角  $D_1 - AC - B_1$  的正弦值;
- (3) 设  $E$  为棱  $A_1B_1$  上的点, 若直线  $NE$  和平面  $ABCD$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{3}$ , 求线段  $A_1E$  的长.



18. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} = qa_n$  ( $q$  为实数, 且  $q \neq 1$ ),  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , 且  $a_2 + a_3$ ,  $a_3 + a_4$ ,  $a_4 + a_5$  成等差数列.

- (1) 求  $q$  的值和  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和.

19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F(-c, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 点  $M$  在椭圆上且位于第一象限, 直线  $FM$  被圆  $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$  截得的线段

的长为  $c$ ,  $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

- (1) 求直线  $FM$  的斜率;
- (2) 求椭圆的方程;
- (3) 设动点  $P$  在椭圆上, 若直线  $FP$  的斜率大于  $\sqrt{2}$ , 求直线  $OP$  ( $O$  为原点) 的斜率的取值范围.

20. 已知函数  $f(x) = nx - x^n$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 其中  $n \in \mathbf{N}^*$ , 且  $n \geq 2$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 设曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴正半轴的交点为  $P$ , 曲线在点  $P$  处的切线方程为  $y = g(x)$ , 求证: 对于任意的正实数  $x$ , 都有  $f(x) \leq g(x)$ ;
- (3) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  ( $a$  为实数) 有两个正实数根  $x_1, x_2$ , 求证:  $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$ .

# 2015 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

## 一、选择题

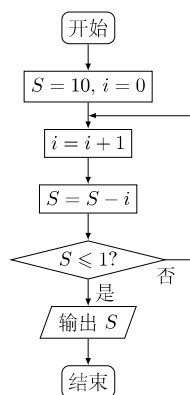
1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 集合  $A = \{2, 3, 5\}$ , 集合  $B = \{1, 3, 4, 6\}$ , 则集合  $A \cap \complement_U B =$  ( )

- (A)  $\{3\}$  (B)  $\{2, 5\}$  (C)  $\{1, 4, 6\}$  (D)  $\{2, 3, 5\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 2 \leq 0, \\ x - 2y \leq 0, \\ x + 2y - 8 \leq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z = 3x + y$  的最大值为 ( )

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 14

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 则输出  $i$  的值为 ( )



- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

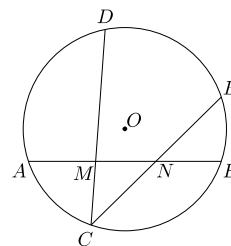
4. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x - 2| < 1$ ”的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一焦点为  $F(2, 0)$ , 且双曲线的渐近线与圆  $(x - 2)^2 + y^2 = 3$  相切, 则双曲线的方程为 ( )

- (A)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$   
(C)  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  (D)  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

6. 如图, 在圆  $O$  中,  $M, N$  是弦  $AB$  的三等分点, 弦  $CD, CE$  分别经过点  $M, N$ , 若  $CM = 2, MD = 4, CN = 3$ , 则线段  $NE$  的长为 ( )



- (A)  $\frac{8}{3}$  (B) 3 (C)  $\frac{10}{3}$  (D)  $\frac{5}{2}$

7. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$  ( $m$  为实数) 为偶函数, 记  $a = f(\log_{0.5} 3), b = f(\log_2 5), c = f(2m)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- (A)  $a < b < c$  (B)  $c < a < b$  (C)  $a < c < b$  (D)  $c < b < a$

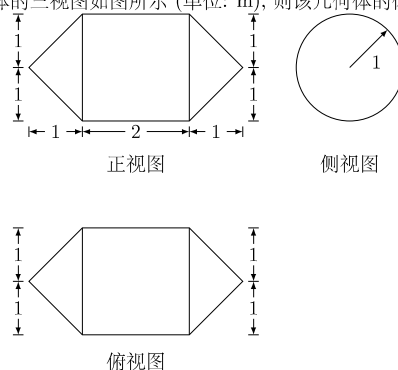
8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2, \\ (x - 2)^2, & x > 2, \end{cases}$  函数  $g(x) = 3 - f(2 - x)$ , 则函数  $y = f(x) - g(x)$  的零点个数为 ( )

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

## 二、填空题

9.  $i$  是虚数单位, 计算  $\frac{1 - 2i}{2 + i}$  的结果为\_\_\_\_\_.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .



11. 已知函数  $f(x) = ax \ln x, x \in (0, +\infty)$ , 其中  $a$  为实数,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数. 若  $f'(1) = 3$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $a > 0, b > 0, ab = 8$ , 则当  $a$  的值为\_\_\_\_\_时,  $\log_2 a \cdot \log_2 (2b)$  取得最大值.

13. 在等腰梯形  $ABCD$  中, 已知  $AB \parallel DC, AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$ . 点  $E$  和  $F$  分别在线段  $BC$  和  $DC$  上, 且  $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$ , 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ),  $x \in \mathbf{R}$ , 若函数  $f(x)$  在区间  $(-\omega, \omega)$  内单调递增, 且函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = \omega$  对称, 则  $\omega$  的值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

15. 设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为 27, 9, 18. 现采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取 6 名运动员组队参加比赛.

(1) 求应从这三个协会中分别抽取的运动员的人数;

(2) 将抽取的 6 名运动员进行编号, 编号分别为  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ . 现从这 6 名运动员中随机抽取 2 人参加双打比赛.

① 用所给编号列出所有可能的结果;

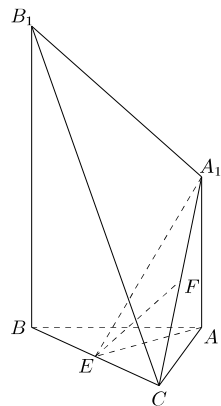
② 设  $A$  为事件: “编号为  $A_5$  和  $A_6$  的两名运动员中至少有 1 人被抽到”, 求事件  $A$  发生的概率.

16. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{15}, b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4}$ .

(1) 求  $a$  和  $\sin C$  的值;

(2) 求  $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$  的值.

17. 如图, 已知  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $BB_1 \parallel AA_1$ ,  $AB = AC = 3$ ,  $BC = 2\sqrt{5}$ ,  $AA_1 = \sqrt{7}$ ,  $BB_1 = 2\sqrt{7}$ , 点  $E$  和  $F$  分别为  $BC$  和  $A_1C$  的中点.
- (1) 求证:  $EF \parallel$  平面  $A_1B_1BA$ ;
  - (2) 求证: 平面  $AEA_1 \perp$  平面  $BCB_1$ ;
  - (3) 求直线  $A_1B_1$  与平面  $BCB_1$  所成角的大小.



19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的上顶点为  $B$ , 左焦点为  $F$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .
- (1) 求直线  $BF$  的斜率;
  - (2) 设直线  $BF$  与椭圆交于点  $P$  ( $P$  异于点  $B$ ), 过点  $B$  且垂直于  $BP$  的直线与椭圆交于点  $Q$  ( $Q$  异于点  $B$ ), 直线  $PQ$  与  $y$  轴交于点  $M$ ,  $|PM| = \lambda|MQ|$ .
    - ① 求  $\lambda$  的值;
    - ② 若  $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$ , 求椭圆的方程.

20. 已知函数  $f(x) = 4x - x^4$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (1) 求  $f(x)$  的单调区间;
  - (2) 设曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴正半轴的交点为  $P$ , 曲线在点  $P$  处的切线方程为  $y = g(x)$ , 求证: 对于任意的实数  $x$ , 都有  $f(x) \leq g(x)$ ;
  - (3) 若方程  $f(x) = a$  ( $a$  为实数) 有两个正实数根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 求证:  $x_2 - x_1 \leq -\frac{a}{3} + 4^{\frac{1}{4}}$ .

