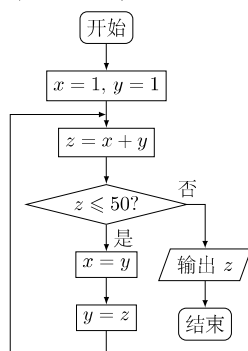


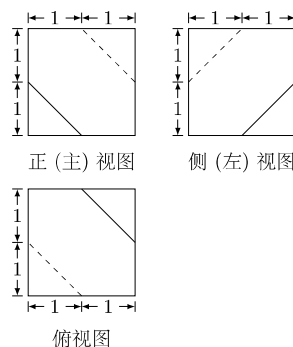
# 2014 普通高等学校招生考试 (安徽卷理)

## 一、选择题

- 设  $i$  是虚数单位,  $\bar{z}$  表示复数  $z$  的共轭复数. 若  $z = 1 + i$ , 则  $\frac{z}{i} + i \cdot \bar{z} = ( )$   
(A)  $-2$  (B)  $-2i$  (C)  $2$  (D)  $2i$
- “ $x < 0$ ”是“ $\ln(x+1) < 0$ ”的  $( )$   
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是  $( )$



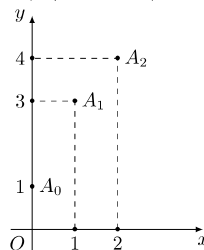
- (A) 34 (B) 55 (C) 78 (D) 89
- 以平面直角坐标系的原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 两种坐标系中取相同的长度单位, 已知直线  $l$  的参数方程是  $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = t - 3. \end{cases}$  ( $t$  为参数), 圆  $C$  的极坐标方程是  $\rho = 4 \cos \theta$ , 则直线  $l$  被圆  $C$  截得的弦长为  $( )$   
(A)  $\sqrt{14}$  (B)  $2\sqrt{14}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $2\sqrt{2}$
  - $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - 2y - 2 \leq 0, \\ 2x - y + 2 \geq 0, \end{cases}$  若  $z = y - ax$  取得最大值的最优解不唯一, 则实数  $a$  的值为  $( )$   
(A)  $\frac{1}{2}$  或  $-1$  (B)  $2$  或  $\frac{1}{2}$  (C)  $2$  或  $1$  (D)  $2$  或  $-1$
  - 设函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 满足  $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$ . 当  $0 \leq x < \pi$  时,  $f(x) = 0$ , 则  $f\left(\frac{23\pi}{6}\right) = ( )$   
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $0$  (D)  $-\frac{1}{2}$
  - 一个多面体的三视图如图所示, 则该多面体的表面积为  $( )$



- (A)  $21 + \sqrt{3}$  (B)  $18 + \sqrt{3}$  (C)  $21$  (D)  $18$
- 从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对, 其中所成的角为  $60^\circ$  的共有  $( )$   
(A) 24 对 (B) 30 对 (C) 48 对 (D) 60 对
  - 若函数  $f(x) = |x+1| + |2x+a|$  的最小值为 3, 则实数  $a$  的值为  $( )$   
(A) 5 或 8 (B)  $-1$  或 5 (C)  $-1$  或  $-4$  (D)  $-4$  或 8
  - 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ,  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 点  $Q$  满足  $\overrightarrow{OQ} = \sqrt{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ . 曲线  $C = \{P \mid \overrightarrow{OP} = \mathbf{a} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ , 区域  $\Omega = \{P \mid 0 < r \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq R, r < R\}$ . 若  $C \cap \Omega$  为两段分离的曲线, 则  $( )$   
(A)  $1 < r < R < 3$  (B)  $1 < r < 3 \leq R$   
(C)  $r \leq 1 < R < 3$  (D)  $1 < r < 3 < R$

## 二、填空题

- 若将函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  的图象向右平移  $\varphi$  个单位, 所得图象关于  $y$  轴对称, 则  $\varphi$  的最小正值是\_\_\_\_\_.
- 数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 若  $a_1 + 1, a_3 + 3, a_5 + 5$  构成公比为  $q$  的等比数列, 则  $q =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $a \neq 0, n$  是大于 1 的自然数,  $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n$  的展开式为  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . 若点  $A_i(i, a_i)$ , ( $i = 0, 1, 2$ ) 的位置如图所示, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.



- 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $E: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $0 < b < 1$ ) 的左、右焦点, 过点  $F_1$  的直线交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点, 若  $|AF_1| = 3|BF_1|$ ,  $AF_2 \perp x$  轴, 则椭圆  $E$  的方程为\_\_\_\_\_.

- 已知两个不相等的非零向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 两组向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$  和  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5$  均由 2 个  $\mathbf{a}$  和 3 个  $\mathbf{b}$  排列而成, 记  $S = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_3 + \mathbf{x}_4 \cdot \mathbf{y}_4 + \mathbf{x}_5 \cdot \mathbf{y}_5$ ,  $S_{\min}$  表示  $S$  所有可能取值中的最小值. 则下列命题正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确命题的编号)  
①  $S$  有 5 个不同的值;  
② 若  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 则  $S_{\min}$  与  $|\mathbf{a}|$  无关;  
③ 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 则  $S_{\min}$  与  $|\mathbf{b}|$  无关;  
④ 若  $|\mathbf{b}| > 4|\mathbf{a}|$ , 则  $S_{\min} > 0$ ;  
⑤ 若  $|\mathbf{b}| = 2|\mathbf{a}|$ ,  $S_{\min} = 8|\mathbf{a}|^2$ , 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ .

## 三、解答题

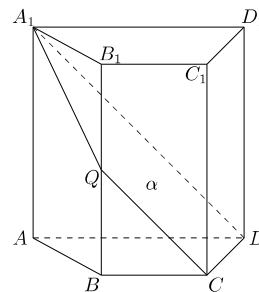
- 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对边的长分别是  $a, b, c$ , 且  $b = 3, c = 1, A = 2B$ .  
(1) 求  $a$  的值;  
(2) 求  $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$  的值.
- 甲乙两人进行围棋比赛, 约定先连胜两局者直接赢得比赛, 若赛完 5 局仍未出现连胜, 则判定获胜局数多者赢得比赛, 假设每局甲获胜的概率为  $\frac{2}{3}$ , 乙获胜的概率为  $\frac{1}{3}$ , 各局比赛结果相互独立.  
(1) 求甲在 4 局以内 (含 4 局) 赢得比赛的概率;  
(2) 记  $X$  为比赛决出胜负时的总局数, 求  $X$  的分布列和均值 (数学期望).

18. 设函数  $f(x) = 1 + (1+a)x - x^2 - x^3$ , 其中  $a > 0$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  在其定义域上的单调性;
- (2) 当  $x \in [0, 1]$  时, 求  $f(x)$  取得最大值和最小值时的  $x$  的值.

20. 如图, 四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $A_1A \perp$  底面  $ABCD$ . 四边形  $ABCD$  为梯形,  $AD \parallel BC$ , 且  $AD = 2BC$ . 过  $A_1, C, D$  三点的平面记为  $\alpha$ ,  $BB_1$  与  $\alpha$  的交点为  $Q$ .

- (1) 证明:  $Q$  为  $BB_1$  的中点;
- (2) 求此四棱柱被平面  $\alpha$  所分成上下两部分的体积之比;
- (3) 若  $A_1A = 4$ ,  $CD = 2$ , 梯形  $ABCD$  的面积为 6, 求平面  $\alpha$  与底面  $ABCD$  所成二面角的大小.

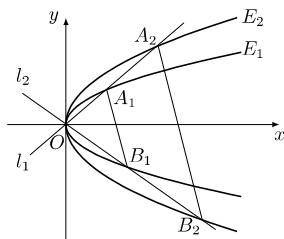


21. 设实数  $c > 0$ , 整数  $p > 1$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 证明: 当  $x > -1$  且  $x \neq 0$  时,  $(1+x)^p > 1+px$ ;
- (2) 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 > c^{\frac{1}{p}}$ ,  $a_{n+1} = \frac{p-1}{p}a_n + \frac{c}{p}a_n^{1-p}$ , 证明:  $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$ .

19. 如图, 已知两条抛物线  $E_1: y^2 = 2p_1x$  ( $p_1 > 0$ ) 和  $E_2: y^2 = 2p_2x$  ( $p_2 > 0$ ), 过原点  $O$  的两条直线  $l_1$  和  $l_2$ ,  $l_1$  与  $E_1, E_2$  分别交于  $A_1, A_2$  两点,  $l_2$  与  $E_1, E_2$  分别交于  $B_1, B_2$  两点.

- (1) 证明:  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ;
- (2) 过原点  $O$  作直线  $l$  (异于  $l_1, l_2$ ) 与  $E_1, E_2$  分别交于  $C_1, C_2$  两点. 记  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A_2B_2C_2$  的面积分别为  $S_1$  与  $S_2$ , 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的值.



# 2014 普通高等学校招生考试 (安徽卷文)

## 一、选择题

1. 设  $i$  是虚数单位, 复数  $i^3 + \frac{2i}{1+i} =$  ( )

- (A)  $-i$  (B)  $i$  (C)  $-1$  (D)  $1$

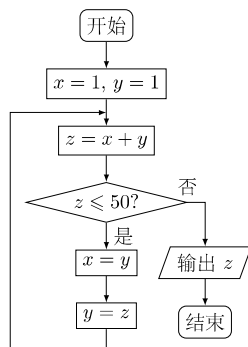
2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + x^2 \geq 0$ ”的否定是 ( )

- (A)  $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + x^2 < 0$  (B)  $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + x^2 \leq 0$   
(C)  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, |x_0| + x_0^2 < 0$  (D)  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, |x_0| + x_0^2 \geq 0$

3. 抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$  的准线方程是 ( )

- (A)  $y = -1$  (B)  $y = -2$  (C)  $x = -1$  (D)  $x = -2$

4. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 ( )



- (A) 34 (B) 55 (C) 78 (D) 89

5. 设  $a = \log_3 7, b = 2^{1.1}, c = 0.8^{3.1}$ , 则 ( )

- (A)  $b < a < c$  (B)  $c < a < b$  (C)  $c < b < a$  (D)  $a < c < b$

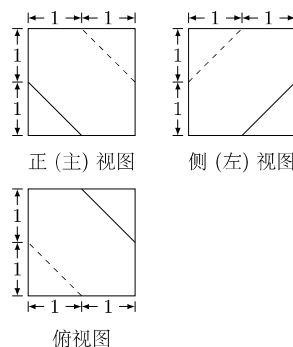
6. 过点  $P(-\sqrt{3}, -1)$  的直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  有公共点, 则直线  $l$  的倾斜角的取值范围是 ( )

- (A)  $(0, \frac{\pi}{6}]$  (B)  $(0, \frac{\pi}{3}]$  (C)  $[0, \frac{\pi}{6}]$  (D)  $[0, \frac{\pi}{3}]$

7. 若将函数  $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$  的图象向右平移  $\varphi$  个单位, 所得图象关于  $y$  轴对称, 则  $\varphi$  的最小正值是 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{8}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{3\pi}{8}$  (D)  $\frac{3\pi}{4}$

8. 一个多面体的三视图如图所示, 则该多面体的体积为 ( )



- (A)  $\frac{23}{3}$  (B)  $\frac{47}{6}$  (C) 6 (D) 7

9. 若函数  $f(x) = |x+1| + |2x+a|$  的最小值为 3, 则实数  $a$  的值为 ( )

- (A) 5 或 8 (B)  $-1$  或 5 (C)  $-1$  或  $-4$  (D)  $-4$  或 8

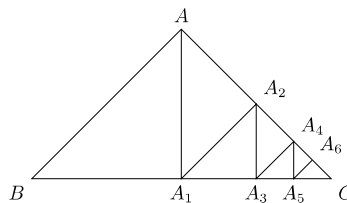
10. 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为非零向量,  $|\mathbf{b}| = 2|\mathbf{a}|$ , 两组向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$  和  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$  均由 2 个  $\mathbf{a}$  和 2 个  $\mathbf{b}$  排列而成, 若  $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_3 + \mathbf{x}_4 \cdot \mathbf{y}_4$  所有可能取值中的最小值为  $4|\mathbf{a}|^2$ , 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为 ( )

- (A)  $\frac{2}{3}\pi$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{6}$  (D) 0

## 二、填空题

11.  $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} + \log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{4}{5} =$ \_\_\_\_\_.

12. 如图, 在等腰直角三角形  $ABC$  中, 斜边  $BC = 2\sqrt{2}$ , 过点  $A$  作  $BC$  的垂线, 垂足为  $A_1$ ; 过点  $A_1$  作  $AC$  的垂线, 垂足为  $A_2$ ; 过点  $A_2$  作  $A_1C$  的垂线, 垂足为  $A_3$ ;  $\dots$ , 依此类推, 设  $BA = a_1, AA_1 = a_2, A_1A_2 = a_3, \dots, A_5A_6 = a_7$ , 则  $a_7 =$ \_\_\_\_\_.



13. 不等式组  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x+2y-4 \leq 0, \\ x+3y-2 \geq 0 \end{cases}$  表示的平面区域的面积为\_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 是周期为 4 的奇函数, 且在  $[0, 2]$  上的解析式为  $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \sin \pi x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  则  $f\left(\frac{29}{4}\right) + f\left(\frac{41}{6}\right) =$ \_\_\_\_\_.

15. 若直线  $l$  与曲线  $C$  满足下列两个条件:  
(i) 直线  $l$  在点  $P(x_0, y_0)$  处与曲线  $C$  相切; (ii) 曲线  $C$  在点  $P$  附近位于直线  $l$  的两侧, 则称直线  $l$  在点  $P$  处“切过”曲线  $C$ .

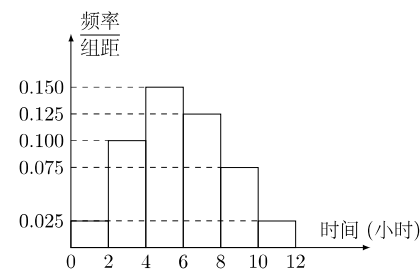
下列命题正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确命题的编号)

- ① 直线  $l: y = 0$  在点  $P(0, 0)$  处“切过”曲线  $C: y = x^3$ ;  
② 直线  $l: x = -1$  在点  $P(-1, 0)$  处“切过”曲线  $C: y = (x+1)^2$ ;  
③ 直线  $l: y = x$  在点  $P(0, 0)$  处“切过”曲线  $C: y = \sin x$ ;  
④ 直线  $l: y = x$  在点  $P(0, 0)$  处“切过”曲线  $C: y = \tan x$ ;  
⑤ 直线  $l: y = x - 1$  在点  $P(1, 0)$  处“切过”曲线  $C: y = \ln x$ .

## 三、解答题

16. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对边的长分别是  $a, b, c$ , 且  $b = 3, c = 1$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{2}$ , 求  $\cos A$  与  $a$  的值.

17. 某高校共有学生 15000 人, 其中男生 10500 人, 女生 4500 人, 为调查该校学生每周平均体育运动时间的情况, 采用分层抽样的方法, 收集 300 位学生每周平均体育运动时间的样本数据 (单位: 小时).



- (1) 应收集多少位女生样本数据?  
(2) 根据这 300 个样本数据, 得到学生每周平均体育运动时间的频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据分组区间为:  $[0, 2], (2, 4], (4, 6], (6, 8], (8, 10], (10, 12]$ . 估计该校学生每周平均体育运动时间超过 4 个小时的概率;  
(3) 在样本数据中, 有 60 位女生的每周平均体育运动时间超过 4 个小时. 请完成每周平均体育运动时间与性别的列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”.

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
$k_0$	2.706	3.841	6.635	7.879

18. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1), n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 证明: 数列  $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  是等差数列;
- (2) 设  $b_n = 3^n \cdot \sqrt{a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

20. 设函数  $f(x) = 1 + (1+a)x - x^2 - x^3$ , 其中  $a > 0$ .

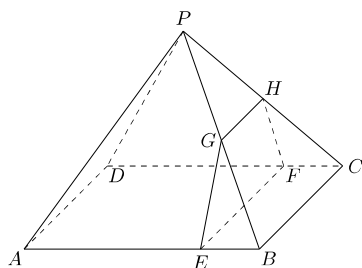
- (1) 讨论  $f(x)$  在其定义域上的单调性;
- (2) 当  $x \in [0, 1]$  时, 求  $f(x)$  取得最大值和最小值时的  $x$  的值.

21. 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点, 过点  $F_1$  的直线交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点,  $|AF_1| = 3|BF_1|$ .

- (1) 若  $|AB| = 4$ ,  $\triangle ABF_2$  的周长为 16, 求  $|AF_2|$ ;
- (2) 若  $\cos \angle AF_2B = \frac{3}{5}$ , 求椭圆  $E$  的离心率.

19. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是边长为 8 的正方形, 四条侧棱长均为  $2\sqrt{17}$ , 点  $G, E, F, H$  分别是棱  $PB, AB, CD, PC$  上共面的四点, 平面  $GEFH \perp$  平面  $ABCD, BC \parallel$  平面  $GEFH$ .

- (1) 证明:  $GH \parallel EF$ ;
- (2) 若  $EB = 2$ , 求四边形  $GEFH$  的面积.





# 2014 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

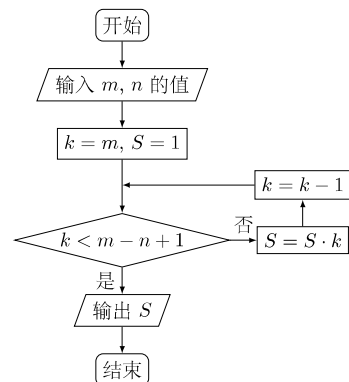
## 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 2x = 0\}$ ,  $B = \{0, 1, 2\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{0\}$  (B)  $\{0, 1\}$  (C)  $\{0, 2\}$  (D)  $\{0, 1, 2\}$

2. 下列函数中, 在区间  $(0, +\infty)$  上为增函数的是 ( )  
 (A)  $y = \sqrt{x+1}$  (B)  $y = (x-1)^2$   
 (C)  $y = 2^{-x}$  (D)  $y = \log_{0.5}(x+1)$

3. 曲线  $\begin{cases} x = -1 + \cos \theta, \\ y = 2 + \sin \theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数) 的对称中心 ( )  
 (A) 在直线  $y = 2x$  上 (B) 在直线  $y = -2x$  上  
 (C) 在直线  $y = x - 1$  上 (D) 在直线  $y = x + 1$  上

4. 当  $m = 7, n = 3$  时, 执行如图所示的程序框图, 输出的  $S$  值为 ( )



- (A) 7 (B) 42 (C) 210 (D) 840

5. 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$  为递增数列”的 ( )  
 (A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ kx - y + 2 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$  且  $z = y - x$  的最小值为  $-4$ , 则  $k$  的值为 ( )  
 (A) 2 (B)  $-2$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $-\frac{1}{2}$

7. 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中, 已知  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(1, 1, \sqrt{2})$ , 若  $S_1, S_2, S_3$  分别表示三棱锥  $D-ABC$  在  $xOy, yOz, zOx$  坐标平面上的正投影图形的面积, 则 ( )

- (A)  $S_1 = S_2 = S_3$  (B)  $S_1 = S_2$  且  $S_3 \neq S_1$   
 (C)  $S_1 = S_3$  且  $S_3 \neq S_2$  (D)  $S_2 = S_3$  且  $S_1 \neq S_3$

8. 学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级, 依次为“优秀”“合格”“不合格”. 若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙, 且其中至少有一门成绩高于乙, 则称“学生甲比学生乙成绩好”. 如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好, 并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生, 则这一组学生最多有 ( )

- (A) 2 人 (B) 3 人 (C) 4 人 (D) 5 人

## 二、填空题

9. 复数  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 =$ \_\_\_\_\_.

10. 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}| = 1, \mathbf{b} = (2, 1)$ , 且  $\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$  ( $\lambda \in \mathbf{R}$ ), 则  $|\lambda| =$ \_\_\_\_\_.

11. 设双曲线  $C$  经过点  $(2, 2)$ , 且与  $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$  具有相同渐近线, 则  $C$  的方程为\_\_\_\_\_; 渐近线方程为\_\_\_\_\_.

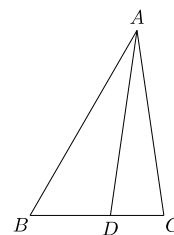
12. 若等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_7 + a_8 + a_9 > 0, a_7 + a_{10} < 0$ , 则当  $n =$ \_\_\_\_\_时,  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和最大.

13. 把 5 件不同产品摆成一排, 若产品  $A$  与产品  $B$  相邻, 且产品  $A$  与产品  $C$  不相邻, 则不同的摆法有\_\_\_\_\_种.

14. 设函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A, \omega, \varphi$  是常数,  $A > 0, \omega > 0$ ). 若  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$  上具有单调性, 且  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , 则  $f(x)$  的最小正周期为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

15. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = \frac{\pi}{3}, AB = 8$ , 点  $D$  在  $BC$  上, 且  $CD = 2$ ,  $\cos \angle ADC = \frac{1}{7}$ .  
 (1) 求  $\sin \angle BAD$ ;  
 (2) 求  $BD, AC$  的长.



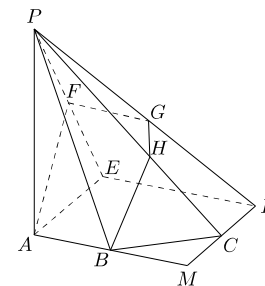
16. 李明在 10 场篮球比赛中的投篮情况 (假设各场比赛相互独立):

场次	投篮次数	命中次数	场次	投篮次数	命中次数
主场 1	22	12	客场 1	18	8
主场 2	15	12	客场 2	13	12
主场 3	12	8	客场 3	21	7
主场 4	23	8	客场 4	18	15
主场 5	24	20	客场 5	25	12

- (1) 从上述比赛随机选择一场, 求李明在该场比赛中的投篮命中率超过 0.6 的概率;  
 (2) 从上述比赛中随机选择一个主场和客场, 求李明的投篮命中率一场超过 0.6, 一场不超过 0.6 的概率;  
 (3) 记  $\bar{x}$  是表中 10 个命中次数的平均数, 从上述比赛中随机选择一场, 记  $X$  为李明在这场比赛中命中次数, 比较  $E(X)$  与  $\bar{x}$  的大小. (只需要写出结论)

17. 如图, 正方形  $AMDE$  的边长为 2,  $B, C$  分别为  $AM, MD$  的中点, 在五棱锥  $P-ABCDE$  中,  $F$  为棱  $PE$  的中点, 平面  $ABF$  与棱  $PD, PC$  分别交于点  $G, H$ .

- (1) 求证:  $AB \parallel FG$ ;  
 (2) 若  $PA \perp$  平面  $ABCDE$ , 且  $PA = AE$ , 求直线  $BC$  与平面  $ABF$  所成角的大小, 并求线段  $PH$  的长.



18. 已知函数  $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

(1) 求证:  $f(x) \leq 0$ ;

(2) 若  $a < \frac{\sin x}{x} < b$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上恒成立, 求  $a$  的最大值与  $b$  的最小值.

19. 已知椭圆  $C: x^2 + 2y^2 = 4$ .

(1) 求椭圆  $C$  的离心率;

(2) 设  $O$  为坐标原点, 若点  $A$  在椭圆  $C$  上, 点  $B$  在直线  $y = 2$  上, 且  $OA \perp OB$ , 试判断直线  $AB$  与圆  $x^2 + y^2 = 2$  的位置关系, 并证明你的结论.

20. 对于数对序列  $P: (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ , 记  $T_1(P) = a_1 + b_1$ ,  $T_k(P) = b_k + \max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$  ( $2 \leq k \leq n$ ), 其中  $\max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$  表示  $T_{k-1}(P)$  和  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  两个数中最大的数.

(1) 对于数对序列  $P: (2, 5), (4, 1)$ , 求  $T_1(P), T_2(P)$  的值;

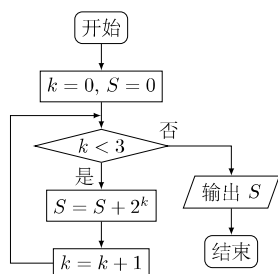
(2) 记  $m$  为  $a, b, c, d$  四个数中最小值, 对于由两个数对  $(a, b), (c, d)$  组成的数对序列  $P: (a, b), (c, d)$  和  $P': (c, d), (a, b)$ , 试分别对  $m = a$  和  $m = d$  时两种情况比较  $T_2(P)$  和  $T_2(P')$  的大小;

(3) 在由 5 个数对  $(11, 8), (5, 2), (16, 11), (11, 11), (4, 6)$  组成的所有数对序列中, 写出一个数对序列  $P$  使  $T_5(P)$  最小, 并写出  $T_5(P)$  的值. (只需写出结论)

# 2014 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

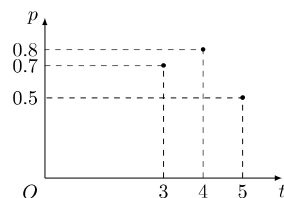
## 一、选择题

- 若集合  $A = \{0, 1, 2, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  (B)  $\{0, 4\}$   
(C)  $\{1, 2\}$  (D)  $\{3\}$
- 下列函数中, 定义域是  $\mathbf{R}$  且为增函数的是 ( )  
(A)  $y = e^{-x}$  (B)  $y = x^3$  (C)  $y = \ln x$  (D)  $y = |x|$
- 已知向量  $\mathbf{a} = (2, 4)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1)$ , 则  $2\mathbf{a} - \mathbf{b} =$  ( )  
(A)  $(5, 7)$  (B)  $(5, 9)$  (C)  $(3, 7)$  (D)  $(3, 9)$
- 执行如图所示的程序框图, 则输出的  $S$  值为 ( )



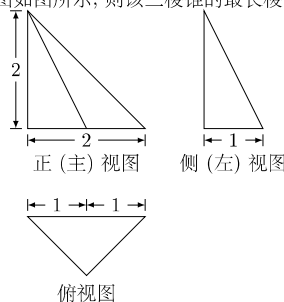
- (A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 15
- 设  $a, b$  是实数, 则“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的 ( )  
(A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
  - 已知函数  $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ , 在下列区间中, 包含  $f(x)$  零点的区间是 ( )  
(A)  $(0, 1)$  (B)  $(1, 2)$  (C)  $(2, 4)$  (D)  $(4, +\infty)$
  - 已知圆  $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$  和两点  $A(-m, 0)$ ,  $B(m, 0)$  ( $m > 0$ ), 若圆  $C$  上存在点  $P$ , 使得  $\angle APB = 90^\circ$ , 则  $m$  的最大值为 ( )  
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4
  - 加工爆米花时, 爆开且不糊的粒数的百分比称为“可食用率”. 在特定条件下, 可食用率  $p$  与加工时间  $t$  (单位: 分钟) 满足函数关系  $p = at^2 + bt + c$  ( $a, b, c$  是常数), 下图记录了三次实验的数据. 根据上述函数模型和实验数据, 可以得到最佳加工时间为 ( )

(A) 3.50 分钟 (B) 3.75 分钟 (C) 4.00 分钟 (D) 4.25 分钟



## 二、填空题

- 若  $(x+i)i = -1+2i$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则  $x =$ \_\_\_\_\_.
- 设双曲线  $C$  的两个焦点为  $(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, 0)$ , 一个顶点是  $(1, 0)$ , 则  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.
- 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的最长棱的棱长为\_\_\_\_\_.



- 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $\cos C = \frac{1}{4}$ , 则  $c =$ \_\_\_\_\_;  $\sin A =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} y \leq 1, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ x + y - 1 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = \sqrt{3}x + y$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 顾客请一位工艺师把  $A, B$  两件玉石原料各制成一件工艺品, 工艺师带一位徒弟完成这项任务, 每件原料先由徒弟完成粗加工, 再由工艺师进行精加工完成制作, 两件工艺品都完成后交付顾客, 两件原料每道工序所需时间 (单位: 工作日) 如下:

时间 \ 工序	粗加工	精加工
原料		
原料 A	9	15
原料 B	6	21

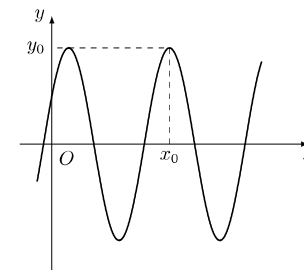
则最短交货期为\_\_\_\_\_个工作日.

## 三、解答题

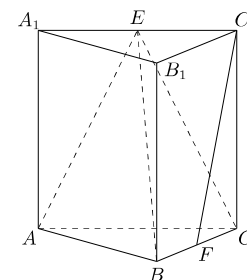
- 已知  $\{a_n\}$  是等差数列, 满足  $a_1 = 3$ ,  $a_4 = 12$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 4$ ,  $b_4 = 20$ , 且  $\{b_n - a_n\}$  是等比数列.  
(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;  
(2) 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和.

- 函数  $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的部分图象如图所示.

- 写出  $f(x)$  的最小正周期及图中  $x_0, y_0$  的值;
- 求  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$  上的最大值和最小值.

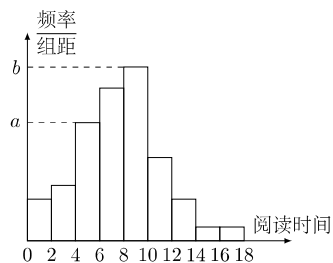


- 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧棱垂直于底面,  $AB \perp BC$ ,  $AA_1 = AC = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $E, F$  分别为  $A_1C_1, BC$  的中点.  
(1) 求证: 平面  $ABE \perp$  平面  $B_1CC_1$ ;  
(2) 求证:  $C_1F \parallel$  平面  $ABE$ ;  
(3) 求三棱锥  $E - ABC$  的体积.



18. 从某校随机抽取 100 名学生, 获得了他们一周课外阅读时间 (单位: 小时) 的数据, 整理得到数据分组及频数分布表和频率分布直方图:

组号	分组	频数
1	$[0, 2)$	6
2	$[2, 4)$	8
3	$[4, 6)$	17
4	$[6, 8)$	22
5	$[8, 10)$	25
6	$[10, 12)$	12
7	$[12, 14)$	6
8	$[14, 16)$	2
9	$[16, 18)$	2
合计		100



19. 已知椭圆  $C: x^2 + 2y^2 = 4$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的离心率;
- (2) 设  $O$  为原点, 若点  $A$  在直线  $y = 2$  上, 点  $B$  在椭圆  $C$  上, 且  $OA \perp OB$ , 求线段  $AB$  长度的最小值.

20. 已知函数  $f(x) = 2x^3 - 3x$ .

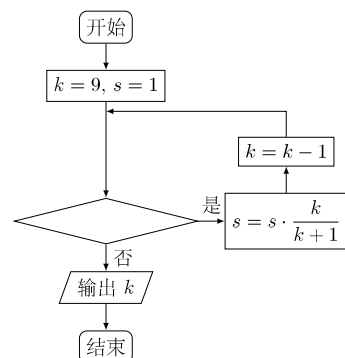
- (1) 求  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上的最大值;
- (2) 若过点  $P(1, t)$  存在 3 条直线与曲线  $y = f(x)$  相切, 求  $t$  的取值范围;
- (3) 问过点  $A(-1, 2)$ ,  $B(2, 10)$ ,  $C(0, 2)$  分别存在几条直线与曲线  $y = f(x)$  相切? (只需写出结论)

- (1) 从该校随机选取一名学生, 试估计这名学生该周课外阅读时间少于 12 小时的概率;
- (2) 求频率分布直方图中的  $a, b$  的值;
- (3) 假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替, 试估计样本中的 100 名学生该周课外阅读时间的平均数在第几组. (只需写出结论)

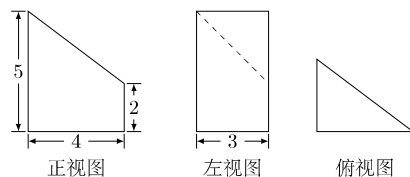
# 2014 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

## 一、选择题

- 在复平面内表示复数  $i(1-2i)$  的点位于 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 对任意等比数列  $\{a_n\}$ , 下列说法一定正确的是 ( )  
(A)  $a_1, a_3, a_9$  成等比数列 (B)  $a_2, a_3, a_6$  成等比数列  
(C)  $a_2, a_4, a_8$  成等比数列 (D)  $a_3, a_6, a_9$  成等比数列
- 已知变量  $x$  与  $y$  正相关, 且由观测数据算得样本平均数  $\bar{x} = 3, \bar{y} = 3.5$ , 则由该观测数据算得的线性回归方程可能是 ( )  
(A)  $\hat{y} = 0.4x + 2.3$  (B)  $\hat{y} = 2x - 2.4$   
(C)  $\hat{y} = -2x + 9.5$  (D)  $\hat{y} = -0.3x + 4.4$
- 已知向量  $\mathbf{a} = (k, 3), \mathbf{b} = (1, 4), \mathbf{c} = (2, 1)$ , 且  $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$ , 则实数  $k =$  ( )  
(A)  $-\frac{9}{2}$  (B) 0 (C) 3 (D)  $\frac{15}{2}$
- 执行如图所示的程序框图, 若输出  $k$  的值为 6, 则判断框内可填入的条件是 ( )



- (A)  $s > \frac{1}{2}$  (B)  $s > \frac{3}{5}$  (C)  $s > \frac{7}{10}$  (D)  $s > \frac{4}{5}$
- 已知命题  $p$ : 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 总有  $2^x > 0$ ;  $q$ : “ $x > 1$ ”是“ $x > 2$ ”的充分不必要条件. 则下列命题为真命题的是 ( )  
(A)  $p \wedge q$  (B)  $\neg p \wedge \neg q$  (C)  $\neg p \wedge q$  (D)  $p \wedge \neg q$
  - 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ( )



- (A) 54 (B) 60 (C) 66 (D) 72
- 设  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 双曲线上存在一点  $P$  使得  $|PF_1| + |PF_2| = 3b, |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$ , 则该双曲线的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{5}{3}$  (C)  $\frac{9}{4}$  (D) 3
  - 某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目, 2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序, 则同类节目不相邻的排法种数是 ( )  
(A) 72 (B) 120 (C) 144 (D) 168
  - 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  满足  $\sin 2A + \sin(A - B + C) = \sin(C - A - B) + \frac{1}{2}$ , 面积  $S$  满足  $1 \leq S \leq 2$ , 记  $a, b, c$  分别为  $A, B, C$  所对的边, 则下列不等式一定成立的是 ( )  
(A)  $bc(b + c) > 8$  (B)  $ab(a + b) > 16\sqrt{2}$   
(C)  $6 \leq abc \leq 12$  (D)  $12 \leq abc \leq 24$

## 二、填空题

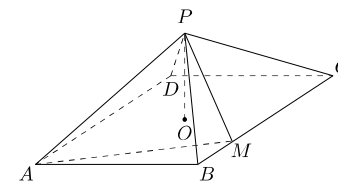
- 设全集  $U = \{n \in \mathbf{N} | 1 \leq n \leq 10\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap B =$ \_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = \log_2 \sqrt{x} \cdot \log_{\sqrt{2}}(2x)$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 已知直线  $ax + y - 2 = 0$  与圆心为  $C$  的圆  $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点, 且  $\triangle ABC$  为等边三角形, 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 过圆外一点  $P$  作圆的切线  $PA$  ( $A$  为切点), 再作割线  $PBC$  依次交圆于  $B, C$ , 若  $PA = 6, AC = 8, BC = 9$ , 则  $AB =$ \_\_\_\_\_.
- 已知直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 + t, \end{cases} (t \text{ 为参数})$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho \sin^2 \theta - 4 \cos \theta = 0 (\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ , 则直线  $l$  与曲线  $C$  的公共点的极径  $\rho =$ \_\_\_\_\_.
- 若不等式  $|2x - 1| + |x + 2| \geq a^2 + \frac{1}{2}a + 2$  对任意实数  $x$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称, 且图象上相邻两个最高点的距离为  $\pi$ .  
(1) 求  $\omega$  和  $\varphi$  的值;  
(2) 若  $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}\right)$ , 求  $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$  的值.

- 一盒中装有 9 张各写有一个数字的卡片, 其中 4 张卡片上的数字是 1, 3 张卡片上的数字是 2, 2 张卡片上的数字是 3, 从盒中任取 3 张卡片.  
(1) 求所取 3 张卡片上的数字完全相同的概率;  
(2)  $X$  表示所取 3 张卡片上的数字的中位数, 求  $X$  的分布列与数学期望.  
(注: 若三个数  $a, b, c$  满足  $a \leq b \leq c$ , 则称  $b$  为这三个数的中位数)

- 如图, 四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面是以  $O$  为中心的菱形,  $PO \perp$  底面  $ABCD, AB = 2, \angle BAD = \frac{\pi}{3}, M$  为  $BC$  上一点, 且  $BM = \frac{1}{2}, MP \perp AP$ .  
(1) 求  $PO$  的长;  
(2) 求二面角  $A - PM - C$  的正弦值.



20. 已知函数  $f(x) = ae^{2x} - be^{-2x} - cx$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ ) 的导函数  $f'(x)$  为偶函数, 且曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线的斜率为  $4 - c$ .

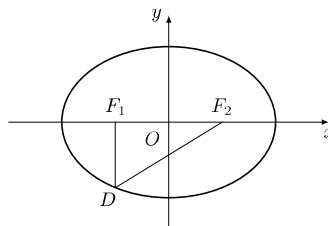
- (1) 确定  $a, b$  的值;
- (2) 若  $c = 3$ , 判断  $f(x)$  的单调性;
- (3) 若  $f(x)$  有极值, 求  $c$  的取值范围.

21. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $D$  在椭圆上,  $DF_1 \perp F_1F_2$ ,  $\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|} = 2\sqrt{2}$ ,  $\triangle DF_1F_2$  的面积为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- (1) 求该椭圆的标准方程;
- (2) 设圆心在  $y$  轴上的圆与椭圆在  $x$  轴的上方有两个交点, 且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点, 求圆的半径.

22. 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 2} + b$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

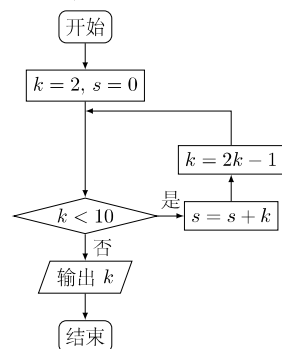
- (1) 若  $b = 1$ , 求  $a_2, a_3$  及数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 若  $b = -1$ , 问: 是否存在实数  $c$ , 使得  $a_{2n} < c < a_{2n+1}$  对所有  $n \in \mathbf{N}^*$  成立? 证明你的结论.



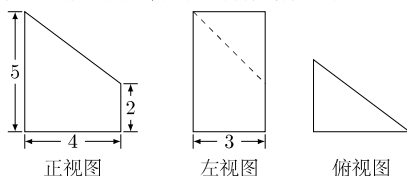
# 2014 普通高等学校招生考试 (重庆卷文)

## 一、选择题

- 实部为  $-2$ , 虚部为  $1$  的复数所对应的点位于复平面的 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $a_3 + a_5 = 10$ , 则  $a_7 =$  ( )  
(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 14
- 某中学有高中生 3500 人, 初中生 1500 人, 为了解学生的学习情况, 用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为  $n$  的样本, 已知从高中生中抽取 70 人, 则  $n$  为 ( )  
(A) 100 (B) 150 (C) 200 (D) 250
- 下列函数为偶函数的是 ( )  
(A)  $f(x) = x - 1$  (B)  $f(x) = x^2 + x$   
(C)  $f(x) = 2^x - 2^{-x}$  (D)  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$
- 执行如图所示的程序框图, 则输出  $s$  的值为 ( )



- (A) 10 (B) 17 (C) 19 (D) 36
- 已知命题  $p$ : 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 总有  $|x| \geq 0$ ;  $q$ :  $x = 1$  是方程  $x + 2 = 0$  的根, 则下列命题为真命题的是 ( )  
(A)  $p \wedge \neg q$  (B)  $\neg p \wedge q$  (C)  $\neg p \wedge \neg q$  (D)  $p \wedge q$
- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



- (A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 30

- 设  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点, 双曲线上存在一点  $P$  使得  $(|PF_1| - |PF_2|)^2 = b^2 - 3ab$ , 则该双曲线的离心率为 ( )  
(A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt{15}$  (C) 4 (D)  $\sqrt{17}$
- 若  $\log_4(3a + 4b) = \log_2 \sqrt{ab}$ , 则  $a + b$  的最小值是 ( )  
(A)  $6 + 2\sqrt{3}$  (B)  $7 + 2\sqrt{3}$  (C)  $6 + 4\sqrt{3}$  (D)  $7 + 4\sqrt{3}$
- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} - 3, & x \in (-1, 0], \\ x, & x \in (0, 1], \end{cases}$  且  $g(x) = f(x) - mx - m$  在  $(-1, 1]$  内有且仅有两个不同的零点, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )  
(A)  $\left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$  (B)  $\left(-\frac{11}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$   
(C)  $\left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$  (D)  $\left(-\frac{11}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$

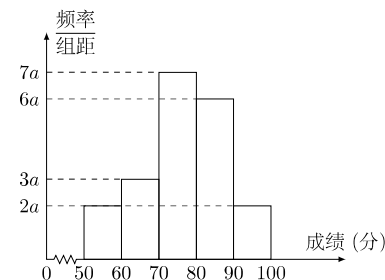
## 二、填空题

- 已知集合  $A = \{3, 4, 5, 12, 13\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 8, 13\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
- 已知向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 且  $\mathbf{a} = (-2, -6)$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{10}$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ \_\_\_\_\_.
- 将函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半, 纵坐标不变, 再向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到  $y = \sin x$  的图象, 则  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ \_\_\_\_\_.
- 已知直线  $x - y + a = 0$  与圆心为  $C$  的圆  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$  相交于  $A, B$  两点, 且  $AC \perp BC$ , 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
- 某校早上 8:00 上课, 假设该校学生小张与小王在早上 7:30 - 7:50 之间到校, 且每人在该时间段的任何时刻到校是等可能的, 则小张比小王至少早 5 分钟到校的概率为\_\_\_\_\_. (用数字作答)

## 三、解答题

- 已知  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公差为 2 的等差数列,  $S_n$  表示  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和.  
(1) 求  $a_n$  及  $S_n$ ;  
(2) 设  $\{b_n\}$  是首项为 2 的等比数列, 公比  $q$  满足  $q^2 - (a_4 + 1)q + S_4 = 0$ , 求  $\{b_n\}$  的通项公式及其前  $n$  项和  $T_n$ .

- 20 名学生某次数学考试成绩 (单位: 分) 的频率分布直方图如图.

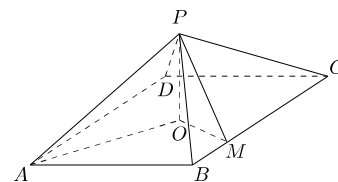


- (1) 求频率分布直方图中  $a$  的值;
- (2) 分别求出成绩落在  $[50, 60)$  与  $[60, 70)$  中的学生人数;
- (3) 从成绩在  $[50, 70)$  的学生中任选 2 人, 求此 2 人的成绩都在  $[60, 70)$  中的概率.

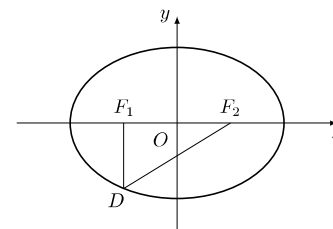
- 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $a + b + c = 8$ .  
(1) 若  $a = 2, b = \frac{5}{2}$ , 求  $\cos C$  的值;
- (2) 若  $\sin A \cos^2 \frac{B}{2} + \sin B \cos^2 \frac{A}{2} = 2 \sin C$ , 且  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{9}{2} \sin C$ , 求  $a$  和  $b$  的值.

19. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{a}{x} - \ln x - \frac{3}{2}$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ , 且曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线垂直于  $y = \frac{1}{2}x$ .
- (1) 求  $a$  的值;
  - (2) 求函数  $f(x)$  的单调区间和极值.

20. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面是以  $O$  为中心的菱形,  $PO \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AB = 2$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,  $M$  为  $BC$  上一点, 且  $BM = \frac{1}{2}$ .
- (1) 证明:  $BC \perp$  平面  $POM$ ;
  - (2) 若  $MP \perp AP$ , 求四棱锥  $P-ABMO$  的体积.



21. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 点  $D$  在椭圆上,  $DF_1 \perp F_1F_2$ ,  $\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|} = 2\sqrt{2}$ ,  $\triangle DF_1F_2$  的面积为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- (1) 求该椭圆的标准方程;
  - (2) 是否存在圆心在  $y$  轴上的圆, 使圆在  $x$  轴的上方与椭圆有两个交点, 且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点? 若存在, 求出圆的方程; 若不存在, 请说明理由.





# 2014 普通高等学校招生考试 (大纲卷理)

## 一、选择题

- 设  $z = \frac{10i}{3+i}$ , 则  $z$  的共轭复数为 ( )  
(A)  $-1+3i$  (B)  $-1-3i$  (C)  $1+3i$  (D)  $1-3i$
- 设集合  $M = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$ ,  $N = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $(0, 4]$  (B)  $[0, 4)$  (C)  $[-1, 0)$  (D)  $(-1, 0]$
- 设  $a = \sin 33^\circ$ ,  $b = \cos 55^\circ$ ,  $c = \tan 35^\circ$ , 则 ( )  
(A)  $a > b > c$  (B)  $b > c > a$  (C)  $c > b > a$  (D)  $c > a > b$
- 若向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  满足:  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ ,  $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ , 则  $|\mathbf{b}| =$  ( )  
(A) 2 (B)  $\sqrt{2}$  (C) 1 (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 ( )  
(A) 60 种 (B) 70 种 (C) 75 种 (D) 150 种
- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点, 若  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ , 则  $C$  的方程为 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  (C)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
- 曲线  $y = xe^{x-1}$  在点  $(1, 1)$  处切线的斜率等于 ( )  
(A)  $2e$  (B)  $e$  (C) 2 (D) 1
- 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 ( )  
(A)  $\frac{81\pi}{4}$  (B)  $16\pi$  (C)  $9\pi$  (D)  $\frac{27\pi}{4}$
- 已知双曲线  $C$  的离心率为 2, 焦点为  $F_1$ 、 $F_2$ , 点  $A$  在  $C$  上, 若  $|F_1A| = 2|F_2A|$ , 则  $\cos \angle AF_2F_1 =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_4 = 2$ ,  $a_5 = 5$ , 则数列  $\{\lg a_n\}$  的前 8 项和等于 ( )  
(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
- 已知二面角  $\alpha-l-\beta$  为  $60^\circ$ ,  $AB \subset \alpha$ ,  $AB \perp l$ ,  $A$  为垂足,  $CD \subset \beta$ ,  $C \in l$ ,  $\angle ACD = 135^\circ$ , 则异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角的余弦值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$
- 函数  $y = f(x)$  的图象与函数  $y = g(x)$  的图象关于直线  $x + y = 0$  对称, 则  $y = f(x)$  的反函数是 ( )  
(A)  $y = g(x)$  (B)  $y = g(-x)$  (C)  $y = -g(x)$  (D)  $y = -g(-x)$

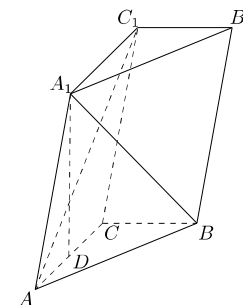
## 二、填空题

- $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$  的展开式中  $x^2y^2$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)
- 设  $x$ 、 $y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + 2y \leq 3, \\ x - 2y \leq 1, \end{cases}$  则  $z = x + 4y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 直线  $l_1$  和  $l_2$  是圆  $x^2 + y^2 = 2$  的两条切线, 若  $l_1$  与  $l_2$  的交点为  $(1, 3)$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的夹角的正切值等于\_\_\_\_\_.
- 若函数  $f(x) = \cos 2x + a \sin x$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$  上是减函数, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 已知  $3a \cos C = 2c \cos A$ ,  $\tan A = \frac{1}{3}$ , 求  $B$ .
- 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_1 = 10$ ,  $a_2$  为整数, 且  $S_n \leq S_4$ .  
(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 设  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

- 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 点  $A_1$  在平面  $ABC$  内的射影  $D$  在  $AC$  上,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 1$ ,  $AC = CC_1 = 2$ .  
(1) 证明:  $AC_1 \perp A_1B$ ;  
(2) 设直线  $AA_1$  与平面  $BCC_1B_1$  的距离为  $\sqrt{3}$ , 求二面角  $A_1 - AB - C$  的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.
- (1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;
  - (2)  $X$  表示同一工作日需使用设备的人数, 求  $X$  的数学期望.
21. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 直线  $y = 4$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 与  $C$  的交点为  $Q$ , 且  $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ .
- (1) 求  $C$  的方程;
  - (2) 过  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点, 若  $AB$  的垂直平分线  $l'$  与  $C$  相交于  $M$ 、 $N$  两点, 且  $A$ 、 $M$ 、 $B$ 、 $N$  四点在同一圆上, 求  $l$  的方程.
22. 函数  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+a}$  ( $a > 1$ ).
- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
  - (2) 设  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$ , 证明:  $\frac{2}{n+2} < a_n \leq \frac{3}{n+2}$ .

# 2014 普通高等学校招生考试 (大纲卷文)

## 一、选择题

1. 设集合  $M = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $N = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ , 则  $M \cap N$  中元素的个数为 ( )  
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7
2. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $(-4, 3)$ , 则  $\cos \alpha =$  ( )  
(A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{3}{5}$  (C)  $-\frac{3}{5}$  (D)  $-\frac{4}{5}$
3. 不等式组  $\begin{cases} x(x+2) > 0, \\ |x| < 1 \end{cases}$  的解集为 ( )  
(A)  $\{x | -2 < x < -1\}$  (B)  $\{x | -1 < x < 0\}$   
(C)  $\{x | 0 < x < 1\}$  (D)  $\{x | x > 1\}$
4. 已知正四面体  $ABCD$  中,  $E$  是  $AB$  的中点, 则异面直线  $CE$  与  $BD$  所成角的余弦值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. 函数  $y = \ln(\sqrt[3]{x} + 1)$  ( $x > -1$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = (1 - e^x)^3$  ( $x > -1$ ) (B)  $y = (e^x - 1)^3$  ( $x > -1$ )  
(C)  $y = (1 - e^x)^3$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (D)  $y = (e^x - 1)^3$  ( $x \in \mathbf{R}$ )
6. 已知  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  为单位向量, 其夹角为  $60^\circ$ , 则  $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} =$  ( )  
(A)  $-1$  (B)  $0$  (C)  $1$  (D)  $2$
7. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 ( )  
(A) 60 种 (B) 70 种 (C) 75 种 (D) 150 种
8. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_2 = 3$ ,  $S_4 = 15$ , 则  $S_6 =$  ( )  
(A) 31 (B) 32 (C) 63 (D) 64
9. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点, 若  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ , 则  $C$  的方程为 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  (C)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
10. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 ( )  
(A)  $\frac{81\pi}{4}$  (B)  $16\pi$  (C)  $9\pi$  (D)  $\frac{27\pi}{4}$

11. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为  $\sqrt{3}$ , 则  $C$  的焦距等于 ( )  
(A) 2 (B)  $2\sqrt{2}$  (C) 4 (D)  $4\sqrt{2}$
12. 奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若  $f(x+2)$  为偶函数,  $f(1) = 1$ , 则  $f(8) + f(9) =$  ( )  
(A)  $-2$  (B)  $-1$  (C)  $0$  (D)  $1$

## 二、填空题

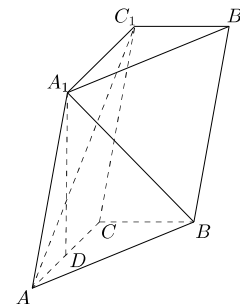
13.  $(x-2)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)
14. 函数  $y = \cos 2x + 2 \sin x$  的最大值为\_\_\_\_\_.
15. 设  $x$ 、 $y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + 2y \leq 3, \\ x - 2y \leq 1, \end{cases}$  则  $z = x + 4y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
16. 直线  $l_1$  和  $l_2$  是圆  $x^2 + y^2 = 2$  的两条切线, 若  $l_1$  与  $l_2$  的交点为  $(1, 3)$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的夹角的正切值等于\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ .  
(1) 设  $b_n = a_{n+1} - a_n$ , 证明  $\{b_n\}$  是等差数列;  
(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

18.  $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 已知  $3a \cos C = 2c \cos A$ ,  $\tan A = \frac{1}{3}$ , 求  $B$ .

19. 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 点  $A_1$  在平面  $ABC$  内的射影  $D$  在  $AC$  上,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 1$ ,  $AC = CC_1 = 2$ .  
(1) 证明:  $AC_1 \perp A_1B$ ;  
(2) 设直线  $AA_1$  与平面  $BCC_1B_1$  的距离为  $\sqrt{3}$ , 求二面角  $A_1 - AB - C$  的大小.

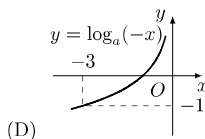
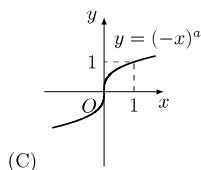
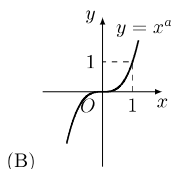
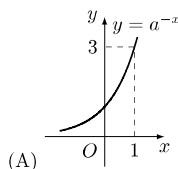
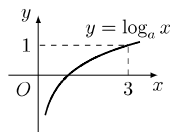


20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.
- (1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;
  - (2) 实验室计划购买  $k$  台设备供甲、乙、丙、丁使用, 若要求“同一工作日需使用设备的人数大于  $k$ ”的概率小于 0.1, 求  $k$  的最小值.
21. 函数  $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$  ( $a \neq 0$ ).
- (1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;
  - (2) 若函数  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  是增函数, 求  $a$  的取值范围.
22. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 直线  $y = 4$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 与  $C$  的交点为  $Q$ , 且  $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ .
- (1) 求  $C$  的方程;
  - (2) 过  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点, 若  $AB$  的垂直平分线  $l'$  与  $C$  相交于  $M$ 、 $N$  两点, 且  $A$ 、 $M$ 、 $B$ 、 $N$  四点在同一圆上, 求  $l$  的方程.

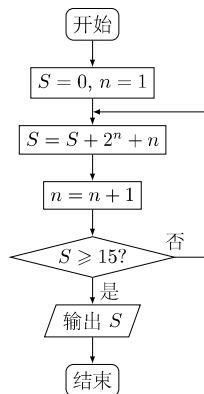
# 2014 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

## 一、选择题

- 复数  $z = (3 - 2i)i$  的共轭复数  $\bar{z}$  等于 ( )  
(A)  $-2 - 3i$  (B)  $-2 + 3i$  (C)  $2 - 3i$  (D)  $2 + 3i$
- 某空间几何体的正视图是三角形, 则该几何体不可能是 ( )  
(A) 圆柱 (B) 圆锥 (C) 四面体 (D) 三棱柱
- 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1 = 2$ ,  $S_3 = 12$ , 则  $a_6 =$  ( )  
(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14
- 若函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象如图所示, 则下列函数图象正确的是 ( )



- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的  $S$  的值等于 ( )



- (A) 18 (B) 20 (C) 21 (D) 40

- 直线  $l: y = kx + 1$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  相交于  $A, B$  两点, 则“ $k = 1$ ”是“ $\triangle OAB$  的面积为  $\frac{1}{2}$ ”的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0, \\ \cos x, & x \leq 0, \end{cases}$  则下列结论正确的是 ( )

- (A)  $f(x)$  是偶函数 (B)  $f(x)$  是增函数  
(C)  $f(x)$  是周期函数 (D)  $f(x)$  的值域为  $[-1, +\infty)$

- 在下列向量组中, 可以把向量  $a = (3, 2)$  表示出来的是 ( )

- (A)  $e_1 = (0, 0), e_2 = (1, 2)$  (B)  $e_1 = (-1, 2), e_2 = (5, -2)$   
(C)  $e_1 = (3, 5), e_2 = (6, 10)$  (D)  $e_1 = (2, -3), e_2 = (-2, 3)$

- 设  $P, Q$  分别为圆  $x^2 + (y - 6)^2 = 2$  和椭圆  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$  上的点, 则  $P, Q$  两点间的最大距离是 ( )

- (A)  $5\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt{46} + \sqrt{2}$  (C)  $7 + \sqrt{2}$  (D)  $6\sqrt{2}$

- 用  $a$  代表红球,  $b$  代表蓝球,  $c$  代表黑球, 由加法原理及乘法原理, 从 1 个红球和 1 个蓝球中取出若干个球的所有取法可由  $(1 + a)(1 + b)$  的展开式  $1 + a + b + ab$  表示出来, 如: “1”表示一个球都不取, “ $a$ ”表示取出一个红球, 而“ $ab$ ”则表示把红球和蓝球都取出来. 以此类推, 下列各式中, 其展开式可用来表示从 5 个无区别的红球、5 个无区别的蓝球、5 个有区别的黑球中取出若干个球, 且所有的蓝球都取出或都不取出的所有取法的是 ( )

- (A)  $(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5)(1 + b^5)(1 + c)^5$   
(B)  $(1 + a^5)(1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5)(1 + c)^5$   
(C)  $(1 + a)^5(1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5)(1 + c^5)$   
(D)  $(1 + a^5)(1 + b)^5(1 + c + c^2 + c^3 + c^4 + c^5)$

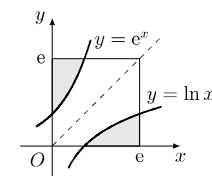
## 二、填空题

- 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 1 \leq 0, \\ x + 2y - 8 \leq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 3x + y$  的最小值为\_\_\_\_\_.

- 在  $\triangle ABC$  中,  $A = 60^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积等于\_\_\_\_\_.

- 要制作一个容积为  $4 \text{ m}^3$ , 高为  $1 \text{ m}$  的无盖长方体容器, 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元, 侧面造价是每平方米 10 元, 则该容器的最低总造价是\_\_\_\_\_. (单位: 元)

- 如图, 在边长为  $e$  ( $e$  为自然对数的底数) 的正方形中随机撒一粒黄豆, 则它落到阴影部分的概率为\_\_\_\_\_.



- 若集合  $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , 且下列四个关系: ①  $a = 1$ ; ②  $b \neq 1$ ; ③  $c = 2$ ; ④  $d \neq 4$ , 有且只有一个是正确的, 则符合条件的有序数组  $(a, b, c, d)$  的个数是\_\_\_\_\_.

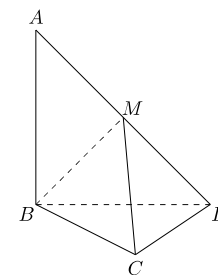
## 三、解答题

- 已知函数  $f(x) = \cos x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$ .

- 若  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 且  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 求  $f(\alpha)$  的值;
- 求函数  $f(x)$  的最小正周期及单调递增区间.

- 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AB = BD = CD = 1$ ,  $AB \perp BD$ ,  $CD \perp BD$ . 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  折起, 使得平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ , 如图.

- 求证:  $AB \perp CD$ ;
- 若  $M$  为  $AD$  中点, 求直线  $AD$  与平面  $MBC$  所成角的正弦值.



18. 为回馈顾客, 某商场拟通过摸球兑奖的方式对 1000 位顾客进行奖励, 规定: 每位顾客从一个装有 4 个标有面值的球的袋中一次性随机摸出 2 个球, 球上所标的面值之和为该顾客所获的奖励额.

(1) 若袋中所装的 4 个球中有 1 个所标的面值为 50 元, 其余 3 个均为 10 元, 求:

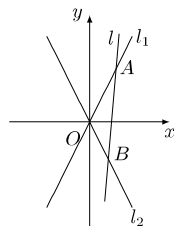
- ① 顾客所获的奖励额为 60 元的概率;
- ② 顾客所获的奖励额的分布列及数学期望;

(2) 商场对奖励总额的预算是 60000 元, 并规定袋中的 4 个球只能由标有面值 10 元和 50 元的两种球组成, 或标有面值 20 元和 40 元的两种球组成. 为了使顾客得到的奖励总额尽可能符合商场的预算且每位顾客所获的奖励额相对均衡, 请对袋中的 4 个球的面值给出一个合适的设计, 并说明理由.

19. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两条渐近线分别为  $l_1: y = 2x, l_2: y = -2x$ .

(1) 求双曲线  $E$  的离心率;

(2) 如图,  $O$  为坐标原点, 动直线  $l$  分别交直线  $l_1, l_2$  于  $A, B$  两点 ( $A, B$  分别在第一, 四象限), 且  $\triangle OAB$  的面积恒为 8, 试探究: 是否存在总与直线  $l$  有且只有一个公共点的双曲线  $E$ ? 若存在, 求出双曲线  $E$  的方程; 若不存在, 说明理由.



20. 已知函数  $f(x) = e^x - ax$  ( $a$  为常数) 的图象与  $y$  轴交于点  $A$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $A$  处的切线斜率为  $-1$ .

- (1) 求  $a$  的值及函数  $f(x)$  的极值;
- (2) 证明: 当  $x > 0$  时,  $x^2 < e^x$ ;
- (3) 证明: 对任意给定的正数  $c$ , 总存在  $x_0$ , 使得当  $x \in (x_0, +\infty)$  时, 恒有  $x^2 < ce^x$ .

21. 三选二.

【A】已知矩阵  $A$  的逆矩阵  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (1) 求矩阵  $A$ ;
- (2) 求矩阵  $A^{-1}$  的特征值以及属于每个特征值的一个特征向量.

【B】已知直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = a - 2t, \\ y = -4t, \end{cases}$  ( $t$  为参数), 圆  $C$  的参数方程

为  $\begin{cases} x = 4 \cos \theta, \\ y = 4 \sin \theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数).

- (1) 求直线  $l$  和圆  $C$  的普通方程;
- (2) 若直线  $l$  与圆  $C$  有公共点, 求实数  $a$  的取值范围.

【C】已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x) = |x+1| + |x-2|$  的最小值为  $a$ .

- (1) 求  $a$  的值;
- (2) 若  $p, q, r$  为正实数, 且  $p+q+r=a$ , 求证:  $p^2+q^2+r^2 \geq 3$ .

# 2014 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

## 一、选择题

1. 若集合  $P = \{x \mid 2 \leq x < 4\}$ ,  $Q = \{x \mid x \geq 3\}$ , 则  $P \cap Q$  等于 ( )

- (A)  $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$  (B)  $\{x \mid 3 < x < 4\}$   
(C)  $\{x \mid 2 \leq x < 3\}$  (D)  $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$

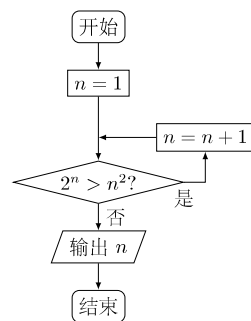
2. 复数  $(3 + 2i)i$  等于 ( )

- (A)  $-2 - 3i$  (B)  $-2 + 3i$  (C)  $2 - 3i$  (D)  $2 + 3i$

3. 以边长为 1 的正方形的一边所在直线为旋转轴, 将该正方形旋转一周所得圆柱的侧面积等于 ( )

- (A)  $2\pi$  (B)  $\pi$  (C) 2 (D) 1

4. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的  $n$  的值为 ( )



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$ ,  $x^3 + x \geq 0$ ”的否定是 ( )

- (A)  $\forall x \in (-\infty, 0)$ ,  $x^3 + x < 0$  (B)  $\forall x \in (-\infty, 0)$ ,  $x^3 + x \geq 0$   
(C)  $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ ,  $x_0^3 + x_0 < 0$  (D)  $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ ,  $x_0^3 + x_0 \geq 0$

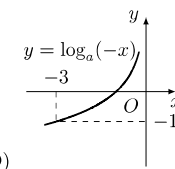
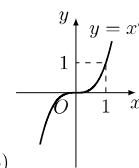
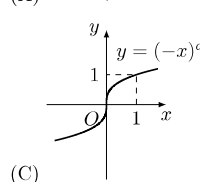
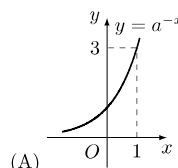
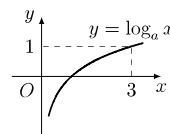
6. 已知直线  $l$  过圆  $x^2 + (y - 3)^2 = 4$  的圆心, 且与直线  $x + y + 1 = 0$  垂直, 则  $l$  的方程是 ( )

- (A)  $x + y - 2 = 0$  (B)  $x - y + 2 = 0$  (C)  $x + y - 3 = 0$  (D)  $x - y + 3 = 0$

7. 将函数  $y = \sin x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位, 得到函数  $y = f(x)$  的函数图象, 则下列说法正确的是 ( )

- (A)  $y = f(x)$  是奇函数  
(B)  $y = f(x)$  的周期是  $\pi$   
(C)  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称  
(D)  $y = f(x)$  的图象关于点  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  对称

8. 若函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象如图所示, 则下列函数图象正确的是 ( )

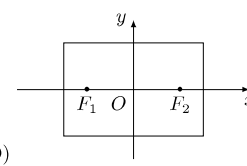
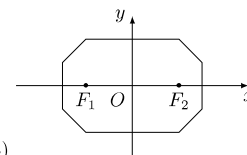
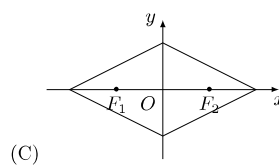
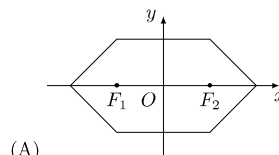


9. 要制作一个容积为  $4 \text{ m}^3$ , 高为 1 m 的无盖长方体容器, 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元, 侧面造价是每平方米 10 元, 则该容器的最低总造价是 ( )  
(A) 80 元 (B) 120 元 (C) 160 元 (D) 240 元

10. 设  $M$  为平行四边形  $ABCD$  对角线的交点,  $O$  为平行四边形  $ABCD$  所在平面内任意一点, 则  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$  等于 ( )  
(A)  $\vec{OM}$  (B)  $2\vec{OM}$  (C)  $3\vec{OM}$  (D)  $4\vec{OM}$

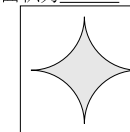
11. 已知圆  $C: (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ , 平面区域  $\Omega: \begin{cases} x + y - 7 \leq 0, \\ x - y + 3 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$  若圆心  $C \in \Omega$ , 且圆  $C$  与  $x$  轴相切, 则  $a^2 + b^2$  的最大值为 ( )  
(A) 5 (B) 29 (C) 37 (D) 49

12. 在平面直角坐标系中, 两点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  间的“L-距离”定义为  $|P_1 P_2| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ , 则平面内与  $x$  轴上两个不同的定点  $F_1, F_2$  的“L-距离”之和等于定值 (大于  $|F_1 F_2|$ ) 的点的轨迹可以是



## 二、填空题

13. 如图, 在边长为 1 的正方形中, 随机撒 1000 粒豆子, 有 180 粒落到阴影部分, 据此估计阴影部分的面积为\_\_\_\_\_.



14. 在  $\triangle ABC$  中,  $A = 60^\circ$ ,  $AC = 2$ ,  $BC = \sqrt{3}$ , 则  $AB$  等于\_\_\_\_\_.

15. 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ 2x - 6 + \ln x, & x > 0, \end{cases}$  的零点个数是\_\_\_\_\_.

16. 已知集合  $\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$ , 且下列三个关系: ①  $a \neq 2$ ; ②  $b = 2$ ; ③  $c \neq 0$  有且只有一个正确, 则  $100a + 10b + c =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 = 3$ ,  $a_5 = 81$ .  
(1) 求  $a_n$ ;  
(2) 设  $b_n = \log_3 a_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. 已知函数  $f(x) = 2 \cos x (\sin x + \cos x)$ .

- (1) 求  $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$  的值;
- (2) 求函数  $f(x)$  的最小正周期及单调递增区间.

20. 根据世行 2013 年新标准, 人均 GDP 低于 1035 美元为低收入国家; 人均 GDP 为 1035—4085 美元为中等偏下收入国家; 人均 GDP 为 4085—12616 美元为中等偏上收入国家; 人均 GDP 不低于 12616 美元为高收入国家. 某城市有 5 个行政区, 各区人口占该城市人口比例及人均 GDP 如下表:

行政区	区人口占城市人口比例	区人均 GDP (单位: 美元)
A	25%	8000
B	30%	4000
C	15%	6000
D	10%	3000
E	20%	10000

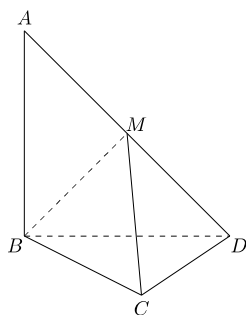
- (1) 判断该城市人均 GDP 是否达到中等偏上收入国家标准;
- (2) 现从该城市 5 个行政区中随机抽取 2 个, 求抽到的 2 个行政区人均 GDP 都达到中等偏上收入国家标准的概率.

22. 已知函数  $f(x) = e^x - ax$  ( $a$  为常数) 的图象与  $y$  轴交于点  $A$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $A$  处的切线斜率为  $-1$ .

- (1) 求  $a$  的值及函数  $f(x)$  的极值;
- (2) 证明: 当  $x > 0$  时,  $x^2 < e^x$ ;
- (3) 证明: 对任意给定的正数  $c$ , 总存在  $x_0$ , 使得当  $x \in (x_0, +\infty)$  时, 恒有  $x^2 < ce^x$ .

19. 如图, 三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $CD \perp BD$ .

- (1) 求证:  $CD \perp$  平面  $ABD$ ;
- (2) 若  $AB = BD = CD = 1$ ,  $M$  为  $AD$  中点, 求三棱锥  $A-MBC$  的体积.



21. 已知曲线  $\Gamma$  上的点到点  $F(0, 1)$  的距离比它到直线  $y = -3$  的距离小 2.

- (1) 求曲线  $\Gamma$  的方程;
- (2) 曲线  $\Gamma$  在点  $P$  处的切线  $l$  与  $x$  轴交于点  $A$ . 直线  $y = 3$  分别与直线  $l$  及  $y$  轴交于点  $M, N$ . 以  $MN$  为直径作圆  $C$ , 过点  $A$  作圆  $C$  的切线, 切点为  $B$ , 试探究: 当点  $P$  在曲线  $\Gamma$  上运动 (点  $P$  与原点不重合) 时, 线段  $AB$  的长度是否发生变化? 证明你的结论.



# 2014 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{-1, 0, 1\}$ ,  $N = \{0, 1, 2\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )  
(A)  $\{0, 1\}$  (B)  $\{-1, 0, 2\}$  (C)  $\{-1, 0, 1, 2\}$  (D)  $\{-1, 0, 1\}$
- 已知复数  $z$  满足  $(3 + 4i)z = 25$ , 则  $z =$  ( )  
(A)  $-3 + 4i$  (B)  $-3 - 4i$  (C)  $3 + 4i$  (D)  $3 - 4i$
- 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x, \\ x + y \leq 1, \end{cases}$  且  $z = 2x + y$  的最大值和最小值分别为  $m$  和  $n$ , 则  $m - n =$  ( )  
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
- 若实数  $k$  满足  $0 < k < 9$ , 则曲线  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9-k} = 1$  与曲线  $\frac{x^2}{25-k} - \frac{y^2}{9} = 1$  的 ( )  
(A) 焦距相等 (B) 实半轴长相等 (C) 虚半轴长相等 (D) 离心率相等
- 已知向量  $\alpha = (1, 0, -1)$ , 则下列向量中与  $\alpha$  成  $60^\circ$  夹角的是 ( )  
(A)  $(-1, 1, 0)$  (B)  $(1, -1, 0)$  (C)  $(0, -1, 1)$  (D)  $(-1, 0, 1)$
- 已知某地区中小學生人數和近視情況如圖 1 和圖 2 所示, 為了解該地區中小學生的近視形成原因, 用分層抽樣的方法抽取 2% 的學生進行調查, 則樣本容量和抽取的高中生近視人數分別為 ( )

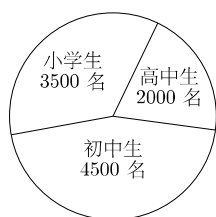


圖 1

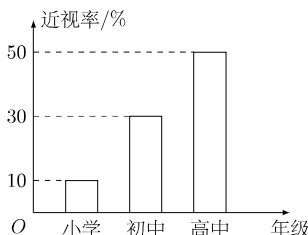
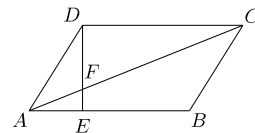


圖 2

- (A) 200, 20 (B) 100, 20 (C) 200, 10 (D) 100, 10
- 若空間中四條兩兩不同的直線  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , 滿足  $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3, l_3 \perp l_4$ , 則下列結論一定正確的是 ( )  
(A)  $l_1 \perp l_4$  (B)  $l_1 \parallel l_4$   
(C)  $l_1, l_4$  既不垂直也不平行 (D)  $l_1, l_4$  的位置關係不確定
- 設集合  $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 那麼集合  $A$  中滿足條件“ $1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ”的元素個數為 ( )  
(A) 60 (B) 90 (C) 120 (D) 130

## 二、填空题

- 不等式  $|x - 1| + |x + 2| \geq 5$  的解集為\_\_\_\_\_.
- 曲線  $y = e^{-5x} + 2$  在點  $(0, 3)$  處的切線方程為\_\_\_\_\_.
- 從  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  中任取七個不同的數, 則這七個數的中位數是 6 的概率為\_\_\_\_\_.
- 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所對應的邊分別為  $a, b, c$ , 已知  $b \cos C + c \cos B = 2b$ , 則  $\frac{a}{b} =$ \_\_\_\_\_.
- 若等比數列  $\{a_n\}$  的各項均為正數, 且  $a_{10}a_{11} + a_9a_{12} = 2e^5$ , 則  $\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_{20} =$ \_\_\_\_\_.
- 在極坐標系中, 曲線  $C_1$  和  $C_2$  的方程分別為  $\rho \sin^2 \theta = \cos \theta$  和  $\rho \sin \theta = 1$ , 以極點為平面直角坐標系的原點, 極軸為  $x$  軸的正半軸, 建立平面直角坐標系, 則曲線  $C_1$  和  $C_2$  的交點的直角坐標為\_\_\_\_\_.
- 如圖, 在平行四邊形  $ABCD$  中, 點  $E$  在  $AB$  上, 且  $EB = 2AE$ ,  $AC$  與  $DE$  交於點  $F$ , 則  $\frac{\triangle CDF \text{ 的面積}}{\triangle AEF \text{ 的面積}} =$ \_\_\_\_\_.



## 三、解答题

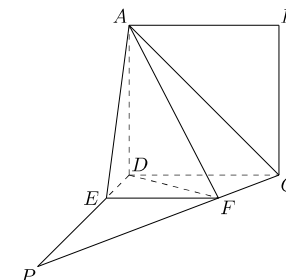
- 已知函數  $f(x) = A \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 且  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3}{2}$ .  
(1) 求  $A$  的值;  
(2) 若  $f(\theta) + f(-\theta) = \frac{3}{2}$ ,  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 求  $f\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right)$ .

- 隨機觀測生產某種零件的某工廠 25 名工人的日加工零件數 (單位: 件), 獲得數據如下: 30, 42, 41, 36, 44, 40, 37, 37, 25, 45, 29, 43, 31, 36, 49, 34, 33, 43, 38, 42, 32, 34, 46, 39, 36. 根據上述數據得到樣本的頻率分布表如下:

分組	頻數	頻率
[25, 30]	3	0.12
(30, 35]	5	0.20
(35, 40]	8	0.32
(40, 45]	$n_1$	$f_1$
(45, 50]	$n_2$	$f_2$

- 確定樣本頻率分布表中  $n_1, n_2, f_1$  和  $f_2$  的值;
- 根據上述頻率分布表, 畫出樣本頻率分布直方圖;
- 根據樣本頻率分布直方圖, 求在該廠任取 4 人, 至少有 1 人的日加工零件數落在區間  $(30, 35]$  的概率.

- 如圖, 四邊形  $ABCD$  為正方形,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\angle DPC = 30^\circ$ ,  $AF \perp PC$  於點  $F$ ,  $FE \parallel CD$ , 交  $PD$  於點  $E$ .  
(1) 證明:  $CF \perp$  平面  $ADF$ ;  
(2) 求二面角  $D - AF - E$  的余弦值.



19. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  和为  $S_n$ , 满足  $S_n = 2na_{n+1} - 3n^2 - 4n, n \in \mathbf{N}^*$ , 且  $S_3 = 15$ .  
 (1) 求  $a_1, a_2, a_3$  的值;  
 (2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.
20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(\sqrt{5}, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .  
 (1) 求椭圆  $C$  的标准方程;  
 (2) 若动点  $P(x_0, y_0)$  为椭圆  $C$  外一点, 且点  $P$  到椭圆  $C$  的两条切线相互垂直, 求点  $P$  的轨迹方程.
21. 设函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x + k)^2 + 2(x^2 + 2x + k) - 3}}$ , 其中  $k < -2$ .  
 (1) 求函数  $f(x)$  的定义域  $D$  (用区间表示);  
 (2) 讨论  $f(x)$  在区间  $D$  上的单调性;  
 (3) 若  $k < -6$ , 求  $D$  上满足条件  $f(x) > f(1)$  的  $x$  的集合 (用区间表示).

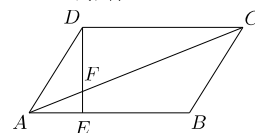
# 2014 普通高等学校招生考试 (广东卷文)

## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{2, 3, 4\}$ ,  $N = \{0, 2, 3, 5\}$ , 则  $M \cap N$  ( )  
(A)  $\{0, 2\}$  (B)  $\{2, 3\}$  (C)  $\{3, 4\}$  (D)  $\{3, 5\}$
- 已知复数  $z$  满足  $(3 - 4i)z = 25$ , 则  $z =$  ( )  
(A)  $-3 - 4i$  (B)  $-3 + 4i$  (C)  $3 - 4i$  (D)  $3 + 4i$
- 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 1)$ , 则  $\mathbf{b} - \mathbf{a} =$  ( )  
(A)  $(-2, 1)$  (B)  $(2, -1)$  (C)  $(2, 0)$  (D)  $(4, 3)$
- 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2y \leq 8, \\ 0 \leq x \leq 4, \\ 0 \leq y \leq 3, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值等于 ( )  
(A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11
- 下列函数为奇函数的是 ( )  
(A)  $2^x - \frac{1}{2^x}$  (B)  $x^3 \sin x$  (C)  $2 \cos x + 1$  (D)  $x^2 + 2^x$
- 为了解 1000 名学生的学习情况, 采用系统抽样的方法, 从中抽取容量为 40 的样本, 则分段的间隔为 ( )  
(A) 50 (B) 40 (C) 25 (D) 20
- 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ , 则“ $a \leq b$ ”是“ $\sin A \leq \sin B$ ”的 ( )  
(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件  
(C) 必要非充分条件 (D) 非充分非必要条件
- 若实数  $k$  满足  $0 < k < 5$ , 则曲线  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5-k} = 1$  与曲线  $\frac{x^2}{16-k} - \frac{y^2}{5} = 1$  的 ( )  
(A) 实半轴长相等 (B) 虚半轴长相等 (C) 离心率相等 (D) 焦距相等
- 若空间中四条两两不同的直线  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , 满足  $l_1 \perp l_2, l_2 \parallel l_3, l_3 \perp l_4$ , 则下列结论一定正确的是 ( )  
(A)  $l_1 \perp l_4$  (B)  $l_1 \parallel l_4$   
(C)  $l_1, l_4$  既不垂直也不平行 (D)  $l_1, l_4$  的位置关系不确定
- 对任意复数  $w_1, w_2$ , 定义  $w_1 * w_2 = w_1 \overline{w_2}$ , 其中  $\overline{w_2}$  是  $w_2$  的共轭复数, 对任意复数  $z_1, z_2, z_3$  有如下四个命题:  
①  $(z_1 + z_2) * z_3 = (z_1 * z_3) + (z_2 * z_3)$ ; ②  $z_1 * (z_2 + z_3) = (z_1 * z_2) + (z_1 * z_3)$ ;  
③  $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$ ; ④  $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$ .  
则真命题的个数是 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

## 二、填空题

- 曲线  $y = -5e^x + 3$  在点  $(0, -2)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.
- 从字母  $a, b, c, d, e$  中任取两个不同字母, 则取到字母  $a$  的概率为\_\_\_\_\_.
- 等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 且  $a_1 a_5 = 4$ , 则  $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \log_2 a_4 + \log_2 a_5 =$ \_\_\_\_\_.
- 在极坐标系中, 曲线  $C_1$  和  $C_2$  的方程分别为  $2\rho \cos^2 \theta = \sin \theta$  和  $\rho \cos \theta = 1$ , 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为  $x$  轴的正半轴, 建立平面直角坐标系, 则曲线  $C_1$  和  $C_2$  的交点的直角坐标为\_\_\_\_\_.
- 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 点  $E$  在  $AB$  上, 且  $EB = 2AE$ ,  $AC$  与  $DE$  交于点  $F$ , 则  $\frac{\triangle CDF \text{ 的周长}}{\triangle AEF \text{ 的周长}} =$ \_\_\_\_\_.



## 三、解答题

- 已知函数  $f(x) = A \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 且  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .  
(1) 求  $A$  的值;  
(2) 若  $f(\theta) - f(-\theta) = \sqrt{3}$ ,  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 求  $f\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$ .

- 如图 1, 四边形  $ABCD$  为矩形,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = PC = 2$ , 作如图 2 折叠, 折痕  $EF \parallel DC$ . 其中点  $E, F$  分别在线段  $PD, PC$  上, 沿  $EF$  折叠后点  $P$  叠在线段  $AD$  上的点记为  $M$ , 并且  $MF \perp CF$ .  
(1) 证明:  $CF \perp$  平面  $MDF$ ;  
(2) 求三棱锥  $M - CDE$  的体积.

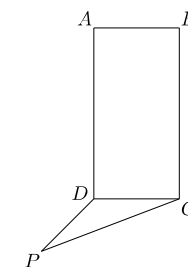


图 1

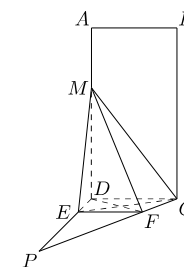


图 2

- 某车间 20 名工人年龄数据如下表:

年龄 (岁)	工人数 (人)
19	1
28	3
29	3
30	5
31	4
32	3
40	1
合计	20

- 求这 20 名工人年龄的众数与极差;
- 以十位数为茎, 个位数为叶, 作出这 20 名工人年龄的茎叶图;
- 求这 20 名工人年龄的方差.

19. 设各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n$  满足  $S_n^2 - (n^2 + n - 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0, n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1) 求  $a_1$  的值;
  - (2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
  - (3) 证明: 对一切正整数  $n$ , 有  $\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} < \frac{1}{3}$ .
20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(\sqrt{5}, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .
- (1) 求椭圆  $C$  的标准方程;
  - (2) 若动点  $P(x_0, y_0)$  为椭圆  $C$  外一点, 且点  $P$  到椭圆  $C$  的两条切线相互垂直, 求点  $P$  的轨迹方程.
21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax + 1 (a \in \mathbf{R})$ .
- (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;
  - (2) 当  $a < 0$  时, 试讨论是否存在  $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使得  $f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

# 2014 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

## 一、选择题

1.  $i$  为虚数单位, 则  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 =$  ( )

- (A)  $-1$  (B)  $1$  (C)  $-i$  (D)  $i$

2. 若二项式  $\left(2x + \frac{a}{x}\right)^7$  的展开式中  $\frac{1}{x^3}$  的系数是  $84$ , 则实数  $a =$  ( )

- (A)  $2$  (B)  $\sqrt[3]{4}$  (C)  $1$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. 设  $U$  为全集,  $A, B$  是集合, 则“存在集合  $C$  使得  $A \subseteq C, B \subseteq \complement_U C$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

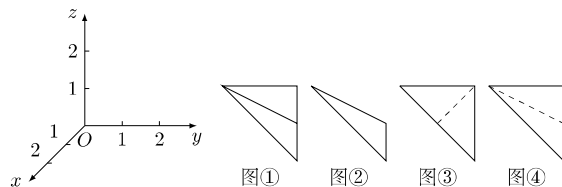
4. 根据如下样本数据

$x$	3	4	5	6	7	8
$y$	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

得到的回归方程为  $\hat{y} = bx + a$ , 则 ( )

- (A)  $a > 0, b > 0$  (B)  $a > 0, b < 0$  (C)  $a < 0, b > 0$  (D)  $a < 0, b < 0$

5. 在如图所示的空间直角坐标系  $O-xyz$  中, 一个四面体的顶点坐标分别是  $(0, 0, 2), (2, 2, 0), (1, 2, 1), (2, 2, 2)$ . 给出编号为①②③④的四个图, 则该四面体的正视图和俯视图分别为 ( )



- (A) ①和② (B) ③和① (C) ④和③ (D) ④和②

6. 若函数  $f(x), g(x)$  满足  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ , 则称  $f(x), g(x)$  为区间  $[-1, 1]$  上的一组正交函数, 给出三组函数:

- ①  $f(x) = \sin \frac{1}{2}x, g(x) = \cos \frac{1}{2}x$ ;  
②  $f(x) = x+1, g(x) = x-1$ ;  
③  $f(x) = x, g(x) = x^2$ .

其中为区间  $[-1, 1]$  上的正交函数的组数是 ( )

- (A)  $0$  (B)  $1$  (C)  $2$  (D)  $3$

7. 由不等式组  $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ y - x - 2 \leq 0 \end{cases}$  确定的平面区域记为  $\Omega_1$ , 不等式组

$\begin{cases} x + y \leq 1, \\ x + y \geq -2 \end{cases}$  确定的平面区域记为  $\Omega_2$ , 在  $\Omega_1$  中随机取一点, 则该点恰好在  $\Omega_2$  内的概率为 ( )

- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{7}{8}$

8. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍, 其中记载有求“囷盖”的术: 置如其周, 令相乘也. 又以高乘之, 三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长  $L$  与高  $h$ , 计算其体积  $V$  的近似公式  $V \approx \frac{1}{36}L^2h$ . 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率  $\pi$  近似取为  $3$ . 那么, 近似公式  $V \approx \frac{2}{75}L^2h$  相当于将圆锥体积公式中的  $\pi$  近似取为 ( )

- (A)  $\frac{22}{7}$  (B)  $\frac{25}{8}$  (C)  $\frac{157}{50}$  (D)  $\frac{355}{113}$

9. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆和双曲线的公共焦点,  $P$  是它们的一个公共点, 且  $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ , 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 ( )

- (A)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (C)  $3$  (D)  $2$

10. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \frac{1}{2}(|x-a^2| + |x-2a^2| - 3a^2)$ . 若  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x-1) \leq f(x)$ , 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

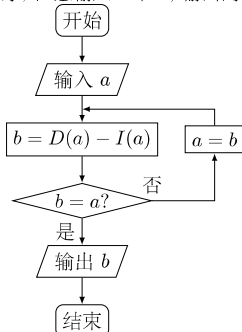
- (A)  $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$  (B)  $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$  (C)  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$  (D)  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

## 二、填空题

11. 设向量  $\mathbf{a} = (3, 3), \mathbf{b} = (1, -1)$ , 若  $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$ , 则实数  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

12. 直线  $l_1: y = x + a$  和  $l_2: y = x + b$  将单位圆  $C: x^2 + y^2 = 1$  分成长度相等的四段弧, 则  $a^2 + b^2 =$ \_\_\_\_\_.

13. 设  $a$  是一个各位数字都不是  $0$  且没有重复数字的三位数. 将组成  $a$  的  $3$  个数字按从小到大排成的三位数记为  $I(a)$ , 按从大到小排成的三位数记为  $D(a)$  (例如  $a = 815$ , 则  $I(a) = 158, D(a) = 851$ ). 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 任意输入一个  $a$ , 输出的结果  $b =$ \_\_\_\_\_.



14. 设  $f(x)$  是定义在  $(0, +\infty)$  上的函数, 且  $f(x) > 0$ , 对任意  $a > 0, b > 0$ , 若经过点  $(a, f(a)), (b, -f(b))$  的直线与  $x$  轴的交点为  $(c, 0)$ , 则称  $c$  为  $a,$

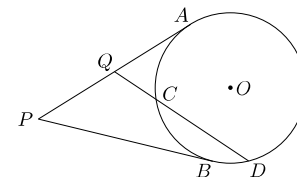
$b$  关于函数  $f(x)$  的平均数, 记为  $M_f(a, b)$ , 例如, 当  $f(x) = 1 (x > 0)$  时, 可得  $M_f(a, b) = c = \frac{a+b}{2}$ , 即  $M_f(a, b)$  为  $a, b$  的算术平均数.

(1) 当  $f(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$  时,  $M_f(a, b)$  为  $a, b$  的几何平均数;

(2) 当  $f(x) = \frac{1}{x^2} (x > 0)$  时,  $M_f(a, b)$  为  $a, b$  的调和平均数  $\frac{2ab}{a+b}$ .

(以上两空各只需写出一个符合要求的函数即可)

15. 如图,  $P$  为  $\odot O$  外一点, 过  $P$  点作  $\odot O$  的两条切线, 切点分别为  $A, B$ , 过  $PA$  的中点  $Q$  作割线交  $\odot O$  于  $C, D$  两点. 若  $QC = 1, CD = 3$ , 则  $PB =$ \_\_\_\_\_.



16. 已知曲线  $C_1$  的参数方程是  $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{\sqrt{3t}}{3}, \end{cases} (t \text{ 为参数})$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程是  $\rho = 2$ , 则  $C_1$  与  $C_2$  交点的直角坐标为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 某实验室一天的温度 (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 随时间  $t$  (单位: h) 的变化近似满足函数关系:  $f(t) = 10 - \sqrt{3}\cos \frac{\pi}{12}t - \sin \frac{\pi}{12}t, t \in [0, 24)$ .