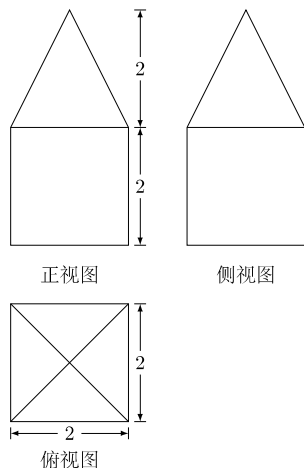
18. 已知数列  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等比数列,  $\{b_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $b_2 + b_3 = 2a_3$ ,  $a_5 - 3b_2 = 7$ .
- (1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;
  - (2) 设  $c_n = a_n b_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和.

# 2015 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

## 一、选择题

1. 已知集合  $P = \{x \mid x^2 - 2x \geq 0\}$ ,  $Q = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$ , 则  $(\complement_{\mathbf{R}} P) \cap Q =$  ( )  
 (A)  $[0, 1)$  (B)  $(0, 2]$  (C)  $(1, 2)$  (D)  $[1, 2]$

2. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是 ( )



- (A)  $8 \text{ cm}^3$  (B)  $12 \text{ cm}^3$  (C)  $\frac{32}{3} \text{ cm}^3$  (D)  $\frac{40}{3} \text{ cm}^3$

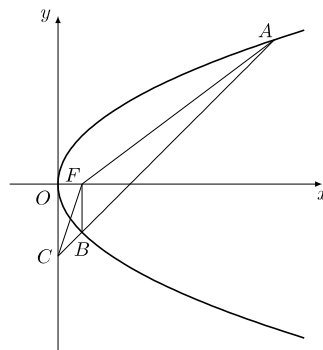
3. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列, 公差  $d$  不为零, 前  $n$  项和是  $S_n$ , 若  $a_3, a_4, a_8$  成等比数列, 则 ( )

- (A)  $a_1 d > 0, dS_4 > 0$  (B)  $a_1 d < 0, dS_4 < 0$   
 (C)  $a_1 d > 0, dS_4 < 0$  (D)  $a_1 d < 0, dS_4 > 0$

4. 命题“ $\forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) \in \mathbf{N}^*$  且  $f(n) \leq n$ ”的否定形式是 ( )

- (A)  $\forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) \notin \mathbf{N}^*$  且  $f(n) > n$   
 (B)  $\forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) \notin \mathbf{N}^*$  或  $f(n) > n$   
 (C)  $\exists n_0 \in \mathbf{N}^*, f(n_0) \notin \mathbf{N}^*$  且  $f(n_0) > n_0$   
 (D)  $\exists n_0 \in \mathbf{N}^*, f(n_0) \notin \mathbf{N}^*$  或  $f(n_0) > n_0$

5. 如图, 设抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 不经过焦点的直线上有三个不同的点  $A, B, C$ , 其中点  $A, B$  在抛物线上, 点  $C$  在  $y$  轴上, 则  $\triangle BCF$  与  $\triangle ACF$  的面积之比是 ( )



- (A)  $\frac{|BF| - 1}{|AF| - 1}$  (B)  $\frac{|BF|^2 - 1}{|AF|^2 - 1}$  (C)  $\frac{|BF| + 1}{|AF| + 1}$  (D)  $\frac{|BF|^2 + 1}{|AF|^2 + 1}$

6. 设  $A, B$  是有限集, 定义:  $d(A, B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$ , 其中  $\text{card}(A)$  表示有限集  $A$  中元素的个数.