(1) 求实验室这一天的最大温差;

(2) 若要求实验室温度不高于  $11^{\circ}\text{C}$ , 则在段时间实验室需要降温?

18. 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 2$ , 且  $a_1, a_2, a_5$  成等比数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 是否存在正整数  $n$ , 使得  $S_n > 60n + 800$ ? 若存在, 求出  $n$  的最小值; 若不存在, 说明理由.

20. 计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站, 过去 50 年的水文资料显示, 水库年入流量  $X$  (年入流量: 一年内上游来水与库区降水之和. 单位: 亿立方米) 都在 40 以上. 其中, 不足 80 的年份有 10 年, 不低于 80 且不超过 120 的年份有 35 年, 超过 120 的年份有 5 年. 将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率, 并假设各年的年入流量相互独立.

(1) 求未来 4 年中, 至多有 1 年的年入流量超过 120 的概率;

(2) 水电站希望安装的发电机尽可能运行, 但每年发电机最多可运行台数受年入流量  $X$  限制, 并有如下关系;

年入流量 $X$	$40 < X < 80$	$80 \leq X \leq 120$	$X > 120$
发电机最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行, 则该台年利润为 5000 万元; 若某台发电机未运行, 则该台年亏损 800 万元, 欲使水电站年总利润的均值达到最大, 应安装发电机多少台?

22.  $\pi$  为圆周率,  $e = 2.71828 \dots$  为自然对数的底数.

(1) 求函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  的单调区间;

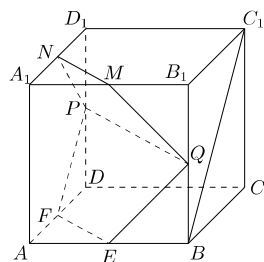
(2) 求  $e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3$  这 6 个数中的最大数与最小数;

(3) 将  $e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3$  这 6 个数按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.

19. 如图, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F, M, N$  分别是棱  $AB, AD, A_1B_1, A_1D_1$  的中点, 点  $P, Q$  分别在棱  $DD_1, BB_1$  上移动, 且  $DP = BQ = \lambda$  ( $0 < \lambda < 2$ ).

(1) 当  $\lambda = 1$  时, 证明: 直线  $BC_1 \parallel$  平面  $EF PQ$ ;

(2) 是否存在  $\lambda$ , 使平面  $EF PQ$  与面  $PQMN$  所成的二面角为直二面角? 若存在, 求出  $\lambda$  的值; 若不存在, 说明理由.



21. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $M$  到点  $F(1, 0)$  的距离比它到  $y$  轴的距离多 1, 记点  $M$  的轨迹为  $C$ .

(1) 求轨迹为  $C$  的方程;

(2) 设斜率为  $k$  的直线  $l$  过定点  $P(-2, 1)$ , 求直线  $l$  与轨迹  $C$  恰好有一个公共点, 两个公共点, 三个公共点时  $k$  的相应取值范围.

# 2014 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

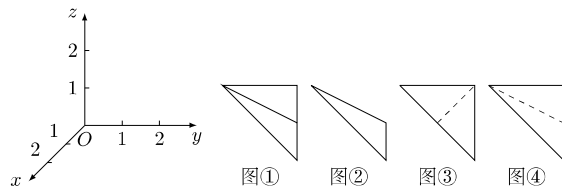
## 一、选择题

- 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , 集合  $A = \{1, 3, 5, 6\}$ , 则  $\complement_U A =$  ( )  
(A)  $\{1, 3, 5, 6\}$  (B)  $\{2, 3, 7\}$  (C)  $\{2, 4, 7\}$  (D)  $\{2, 5, 7\}$
- $i$  为虚数单位, 则  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 =$  ( )  
(A) 1 (B) -1 (C)  $i$  (D)  $-i$
- 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \neq x$ ”的否定是 ( )  
(A)  $\forall x \notin \mathbf{R}, x^2 \neq x$  (B)  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 = x$   
(C)  $\exists x \notin \mathbf{R}, x^2 \neq x$  (D)  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = x$
- 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 4, \\ x-y \leq 2, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$  则  $2x+y$  的最大值是 ( )  
(A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 8
- 随机掷两枚质地均匀的骰子, 它们向上的点数之和不超过 5 的概率记为  $p_1$ , 点数之和大于 5 的概率记为  $p_2$ , 点数之和为偶数的概率记为  $p_3$ , 则 ( )  
(A)  $p_1 < p_2 < p_3$  (B)  $p_2 < p_1 < p_3$  (C)  $p_1 < p_3 < p_2$  (D)  $p_3 < p_1 < p_2$
- 根据如下样本数据

$x$	3	4	5	6	7	8
$y$	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

得到的回归方程为  $\hat{y} = bx + a$ , 则 ( )  
(A)  $a > 0, b < 0$  (B)  $a > 0, b > 0$  (C)  $a < 0, b < 0$  (D)  $a < 0, b > 0$

- 在如图所示的空间直角坐标系  $O-xyz$  中, 一个四面体的顶点坐标分别是  $(0, 0, 2)$ ,  $(2, 2, 0)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ . 给出编号为①②③④的四个图, 则该四面体的正视图和俯视图分别为 ( )



- (A) ①和② (B) ③和① (C) ④和③ (D) ④和②

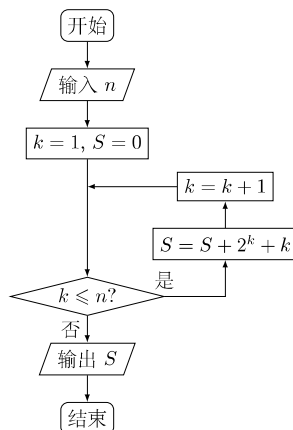
- 设  $a, b$  是关于  $t$  的方程  $t^2 \cos \theta + t \sin \theta = 0$  的两个不等实根, 则过  $A(a, a^2)$ ,  $B(b, b^2)$  两点的直线与双曲线  $\frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 1$  的公共点的个数为 ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

- 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 - 3x$ . 则函数  $g(x) = f(x) - x + 3$  的零点的集合为 ( )  
(A)  $\{1, 3\}$  (B)  $\{-3, -1, 1, 3\}$   
(C)  $\{2 - \sqrt{7}, 1, 3\}$  (D)  $\{-2 - \sqrt{7}, 1, 3\}$

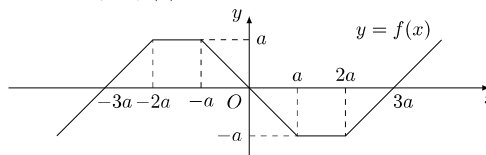
- 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍, 其中记载有求“困盖”的术: 置如其周, 令相乘也. 又以高乘之, 三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长  $L$  与高  $h$ , 计算其体积  $V$  的近似公式  $V \approx \frac{1}{36} L^2 h$ . 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率  $\pi$  近似取为 3. 那么, 近似公式  $V \approx \frac{2}{75} L^2 h$  相当于将圆锥体积公式中的  $\pi$  近似取为 ( )  
(A)  $\frac{22}{7}$  (B)  $\frac{25}{8}$  (C)  $\frac{157}{50}$  (D)  $\frac{355}{113}$

## 二、填空题

- 甲、乙两套设备生产的同类型产品共 4800 件, 采用分层抽样的方法从中抽取一个容量为 80 的样本进行质量检测. 若样本中有 50 件产品由甲设备生产, 则乙设备生产的产品总数为\_\_\_\_\_件.
- 若向量  $\vec{OA} = (1, -3)$ ,  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$ ,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ , 则  $|\vec{AB}| =$ \_\_\_\_\_.
- 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $A = \frac{\pi}{6}$ ,  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{3}$ , 则  $B =$ \_\_\_\_\_.
- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入  $n$  的值为 9, 则输出  $S$  的值为\_\_\_\_\_.



- 如图所示, 函数  $y = f(x)$  的图象由两条射线和三条线段组成.



若  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) > f(x-1)$ , 则正实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

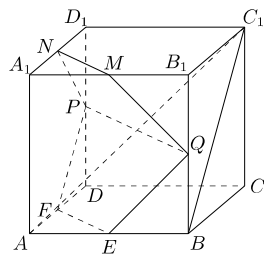
- 某项研究表明: 在考虑行车安全的情况下, 某路段车流量  $F$  (单位时间内经过测量点的车辆数, 单位: 辆/小时) 与车流速度  $v$  (假设车辆以相同速度  $v$  行驶, 单位: 米/秒), 平均车长  $l$  (单位: 米) 的值有关, 其公式为  $F = \frac{76000v}{v^2 + 18v + 20l}$ .  
(1) 如果不限定车型,  $l = 6.05$ , 则最大车流量为\_\_\_\_\_辆/小时;  
(2) 如果限定车型,  $l = 5$ , 则最大车流量比 (1) 中的最大车流量增加\_\_\_\_\_辆/小时.
- 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  和点  $A(-2, 0)$ , 若定点  $B(b, 0)$  ( $b \neq -2$ ) 和常数  $\lambda$  满足: 对圆  $O$  上任意一点  $M$ , 都有  $|MB| = \lambda|MA|$ , 则  
(1)  $b =$ \_\_\_\_\_;  
(2)  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 某实验室一天的温度 (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 随时间  $t$  (单位: h) 的变化近似满足函数关系:  $f(t) = 10 - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} t - \sin \frac{\pi}{12} t$ ,  $t \in [0, 24)$ .  
(1) 求实验室这一天上午 8 时的温度;  
(2) 求实验室这一天的最大温差.
- 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 2$ , 且  $a_1, a_2, a_5$  成等比数列.  
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.  
(2) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 是否存在正整数  $n$ , 使得  $S_n > 60n + 800$ ? 若存在, 求出  $n$  的最小值; 若不存在, 说明理由.

20. 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$ 、 $F$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $M$ 、 $N$  分别是棱  $AB$ 、 $AD$ 、 $DD_1$ 、 $BB_1$ 、 $A_1B_1$ 、 $A_1D_1$  的中点. 求证:

- (1) 直线  $BC_1 \parallel$  平面  $EF PQ$ ;
- (2) 直线  $AC_1 \perp$  平面  $PQMN$ .



21.  $\pi$  为圆周率,  $e = 2.71828 \cdots$  为自然对数的底数.

- (1) 求函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  的单调区间;
- (2) 求  $e^3$ ,  $3^e$ ,  $e^\pi$ ,  $\pi^e$ ,  $3^\pi$ ,  $\pi^3$  这 6 个数中的最大数与最小数.

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $M$  到点  $F(1, 0)$  的距离比它到  $y$  轴的距离多 1, 记点  $M$  的轨迹为  $C$ .

- (1) 求轨迹为  $C$  的方程;
- (2) 设斜率为  $k$  的直线  $l$  过定点  $P(-2, 1)$ , 求直线  $l$  与轨迹  $C$  恰好有一个公共点, 两个公共点, 三个公共点时  $k$  的相应取值范围.



# 2014 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

## 一、选择题

1. 满足  $\frac{z+i}{z} = i$  ( $i$  为虚数单位) 的复数  $z =$  ( )

- (A)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (B)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  (C)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (D)  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2. 对一个容量为  $N$  的总体抽取容量为  $n$  的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为  $p_1, p_2, p_3$ , 则 ( )

- (A)  $p_1 = p_2 < p_3$  (B)  $p_2 = p_3 < p_1$  (C)  $p_1 = p_3 < p_2$  (D)  $p_1 = p_2 = p_3$

3. 已知  $f(x), g(x)$  分别是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数和奇函数, 且  $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 1$ , 则  $f(1) + g(1) =$  ( )

- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

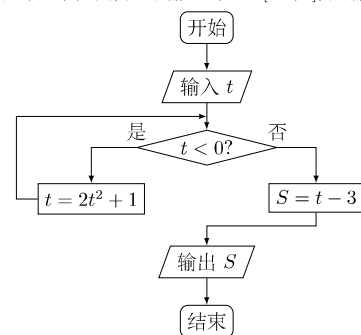
4.  $\left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^5$  的展开式中  $x^2y^3$  的系数是 ( )

- (A) -20 (B) -5 (C) 5 (D) 20

5. 已知命题  $p$ : 若  $x > y$ , 则  $-x < -y$ ; 命题  $q$ : 若  $x > y$ , 则  $x^2 > y^2$ , 在命题 ①  $p \wedge q$ ; ②  $p \vee q$ ; ③  $p \wedge (\neg q)$ ; ④  $(\neg p) \vee q$  中, 真命题是 ( )

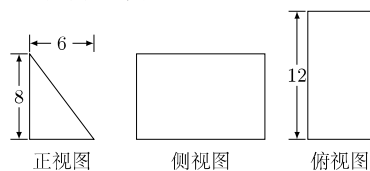
- (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $t \in [-2, 2]$ , 则输出的  $S$  属于 ( )



- (A)  $[-6, -2]$  (B)  $[-5, -1]$  (C)  $[-4, 5]$  (D)  $[-3, 6]$

7. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 ( )



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 某市生产总值连续两年持续增加. 第一年的增长率为  $p$ , 第二年的增长率为  $q$ , 则该市这两年生产总值的年平均增长率为 ( )

- (A)  $\frac{p+q}{2}$  (B)  $\frac{(p+1)(q+1)-1}{2}$   
(C)  $\sqrt{pq}$  (D)  $\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$

9. 已知函数  $f(x) = \sin(x - \varphi)$ , 且  $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x) dx = 0$ , 则函数  $f(x)$  的图象的一条对称轴是 ( )

- (A)  $x = \frac{5\pi}{6}$  (B)  $x = \frac{7\pi}{12}$  (C)  $x = \frac{\pi}{3}$  (D)  $x = \frac{\pi}{6}$

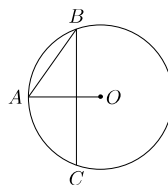
10. 已知函数  $f(x) = x^2 + e^x - \frac{1}{2}$  ( $x < 0$ ) 与  $g(x) = x^2 + \ln(x + a)$  的图象上存在关于  $y$  轴对称的点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- (A)  $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  (B)  $(-\infty, \sqrt{e})$  (C)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right)$  (D)  $\left(-\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

## 二、填空题

11. 在平面直角坐标系中, 倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的直线  $l$  与曲线  $C: \begin{cases} x = 2 + \cos \alpha, \\ y = 1 + \sin \alpha, \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数) 交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 2$ , 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 则直线  $l$  的极坐标方程是\_\_\_\_\_.

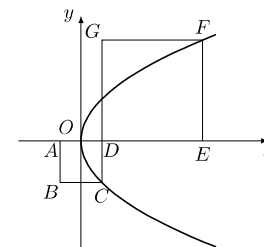
12. 如图, 已知  $AB, BC$  是  $\odot O$  的两条弦,  $AO \perp BC$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 2\sqrt{2}$ , 则  $\odot O$  的半径等于\_\_\_\_\_.



13. 若关于  $x$  的不等式  $|ax - 2| < 3$  的解集为  $\left\{x \mid -\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

14. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x, \\ x + y \leq 4, \\ y \geq k, \end{cases}$  且  $z = 2x + y$  的最小值为  $-6$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

15. 如图, 正方形  $ABCD$  和正方形  $DEFG$  的边长分别为  $a, b$  ( $a < b$ ), 原点  $O$  为  $AD$  的中点, 抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 经过  $C, F$  两点, 则  $\frac{b}{a} =$ \_\_\_\_\_.



16. 在平面直角坐标系中,  $O$  为原点,  $A(-1, 0), B(0, \sqrt{3}), C(3, 0)$ , 动点  $D$  满足  $|\overrightarrow{CD}| = 1$ , 则  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}|$  的最大值是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 他们研发新产品成功的概率分别为  $\frac{2}{3}$  和  $\frac{3}{5}$ . 现安排甲组研发新产品  $A$ , 乙组研发新产品  $B$ . 设甲、乙两组的研发相互独立.

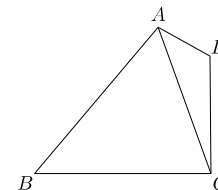
(1) 求至少有一种新产品研发成功的概率;

(2) 若新产品  $A$  研发成功, 预计企业可获利润 120 万元; 若新产品  $B$  研发成功, 预计企业可获利润 100 万元. 求该企业可获利润的分布列和数学期望.

18. 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AD = 1, CD = 2, AC = \sqrt{7}$ .

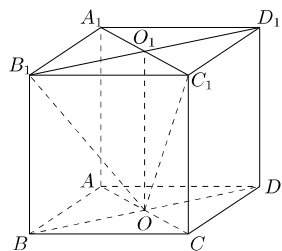
(1) 求  $\cos \angle CAD$  的值;

(2) 若  $\cos \angle BAD = -\frac{\sqrt{7}}{14}, \sin \angle CBA = \frac{\sqrt{21}}{6}$ , 求  $BC$  的长.



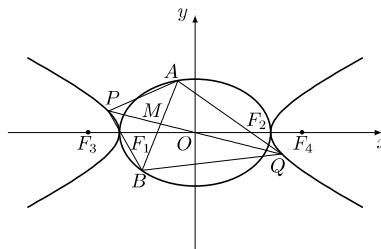
19. 如图, 四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的所有棱长都相等,  $AC \cap BD = O$ ,  $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$ , 四边形  $ACC_1A_1$  和四边形  $BDD_1B_1$  均为矩形.

- (1) 证明:  $O_1O \perp$  底面  $ABCD$ ;  
(2) 若  $\angle CBA = 60^\circ$ , 求二面角  $C_1 - OB_1 - D$  的余弦值.



21. 如图,  $O$  为坐标原点, 椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 离心率为  $e_1$ ; 双曲线  $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_3$ 、 $F_4$ , 离心率为  $e_2$ . 已知  $e_1e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 且  $|F_2F_4| = \sqrt{3} - 1$ .

- (1) 求  $C_1$ ,  $C_2$  的方程;  
(2) 过  $F_1$  作  $C_1$  的不垂直于  $y$  轴的弦  $AB$ ,  $M$  为弦  $AB$  的中点. 当直线  $OM$  与  $C_2$  交于  $P$ ,  $Q$  两点时, 求四边形  $APBQ$  面积的最小值.



22. 已知常数  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2}$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上的单调性;  
(2) 若  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $f(x_1) + f(x_2) > 0$ , 求  $a$  的取值范围.

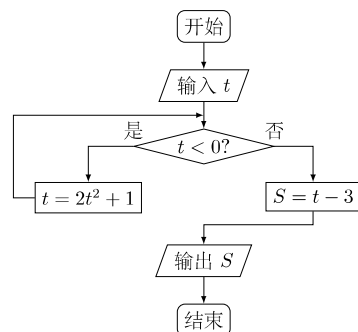
20. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $|a_{n+1} - a_n| = p^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 若  $\{a_n\}$  是递增数列, 且  $a_1, 2a_2, 3a_3$  成等差数列, 求  $p$  的值;  
(2) 若  $p = \frac{1}{2}$ , 且  $\{a_{2n-1}\}$  是递增数列,  $\{a_{2n}\}$  是递减数列, 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

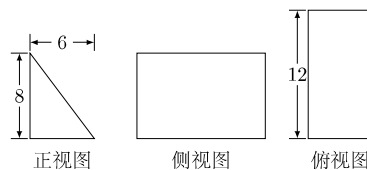
# 2014 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

## 一、选择题

1. 设命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 > 0$ , 则  $\neg p$  为 ( )  
 (A)  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 1 > 0$  (B)  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 1 \leq 0$   
 (C)  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 1 < 0$  (D)  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \leq 0$
2. 已知集合  $A = \{x \mid x > 2\}$ ,  $B = \{x \mid 1 < x < 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid x > 2\}$  (B)  $\{x \mid x > 1\}$   
 (C)  $\{x \mid 2 < x < 3\}$  (D)  $\{x \mid 1 < x < 3\}$
3. 对一个容量为  $N$  的总体抽取容量为  $n$  的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为  $p_1, p_2, p_3$ , 则 ( )  
 (A)  $p_1 = p_2 < p_3$  (B)  $p_2 = p_3 < p_1$  (C)  $p_1 = p_3 < p_2$  (D)  $p_1 = p_2 = p_3$
4. 下列函数中, 既是偶函数又在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递增的是 ( )  
 (A)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  (B)  $f(x) = x^2 + 1$  (C)  $f(x) = x^3$  (D)  $f(x) = 2^{-x}$
5. 在区间  $[-2, 3]$  上随机选取一个数  $X$ , 则  $X \leq 1$  的概率为 ( )  
 (A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{3}{5}$  (C)  $\frac{2}{5}$  (D)  $\frac{1}{5}$
6. 若圆  $C_1: x^2 + y^2 = 1$  与圆  $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + m = 0$  外切, 则  $m =$  ( )  
 (A) 21 (B) 19 (C) 9 (D) -11
7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $t \in [-2, 2]$ , 则输出的  $S$  属于 ( )



- (A)  $[-6, -2]$  (B)  $[-5, -1]$  (C)  $[-4, 5]$  (D)  $[-3, 6]$
8. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 ( )



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
9. 若  $0 < x_1 < x_2 < 1$ , 则 ( )  
 (A)  $e^{x_2} - e^{x_1} > \ln x_2 - \ln x_1$  (B)  $e^{x_2} - e^{x_1} < \ln x_2 - \ln x_1$   
 (C)  $x_2 e^{x_1} > x_1 e^{x_2}$  (D)  $x_2 e^{x_1} < x_1 e^{x_2}$
10. 在平面直角坐标系中,  $O$  为原点,  $A(-1, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3})$ ,  $C(3, 0)$ , 动点  $D$  满足  $|\overrightarrow{CD}| = 1$ , 则  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}|$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $[4, 6]$  (B)  $[\sqrt{19}-1, \sqrt{19}+1]$   
 (C)  $[2\sqrt{3}, 2\sqrt{7}]$  (D)  $[\sqrt{7}-1, \sqrt{7}+1]$

## 二、填空题

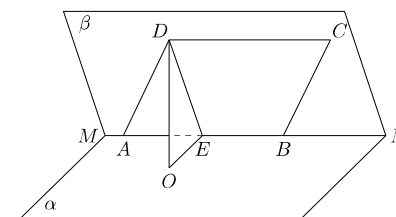
11. 复数  $\frac{3+i}{i^2}$  ( $i$  为虚数单位) 的实部等于\_\_\_\_\_.
12. 在平面直角坐标系中, 曲线  $C: \begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$  ( $t$  为参数) 的普通方程为\_\_\_\_\_.
13. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x, \\ x + y \leq 4, \\ y \geq 1, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
14. 平面上一机器人在行进中始终保持与点  $F(1, 0)$  的距离和到直线  $x = -1$  的距离相等. 若机器人接触不到过点  $P(-1, 0)$  且斜率为  $k$  的直线, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
15. 若  $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax$  是偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

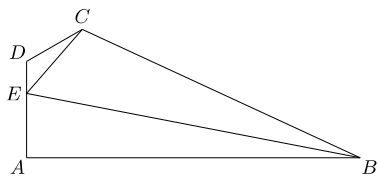
16. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .  
 (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 设  $b_n = 2^{a_n} + (-1)^n a_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和.

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 为了比较他们的研发水平, 现随机抽取这两个小组往年研发新产品的结果如下:  $(a, b)$ ,  $(a, \bar{b})$ ,  $(a, b)$ ,  $(\bar{a}, b)$ ,  $(\bar{a}, \bar{b})$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, \bar{b})$ ,  $(\bar{a}, b)$ ,  $(a, \bar{b})$ ,  $(\bar{a}, \bar{b})$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, \bar{b})$ ,  $(\bar{a}, b)$ ,  $(a, b)$ . 其中  $a, \bar{a}$  分别表示甲组研发成功和失败;  $b, \bar{b}$  分别表示乙组研发成功和失败.  
 (1) 若某组成功研发一种新产品, 则给该组记 1 分, 否则记 0 分, 试计算甲、乙两组研发新产品的成绩的平均数和方差, 并比较甲、乙两组的研发水平;  
 (2) 若该企业安排甲、乙两组各自研发一种新产品, 试估计恰有一组研发成功的概率.

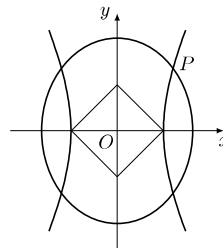
18. 如图, 已知二面角  $\alpha - MN - \beta$  的大小为  $60^\circ$ , 菱形  $ABCD$  在面  $\beta$  内,  $A, B$  两点在棱  $MN$  上,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $E$  是  $AB$  的中点,  $DO \perp$  面  $\alpha$ , 垂足为  $O$ .  
 (1) 证明:  $AB \perp$  平面  $ODE$ ;  
 (2) 求异面直线  $BC$  与  $OD$  所成角的余弦值.



19. 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $DA \perp AB$ ,  $DE = 1$ ,  $EC = \sqrt{7}$ ,  $EA = 2$ ,  $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\angle BEC = \frac{\pi}{3}$ .
- (1) 求  $\sin \angle CED$  的值;
- (2) 求  $BE$  的长.



20. 如图,  $O$  为坐标原点, 双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$  ( $a_1 > 0$ ,  $b_1 > 0$ ) 和椭圆  $C_2: \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{x^2}{b_2^2} = 1$  ( $a_2 > b_2 > 0$ ) 均过点  $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ , 且以  $C_1$  的两个顶点和  $C_2$  的两个焦点为顶点的四边形是面积为 2 的正方形.
- (1) 求  $C_1, C_2$  的方程;
- (2) 是否存在直线  $l$ , 使得  $l$  与  $C_1$  交于  $A, B$  两点, 与  $C_2$  只有一个公共点, 且  $|\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{AB}|$ ? 证明你的结论.

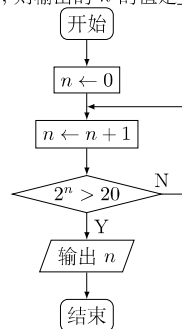


21. 已知函数  $f(x) = x \cos x - \sin x + 1$  ( $x > 0$ ).
- (1) 求  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 记  $x_i$  为  $f(x)$  的从小到大的第  $i$  ( $i \in \mathbf{N}^*$ ) 个零点, 证明: 对一切  $n \in \mathbf{N}^*$ , 有  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} < \frac{2}{3}$ .

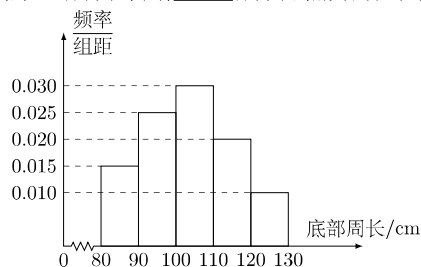
# 2014 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

## 一、填空题

1. 已知集合  $A = \{-2, -1, 3, 4\}$ ,  $B = \{-1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
2. 已知复数  $z = (5 + 2i)^2$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  的实部为\_\_\_\_\_.
3. 如图是一个算法流程图, 则输出的  $n$  的值是\_\_\_\_\_.

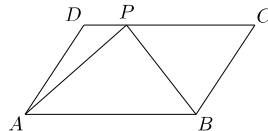


4. 从 1, 2, 3, 6 这 4 个数中一次随机地取 2 个数, 则所取 2 个数的乘积为 6 的概率是\_\_\_\_\_.
5. 已知函数  $y = \cos x$  与  $y = \sin(2x + \varphi)$  ( $0 \leq \varphi < \pi$ ), 它们的图象有一个横坐标为  $\frac{\pi}{3}$  的交点, 则  $\varphi$  的值是\_\_\_\_\_.
6. 为了了解一片经济林的生长情况, 随机抽测了其中 60 株树木的底部周长 (单位: cm), 所得数据均在区间  $[80, 130]$  上, 其频率分布直方图如图所示, 则在抽测的 60 株树木中, 有\_\_\_\_\_株树木的底部周长小于 100 cm.



7. 在各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_2 = 1$ ,  $a_8 = a_6 + 2a_4$ , 则  $a_6$  的值是\_\_\_\_\_.
8. 设甲、乙两个圆柱的底面积分别为  $S_1$ 、 $S_2$ , 体积分别为  $V_1$ 、 $V_2$ , 若它们的侧面积相等, 且  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{4}$ , 则  $\frac{V_1}{V_2}$  的值是\_\_\_\_\_.
9. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $x + 2y - 3 = 0$  被圆  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  截得的弦长为\_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $f(x) = x^2 + mx - 1$ , 若对于任意  $x \in [m, m + 1]$ , 都有  $f(x) < 0$  成立, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
11. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若曲线  $y = ax^2 + \frac{b}{x}$  ( $a, b$  为常数) 过点  $P(2, -5)$ , 且该曲线在点  $P$  处的切线与直线  $7x + 2y + 3 = 0$  平行, 则  $a + b$  的值是\_\_\_\_\_.
12. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 已知  $AB = 8$ ,  $AD = 5$ ,  $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$ ,  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  的值是\_\_\_\_\_.

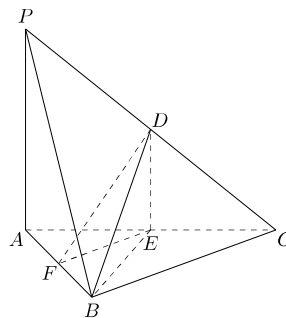


13. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上且周期为 3 的函数, 当  $x \in [0, 3)$  时,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + \frac{1}{2} \end{cases}$ . 若函数  $y = f(x) - a$  在区间  $[-3, 4]$  上有 10 个零点 (互不相同), 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
14. 若  $\triangle ABC$  的内角满足  $\sin A + \sqrt{2} \sin B = 2 \sin C$ , 则  $\cos C$  的最小值是\_\_\_\_\_.

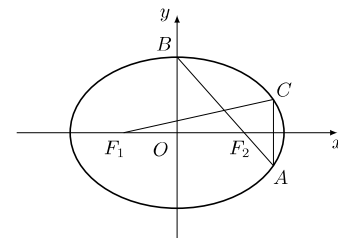
## 二、解答题

15. 已知  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .
  - (1) 求  $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$  的值;
  - (2) 求  $\cos(\frac{5}{6}\pi - 2\alpha)$  的值.

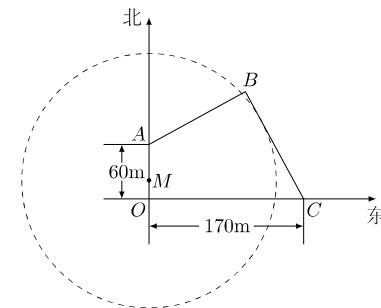
16. 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $D, E, F$  分别为棱  $PC, AC, AB$  的中点. 已知  $PA \perp AC$ ,  $PA = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $DF = 5$ .
  - (1) 求证: 直线  $PA \parallel$  平面  $DEF$ ;
  - (2) 平面  $BDE \perp$  平面  $ABC$ .



17. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点, 顶点  $B$  的坐标为  $(0, b)$ , 连接  $BF_2$  并延长交椭圆于点  $A$ , 过点  $A$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于另一点  $C$ , 连接  $F_1C$ .
  - (1) 若点  $C$  的坐标为  $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ , 且  $BF_2 = \sqrt{2}$ , 求椭圆的方程;
  - (2) 若  $F_1C \perp AB$ , 求椭圆离心率  $e$  的值.



18. 如图, 为了保护河上古桥  $OA$ , 规划建一座新桥  $BC$ , 同时设立一个圆形保护区. 规划要求: 新桥  $BC$  与河岸  $AB$  垂直; 保护区的边界为圆心  $M$  在线段  $OA$  上并与  $BC$  相切的圆, 且古桥两端  $O$  和  $A$  到该圆上任意一点的距离均不少于 80 m. 经测量, 点  $A$  位于点  $O$  正北方向 60 m 处, 点  $C$  位于点  $O$  正东方向 170 m 处 ( $OC$  为河岸),  $\tan \angle BCO = \frac{4}{3}$ .
  - (1) 求新桥  $BC$  的长;
  - (2) 当  $OM$  多长时, 圆形保护区的面积最大?

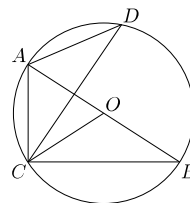


19. 已知函数  $f(x) = e^x + e^{-x}$ , 其中  $e$  是自然对数的底数.

- (1) 证明:  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的偶函数;
- (2) 若关于  $x$  的不等式  $mf(x) \leq e^{-x} + m - 1$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 求实数  $m$  的取值范围;
- (3) 已知正数  $a$  满足: 存在  $x_0 \in [1, +\infty)$ , 使得  $f(x_0) < a(-x_0^3 + 3x_0)$  成立. 试比较  $e^{a-1}$  与  $a^{e-1}$  的大小, 并证明你的结论.

21. 四选二.

【A】如图,  $AB$  是圆  $O$  的直径,  $C, D$  是圆  $O$  上位于  $AB$  异侧的两点. 证明:  $\angle OCB = \angle D$ .



【B】已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ , 向量  $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ y \end{bmatrix}$ ,  $x, y$  为实数, 若  $A\alpha = B\alpha$ , 求  $x + y$  的值.

20. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若对任意正整数  $n$ , 总存在正整数  $m$ , 使得  $S_n = a_m$ , 则称  $\{a_n\}$  是“ $H$  数列”.

- (1) 若数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 证明:  $\{a_n\}$  是“ $H$  数列”;
- (2) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 其首项  $a_1 = 1$ , 公差  $d < 0$ . 若  $\{a_n\}$  是“ $H$  数列”, 求  $d$  的值;
- (3) 证明: 对任意的等差数列  $\{a_n\}$ , 总存在两个“ $H$  数列” $\{b_n\}$  和  $\{c_n\}$ , 使得  $a_n = b_n + c_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 成立.

【C】在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知直线  $l$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$$
 ( $t$  为参数), 直线  $l$  与抛物线  $y^2 = 4x$  交于  $A, B$  两点, 求线段  $AB$  的长.

【D】已知  $x > 0, y > 0$ , 证明:  $(1 + x + y^2)(1 + x^2 + y) \geq 9xy$ .

22. 盒中共有 9 个球, 其中有 4 个红球, 3 个黄球和 2 个绿球, 这些球除颜色外完全相同.

- (1) 从盒中一次随机取出 2 个球, 求取出的 2 个球颜色相同的概率  $P$ ;
- (2) 从盒中一次随机取出 4 个球, 其中红球、黄球、绿球的个数分别记为  $x_1, x_2, x_3$ , 随机变量  $X$  表示  $x_1, x_2, x_3$  中的最大数, 求  $X$  的概率分布和数学期望  $E(X)$ .

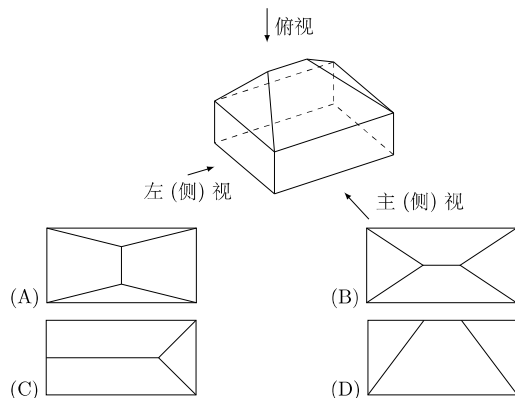
23. 已知函数  $f_0(x) = \frac{\sin x}{x}$  ( $x > 0$ ), 设  $f_n(x)$  为  $f_{n-1}(x)$  的导数,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 求  $2f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$  的值;
- (2) 证明: 对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 等式  $\left|nf_{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  都成立.

## 2014 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

### 一、选择题

1.  $\bar{z}$  是  $z$  的共轭复数. 若  $\bar{z} + z = 2$ ,  $(z - \bar{z})i = 2$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z = ( \quad )$   
 (A)  $1 + i$  (B)  $-1 - i$  (C)  $-1 + i$  (D)  $1 - i$
2. 函数  $f(x) = \ln(x^2 - x)$  的定义域为  $( \quad )$   
 (A)  $(0, 1)$  (B)  $[0, 1]$   
 (C)  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  (D)  $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
3. 已知函数  $f(x) = 5^{|x|}$ ,  $g(x) = ax^2 - x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ). 若  $f[g(1)] = 1$ , 则  $a = ( \quad )$   
 (A)  $1$  (B)  $2$  (C)  $3$  (D)  $-1$
4. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ , 若  $c^2 = (a - b)^2 + 6$ ,  $C = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积是  $( \quad )$   
 (A)  $3$  (B)  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (D)  $3\sqrt{3}$
5. 一几何体的直观图如图所示, 下列给出的四个俯视图中正确的是  $( \quad )$



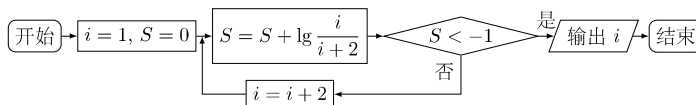
6. 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系, 随机抽查了 52 名中学生, 得到统计数据如表 1 至表 4, 则与性别有关的可能性最大的变量是 ( )

成绩		不及格	及格	总计	视力		好	差	总计
性别					性别				
男		6	14	20	男		4	16	20
女		10	22	32	女		12	20	32
总计		16	36	52	总计		16	36	52

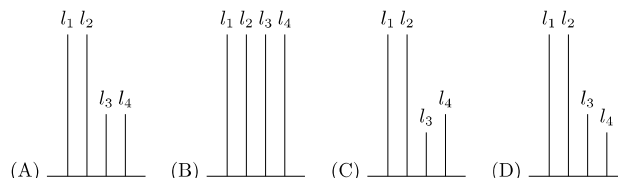
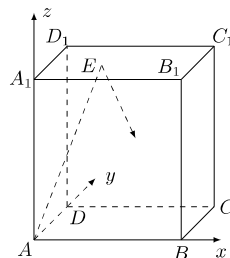
智商		偏高	正常	总计	阅读量		丰富	不丰富	总计
性别					性别				
男		8	12	20	男		14	6	20
女		8	24	32	女		2	30	32
总计		16	36	52	总计		16	36	52

- (A) 成绩            (B) 视力            (C) 智商            (D) 阅读量

7. 阅读如下程序框图, 运行相应的程序, 则程序运行后输出的结果为 ( )



- (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11
8. 若  $f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $\int_0^1 f(x) dx =$
- (A) -1 (B)  $-\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D) 1
9. 在平面直角坐标系中,  $A, B$  分别是  $x$  轴和  $y$  轴上的动点, 若以  $AB$  为直径的圆  $C$  与直线  $2x + y - 4 = 0$  相切, 则圆  $C$  面积的最小值为 ( )
- (A)  $\frac{4}{5}\pi$  (B)  $\frac{3}{4}\pi$  (C)  $(6 - 2\sqrt{5})\pi$  (D)  $\frac{5}{4}\pi$
10. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 11$ ,  $AD = 7$ ,  $AA_1 = 12$ , 一质点从顶点  $A$  射向点  $E(4, 3, 12)$ , 遇长方体的面反射 (反射服从光的反射原理), 将第  $i - 1$  次到第  $i$  次反射点之间的线段记为  $l_i (i = 2, 3, 4)$ ,  $l_1 = AE$ , 将线段  $l_1, l_2, l_3, l_4$  直直放置在同一水平线上, 则大致的图形是 ( )



11. 对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$  的最小值为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
12. 若以直角坐标系的原点为极点,  $x$  轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 则线段  $y=1-x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 的极坐标方程为 ( )  
(A)  $\rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (B)  $\rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$   
(C)  $\rho = \cos \theta + \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (D)  $\rho = \cos \theta + \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

## 二、填空题

13. 10 件产品中有 7 件正品, 3 件次品, 从中任取 4 件, 则恰好取到 1 件次品的概率是\_\_\_\_\_.

14. 若曲线  $y = e^{-x}$  上点  $P$  处的切线平行于直线  $2x + y + 1 = 0$ , 则点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.
15. 已知单位向量  $e_1$  与  $e_2$  的夹角为  $\alpha$ , 且  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , 向量  $a = 3e_1 - 2e_2$  与  $b = 3e_1 - e_2$  的夹角为  $\beta$ , 则  $\cos \beta =$ \_\_\_\_\_.
16. 过点  $M(1, 1)$  作斜率为  $-\frac{1}{2}$  的直线与椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 相交于  $A, B$  两点, 若  $M$  是线段  $AB$  的中点, 则椭圆  $C$  的离心率等于\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 已知函数  $f(x) = \sin(x + \theta) + a \cos(x + 2\theta)$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .
- (1) 当  $a = \sqrt{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时, 求  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上的最大值与最小值;
- (2) 若  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $f(\pi) = 1$ , 求  $a, \theta$  的值.

18. 已知首项都是 1 的两个数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  ( $b_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ) 满足  $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n + 2b_{n+1} b_n = 0$ .
- (1) 令  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的通项公式;
- (2) 若  $b_n = 3^{n-1}$ , 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

19. 已知函数  $f(x) = (x^2 + bx + b)\sqrt{1 - 2x}$  ( $b \in \mathbf{R}$ ).

(1) 当  $b = 4$  时, 求  $f(x)$  的极值;

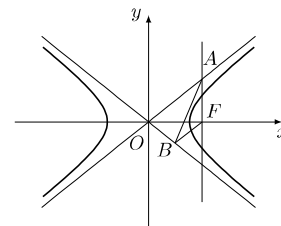
(2) 若  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$  上单调递增, 求  $b$  的取值范围.

21. 如图, 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 的右焦点为  $F$ . 点  $A, B$  分别在  $C$  的两条渐近线上,  $AF \perp x$  轴,  $AB \perp OB$ ,  $BF \parallel OA$  ( $O$  为坐标原点).

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

(2) 过  $C$  上一点  $P(x_0, y_0)$  ( $y_0 \neq 0$ ) 的直线  $l: \frac{x_0 x}{a^2} - y_0 y = 1$ , 与直线  $AF$  相交于点  $M$ , 与直线  $x = \frac{3}{2}$  相交于点  $N$ . 证明: 当点  $P$  在  $C$  上移动时,

$\frac{|MF|}{|NF|}$  恒为定值, 并求此定值.



22. 随机将  $1, 2, \dots, 2n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $n \geq 2$ ) 这  $2n$  个连续正整数分成  $A, B$  两组, 每组  $n$  个数,  $A$  组最小数为  $a_1$ , 最大数为  $a_2$ ;  $B$  组最小数为  $b_1$ , 最大数为  $b_2$ , 记  $\xi = a_2 - a_1$ ,  $\eta = b_2 - b_1$ .

(1) 当  $n = 3$  时, 求  $\xi$  的分布列和数学期望;

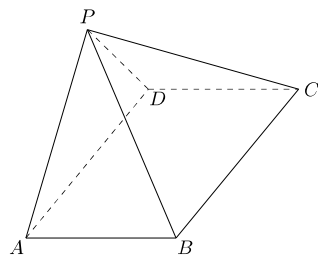
(2) 令  $C$  表示事件“ $\xi$  与  $\eta$  的取值恰好相等”, 求事件  $C$  发生的概率  $P(C)$ ;

(3) 对 (2) 中的事件  $C$ ,  $\bar{C}$  表示  $C$  的对立事件, 判断  $P(\bar{C})$  和  $P(C)$  的大小关系, 并说明理由.

20. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $ABCD$  为矩形, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ .

(1) 求证:  $AB \perp PD$ ;

(2) 若  $\angle BPC = 90^\circ$ ,  $PB = \sqrt{2}$ ,  $PC = 2$ . 问  $AB$  为何值时, 四棱锥  $P-ABCD$  的体积最大? 并求此时平面  $PBC$  与平面  $DPC$  夹角的余弦值.





# 2014 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

## 一、选择题

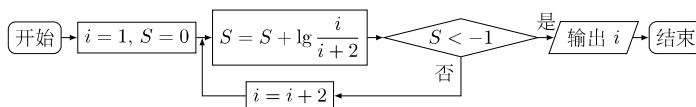
- 若复数  $z$  满足  $z(1+i) = 2i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$  ( )  
(A) 1 (B) 2 (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$
- 设全集为  $\mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 - 9 < 0\}$ ,  $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$  ( )  
(A)  $(-3, 0)$  (B)  $(-3, -1)$  (C)  $(-3, -1]$  (D)  $(-3, 3)$
- 掷两颗均匀的骰子, 则点数之和为 5 的概率等于 ( )  
(A)  $\frac{1}{18}$  (B)  $\frac{1}{9}$  (C)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{12}$
- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a \cdot 2^x, & x \geq 0, \\ 2^{-x}, & x < 0, \end{cases}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 若  $f[f(-1)] = 1$ , 则  $a =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2
- 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $3a = 2b$ , 则  $\frac{2\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A}$  的值为 ( )  
(A)  $-\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C) 1 (D)  $\frac{7}{2}$
- 下列叙述中正确的是 ( )  
(A) 若  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 则“ $ax^2 + bx + c \geq 0$ ”的充分条件是“ $b^2 - 4ac \leq 0$ ”  
(B) 若  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 则“ $ab^2 > cb^2$ ”的充要条件是“ $a > c$ ”  
(C) 命题“对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $x^2 \geq 0$ ”的否定是“存在  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $x^2 \geq 0$ ”  
(D)  $l$  是一条直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 若  $l \perp \alpha, l \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
- 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系, 随机抽查了 52 名中学生, 得到统计数据如表 1 至表 4, 则与性别有关的可能性最大的变量是 ( )

性别 \ 成绩	成绩		
	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

性别 \ 智商	智商		
	偏高	正常	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

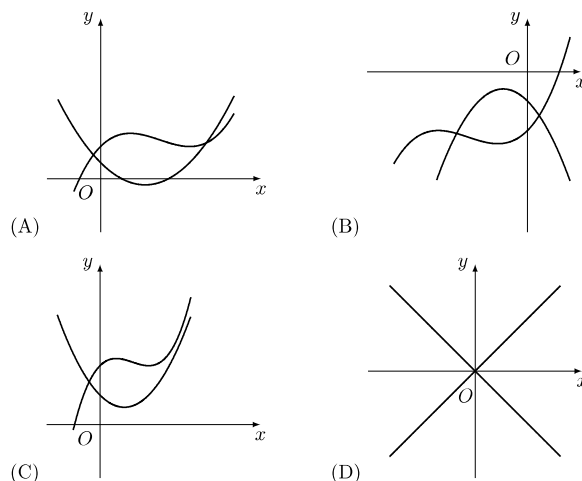
性别 \ 阅读量	阅读量		
	丰富	不丰富	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

- (A) 成绩 (B) 视力 (C) 智商 (D) 阅读量
8. 阅读如下程序框图, 运行相应的程序, 则程序运行后输出的结果为 ( )



- (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11

9. 过双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的右顶点作  $x$  轴的垂线与  $C$  的一条渐近线相交于  $A$ . 若以  $C$  的右焦点为圆心、半径为 4 的圆经过  $A, O$  两点 ( $O$  为坐标原点), 则双曲线  $C$  的方程为 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$
10. 在同一直角坐标系中, 函数  $y = ax^2 - x + \frac{a}{2}$  与  $y = a^2x^3 - 2ax^2 + x + a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 的图象不可能的是 ( )



## 二、填空题

- 若曲线  $y = x \ln x$  上点  $P$  处的切线平行于直线  $2x - y + 1 = 0$ , 则点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.
- 已知单位向量  $\mathbf{e}_1$  与  $\mathbf{e}_2$  的夹角为  $\alpha$ , 且  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , 向量  $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ , 则  $|\mathbf{a}| =$ \_\_\_\_\_.
- 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 7$ , 公差为  $d$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 当且仅当  $n = 8$  时  $S_n$  取最大值, 则  $d$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
- 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左右焦点为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  作  $x$  轴的垂线与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $F_1B$  与  $y$  轴交于点  $D$ , 若  $AD \perp F_1B$ , 则椭圆  $C$  的离心率等于\_\_\_\_\_.
- 已知  $x, y \in \mathbf{R}$ . 若  $|x| + |y| + |x-1| + |y-1| \leq 2$ , 则  $x+y$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

16. 已知函数  $f(x) = (a + 2\cos^2 x) \cos(2x + \theta)$  为奇函数, 且  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ , 其中  $a \in \mathbf{R}, \theta \in (0, \pi)$ .  
(1) 求  $a, \theta$  的值;  
(2) 若  $f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -\frac{2}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 求  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  的值.

17. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}, n \in \mathbf{N}^*$ .  
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 证明: 对任意  $n > 1$ , 都有  $m \in \mathbf{N}^*$ , 使得  $a_1, a_n, a_m$  成等比数列.

18. 已知函数  $f(x) = (4x^2 + 4ax + a^2)\sqrt{x}$ , 其中  $a < 0$ .

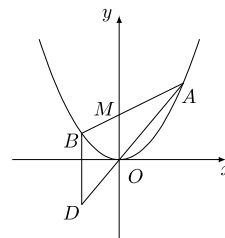
(1) 当  $a = -4$  时, 求  $f(x)$  的单调递增区间;

(2) 若  $f(x)$  在区间  $[1, 4]$  上的最小值为 8, 求  $a$  的值.

20. 如图, 已知抛物线  $C: x^2 = 4y$ , 过点  $M(0, 2)$  任作一直线与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 过点  $B$  作  $y$  轴的平行线与直线  $AO$  相交于点  $D$  ( $O$  为坐标原点).

(1) 证明: 动点  $D$  在定直线上;

(2) 作  $C$  的任意一条切线  $l$  (不含  $x$  轴) 与直线  $y = 2$  相交于点  $N_1$ , 与第一问中的定直线相交于点  $N_2$ , 证明:  $|MN_2|^2 - |MN_1|^2$  为定值, 并求此定值.



21. 将连续正整数  $1, 2, \dots, n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 从小到大排列构成一个数  $123\dots n$ ,  $F(n)$  为这个数的位数 (如  $n = 12$  时, 此数为  $123456789101112$ , 共有 15 个数字,  $F(12) = 15$ ), 现从这个数中随机取一个数字,  $p(n)$  为恰好取到 0 的概率.

(1) 求  $p(100)$ ;

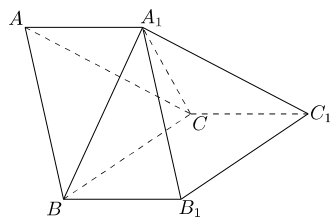
(2) 当  $n \leq 2014$  时, 求  $F(n)$  的表达式;

(3) 令  $g(n)$  为这个数中数字 0 的个数,  $f(n)$  为这个数中数字 9 的个数,  $h(n) = f(n) - g(n)$ ,  $S = \{n \mid h(n) = 1, n \leq 100, n \in \mathbf{N}^*\}$ , 求当  $n \in S$  时  $p(n)$  的最大值.

19. 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 \perp BC$ ,  $A_1B \perp BB_1$ .

(1) 求证:  $A_1C \perp CC_1$ ;

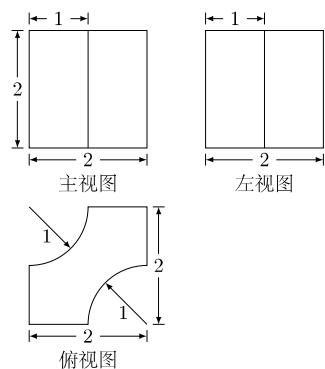
(2) 若  $AB = 2$ ,  $AC = \sqrt{3}$ ,  $BC = \sqrt{7}$ , 问  $AA_1$  为何值时, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  体积最大, 并求此最大值.



# 2014 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

## 一、选择题

- 已知全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x \geq 1\}$ , 则集合  $\complement_U(A \cup B) =$  ( )  
(A)  $\{x | x \geq 0\}$  (B)  $\{x | x \leq 1\}$   
(C)  $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$  (D)  $\{x | 0 < x < 1\}$
- 设复数  $z$  满足  $(z - 2i)(2 - i) = 5$ , 则  $z =$  ( )  
(A)  $2 + 3i$  (B)  $2 - 3i$  (C)  $3 + 2i$  (D)  $3 - 2i$
- 已知  $a = 2^{-\frac{1}{3}}$ ,  $b = \log_2 \frac{1}{3}$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ , 则 ( )  
(A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $c > a > b$  (D)  $c > b > a$
- 已知  $m, n$  表示两条不同直线,  $\alpha$  表示平面, 下列说法正确的是 ( )  
(A) 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$  (B) 若  $m \perp \alpha, n \subset \alpha$ , 则  $m \perp n$   
(C) 若  $m \perp \alpha, m \perp n$ , 则  $n \parallel \alpha$  (D) 若  $m \parallel \alpha, m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha$
- 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是非零向量, 已知命题  $p$ : 若  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ ; 命题  $q$ : 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ , 则  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$ , 则下列命题中的真命题是 ( )  
(A)  $p \vee q$  (B)  $p \wedge q$  (C)  $(\neg p) \wedge (\neg q)$  (D)  $p \vee (\neg q)$
- 6 把椅子摆成一行, 3 人随机就座, 任何两人不相邻的坐法种数为 ( )  
(A) 144 (B) 120 (C) 72 (D) 24
- 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )

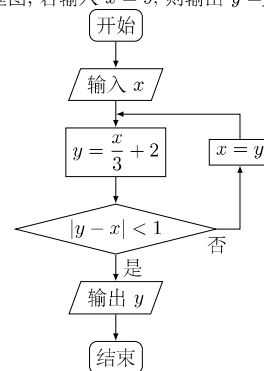


- (A)  $8 - 2\pi$  (B)  $8 - \pi$  (C)  $8 - \frac{\pi}{2}$  (D)  $8 - \frac{\pi}{4}$
- 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 若数列  $\{2^{a_n}\}$  为递减数列, 则 ( )  
(A)  $d < 0$  (B)  $d > 0$  (C)  $a_1 d > 0$  (D)  $a_1 d < 0$

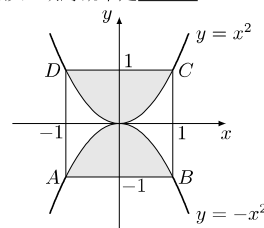
- 将函数  $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度, 所得图象对应的函数 ( )  
(A) 在区间  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  上单调递减 (B) 在区间  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  上单调递增  
(C) 在区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$  上单调递减 (D) 在区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$  上单调递增
- 已知点  $A(-2, 3)$  在抛物线  $C: y^2 = 2px$  的准线上, 过点  $A$  的直线与  $C$  在第一象限相切于点  $B$ , 记  $C$  的焦点为  $F$ , 则直线  $BF$  的斜率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{4}{3}$
- 当  $x \in [-2, 1]$  时, 不等式  $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
(A)  $[-5, -3]$  (B)  $\left[-6, -\frac{9}{8}\right]$  (C)  $[-6, -2]$  (D)  $[-4, -3]$
- 已知定义在  $[0, 1]$  上的函数  $f(x)$  满足: ①  $f(0) = f(1) = 0$ ; ② 对所有  $x, y \in [0, 1]$ , 且  $x \neq y$ , 有  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$ . 若对所有  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - f(y)| < k$  恒成立, 则  $k$  的最小值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{2\pi}$  (D)  $\frac{1}{8}$

## 二、填空题

- 执行如图的程序框图, 若输入  $x = 9$ , 则输出  $y =$ \_\_\_\_\_.



- 正方形的四个顶点  $A(-1, -1), B(1, -1), C(1, 1), D(-1, 1)$  分别在抛物线  $y = -x^2$  和  $y = x^2$  上, 如图所示, 若将一个质点随机投入正方形  $ABCD$  中, 则质点落在阴影区域的概率是\_\_\_\_\_.

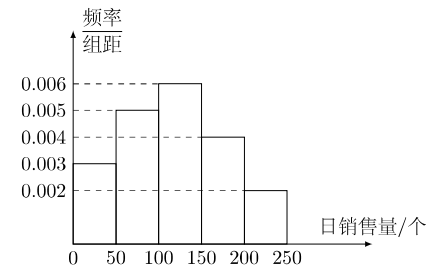


- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 点  $M$  与  $C$  的焦点不重合, 若  $M$  关于  $C$  的焦点的对称点分别为  $A, B$ , 线段  $MN$  的中点在  $C$  上, 则  $|AN| + |BN| =$ \_\_\_\_\_.
- 对于  $c > 0$ , 当非零实数  $a, b$  满足  $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$  且使  $|2a + b|$  最大时,  $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a > c$ , 已知  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ ,  $\cos B = \frac{1}{3}$ ,  $b = 3$ , 求:  
(1)  $a$  和  $c$  的值;  
(2)  $\cos(B - C)$  的值.

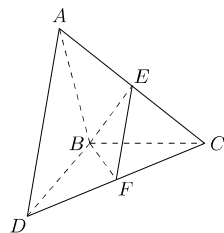
- 一家面包房根据以往某种面包的销售记录, 绘制了日销售量的频率分布直方图, 如图所示. 将日销售量落入各组的频率视为概率, 并假设每天的销售量相互独立.



- 求在未来连续 3 天里, 有连续 2 天的日销售量都不低于 100 个且另 1 天的日销售量低于 50 个的概率;
- 用  $X$  表示在未来 3 天里日销售量不低于 100 个的天数, 求随机变量  $X$  的分布列, 期望  $E(X)$  及方差  $D(X)$ .

19. 如图,  $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  所在平面互相垂直, 且  $AB = BC = BD = 2$ ,  $\angle ABC = \angle DBC = 120^\circ$ ,  $E, F$  分别为  $AC, DC$  的中点.

- (1) 求证:  $EF \perp BC$ ;  
(2) 求二面角  $E-BF-C$  的正弦值



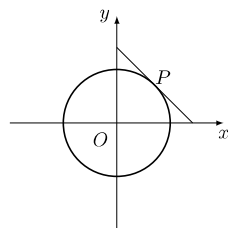
21. 已知函数  $f(x) = (\cos x - x)(\pi + 2x) - \frac{8}{3}(\sin x + 1)$ ,  $g(x) = 3(x - \pi) \cos x - 4(1 + \sin x) \ln \left( 3 - \frac{2x}{\pi} \right)$ .
- (1) 证明: 存在唯一  $x_0 \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ , 使  $f(x_0) = 0$ ;  
(2) 证明: 存在唯一  $x_1 \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right)$ , 使  $g(x_1) = 0$ , 且对 (1) 中的  $x_0$ , 有  $x_0 + x_1 < \pi$ .

23. 将圆  $x^2 + y^2 = 1$  上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线  $C$ .

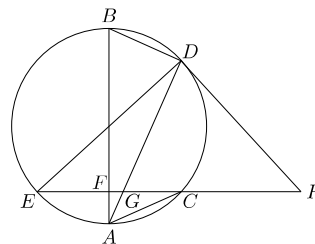
- (1) 写出  $C$  的参数方程;  
(2) 设直线  $l: 2x + y - 2 = 0$  与  $C$  的交点为  $P_1, P_2$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求过线段  $P_1P_2$  的中点且与  $l$  垂直的直线的极坐标方程.

20. 圆  $x^2 + y^2 = 4$  的切线与  $x$  轴正半轴,  $y$  轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为  $P$  (如图). 双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  过点  $P$  且离心率为  $\sqrt{3}$ .

- (1) 求  $C_1$  的方程;  
(2) 椭圆  $C_2$  过点  $P$  且与  $C_1$  有相同的焦点, 直线  $l$  过  $C_2$  的右焦点且与  $C_2$  交于  $A, B$  两点, 若以线段  $AB$  为直径的圆过点  $P$ , 求  $l$  的方程.



22. 如图,  $EP$  交圆于  $E, C$  两点,  $PD$  切圆于  $D$ ,  $G$  为  $CE$  上一点且  $PG = PD$ , 连接  $DG$  并延长交圆于点  $A$ , 作弦  $AB$  垂直  $EP$ , 垂足为  $F$ .
- (1) 求证:  $AB$  为圆的直径;  
(2) 若  $AC = BD$ , 求证:  $AB = ED$ .