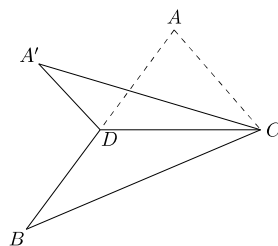
命题①: 对任意有限集  $A, B$ , “ $A \neq B$ ”是“ $d(A, B) > 0$ ”的充分必要条件;  
 命题②: 对任意有限集  $A, B, C$ ,  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ . ( )

- (A) 命题①和命题②都成立 (B) 命题①和命题②都不成立  
 (C) 命题①成立, 命题②不成立 (D) 命题①不成立, 命题②成立

7. 存在函数  $f(x)$  满足: 对于任意  $x \in \mathbf{R}$  都有 ( )

- (A)  $f(\sin 2x) = \sin x$  (B)  $f(\sin 2x) = x^2 + x$   
 (C)  $f(x^2 + 1) = |x + 1|$  (D)  $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$

8. 如图, 已知  $\triangle ABC$ ,  $D$  是  $AB$  的中点, 沿直线  $CD$  将  $\triangle ACD$  翻折成  $\triangle A'CD$ , 所成二面角  $A' - CD - B$  的平面角为  $\alpha$ , 则 ( )



- (A)  $\angle A'DB \leq \alpha$  (B)  $\angle A'DB \geq \alpha$  (C)  $\angle A'CB \leq \alpha$  (D)  $\angle A'CB \geq \alpha$

## 二、填空题

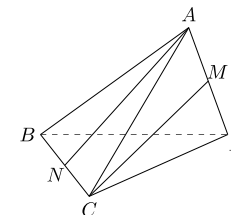
9. 双曲线  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  的焦距是\_\_\_\_\_, 渐近线方程是\_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1, \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1, \end{cases}$  则  $f(f(-3)) =$ \_\_\_\_\_,  $f(x)$  的最小值是\_\_\_\_\_.

11. 函数  $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$  的最小正周期是\_\_\_\_\_, 单调递减区间是\_\_\_\_\_.

12. 若  $a = \log_4 3$ , 则  $2^a + 2^{-a} =$ \_\_\_\_\_.

13. 如图, 在三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB = AC = BD = CD = 3$ ,  $AD = BC = 2$ , 点  $M, N$  分别为  $AD, BC$  的中点, 则异面直线  $AN, CM$  所成的角的余弦值是\_\_\_\_\_.



14. 若实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 则  $|2x + y - 2| + |6 - x - 3y|$  的最小值是\_\_\_\_\_.

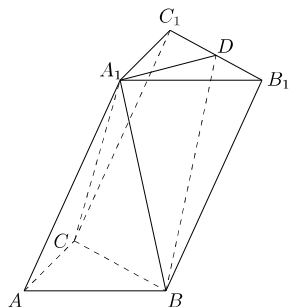
15. 已知  $e_1, e_2$  是空间单位向量,  $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}$ , 若空间向量  $b$  满足  $b \cdot e_1 = 2, b \cdot e_2 = \frac{5}{2}$ , 且对于任意  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $|\vec{b} - (xe_1 + ye_2)| \geq |b - (x_0e_1 + y_0e_2)| = 1$  ( $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$ ), 则  $x_0 =$ \_\_\_\_\_,  $y_0 =$ \_\_\_\_\_,  $|b| =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

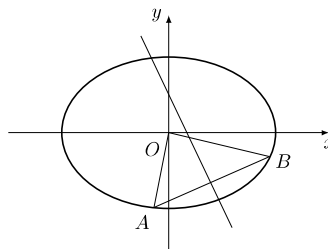
16. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ . 已知  $A = \frac{\pi}{4}$ ,  $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$ .

- (1) 求  $\tan C$  的值;  
 (2) 若  $\triangle ABC$  的面积为 3, 求  $b$  的值.

17. 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = 2$ ,  $A_1A = 4$ ,  $A_1$  在底面  $ABC$  的射影为  $BC$  的中点,  $D$  是  $B_1C_1$  的中点.
- (1) 证明:  $A_1D \perp$  平面  $A_1BC$ ;  
 (2) 求二面角  $A_1 - BD - B_1$  的平面角的余弦值.



19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  上两个不同的点  $A, B$  关于直线  $y = mx + \frac{1}{2}$  对称.
- (1) 求实数  $m$  的取值范围;  
 (2) 求  $\triangle AOB$  面积的最大值 ( $O$  为坐标原点).



20. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}$  且  $a_{n+1} = a_n - a_n^2$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).
- (1) 证明:  $1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ );  
 (2) 设数列  $\{a_n^2\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 证明:  $\frac{1}{2(n+2)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2(n+1)}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

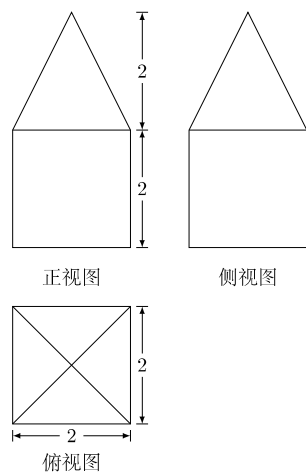
18. 已知函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ), 记  $M(a, b)$  是  $|f(x)|$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值.
- (1) 证明: 当  $|a| \geq 2$  时,  $M(a, b) \geq 2$ ;  
 (2) 当  $a, b$  满足  $M(a, b) \leq 2$  时, 求  $|a| + |b|$  的最大值.



# 2015 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

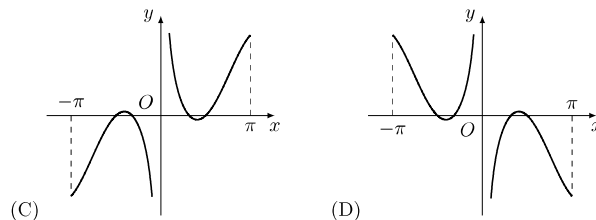
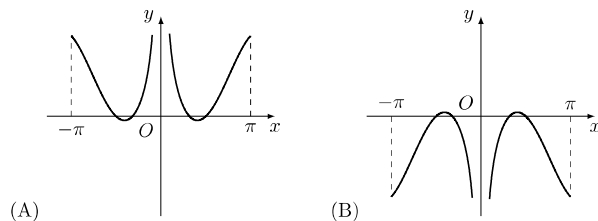
## 一、选择题

- 已知集合  $P = \{x \mid x^2 - 2x \geq 3\}$ ,  $Q = \{x \mid 2 < x < 4\}$ , 则  $P \cap Q =$  ( )  
(A)  $[3, 4)$  (B)  $(2, 3]$  (C)  $(-1, 2)$  (D)  $(-1, 3]$
- 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是 ( )

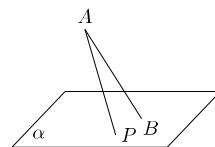


- (A)  $8 \text{ cm}^3$  (B)  $12 \text{ cm}^3$  (C)  $\frac{32}{3} \text{ cm}^3$  (D)  $\frac{40}{3} \text{ cm}^3$

- 设  $a, b$  是实数, 则“ $a + b > 0$ ”是“ $ab > 0$ ”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 设  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面,  $l, m$  是两条不同的直线, 且  $l \subset \alpha, m \subset \beta$ . ( )  
(A) 若  $l \perp \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$  (B) 若  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \perp m$   
(C) 若  $l \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$  (D) 若  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $l \parallel m$
- 函数  $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$  且  $x \neq 0$ ) 的图象可能为 ( )



- 有三个房间需要粉刷, 粉刷方案要求: 每个房间只用一种颜色, 且三个房间颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积 (单位:  $\text{m}^2$ ) 分别为  $x, y, z$ , 且  $x < y < z$ , 三种颜色涂料的粉刷费用 (单位: 元 /  $\text{m}^2$ ) 分别为  $a, b, c$ , 且  $a < b < c$ . 在不同的方案中, 最低的总费用 (单位: 元) 是 ( )  
(A)  $ax + by + cz$  (B)  $az + by + cx$  (C)  $ay + bz + cx$  (D)  $ay + bx + cz$
- 如图, 斜线段  $AB$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $60^\circ$ ,  $B$  为斜足, 平面  $\alpha$  上的动点  $P$  满足  $\angle PAB = 30^\circ$ , 则点  $P$  的轨迹是 ( )