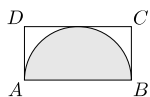
24. 设函数  $f(x) = 2|x - 1| + x - 1$ ,  $g(x) = 16x^2 - 8x + 1$ , 记  $f(x) \leq 1$  的解集为  $M$ ,  $g(x) \leq 4$  的解集为  $N$ .

- (1) 求  $M$ ;  
(2) 当  $x \in M \cap N$  时, 证明:  $x^2 f(x) + x[f(x)]^2 \leq \frac{1}{4}$ .

# 2014 普通高等学校招生考试 (辽宁卷文)

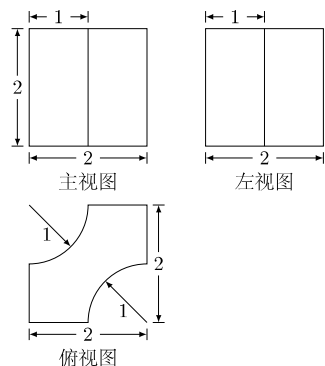
## 一、选择题

- 已知全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x \geq 1\}$ , 则集合  $\complement_U(A \cup B) =$  ( )  
(A)  $\{x | x \geq 0\}$  (B)  $\{x | x \leq 1\}$   
(C)  $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$  (D)  $\{x | 0 < x < 1\}$
- 设复数  $z$  满足  $(z - 2i)(2 - i) = 5$ , 则  $z =$  ( )  
(A)  $2 + 3i$  (B)  $2 - 3i$  (C)  $3 + 2i$  (D)  $3 - 2i$
- 已知  $a = 2^{-\frac{1}{3}}$ ,  $b = \log_2 \frac{1}{3}$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ , 则 ( )  
(A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $c > a > b$  (D)  $c > b > a$
- 已知  $m, n$  表示两条不同直线,  $\alpha$  表示平面, 下列说法正确的是 ( )  
(A) 若  $m \parallel \alpha$ ,  $n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$  (B) 若  $m \perp \alpha$ ,  $n \subset \alpha$ , 则  $m \perp n$   
(C) 若  $m \perp \alpha$ ,  $m \perp n$ , 则  $n \parallel \alpha$  (D) 若  $m \parallel \alpha$ ,  $m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha$
- 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是非零向量, 已知命题  $p$ : 若  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ ; 命题  $q$ : 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ , 则  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$ , 则下列命题中的真命题是 ( )  
(A)  $p \vee q$  (B)  $p \wedge q$  (C)  $(\neg p) \wedge (\neg q)$  (D)  $p \vee (\neg q)$
- 若将一个质点随机投入如图所示的长方形  $ABCD$  中, 其中  $AB = 2$ ,  $BC = 1$ , 则质点落在以  $AB$  为直径的半圆内的概率是 ( )



- (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{6}$  (D)  $\frac{\pi}{8}$

- 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



- (A)  $8 - \frac{\pi}{4}$  (B)  $8 - \frac{\pi}{2}$  (C)  $8 - \pi$  (D)  $8 - 2\pi$

- 已知点  $A(-2, 3)$  在抛物线  $C: y^2 = 2px$  的准线上, 记  $C$  的焦点为  $F$ , 则直线  $AF$  的斜率为 ( )

- (A)  $-\frac{4}{3}$  (B)  $-1$  (C)  $-\frac{3}{4}$  (D)  $-\frac{1}{2}$

- 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 若数列  $\{2^{a_n}\}$  为递减数列, 则 ( )

- (A)  $d < 0$  (B)  $d > 0$  (C)  $a_1 d > 0$  (D)  $a_1 d < 0$

- 已知  $f(x)$  为偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - 1, & x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$ , 则

不等式  $f(x-1) \leq \frac{1}{2}$  的解集为 ( )

- (A)  $[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{7}{4}]$  (B)  $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$   
(C)  $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{7}{4}]$  (D)  $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$

- 将函数  $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度, 所得图象对应的函数 ( )

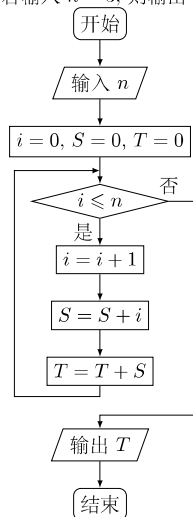
- (A) 在区间  $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$  上单调递减 (B) 在区间  $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$  上单调递增  
(C) 在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  上单调递减 (D) 在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  上单调递增

- 当  $x \in [-2, 1]$  时, 不等式  $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- (A)  $[-5, -3]$  (B)  $[-6, -\frac{9}{8}]$  (C)  $[-6, -2]$  (D)  $[-4, -3]$

## 二、填空题

- 执行如图的程序框图, 若输入  $n = 3$ , 则输出  $T =$ \_\_\_\_\_.



- 已知  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} 2x + y - 2 \geq 0, \\ x - 2y + 4 \geq 0, \\ 3x - y - 3 \leq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z = 3x + 4y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 点  $M$  与  $C$  的焦点不重合, 若  $M$  关于  $C$  的焦点的对称点分别为  $A, B$ , 线段  $MN$  的中点在  $C$  上, 则  $|AN| + |BN| =$ \_\_\_\_\_.

- 对于  $c > 0$ , 当非零实数  $a, b$  满足  $4a^2 - 2ab + b^2 - c = 0$  且使  $|2a + b|$  最大时,  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a > c$ , 已知  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ ,  $\cos B = \frac{1}{3}$ ,  $b = 3$ , 求:  
(1)  $a$  和  $c$  的值;  
(2)  $\cos(B - C)$  的值.

- 某大学餐饮中心为了了解新生的饮食习惯, 在全校一年级学生中进行了抽样调查, 调查结果如下表所示:

	喜欢甜品	不喜欢甜品	合计
南方学生	60	20	80
北方学生	10	10	20
合计	70	30	100

- 根据表中数据, 问是否有 95% 的把握认为“南方学生和北方学生在选用甜品的饮食习惯方面有差异”;
- 已知在被调查的北方学生中有 5 名数学系的学生, 其中 2 名喜欢甜品, 现在从这 5 名学生中随机抽取 3 人, 求至多有 1 人喜欢甜品的概率.

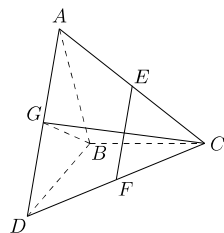
附:  $\chi^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_1 + n_2 + n_{+1}n_{+2}}$ , 

$P(\chi^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
$k$	2.706	3.841	6.635

19. 如图,  $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  所在平面互相垂直, 且  $AB = BC = BD = 2$ ,  $\angle ABC = \angle DBC = 120^\circ$ ,  $E, F, G$  分别为  $AC, DC, AD$  的中点.

- (1) 求证:  $EF \perp$  平面  $BCG$ ;  
(2) 求三棱锥  $D-BCG$  的体积.

附: 锥体的体积公式  $V = \frac{1}{3}Sh$ , 其中  $S$  为底面面积,  $h$  为高.



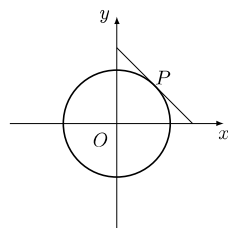
21. 已知函数  $f(x) = \pi(x - \cos x) - 2\sin x - 2$ ,  $g(x) = (x - \pi)\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} + \frac{2x}{\pi} - 1$ .  
(1) 证明: 存在唯一  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $f(x_0) = 0$ ;  
(2) 证明: 存在唯一  $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 使  $g(x_1) = 0$ , 且对 (1) 中的  $x_0$ , 有  $x_0 + x_1 > \pi$ .

23. 将圆  $x^2 + y^2 = 1$  上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线  $C$ .

- (1) 写出  $C$  的参数方程;  
(2) 设直线  $l: 2x + y - 2 = 0$  与  $C$  的交点为  $P_1, P_2$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求过线段  $P_1P_2$  的中点且与  $l$  垂直的直线的极坐标方程.

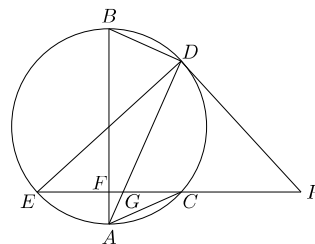
20. 圆  $x^2 + y^2 = 4$  的切线与  $x$  轴正半轴,  $y$  轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为  $P$  (如图).

- (1) 求点  $P$  的坐标;  
(2) 焦点在  $x$  轴上的椭圆  $C$  过点  $P$ , 且与直线  $l: y = x + \sqrt{3}$  交于  $A, B$  两点, 若  $\triangle PAB$  的面积为 2, 求  $C$  的标准方程.



22. 如图,  $EP$  交圆于  $E, C$  两点,  $PD$  切圆于  $D$ ,  $G$  为  $CE$  上一点且  $PG = PD$ , 连接  $DG$  并延长交圆于点  $A$ , 作弦  $AB$  垂直  $EP$ , 垂足为  $F$ .

- (1) 求证:  $AB$  为圆的直径;  
(2) 若  $AC = BD$ , 求证:  $AB = ED$ .



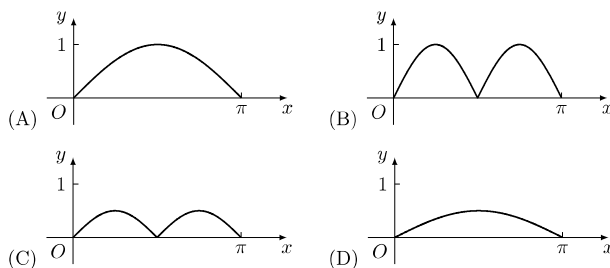
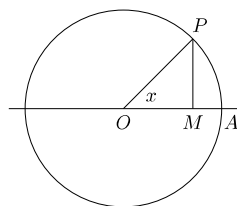
24. 设函数  $f(x) = 2|x - 1| + x - 1$ ,  $g(x) = 16x^2 - 8x + 1$ , 记  $f(x) \leq 1$  的解集为  $M$ ,  $g(x) \leq 4$  的解集为  $N$ .

- (1) 求  $M$ ;  
(2) 当  $x \in M \cap N$  时, 证明:  $x^2 f(x) + x[f(x)]^2 \leq \frac{1}{4}$ .

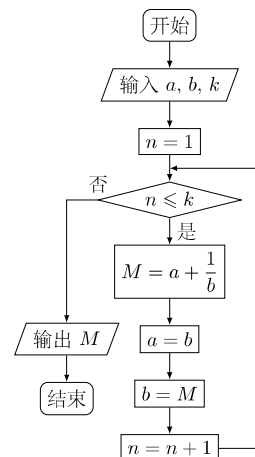
# 2014 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$ ,  $B = \{x \mid -2 \leq x < 2\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $[-2, -1]$  (B)  $[-1, 2]$  (C)  $[-1, 1]$  (D)  $[1, 2]$
- $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} =$  ( )  
(A)  $1+i$  (B)  $1-i$  (C)  $-1+i$  (D)  $-1-i$
- 设函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的定义域都为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数, 则下列结论正确的是 ( )  
(A)  $f(x)g(x)$  是偶函数 (B)  $|f(x)|g(x)$  是奇函数  
(C)  $|g(x)|f(x)$  是奇函数 (D)  $|f(x)g(x)|$  是奇函数
- 已知  $F$  是双曲线  $C: x^2 - my^2 = 3m$  ( $m > 0$ ) 的一个焦点, 则点  $F$  到  $C$  的一条渐近线的距离为 ( )  
(A)  $\sqrt{3}$  (B)  $3$  (C)  $\sqrt{3}m$  (D)  $3m$
- 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{3}{8}$  (C)  $\frac{5}{8}$  (D)  $\frac{7}{8}$
- 如图, 圆  $O$  的半径为 1,  $A$  是圆上的定点,  $P$  是圆上的动点, 角  $x$  的始边为射线  $OA$ , 终边为射线  $OP$ , 过点  $P$  作直线  $OA$  的垂线, 垂足为  $M$ , 将点  $M$  到直线  $OP$  的距离表示为  $x$  的函数  $f(x)$ , 则  $y = f(x)$  在  $[0, \pi]$  上的图象大致为 ( )



7. 执行如图的程序框图, 若输入的  $a, b, k$  分别为 1, 2, 3, 则输出的  $M =$  ( )

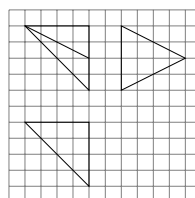


- (A)  $\frac{20}{3}$  (B)  $\frac{7}{2}$  (C)  $\frac{16}{5}$  (D)  $\frac{15}{8}$
8. 设  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 且  $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$ , 则 ( )  
(A)  $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$  (B)  $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  (C)  $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$  (D)  $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

9. 不等式组  $\begin{cases} x + y \geq 1, \\ x - 2y \leq 4 \end{cases}$  的解集记为  $D$ . 有下面四个命题:  
 $p_1: \forall (x, y) \in D, x + 2y \geq -2;$   $p_2: \exists (x, y) \in D, x + 2y \geq 2;$   
 $p_3: \forall (x, y) \in D, x + 2y \leq 3;$   $p_4: \exists (x, y) \in D, x + 2y \leq -1.$   
其中真命题是 ( )  
(A)  $p_2, p_3$  (B)  $p_1, p_2$  (C)  $p_1, p_4$  (D)  $p_1, p_3$

10. 已知抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ ,  $P$  是  $l$  上一点,  $Q$  是直线  $PF$  与  $C$  的一个交点, 若  $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$ , 则  $|QF| =$  ( )  
(A)  $\frac{7}{2}$  (B)  $3$  (C)  $\frac{5}{2}$  (D)  $2$
11. 已知函数  $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ , 若  $f(x)$  存在唯一的零点  $x_0$ , 且  $x_0 > 0$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )  
(A)  $(2, +\infty)$  (B)  $(1, +\infty)$  (C)  $(-\infty, -2)$  (D)  $(-\infty, -1)$

12. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为 ( )



- (A)  $6\sqrt{2}$  (B)  $6$  (C)  $4\sqrt{2}$  (D)  $4$

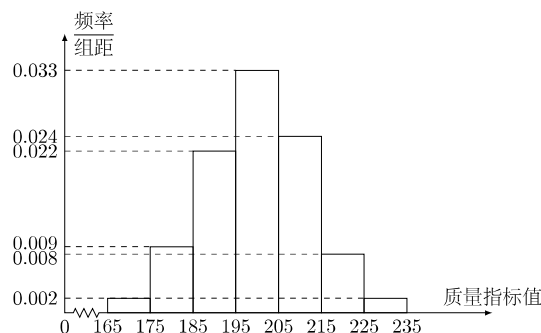
## 二、填空题

13.  $(x - y)(x + y)^8$  的展开式中  $x^2y^7$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字填写答案)
14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过  $A, B, C$  三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过  $B$  城市; 乙说: 我没去过  $C$  城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为\_\_\_\_\_.
15. 已知  $A, B, C$  是圆  $O$  上的三点, 若  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ , 则  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$  的夹角为\_\_\_\_\_.
16. 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  的对边,  $a = 2$ , 且  $(2 + b)(\sin A - \sin B) = (c - b)\sin C$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

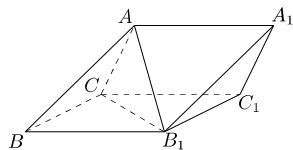
17. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$ , 其中  $\lambda$  为常数.  
(1) 证明:  $a_{n+2} - a_n = \lambda$ ;  
(2) 是否存在  $\lambda$ , 使得  $\{a_n\}$  为等差数列? 并说明理由.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



- (1) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数  $\bar{x}$  和样本方差  $s^2$  (同一组数据用该区间的中点值作代表);
- (2) 由频率分布直方图可以认为, 这种产品的质量指标值  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$ ,  $\sigma^2$  近似为样本方差  $s^2$ .
- ① 利用该正态分布, 求  $P(187.8 < Z < 212.2)$ ;
- ② 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记  $X$  表示这 100 件产品中质量指标值位于区间  $(187.8, 212.2)$  的产品件数, 利用①的结果, 求  $EX$ . 附:  $\sqrt{150} \approx 12.2$ , 若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ,  $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ .

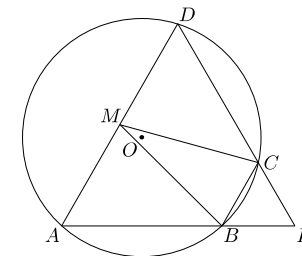
19. 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧面  $BB_1C_1C$  为菱形,  $AB \perp B_1C$ .
- (1) 证明:  $AC = AB_1$ ;
- (2) 若  $AC \perp AB_1$ ,  $\angle CBB_1 = 60^\circ$ ,  $AB = BC$ , 求二面角  $A - A_1B_1 - C_1$  的余弦值.



20. 已知点  $A(0, -2)$ , 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $F$  是椭圆的右焦点, 直线  $AF$  的斜率为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $O$  为坐标原点.
- (1) 求  $E$  的方程;
- (2) 设过点  $A$  的动直线  $l$  与  $E$  相交于  $P, Q$  两点, 当  $\triangle OPQ$  的面积最大时, 求  $l$  的方程.

21. 设函数  $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = e(x - 1) + 2$ .
- (1) 求  $a, b$ ;
- (2) 证明:  $f(x) > 1$ .

22. 如图, 四边形  $ABCD$  是  $\odot O$  的内接四边形,  $AB$  的延长线与  $DC$  的延长线交于点  $E$ , 且  $CB = CE$ .
- (1) 证明:  $\angle D = \angle E$ ;
- (2) 设  $AD$  不是  $\odot O$  的直径,  $AD$  的中点为  $M$ , 且  $MB = MC$ , 证明:  $\triangle ADE$  为等边三角形.



23. 已知曲线  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 直线  $l: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2 - 2t, \end{cases}$  ( $t$  为参数).
- (1) 写出曲线  $C$  的参数方程, 直线  $l$  的普通方程;
- (2) 过曲线  $C$  上任一点  $P$  作与  $l$  夹角为  $30^\circ$  的直线, 交  $l$  于点  $A$ , 求  $|PA|$  的最大值与最小值.

24. 若  $a > 0, b > 0$ , 且  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$ .
- (1) 求  $a^3 + b^3$  的最小值;
- (2) 是否存在  $a, b$ , 使得  $2a + 3b = 6$ ? 并说明理由.



# 2014 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

## 一、选择题

1. 已知集合  $M = \{x \mid -1 < x < 3\}$ ,  $N = \{x \mid -2 < x < 1\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
 (A)  $(-2, 1)$  (B)  $(-1, 1)$  (C)  $(1, 3)$  (D)  $(-2, 3)$

2. 若  $\tan \alpha > 0$ , 则 ( )  
 (A)  $\sin 2\alpha > 0$  (B)  $\cos \alpha > 0$  (C)  $\sin \alpha > 0$  (D)  $\cos 2\alpha > 0$

3. 设  $z = \frac{1}{1+i} + i$ , 则  $|z| =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D) 2

4. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$  ( $a > 0$ ) 的离心率为 2, 则  $a =$  ( )  
 (A) 2 (B)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (D) 1

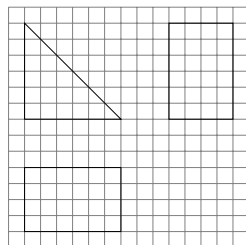
5. 设函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的定义域都为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数, 则下列结论正确的是 ( )

- (A)  $f(x)|g(x)|$  是奇函数 (B)  $|f(x)|g(x)$  是奇函数  
 (C)  $f(x)g(x)$  是偶函数 (D)  $|f(x)g(x)|$  是奇函数

6. 设  $D$ ,  $E$ ,  $F$  分别为  $\triangle ABC$  的三边  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  的中点, 则  $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} =$  ( )  
 (A)  $\overrightarrow{BC}$  (B)  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$  (C)  $\overrightarrow{AD}$  (D)  $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

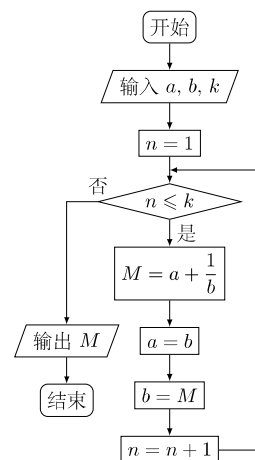
7. 在函数①  $y = \cos |2x|$ , ②  $y = |\cos x|$ , ③  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ , ④  $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  中, 最小正周期为  $\pi$  的所有函数为 ( )  
 (A) ②④ (B) ①③④ (C) ①②③ (D) ①③

8. 如图, 网格纸的各小格都是正方形, 粗实线画出的是一个几何体的三视图, 则这个几何体是 ( )



- (A) 三棱锥 (B) 三棱柱 (C) 四棱锥 (D) 四棱柱

9. 执行如图的程序框图, 若输入的  $a, b, k$  分别为 1, 2, 3, 则输出的  $M =$  ( )



- (A)  $\frac{20}{3}$  (B)  $\frac{7}{2}$  (C)  $\frac{16}{5}$  (D)  $\frac{15}{8}$

10. 已知抛物线  $C: y^2 = x$  的焦点为  $F$ ,  $A(x_0, y_0)$  是  $C$  上一点,  $|AF| = \frac{5}{4}x_0$ , 则  $x_0 =$  ( )  
 (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 8

11. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \geq a, \\ x-y \leq -1, \end{cases}$  且  $z = x + ay$  的最小值为 7, 则  $a =$  ( )  
 (A) -5 (B) 3 (C) -5 或 3 (D) 5 或 -3

12. 已知函数  $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ , 若  $f(x)$  存在唯一的零点  $x_0$ , 且  $x_0 > 0$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )  
 (A)  $(-\infty, -2)$  (B)  $(1, +\infty)$  (C)  $(2, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -1)$

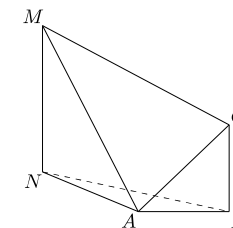
## 二、填空题

13. 将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行, 则 2 本数学书相邻的概率为\_\_\_\_\_.

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过  $A, B, C$  三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过  $B$  城市; 乙说: 我没去过  $C$  城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为\_\_\_\_\_.

15. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1, \\ x^{\frac{1}{3}}, & x \geq 1, \end{cases}$  则使得  $f(x) \leq 2$  成立的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 如图, 为测量山高  $MN$ , 选择  $A$  和另一座山的山顶  $C$  为测量观测点. 从  $A$  点测得  $M$  点的仰角  $\angle MAN = 60^\circ$ ,  $C$  点的仰角  $\angle CAB = 45^\circ$  以及  $\angle MAC = 75^\circ$ ; 从  $C$  点测得  $\angle MCA = 60^\circ$ . 已知山高  $BC = 100$  m, 则山高  $MN =$ \_\_\_\_\_m.



## 三、解答题

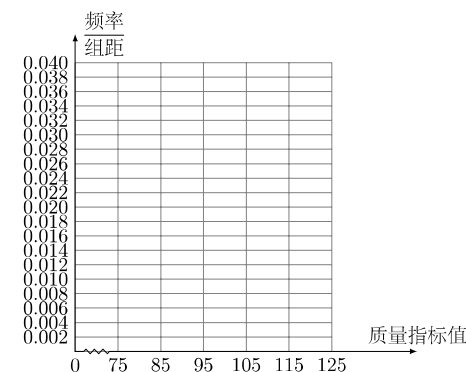
17. 已知  $\{a_n\}$  是递增的等差数列,  $a_2, a_4$  是方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的根.

- (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 求数列  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  的前  $n$  项和.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 100 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频数分布表:

质量指标值分组	[75, 85)	[85, 95)	[95, 105)	[105, 115)	[115, 125)
频数	6	26	38	22	8

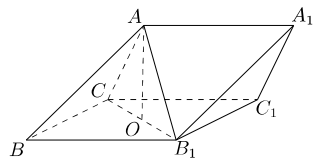
- (1) 作出这些数据的频率分布直方图;



- (2) 估计这种产品质量指标值的平均数及方差 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

- (3) 根据以上抽样调查数据, 能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定?

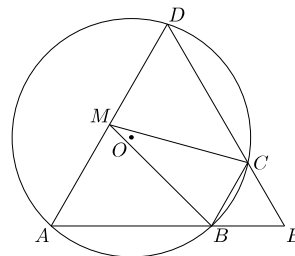
19. 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧面  $BB_1C_1C$  为菱形,  $B_1C$  的中点为  $O$ , 且  $AO \perp$  平面  $BB_1C_1C$ .
- (1) 证明:  $B_1C \perp AB$ ;
- (2) 若  $AC \perp AB_1$ ,  $\angle CBB_1 = 60^\circ$ ,  $BC = 1$ , 求三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的高.



20. 已知点  $P(2, 2)$ , 圆  $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$ , 过点  $P$  的动直线  $l$  与圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 线段  $AB$  的中点为  $M$ ,  $O$  为坐标原点.
- (1) 求  $M$  的轨迹方程;
- (2) 当  $|OP| = |OM|$  时, 求  $l$  的方程及  $\triangle POM$  的面积.

21. 设函数  $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - bx$  ( $a \neq 1$ ), 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线斜率为 0.
- (1) 求  $b$ ;
- (2) 若存在  $x_0 \geq 1$  使得  $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$ , 求  $a$  的取值范围.

22. 如图, 四边形  $ABCD$  是  $\odot O$  的内接四边形,  $AB$  的延长线与  $DC$  的延长线交于点  $E$ , 且  $CB = CE$ .
- (1) 证明:  $\angle D = \angle E$ ;
- (2) 设  $AD$  不是  $\odot O$  的直径,  $AD$  的中点为  $M$ , 且  $MB = MC$ , 证明:  $\triangle ADE$  为等边三角形.



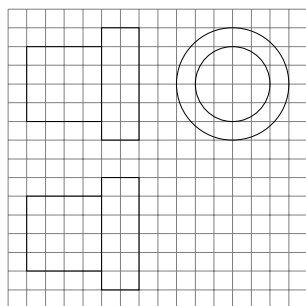
23. 已知曲线  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 直线  $l: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2 - 2t, \end{cases}$  ( $t$  为参数).
- (1) 写出曲线  $C$  的参数方程, 直线  $l$  的普通方程;
- (2) 过曲线  $C$  上任一点  $P$  作与  $l$  夹角为  $30^\circ$  的直线, 交  $l$  于点  $A$ , 求  $|PA|$  的最大值与最小值.

24. 若  $a > 0, b > 0$ , 且  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$ .
- (1) 求  $a^3 + b^3$  的最小值;
- (2) 是否存在  $a, b$ , 使得  $2a + 3b = 6$ ? 并说明理由.

# 2014 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

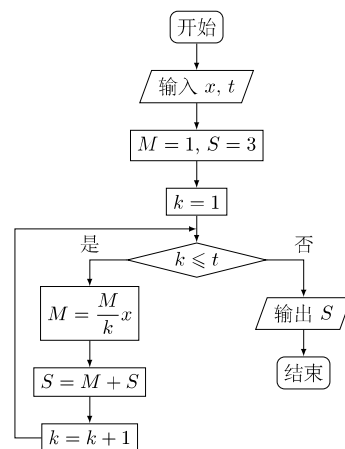
## 一、选择题

1. 设集合  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $N = \{x \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $\{1\}$  (B)  $\{2\}$  (C)  $\{0, 1\}$  (D)  $\{1, 2\}$
2. 设复数  $z_1, z_2$  在复平面内的对应点关于虚轴对称,  $z_1 = 2 + i$ , 则  $z_1 z_2 =$  ( )  
(A)  $-5$  (B)  $5$  (C)  $-4 + i$  (D)  $-4 - i$
3. 设向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{10}$ ,  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{6}$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$  ( )  
(A)  $1$  (B)  $2$  (C)  $3$  (D)  $5$
4. 钝角三角形  $ABC$  的面积是  $\frac{1}{2}$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = \sqrt{2}$ , 则  $AC =$  ( )  
(A)  $5$  (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $2$  (D)  $1$
5. 某地区空气质量监测资料表明, 一天的空气质量为优良的概率是  $0.75$ , 连续两天为优良的概率是  $0.6$ , 已知某天的空气质量为优良, 则随后一天的空气质量为优良的概率是 ( )  
(A)  $0.8$  (B)  $0.75$  (C)  $0.6$  (D)  $0.45$
6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为  $1$  (表示  $1 \text{ cm}$ ), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为  $3 \text{ cm}$ , 高为  $6 \text{ cm}$  的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉的部分的体积与原来毛坯体积的比值为 ( )



- (A)  $\frac{17}{27}$  (B)  $\frac{5}{9}$  (C)  $\frac{10}{27}$  (D)  $\frac{1}{3}$

7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $x, t$  均为  $2$ , 则输出的  $S =$  ( )



- (A)  $4$  (B)  $5$  (C)  $6$  (D)  $7$

8. 设曲线  $y = ax - \ln(x + 1)$  在点  $(0, 0)$  处的切线方程为  $y = 2x$ , 则  $a =$  ( )  
(A)  $0$  (B)  $1$  (C)  $2$  (D)  $3$

9. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y - 7 \leq 0, \\ x - 3y + 1 \leq 0, \\ 3x - y - 5 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x - y$  的最大值为 ( )  
(A)  $10$  (B)  $8$  (C)  $3$  (D)  $2$

10. 设  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 3x$  的焦点, 过  $F$  且倾斜角为  $30^\circ$  的直线交  $C$  于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 则  $\triangle OAB$  的面积为 ( )  
(A)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  (B)  $\frac{9\sqrt{3}}{8}$  (C)  $\frac{63}{32}$  (D)  $\frac{9}{4}$

11. 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $M, N$  分别是  $A_1B_1, A_1C_1$  的中点,  $BC = CA = CC_1$ , 则  $BM$  与  $AN$  所成角的余弦值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{\sqrt{30}}{10}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{m}$ , 若存在  $f(x)$  的极值点  $x_0$  满足  $x_0^2 + [f(x_0)]^2 < m^2$ , 则  $m$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$  (B)  $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$   
(C)  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

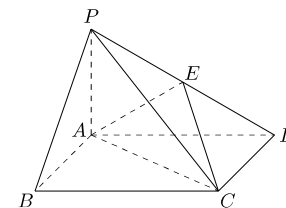
## 二、填空题

13.  $(x + a)^{10}$  的展开式中,  $x^7$  的系数为  $15$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_. (用数字填写答案)
14. 函数  $f(x) = \sin(x + 2\varphi) - 2 \sin \varphi \cos(x + \varphi)$  的最大值为\_\_\_\_\_.
15. 已知偶函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  单调递减,  $f(2) = 0$ , 若  $f(x - 1) > 0$ , 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 设点  $M(x_0, 1)$ , 若在圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  上存在点  $N$ , 使得  $\angle OMN = 45^\circ$ , 则  $x_0$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 1$ .  
(1) 证明  $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$  是等比数列, 并求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 证明:  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$ .

18. 如图, 四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E$  为  $PD$  的中点.  
(1) 证明:  $PB \parallel$  平面  $AEC$ ;  
(2) 设二面角  $D - AE - C$  为  $60^\circ$ ,  $AP = 1, AD = \sqrt{3}$ , 求三棱锥  $E - ACD$  的体积.



19. 某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭人均纯收入  $y$  (单位: 千元) 的数据如下表:

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 $t$	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 $y$	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

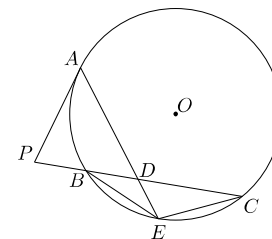
- (1) 求  $y$  关于  $t$  的线性回归方程;  
 (2) 利用 (1) 中的回归方程, 分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况, 并预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入.  
 附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

20. 设  $F_1$ 、 $F_2$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点,  $M$  是  $C$  上一点且  $MF_2$  与  $x$  轴垂直, 直线  $MF_1$  与  $C$  的另一个交点为  $N$ .  
 (1) 若直线  $MN$  的斜率为  $\frac{3}{4}$ , 求  $C$  的离心率;  
 (2) 若直线  $MN$  在  $y$  轴上的截距为 2, 且  $|MN| = 5|F_1N|$ , 求  $a, b$ .

21. 已知函数  $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ .  
 (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;  
 (2) 设  $g(x) = f(2x) - 4bf(x)$ , 当  $x > 0$  时,  $g(x) > 0$ , 求  $b$  的最大值;  
 (3) 已知  $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$ , 估计  $\ln 2$  的近似值 (精确到 0.001).

22. 如图,  $P$  是  $\odot O$  外一点,  $PA$  是切线,  $A$  为切点, 割线  $PBC$  与  $\odot O$  相交于点  $B, C$ ,  $PC = 2PA$ ,  $D$  为  $PC$  的中点,  $AD$  的延长线交  $\odot O$  于点  $E$ . 证明:  
 (1)  $BE = EC$ ;  
 (2)  $AD \cdot DE = 2PB^2$ .



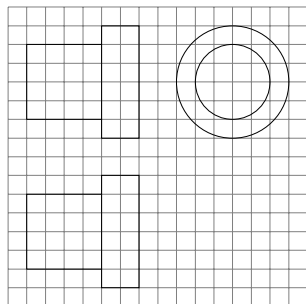
23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \cos \theta$ ,  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .  
 (1) 求  $C$  的参数方程;  
 (2) 设点  $D$  在  $C$  上,  $C$  在  $D$  处的切线与直线  $l: y = \sqrt{3}x + 2$  垂直, 根据 (1) 中你得到的参数方程, 确定点  $D$  的坐标.

24. 设函数  $f(x) = \left|x + \frac{1}{a}\right| + |x - a|$  ( $a > 0$ ).  
 (1) 证明:  $f(x) \geq 2$ ;  
 (2) 若  $f(3) < 5$ , 求  $a$  的取值范围.

# 2014 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

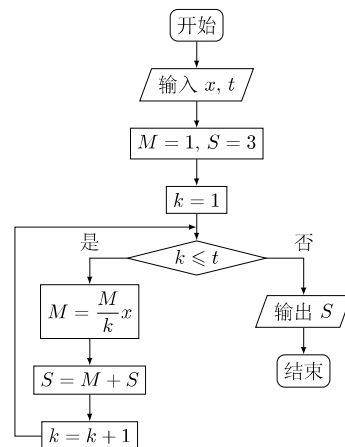
## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{-2, 0, 2\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $\emptyset$  (B)  $\{2\}$  (C)  $\{0\}$  (D)  $\{-2\}$
- $\frac{1+3i}{1-i} =$  ( )  
(A)  $1+2i$  (B)  $-1+2i$  (C)  $1-2i$  (D)  $-1-2i$
- 函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处导数存在, 若  $p: f'(x_0) = 0$ ;  $q: x = x_0$  是  $f(x)$  的极值点, 则 ( )  
(A)  $p$  是  $q$  的充分必要条件  
(B)  $p$  是  $q$  的充分条件, 但不是  $q$  的必要条件  
(C)  $p$  是  $q$  的必要条件, 但不是  $q$  的充分条件  
(D)  $p$  既不是  $q$  的充分条件, 也不是  $q$  的必要条件
- 设向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{10}$ ,  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{6}$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$  ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5
- 等差数列  $\{a_n\}$  的公差是 2, 若  $a_2, a_4, a_8$  成等比数列, 则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n =$  ( )  
(A)  $n(n+1)$  (B)  $n(n-1)$  (C)  $\frac{n(n+1)}{2}$  (D)  $\frac{n(n-1)}{2}$
- 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1 (表示 1 cm), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3 cm, 高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉的部分的体积与原来毛坯体积的比值为 ( )



- (A)  $\frac{17}{27}$  (B)  $\frac{5}{9}$  (C)  $\frac{10}{27}$  (D)  $\frac{1}{3}$
- 正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的底面边长为 2, 侧棱长为  $\sqrt{3}$ ,  $D$  为  $BC$  中点, 则三棱锥  $A - B_1DC_1$  的体积为 ( )  
(A) 3 (B)  $\frac{3}{2}$  (C) 1 (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $x, t$  均为 2, 则输出的  $S =$  ( )



- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ x - 3y + 3 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = x + 2y$  的最大值为 ( )  
(A) 8 (B) 7 (C) 2 (D) 1
- 设  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 3x$  的焦点, 过  $F$  且倾斜角为  $30^\circ$  的直线交  $C$  于  $A, B$  两点, 则  $|AB| =$  ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{30}}{3}$  (B) 6 (C) 12 (D)  $7\sqrt{3}$

- 若函数  $f(x) = kx - \ln x$  在区间  $(1, +\infty)$  单调递增, 则  $k$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(-\infty, -2]$  (B)  $(-\infty, -1]$  (C)  $[2, +\infty)$  (D)  $[1, +\infty)$
- 设点  $M(x_0, 1)$ , 若在圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  上存在点  $N$ , 使得  $\angle OMN = 45^\circ$ , 则  $x_0$  的取值范围是 ( )  
(A)  $[-1, 1]$  (B)  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (C)  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  (D)  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

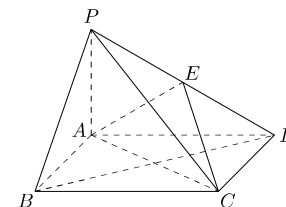
## 二、填空题

- 甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝 3 种颜色的运动服中选择 1 种, 则他们选择相同颜色运动服的概率为\_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = \sin(x + \varphi) - 2\sin\varphi \cos x$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 偶函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = 2$  对称,  $f(3) = 3$ , 则  $f(-1) =$ \_\_\_\_\_.
- 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ,  $a_8 = 2$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 四边形  $ABCD$  的内角  $A$  与  $C$  互补,  $AB = 1$ ,  $BC = 3$ ,  $CD = DA = 2$ .  
(1) 求  $C$  和  $BD$ ;  
(2) 求四边形  $ABCD$  的面积.

- 如图, 四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E$  为  $PD$  的中点.  
(1) 证明:  $PB \parallel$  平面  $AEC$ ;  
(2) 设  $AP = 1$ ,  $AD = \sqrt{3}$ , 三棱锥  $P - ABD$  的体积  $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 求  $A$  到平面  $PBC$  的距离.



19. 某市为了考核甲、乙两部门的工作情况, 随机访问了 50 位市民, 根据这 50 位市民对这两部门的评分 (评分越高表明市民的评价越高), 绘制茎叶图如下:

甲部门		乙部门
	3	5 9
	4	0 4 4 8
	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 7 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 4 4 4 3 3 3 2 1 0 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
6 6 5 5 2 0 0	8	1 2 3 3 4 5
6 3 2 2 2 0	9	0 1 1 4 5 6
	10	0 0 0

- 分别估计该市的市民对甲、乙两部门评分的中位数;
- 分别估计该市的市民对甲、乙两部门的评分高于 90 的概率;
- 根据茎叶图分析该市的市民对甲、乙两部门的评价.

20. 设  $F_1$ 、 $F_2$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点,  $M$  是  $C$  上一点且  $MF_2$  与  $x$  轴垂直, 直线  $MF_1$  与  $C$  的另一个交点为  $N$ .

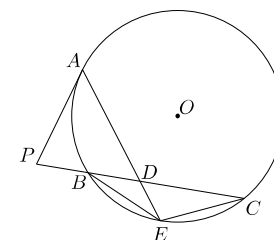
- 若直线  $MN$  的斜率为  $\frac{3}{4}$ , 求  $C$  的离心率;
- 若直线  $MN$  在  $y$  轴上的截距为 2, 且  $|MN| = 5|F_1N|$ , 求  $a, b$ .

21. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 2$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 2)$  处的切线与  $x$  轴交点的横坐标为  $-2$ .

- 求  $a$ ;
- 证明: 当  $k < 1$  时, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = kx - 2$  只有一个交点.

22. 如图,  $P$  是  $\odot O$  外一点,  $PA$  是切线,  $A$  为切点, 割线  $PBC$  与  $\odot O$  相交于点  $B, C$ ,  $PC = 2PA$ ,  $D$  为  $PC$  的中点,  $AD$  的延长线交  $\odot O$  于点  $E$ . 证明:

- $BE = EC$ ;
- $AD \cdot DE = 2PB^2$ .



23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \cos \theta$ ,  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

- 求  $C$  的参数方程;
- 设点  $D$  在  $C$  上,  $C$  在  $D$  处的切线与直线  $l: y = \sqrt{3}x + 2$  垂直, 根据 (1) 中你得到的参数方程, 确定点  $D$  的坐标.

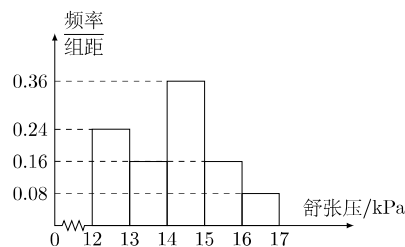
24. 设函数  $f(x) = \left|x + \frac{1}{a}\right| + |x - a|$  ( $a > 0$ ).

- 证明:  $f(x) \geq 2$ ;
- 若  $f(3) < 5$ , 求  $a$  的取值范围.

# 2014 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

## 一、选择题

- 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$  是虚数单位, 若  $a - i$  与  $2 + bi$  互为共轭复数, 则  $(a + bi)^2 =$  ( )  
(A)  $5 - 4i$  (B)  $5 + 4i$  (C)  $3 - 4i$  (D)  $3 + 4i$
- 设集合  $A = \{x \mid |x - 1| < 2\}$ ,  $B = \{y \mid y = 2^x, x \in [0, 2]\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $[0, 2]$  (B)  $(1, 3)$  (C)  $[1, 3)$  (D)  $(1, 4)$
- 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$  的定义域为 ( )  
(A)  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  (B)  $(2, +\infty)$   
(C)  $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$  (D)  $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$
- 用反证法证明命题“设  $a, b$  为实数, 则方程  $x^3 + ax + b = 0$  至少有一个实根”时, 要做的假设是 ( )  
(A) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  没有实根  
(B) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  至多有一个实根  
(C) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  至多有两个实根  
(D) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  恰好有两个实根
- 已知实数  $x, y$  满足  $a^x < a^y$  ( $0 < a < 1$ ), 则下列关系式恒成立的是 ( )  
(A)  $\frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{y^2 + 1}$  (B)  $\ln(x^2 + 1) > \ln(y^2 + 1)$   
(C)  $\sin x > \sin y$  (D)  $x^3 > y^3$
- 直线  $y = 4x$  与曲线  $y = x^3$  在第一象限内围成的封闭图形的面积为 ( )  
(A)  $2\sqrt{2}$  (B)  $4\sqrt{2}$  (C) 2 (D) 4
- 为了研究某种药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验. 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为  $[12, 13)$ ,  $[13, 14)$ ,  $[14, 15)$ ,  $[15, 16)$ ,  $[16, 17)$ , 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组,  $\dots$ , 第五组. 如图所示是根据试验数据制成的频率分布直方图. 已知第一组与第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的有 6 人, 则第三组中有疗效的人数为 ( )

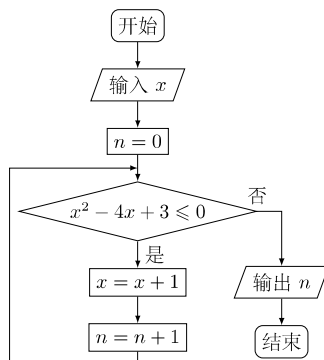


- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 18

- 已知函数  $f(x) = |x - 2| + 1$ ,  $g(x) = kx$ , 若方程  $f(x) = g(x)$  有两个不相等的实根, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )  
(A)  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  (B)  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  (C)  $(1, 2)$  (D)  $(2, +\infty)$
- 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0, \\ 2x - y - 3 \geq 0, \end{cases}$  当目标函数  $z = ax + by$  ( $a > 0, b > 0$ ) 在该约束条件下取到最小值  $2\sqrt{5}$  时,  $a^2 + b^2$  的最小值为 ( )  
(A) 5 (B) 4 (C)  $\sqrt{5}$  (D) 2
- 已知  $a > b > 0$ , 椭圆  $C_1$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 双曲线  $C_2$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $C_1$  与  $C_2$  的离心率之积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $C_2$  的渐近线方程为 ( )  
(A)  $x \pm \sqrt{2}y = 0$  (B)  $\sqrt{2}x \pm y = 0$  (C)  $x \pm 2y = 0$  (D)  $2x \pm y = 0$

## 二、填空题

- 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $x$  的值为 1, 则输出的  $n$  的值为\_\_\_\_\_.

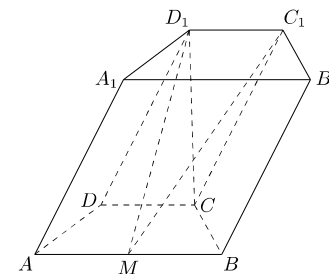


- 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \tan A$ , 当  $A = \frac{\pi}{6}$  时,  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.
- 三棱锥  $P - ABC$  中,  $D, E$  分别为  $PB, PC$  的中点, 记三棱锥  $D - ABE$  的体积为  $V_1$ ,  $P - ABC$  的体积为  $V_2$ , 则  $\frac{V_1}{V_2} =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $\left(ax^2 + \frac{b}{x}\right)^6$  的展开式中  $x^3$  项的系数为 20, 则  $a^2 + b^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $y = f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ). 对函数  $y = g(x)$  ( $x \in I$ ), 定义  $g(x)$  关于  $f(x)$  的“对称函数”为函数  $y = h(x)$  ( $x \in I$ ),  $y = h(x)$  满足: 对任意  $x \in I$ , 两个点  $(x, h(x)), (x, g(x))$  关于点  $(x, f(x))$  对称. 若  $h(x)$  是  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$  关于  $f(x) = 3x + b$  的“对称函数”, 且  $h(x) > g(x)$  恒成立, 则实数  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

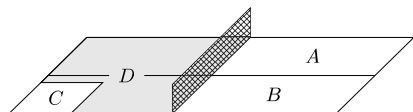
## 三、解答题

- 已知向量  $\mathbf{a} = (m, \cos 2x)$ ,  $\mathbf{b} = (\sin 2x, n)$ , 函数  $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , 且  $y = f(x)$  的图象过点  $\left(\frac{\pi}{12}, \sqrt{3}\right)$  和点  $\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$ .  
(1) 求  $m, n$  的值;  
(2) 将  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 个单位后得到函数  $y = g(x)$  的图象. 若  $y = g(x)$  的图象上各最高点到点  $(0, 3)$  的距离的最小值为 1, 求  $y = g(x)$  的单调增区间.

- 如图, 在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  是等腰梯形,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $AB = 2CD = 2$ ,  $M$  是线段  $AB$  的中点.  
(1) 求证:  $C_1M \parallel$  平面  $A_1ADD_1$ ;  
(2) 若  $CD_1$  垂直于平面  $ABCD$  且  $CD_1 = \sqrt{3}$ , 求平面  $C_1D_1M$  和平面  $ABCD$  所成的角 (锐角) 的余弦值.



18. 乒乓球台面被球网分隔成甲、乙两部分, 如图, 甲上有两个不相交的区域  $A, B$ , 乙被划分为两个不相交的区域  $C, D$ . 某次测试要求队员接到落在甲上的来球后向乙回球. 规定: 回球一次, 落点在  $C$  上记 3 分, 在  $D$  上记 1 分, 其他情况记 0 分. 对落点在  $A$  上的来球, 队员小明回球的落点在  $C$  上的概率为  $\frac{1}{2}$ , 在  $D$  上的概率为  $\frac{1}{3}$ ; 对落点在  $B$  上的来球, 小明回球的落点在  $C$  上的概率为  $\frac{1}{5}$ , 在  $D$  上的概率为  $\frac{3}{5}$ . 假设共有两次来球且落在  $A, B$  上各一次, 小明的两次回球互不影响. 求:
- (1) 小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率;
  - (2) 两次回球结束后, 小明得分之和  $\xi$  的分布列与数学期望.



19. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为 2, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_1, S_2, S_4$  成等比数列.
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
  - (2) 令  $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. 设函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - k \left( \frac{2}{x} + \ln x \right)$  ( $k$  为常数,  $e = 2.71828 \dots$  是自然对数的底数).
- (1) 当  $k \leq 0$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间;
  - (2) 若函数  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内存在两个极值点, 求  $k$  的取值范围.

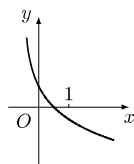
21. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ ,  $A$  为  $C$  上异于原点的任意一点, 过点  $A$  的直线  $l$  交  $C$  于另一点  $B$ , 交  $x$  轴的正半轴于点  $D$ , 且有  $|FA| = |FD|$ . 当点  $A$  的横坐标为 3 时,  $\triangle ADF$  为正三角形.
- (1) 求  $C$  的方程;
  - (2) 若直线  $l_1 \parallel l$ , 且  $l_1$  和  $C$  有且只有一个公共点  $E$ ,
    - ① 证明直线  $AE$  过定点, 并求出定点坐标;
    - ②  $\triangle ABE$  的面积是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.



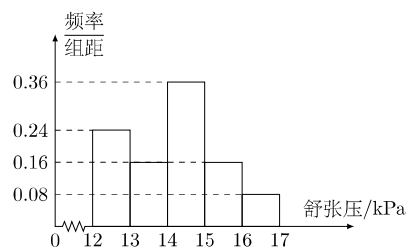
# 2014 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

## 一、选择题

- 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$  是虚数单位, 若  $a + i = 2 - bi$ , 则  $(a + bi)^2 =$  ( )  
(A)  $3 - 4i$  (B)  $3 + 4i$  (C)  $4 - 3i$  (D)  $4 + 3i$
- 设集合  $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$ ,  $B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $(0, 2]$  (B)  $(1, 2)$  (C)  $[1, 2)$  (D)  $(1, 4)$
- 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x - 1}}$  的定义域为 ( )  
(A)  $(0, 2)$  (B)  $(0, 2]$  (C)  $(2, +\infty)$  (D)  $[2, +\infty)$
- 用反证法证明命题“设  $a, b$  为实数, 则方程  $x^3 + ax + b = 0$  至少有一个实根”时, 要做的假设是 ( )  
(A) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  没有实根  
(B) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  至多有一个实根  
(C) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  至多有两个实根  
(D) 方程  $x^3 + ax + b = 0$  恰好有两个实根
- 已知实数  $x, y$  满足  $a^x < a^y$  ( $0 < a < 1$ ), 则下列关系式恒成立的是 ( )  
(A)  $x^3 > y^3$  (B)  $\sin x > \sin y$   
(C)  $\ln(x^2 + 1) > \ln(y^2 + 1)$  (D)  $\frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{y^2 + 1}$
- 已知函数  $y = \log_a(x + c)$  ( $a, c$  为常数, 其中  $a > 0, a \neq 1$ ) 的图象如图, 则下列结论成立的是 ( )



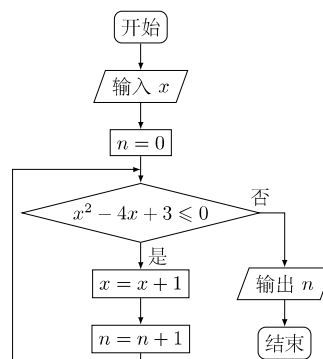
- (A)  $a > 1, c > 1$  (B)  $a > 1, 0 < c < 1$   
(C)  $0 < a < 1, c > 1$  (D)  $0 < a < 1, 0 < c < 1$
- 已知向量  $\mathbf{a} = (1, \sqrt{3})$ ,  $\mathbf{b} = (3, m)$ . 若向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为  $\frac{\pi}{6}$ , 则实数  $m =$  ( )  
(A)  $2\sqrt{3}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $0$  (D)  $-\sqrt{3}$
  - 为了研究某种药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验. 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为  $[12, 13)$ ,  $[13, 14)$ ,  $[14, 15)$ ,  $[15, 16)$ ,  $[16, 17]$ , 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组,  $\dots$ , 第五组. 如图所示是根据试验数据制成的频率分布直方图. 已知第一组与第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的有 6 人, 则第三组中有疗效的人数为 ( )



- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 18
- 对于函数  $f(x)$ , 若存在常数  $a \neq 0$ , 使得  $x$  取定义域内的每一个值, 都有  $f(x) = f(2a - x)$ , 则称  $f(x)$  为准偶函数, 下列函数中是准偶函数的是 ( )  
(A)  $f(x) = \sqrt{x}$  (B)  $f(x) = x^3$   
(C)  $f(x) = \tan x$  (D)  $f(x) = \cos(x + 1)$
  - 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0, \\ 2x - y - 3 \geq 0, \end{cases}$  当目标函数  $z = ax + by$  ( $a > 0, b > 0$ ) 在该约束条件下取到最小值  $2\sqrt{5}$  时,  $a^2 + b^2$  的最小值为 ( )  
(A) 5 (B) 4 (C)  $\sqrt{5}$  (D) 2

## 二、填空题

- 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $x$  的值为 1, 则输出的  $n$  的值为\_\_\_\_\_.



- 函数  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos^2 x$  最小正周期为\_\_\_\_\_.
- 一个六棱锥的体积为  $2\sqrt{3}$ , 其底面是边长为 2 的正六边形, 侧棱长都相等, 则该六棱锥的侧面积为\_\_\_\_\_.
- 圆心在直线  $x - 2y = 0$  上的圆  $C$  与  $y$  轴的正半轴相切, 圆  $C$  截  $x$  轴所得弦的长为  $2\sqrt{3}$ , 则圆  $C$  的标准方程为\_\_\_\_\_.
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的焦距为  $2c$ , 右顶点为  $A$ , 抛物线  $x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ . 若双曲线截抛物线的准线所得线段长为  $2c$ , 且  $FA = c$ , 则双曲线的渐近线方程为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 海关对同时从  $A, B, C$  三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测, 从各地区进口此商品的数量 (单位: 件) 如下表所示. 工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取 6 件样品进行检测.

地区	$A$	$B$	$C$
数量	50	150	100

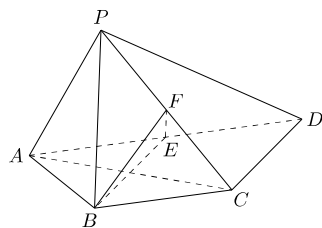
- 求这 6 件样品中来自  $A, B, C$  各地区商品的数量;
- 若在这 6 件样品中随机抽取 2 件送往甲机构进行进一步检测, 求这 2 件商品来自相同地区的概率.

- $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $a = 3, \cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}, B = A + \frac{\pi}{2}$ .  
(1) 求  $b$  的值;  
(2) 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AP \perp$  平面  $PCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ ,  $E, F$  分别为线段  $AD, PC$  的中点.

(1) 求证:  $AP \parallel$  平面  $BEF$ ;

(2) 求证:  $BE \perp$  平面  $PAC$ .



20. 设函数  $f(x) = a \ln x + \frac{x-1}{x+1}$ , 其中  $a$  为常数.

(1) 若  $a = 0$ , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2) 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

21. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 直线  $y = x$  被椭圆  $C$  截得的线段长为  $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过原点的直线与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点 ( $A, B$  不是椭圆  $C$  的顶点). 点  $D$  在椭圆  $C$  上, 且  $AD \perp AB$ , 直线  $BD$  与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $M, N$  两点.

① 设直线  $BD, AM$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 证明存在常数  $\lambda$  使得  $k_1 = \lambda k_2$ , 并求出  $\lambda$  的值;

② 求  $\triangle OMN$  面积的最大值.

19. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知公差  $d = 2$ ,  $a_2$  是  $a_1$  与  $a_4$  的等比中项.

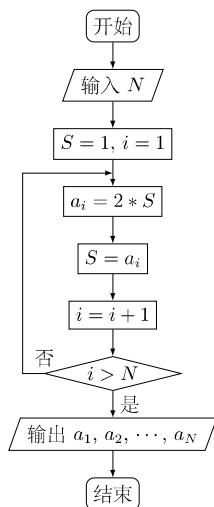
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = a_{\frac{n(n+1)}{2}}$ , 记  $T_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots + (-1)^n b_n$ , 求  $T_n$ .

# 2014 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

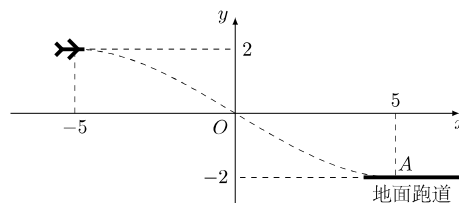
## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{x | x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{x | x^2 < 1, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $[0, 1]$  (B)  $[0, 1)$  (C)  $(0, 1)$  (D)  $(0, 1]$
- 函数  $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  的最小正周期是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$
- 定积分  $\int_0^1 (2x + e^x) dx$  的值为 ( )  
(A)  $e + 2$  (B)  $e + 1$  (C)  $e$  (D)  $e - 1$
- 根据如图所示的框图, 对大于 2 的整数  $N$ , 输出的数列的通项公式是 ( )



- (A)  $a_n = 2n$  (B)  $a_n = 2(n-1)$  (C)  $a_n = 2^n$  (D)  $a_n = 2^{n-1}$
- 已知底面边长为 1, 侧棱长为  $\sqrt{2}$  的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上, 则该球的体积为 ( )  
(A)  $\frac{32\pi}{3}$  (B)  $4\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $\frac{4\pi}{3}$
  - 从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中, 任取 2 个点, 则这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{4}{5}$
  - 下列函数中, 满足“ $f(x+y) = f(x)f(y)$ ”的单调递增函数是 ( )  
(A)  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$  (B)  $f(x) = x^3$  (C)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  (D)  $f(x) = 3^x$

- 原命题为“若  $z_1, z_2$  互为共轭复数, 则  $|z_1| = |z_2|$ ”, 关于其逆命题, 否命题, 逆否命题真假性的判断依次如下, 正确的是 ( )  
(A) 真, 假, 真 (B) 假, 假, 真 (C) 真, 真, 假 (D) 假, 假, 假
- 设样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  的均值和方差分别为 1 和 4, 若  $y_i = x_i + a$  ( $a$  为非零常数,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ), 则  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  的均值和方差分别为 ( )  
(A)  $1+a, 4$  (B)  $1+a, 4+a$  (C)  $1, 4$  (D)  $1, 4+a$
- 如图, 某飞行器在 4 千米高空水平飞行, 从距着陆点  $A$  的水平距离 10 千米处下降, 已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分, 则函数的解析式为 ( )



- (A)  $y = \frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{5}x$  (B)  $y = \frac{2}{125}x^3 - \frac{4}{5}x$   
(C)  $y = \frac{3}{125}x^3 - x$  (D)  $y = -\frac{3}{125}x^3 + \frac{1}{5}x$

## 二、填空题

- 已知  $4^a = 2$ ,  $\lg x = a$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.
- 若圆  $C$  的半径为 1, 其圆心与点  $(1, 0)$  关于直线  $y = x$  对称, 则圆  $C$  的标准方程为\_\_\_\_\_.
- 设  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 向量  $\mathbf{a} = (\sin 2\theta, \cos \theta)$ ,  $\mathbf{b} = (\cos \theta, 1)$ , 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 则  $\tan \theta =$ \_\_\_\_\_.
- 观察分析下表中的数据:

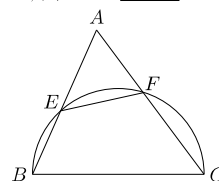
多面体	面数 ( $F$ )	顶点数 ( $V$ )	棱数 ( $E$ )
三棱锥	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12

猜想一般凸多面体中,  $F, V, E$  所满足的等式是\_\_\_\_\_.

- 三选一.

【A】设  $a, b, m, n \in \mathbf{R}$ , 且  $a^2 + b^2 = 5$ ,  $ma + nb = 5$ , 则  $\sqrt{m^2 + n^2}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

【B】如图,  $\triangle ABC$  中,  $BC = 6$ , 以  $BC$  为直径的半圆分别交  $AB, AC$  于点  $E, F$ , 若  $AC = 2AE$ , 则  $EF =$ \_\_\_\_\_.