- (A) 直线 (B) 抛物线  
(C) 椭圆 (D) 双曲线的一支
- 设实数  $a, b, t$  满足  $|a + 1| = |\sin b| = t$ . 则下列说法中正确的是 ( )  
(A) 若  $t$  确定, 则  $b^2$  唯一确定 (B) 若  $t$  确定, 则  $a^2 + 2a$  唯一确定  
(C) 若  $t$  确定, 则  $\sin \frac{b}{2}$  唯一确定 (D) 若  $t$  确定, 则  $a^2 + a$  唯一确定

## 二、填空题

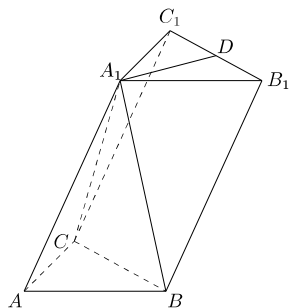
- 计算  $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} =$ \_\_\_\_\_,  $2^{\log_2 3 + \log_4 3} =$ \_\_\_\_\_.
- 已知  $\{a_n\}$  是等差数列, 公差  $d$  不为零. 若  $a_2, a_3, a_7$  成等比数列, 且  $2a_1 + a_2 = 1$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_,  $d =$ \_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$  的最小正周期是\_\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1, \end{cases}$  则  $f(f(-2)) =$ \_\_\_\_\_,  $f(x)$  的最小值是\_\_\_\_\_.
- 已知  $e_1, e_2$  是平面单位向量, 且  $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}$ . 若平面向量  $b$  满足  $b \cdot e_1 = b \cdot e_2 = 1$ , 则  $|b| =$ \_\_\_\_\_.
- 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 则  $|2x + y - 4| + |6 - x - 3y|$  的最大值是\_\_\_\_\_.
- 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点  $F(c, 0)$  关于直线  $y = \frac{b}{c}x$  的对称点  $Q$  在椭圆上, 则椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = 2$ .  
(1) 求  $\frac{\sin 2A}{\sin 2A + \cos^2 A}$  的值;  
(2) 若  $B = \frac{\pi}{4}$ ,  $a = 3$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

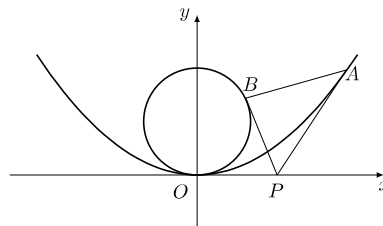
- 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足  $a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).  
(1) 求  $a_n$  与  $b_n$ ;  
(2) 记数列  $\{a_n b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $T_n$ .

18. 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = 2$ ,  $A_1A = 4$ ,  $A_1$  在底面  $ABC$  的射影为  $BC$  的中点,  $D$  是  $B_1C_1$  的中点.
- (1) 证明:  $A_1D \perp$  平面  $A_1BC$ ;
  - (2) 求直线  $A_1B$  和平面  $BB_1C_1C$  所成的角的正弦值.



19. 如图, 已知抛物线  $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$ , 圆  $C_2: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , 过点  $P(t, 0)$  ( $t > 0$ ) 作不过原点  $O$  的直线  $PA, PB$  分别与抛物线  $C_1$  和圆  $C_2$  相切,  $A, B$  为切点.
- (1) 求点  $A, B$  的坐标;
  - (2) 求  $\triangle PAB$  的面积.

注: 直线与抛物线有且只有一个公共点, 且与抛物线的对称轴不平行, 则称该直线与抛物线相切, 称该公共点为切点.



20. 设函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).
- (1) 当  $b = \frac{a^2}{4} + 1$  时, 求函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最小值  $g(a)$  的表达式;
  - (2) 已知函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上存在零点,  $0 \leq b - 2a \leq 1$ , 求  $b$  的取值范围.