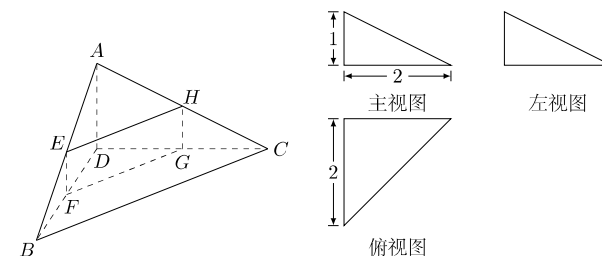
【C】在极坐标系中, 点  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$  到直线  $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$  的距离是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ .  
(1) 若  $a, b, c$  成等差数列, 证明:  $\sin A + \sin C = 2 \sin(A + C)$ ;  
(2) 若  $a, b, c$  成等比数列, 求  $\cos B$  的最小值.

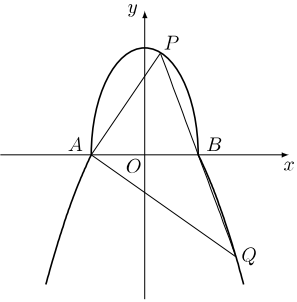
- 四面体  $ABCD$  及其三视图如图所示, 过棱  $AB$  的中点  $E$  作平行于  $AD, BC$  的平面分别交四面体的棱  $BD, DC, CA$  于点  $F, G, H$ .

- (1) 证明: 四边形  $EFGH$  是矩形;  
(2) 求直线  $AB$  与平面  $EFGH$  夹角  $\theta$  的正弦值.



18. 在直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $A(1,1)$ ,  $B(2,3)$ ,  $C(3,2)$ , 点  $P(x,y)$  在  $\triangle ABC$  三边围成的区域 (含边界) 上.
- (1) 若  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ , 求  $|\overrightarrow{OP}|$ ;
- (2) 设  $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ), 用  $x, y$  表示  $m - n$ , 并求  $m - n$  的最大值.

20. 如图, 曲线  $C$  由上半椭圆  $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0, y \geq 0$ ) 和部分抛物线  $C_2: y = -x^2 + 1$  ( $y \leq 0$ ) 连接而成,  $C_1, C_2$  的公共点为  $A, B$ , 其中  $C_1$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- (1) 求  $a, b$  的值;
- (2) 过点  $B$  的直线  $l$  与  $C_1, C_2$  分别交于点  $P, Q$  (均异于点  $A, B$ ), 若  $AP \perp AQ$ , 求直线  $l$  的方程.



19. 在一块耕地上种植一种作物, 每季种植成本为 1000 元, 此作物的市场价格和这块地上的产量均具有随机性, 且互不影响, 其具体情况如下表:

作物产量 (kg)	300	500	作物市场价格 (元/kg)	6	10
概率	0.5	0.5	概率	0.4	0.6

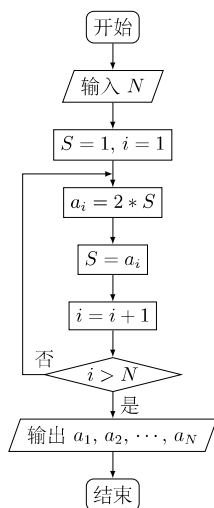
- (1) 设  $X$  表示在这块地上种植 1 季此作物的利润, 求  $X$  的分布列;
- (2) 若在这块地上连续 3 季种植此作物, 求这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率.

21. 设函数  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $g(x) = xf'(x)$ ,  $x \geq 0$ , 其中  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数.
- (1) 令  $g_1(x) = g(x)$ ,  $g_{n+1}(x) = g(g_n(x))$ ,  $n \in \mathbf{N}_+$ , 求  $g_n(x)$  的表达式;
- (2) 若  $f(x) \geq ag(x)$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;
- (3) 设  $n \in \mathbf{N}_+$ , 比较  $g(1) + g(2) + \cdots + g(n)$  与  $n - f(n)$  的大小, 并加以证明.

# 2014 普通高等学校招生考试 (陕西卷文)

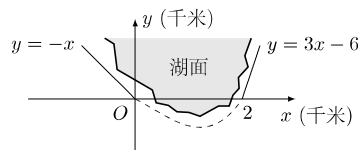
## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{x | x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{x | x^2 < 1, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $[0, 1]$  (B)  $(0, 1)$  (C)  $(0, 1]$  (D)  $[0, 1)$
- 函数  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  的最小正周期是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$
- 已知复数  $z = 2 - i$ , 则  $z \cdot \bar{z}$  的值为 ( )  
(A) 5 (B)  $\sqrt{5}$  (C) 3 (D)  $\sqrt{3}$
- 根据如图所示的框图, 对大于 2 的整数  $N$ , 输出的数列的通项公式是 ( )



- (A)  $a_n = 2n$  (B)  $a_n = 2(n-1)$  (C)  $a_n = 2^n$  (D)  $a_n = 2^{n-1}$
- 将边长为 1 的正方形以其一边所在直线为旋转轴旋转一周, 所得几何体的侧面积为 ( )  
(A)  $4\pi$  (B)  $3\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $\pi$
  - 从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中, 任取 2 个点, 则这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{4}{5}$
  - 下列函数中, 满足“ $f(x+y) = f(x)f(y)$ ”的单调递增函数是 ( )  
(A)  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$  (B)  $f(x) = x^3$  (C)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  (D)  $f(x) = 3^x$

- 原命题为“若  $\frac{a_n + a_{n+1}}{2} < a_n, n \in \mathbf{N}_+$ , 则  $\{a_n\}$  为递减数列”, 关于逆命题, 否命题, 逆否命题真假性的判断依次如下, 正确的是 ( )  
(A) 真, 真, 真 (B) 假, 假, 真 (C) 真, 真, 假 (D) 假, 假, 假
- 某公司 10 位员工的月工资 (单位: 元) 为  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , 其均值和方差分别为  $\bar{x}$  和  $s^2$ , 若从下月起每位员工的月工资增加 100 元, 则这 10 位员工下月工资的均值和方差分别为 ( )  
(A)  $\bar{x}, s^2 + 100^2$  (B)  $\bar{x} + 100, s^2 + 100^2$   
(C)  $\bar{x}, s^2$  (D)  $\bar{x} + 100, s^2$
- 如图, 修建一条公路需要一段环湖弯曲路段与两条直道平滑连接 (相切), 已知环湖弯曲路段为某三次函数图象的一部分, 则该函数的解析式为 ( )



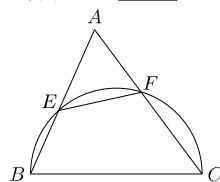
- (A)  $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$  (B)  $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$   
(C)  $y = \frac{1}{4}x^3 - x$  (D)  $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

## 二、填空题

- 抛物线  $y^2 = 4x$  的准线方程为\_\_\_\_\_.
- 已知  $4^a = 2, \lg x = a$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 向量  $\mathbf{a} = (\sin 2\theta, \cos \theta), \mathbf{b} = (1, -\cos \theta)$ , 若  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 则  $\tan \theta =$ \_\_\_\_\_.
- 已知  $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \geq 0$ , 若  $f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), n \in \mathbf{N}_+$ , 则  $f_{2014}(x)$  的表达式为\_\_\_\_\_.
- 三选一.

【A】设  $a, b, m, n \in \mathbf{R}$ , 且  $a^2 + b^2 = 5, ma + nb = 5$ , 则  $\sqrt{m^2 + n^2}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

【B】如图,  $\triangle ABC$  中,  $BC = 6$ , 以  $BC$  为直径的半圆分别交  $AB, AC$  于点  $E, F$ , 若  $AC = 2AE$ , 则  $EF =$ \_\_\_\_\_.



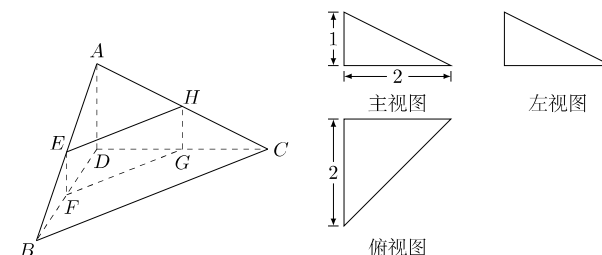
【C】在极坐标系中, 点  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$  到直线  $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$  的距离是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ .  
(1) 若  $a, b, c$  成等差数列, 证明:  $\sin A + \sin C = 2 \sin(A + C)$ ;  
(2) 若  $a, b, c$  成等比数列, 且  $c = 2a$ , 求  $\cos B$  的值.

- 四面体  $ABCD$  及其三视图如图所示, 过棱  $AB$  的中点  $E$  作平行于  $AD, BC$  的平面分别交四面体的棱  $BD, DC, CA$  于点  $F, G, H$ .

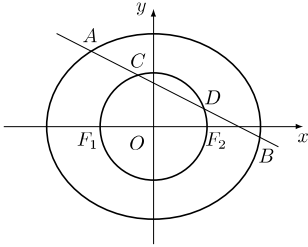
- 求四面体  $ABCD$  的体积;
- 证明: 四边形  $EFGH$  是矩形.



18. 在直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $A(1,1)$ ,  $B(2,3)$ ,  $C(3,2)$ , 点  $P(x,y)$  在  $\triangle ABC$  三边围成的区域(含边界)上, 且  $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ).
- (1) 若  $m = n = \frac{2}{3}$ , 求  $|\overrightarrow{OP}|$ ;
- (2) 用  $x, y$  表示  $m - n$ , 并求  $m - n$  的最大值.

20. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 经过点  $(0, \sqrt{3})$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 左右焦点分别为  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ .
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 若直线  $l: y = -\frac{1}{2}x + m$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 与以  $F_1F_2$  为直径的圆交于  $C, D$  两点, 且满足  $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ , 求直线  $l$  的方程.

21. 设函数  $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}$ ,  $m \in \mathbf{R}$ .
- (1) 当  $m = e$  ( $e$  为自然对数的底数) 时, 求  $f(x)$  的极小值;
- (2) 讨论函数  $g(x) = f'(x) - \frac{x}{3}$  零点的个数;
- (3) 若对任意  $b > a > 0$ ,  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$  恒成立, 求  $m$  的取值范围.



19. 某保险公司利用简单随机抽样方法, 对投保车辆进行抽样, 样本车辆中每辆车的赔付结果统计如下:

赔付金额 (元)	0	1000	2000	3000	4000
车辆数 (辆)	500	130	100	150	120

- (1) 若每辆车的投保金额均为 2800 元, 估计赔付金额大于投保金额的概率;
- (2) 在样本车辆中, 车主是新司机的占 10%, 在赔付金额为 4000 元的样本车辆中, 车主是新司机的占 20%, 估计在已投保车辆中, 新司机获赔金额为 4000 元的概率.

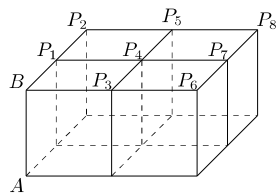
# 2014 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

## 一、填空题

- 函数  $y = 1 - 2\cos^2(2x)$  的最小正周期是\_\_\_\_\_.
- 若复数  $z = 1 + 2i$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则  $\left(z + \frac{1}{\bar{z}}\right) \cdot \bar{z} =$ \_\_\_\_\_.
- 若抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  的右焦点重合, 则该抛物线的准线方程为\_\_\_\_\_.
- 设  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, a), \\ x^2, & x \in [a, +\infty), \end{cases}$  若  $f(2) = 4$ , 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
- 若实数  $x, y$  满足  $xy = 1$ , 则  $x^2 + 2y^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 则其母线与底面夹角的大小为\_\_\_\_\_.(结果用反三角函数值表示)
- 已知曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho(3\cos\theta - 4\sin\theta) = 1$ , 则  $C$  与极轴的交点到极点的距离是\_\_\_\_\_.
- 设无穷等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 若  $a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_3 + a_4 + \cdots + a_n)$ , 则  $q =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $f(x) = x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{1}{2}}$ , 则满足  $f(x) < 0$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续 10 天中随机选择 3 天进行紧急疏散演练, 则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是\_\_\_\_\_. (结果用最简分数表示)
- 已知互异的复数  $a, b$  满足  $ab \neq 0$ , 集合  $\{a, b\} = \{a^2, b^2\}$ , 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.
- 设常数  $a$  使方程  $\sin x + \sqrt{3}\cos x = a$  在闭区间  $[0, 2\pi]$  上恰有三个解  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 =$ \_\_\_\_\_.
- 某游戏的得分为 1, 2, 3, 4, 5, 随机变量  $\xi$  表示小白玩该游戏的得分. 若  $E(\xi) = 4.2$ , 则小白得 5 分的概率至少为\_\_\_\_\_.
- 已知曲线  $C: x = -\sqrt{4-y^2}$ , 直线  $l: x = 6$ . 若对于点  $A(m, 0)$ , 存在  $C$  上的点  $P$  和  $l$  上的点  $Q$  使得  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ , 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

- 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a + b > 4$ ”是“ $a > 2$  且  $b > 2$ ”的 ( )  
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 如图, 四个棱长为 1 的正方体排成一个正四棱柱,  $AB$  是一条侧棱,  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) 是上底面上其余的八个点, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) 的不同值的个数为 ( )

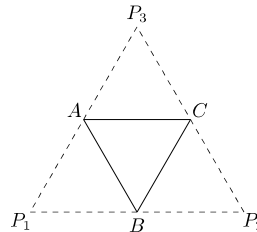


- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

- 已知  $P_1(a_1, b_1)$  与  $P_2(a_2, b_2)$  是直线  $y = kx + 1$  ( $k$  为常数) 上两个不同的点, 则关于  $x$  和  $y$  的方程组  $\begin{cases} a_1x + b_1y = 1, \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$  的解的情况是 ( )  
(A) 无论  $k, P_1, P_2$  如何, 总是无解 (B) 无论  $k, P_1, P_2$  如何, 总有唯一解  
(C) 存在  $k, P_1, P_2$ , 使之恰有两解 (D) 存在  $k, P_1, P_2$ , 使之有无穷多解
- 设  $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0, \end{cases}$  若  $f(0)$  是  $f(x)$  的最小值, 则  $a$  的取值范围为 ( )  
(A)  $[-1, 2]$  (B)  $[-1, 0]$  (C)  $[1, 2]$  (D)  $[0, 2]$

## 三、解答题

- 底面边长为 2 的正三棱锥  $P-ABC$ , 其表面展开图是三角形  $P_1P_2P_3$ , 如图, 求  $\triangle P_1P_2P_3$  的各边长及此三棱锥的体积  $V$ .

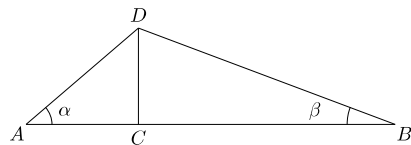


- 设常数  $a \geq 0$ , 函数  $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$ .  
(1) 若  $a = 4$ , 求函数  $y = f(x)$  的反函数  $y = f^{-1}(x)$ ;  
(2) 根据  $a$  的不同取值, 讨论函数  $y = f(x)$  的奇偶性, 并说明理由.

21. 如图, 某公司要在  $A$ 、 $B$  两地连线上的定点  $C$  处建造广告牌  $CD$ , 其中  $D$  为顶端,  $AC$  长 35 米,  $CB$  长 80 米. 设点  $A$ 、 $B$  在同一水平面上, 从  $A$  和  $B$  看  $D$  的仰角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ .

(1) 设计中  $CD$  是铅垂方向. 若要求  $\alpha \geq 2\beta$ , 问  $CD$  的长至多为多少 (结果精确到 0.01 米)?

(2) 施工完成后,  $CD$  与铅垂方向有偏差. 现在实测得  $\alpha = 38.12^\circ$ ,  $\beta = 18.45^\circ$ , 求  $CD$  的长 (结果精确到 0.01 米).



22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 对于直线  $l: ax + by + c = 0$  和点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ , 记  $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$ . 若  $\eta < 0$ , 则称点  $P_1$ ,  $P_2$  被直线  $l$  分隔. 若曲线  $C$  与直线  $l$  没有公共点, 且曲线  $C$  上存在点  $P_1$ ,  $P_2$  被直线  $l$  分隔, 则称直线  $l$  为曲线  $C$  的一条分隔线.

(1) 求证: 点  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, 0)$  被直线  $x + y - 1 = 0$  分隔;

(2) 若直线  $y = kx$  是曲线  $x^2 - 4y^2 = 1$  的分隔线, 求实数  $k$  的取值范围;

(3) 动点  $M$  到点  $Q(0, 2)$  的距离与到  $y$  轴的距离之积为 1, 设点  $M$  的轨迹为  $E$ , 求证: 通过原点的直线中, 有且仅有一条直线是  $E$  的分隔线.

23. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{3}a_n \leq a_{n+1} \leq 3a_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1 = 1$ .

(1) 若  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = x$ ,  $a_4 = 9$ , 求  $x$  的取值范围;

(2) 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ . 若

$\frac{1}{3}S_n \leq S_{n+1} \leq 3S_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求  $q$  的取值范围;

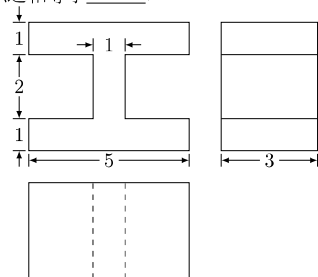
(3) 若  $a_1, a_2, \cdots, a_k$  成等差数列, 且  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1000$ , 求正整数  $k$  的最大值, 以及  $k$  取最大值时相应数列  $a_1, a_2, \cdots, a_k$  的公差.



# 2014 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

## 一、填空题

- 函数  $y = 1 - 2\cos^2(2x)$  的最小正周期是\_\_\_\_\_.
- 若复数  $z = 1 + 2i$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则  $\left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot \bar{z} =$ \_\_\_\_\_.
- 设常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = |x - 1| + |x^2 - a|$ , 若  $f(2) = 1$ , 则  $f(1) =$ \_\_\_\_\_.
- 若抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  的右焦点重合, 则该抛物线的准线方程为\_\_\_\_\_.
- 某校高一、高二、高三分别有学生 1600 名、1200 名、800 名. 为了解该校高中学生的牙齿健康状况, 按各年级的学生数进行分层抽样. 若高三抽出 20 名学生, 则高一、高二共抽取的学生数为\_\_\_\_\_.
- 若实数  $x, y$  满足  $xy = 1$ , 则  $x^2 + 2y^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 在长方体中割去两个小长方体后的几何体的三视图如图, 则切割掉的两个小长方体的体积之和等于\_\_\_\_\_.

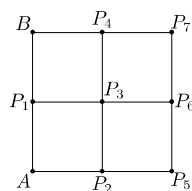


- 若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 则其母线与轴所成角的大小为\_\_\_\_\_. (结果用反三角函数值表示)
- 设  $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0, \end{cases}$  若  $f(0)$  是  $f(x)$  的最小值, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
- 设无穷等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 若  $a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_3 + a_4 + \dots + a_n)$ , 则  $q =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}$ , 则满足  $f(x) < 0$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 方程  $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$  在区间  $[0, 2\pi]$  上的所有解的和等于\_\_\_\_\_.
- 为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续 10 天中随机选择 3 天进行紧急疏散演练, 则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是\_\_\_\_\_. (结果用最简分数表示)

- 已知曲线  $C: x = -\sqrt{4-y^2}$ , 直线  $l: x = 6$ . 若对于点  $A(m, 0)$ , 存在  $C$  上的点  $P$  和  $l$  上的  $Q$  使得  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ , 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

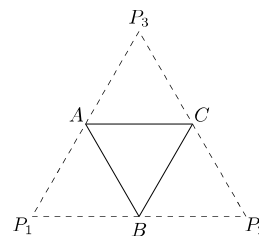
- 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a + b > 4$ ”是“ $a > 2$  且  $b > 2$ ”的 ( )  
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知互异的复数  $a, b$  满足  $ab \neq 0$ , 集合  $\{a, b\} = \{a^2, b^2\}$ , 则  $a + b =$  ( )  
(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1
- 如图, 四个边长为 1 的小正方形排成一个大正方形,  $AB$  是大正方形的一边,  $P_i (i = 1, 2, \dots, 7)$  是小正方形的其余顶点, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i} (i = 1, 2, \dots, 7)$  的不同值的个数为 ( )



- (A) 7 (B) 5 (C) 3 (D) 1
- 已知  $P_1(a_1, b_1)$  与  $P_2(a_2, b_2)$  是直线  $y = kx + 1$  ( $k$  为常数) 上两个不同的点, 则关于  $x$  和  $y$  的方程组  $\begin{cases} a_1x + b_1y = 1, \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$  的解的情况是 ( )  
(A) 无论  $k, P_1, P_2$  如何, 总是无解 (B) 无论  $k, P_1, P_2$  如何, 总有唯一解  
(C) 存在  $k, P_1, P_2$ , 使之恰有两解 (D) 存在  $k, P_1, P_2$ , 使之有无穷多解

## 三、解答题

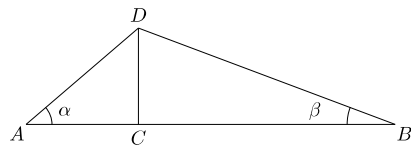
- 底面边长为 2 的正三棱锥  $P - ABC$ , 其表面展开图是三角形  $P_1P_2P_3$ , 如图, 求  $\triangle P_1P_2P_3$  的各边长及此三棱锥的体积  $V$ .



21. 如图, 某公司要在  $A$ 、 $B$  两地连线上的定点  $C$  处建造广告牌  $CD$ , 其中  $D$  为顶端,  $AC$  长 35 米,  $CB$  长 80 米. 设点  $A$ 、 $B$  在同一水平面上, 从  $A$  和  $B$  看  $D$  的仰角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ .

(1) 设计中  $CD$  是铅垂方向. 若要求  $\alpha \geq 2\beta$ , 问  $CD$  的长至多为多少 (结果精确到 0.01 米)?

(2) 施工完成后,  $CD$  与铅垂方向有偏差. 现在实测得  $\alpha = 38.12^\circ$ ,  $\beta = 18.45^\circ$ , 求  $CD$  的长 (结果精确到 0.01 米).



22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 对于直线  $l: ax + by + c = 0$  和点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ , 记  $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$ . 若  $\eta < 0$ , 则称点  $P_1$ ,  $P_2$  被直线  $l$  分隔. 若曲线  $C$  与直线  $l$  没有公共点, 且曲线  $C$  上存在点  $P_1$ ,  $P_2$  被直线  $l$  分隔, 则称直线  $l$  为曲线  $C$  的一条分隔线.

(1) 求证: 点  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, 0)$  被直线  $x + y - 1 = 0$  分隔;

(2) 若直线  $y = kx$  是曲线  $x^2 - 4y^2 = 1$  的分隔线, 求实数  $k$  的取值范围;

(3) 动点  $M$  到点  $Q(0, 2)$  的距离与到  $y$  轴的距离之积为 1, 设点  $M$  的轨迹为  $E$ . 求  $E$  的方程, 并证明  $y$  轴为曲线  $E$  的分隔线.

23. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{3}a_n \leq a_{n+1} \leq 3a_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1 = 1$ .

(1) 若  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = x$ ,  $a_4 = 9$ , 求  $x$  的取值范围;

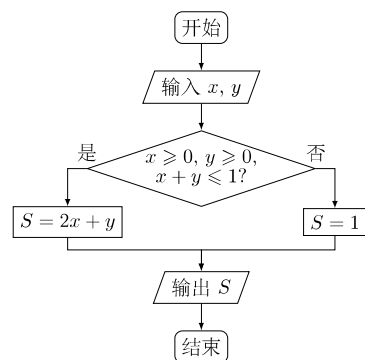
(2) 若  $\{a_n\}$  是等比数列, 且  $a_m = \frac{1}{1000}$ , 求正整数  $m$  的最小值, 以及  $m$  取最小值时相应  $\{a_n\}$  的公比;

(3) 若  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  成等差数列, 求  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  的公差取值范围.

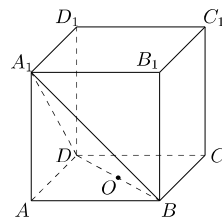
# 2014 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$ , 集合  $B$  为整数集, 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $\{-1, 0, 1, 2\}$  (B)  $\{-2, -1, 0, 1\}$   
(C)  $\{0, 1\}$  (D)  $\{-1, 0\}$
- 在  $x(1+x)^6$  的展开式中, 含  $x^3$  项的系数为 ( )  
(A) 30 (B) 20 (C) 15 (D) 10
- 为了得到函数  $y = \sin(2x+1)$  的图象, 只需把函数  $y = \sin 2x$  的图象上所有的点 ( )  
(A) 向左平行移动  $\frac{1}{2}$  个单位长度 (B) 向右平行移动  $\frac{1}{2}$  个单位长度  
(C) 向左平行移动 1 个单位长度 (D) 向右平行移动 1 个单位长度
- 若  $a > b > 0, c < d < 0$ , 则一定有 ( )  
(A)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  (B)  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$  (C)  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$  (D)  $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
- 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则输出的  $S$  的最大值为 ( )



- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 六个人从左至右排成一行, 最左端只能排甲或乙, 最右端不能排甲, 则不同的排法共有 ( )  
(A) 192 种 (B) 216 种 (C) 240 种 (D) 288 种
  - 平面向量  $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (4, 2), \mathbf{c} = m\mathbf{a} + \mathbf{b} (m \in \mathbf{R})$ , 且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{a}$  的夹角等于  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角, 则  $m =$  ( )  
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
  - 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $O$  为线段  $BD$  的中点. 设点  $P$  在线段  $CC_1$  上, 直线  $OP$  与平面  $A_1BD$  所成的角为  $\alpha$ , 则  $\sin \alpha$  的取值范围是 ( )

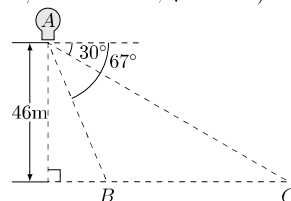


- (A)  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$  (B)  $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right]$  (C)  $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$  (D)  $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right]$

- 已知  $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x), x \in (-1, 1)$ . 现有下列命题:  
①  $f(-x) = -f(x)$ ; ②  $f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = 2f(x)$ ; ③  $|f(x)| \geq 2|x|$ .  
其中所有正确命题的序号是 ( )  
(A) ①②③ (B) ②③ (C) ①③ (D) ①②
- 已知  $F$  是抛物线  $y^2 = x$  的焦点, 点  $A, B$  在该抛物线上且位于  $x$  轴的两侧,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$  (其中  $O$  为坐标原点), 则  $\triangle ABO$  与  $\triangle AFO$  面积之和的最小值是 ( )  
(A) 2 (B) 3 (C)  $\frac{17\sqrt{2}}{8}$  (D)  $\sqrt{10}$

## 二、填空题

- 复数  $\frac{2-2i}{1+i} =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的周期为 2 的函数, 当  $x \in [-1, 1)$  时,  $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$  则  $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ \_\_\_\_\_.
- 如图, 从气球  $A$  上测得正前方的河流的两岸  $B, C$  的俯角分别为  $67^\circ, 30^\circ$ , 此时气球的高是 46m, 则河流的宽度  $BC$  约等于\_\_\_\_\_m.  
(用四舍五入法将结果精确到个位. 参考数据:  $\sin 67^\circ \approx 0.92, \cos 67^\circ \approx 0.39, \sin 37^\circ \approx 0.60, \cos 37^\circ \approx 0.80, \sqrt{3} \approx 1.73$ )



- 设  $m \in \mathbf{R}$ , 过定点  $A$  的动直线  $x + my = 0$  和过定点  $B$  的动直线  $mx - y - m + 3 = 0$  交于点  $P(x, y)$ , 则  $|PA| \cdot |PB|$  的最大值是\_\_\_\_\_.
- 以  $A$  表示值域为  $\mathbf{R}$  的函数组成的集合,  $B$  表示具有如下性质的函数  $\varphi(x)$  组成的集合: 对于函数  $\varphi(x)$ , 存在一个正数  $M$ , 使得函数  $\varphi(x)$  的值域包含于区间  $[-M, M]$ . 例如, 当  $\varphi_1(x) = x^3, \varphi_2(x) = \sin x$  时,  $\varphi_1(x) \in A, \varphi_2(x) \in B$ . 现有如下命题:  
① 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 则“ $f(x) \in A$ ”的充要条件是“ $\forall b \in \mathbf{R}, \exists a \in D, f(a) = b$ ”;

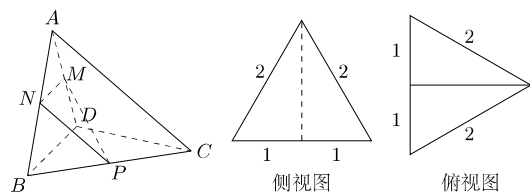
- 函数  $f(x) \in B$  的充要条件是  $f(x)$  有最大值和最小值;
  - 若函数  $f(x), g(x)$  的定义域相同, 且  $f(x) \in A, g(x) \in B$ , 则  $f(x) + g(x) \notin B$ ;
  - 若函数  $f(x) = a \ln(x+2) + \frac{x}{x^2+1} (x > -2, a \in \mathbf{R})$  有最大值, 则  $f(x) \in B$ .
- 其中的真命题有\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

- 已知函数  $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
(1) 求  $f(x)$  的单调递增区间;  
(2) 若  $\alpha$  是第二象限角,  $f\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{4}{5} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\alpha$ , 求  $\cos \alpha - \sin \alpha$  的值.
- 一款击鼓小游戏的规则如下: 每盘游戏都需要击鼓三次, 每次击鼓要么出现一次音乐, 要么不出现音乐; 每盘游戏击鼓三次后, 出现一次音乐获得 10 分, 出现两次音乐获得 20 分, 出现三次音乐获得 100 分, 没有出现音乐则扣除 200 分 (即获得 -200 分). 设每次击鼓出现音乐的概率为  $\frac{1}{2}$ , 且各次击鼓出现音乐相互独立.  
(1) 设每盘游戏获得的分数为  $X$ , 求  $X$  的分布列;  
(2) 玩三盘游戏, 至少有一盘出现音乐的概率是多少?  
(3) 玩过这款游戏的许多人都发现, 若干盘游戏后, 与最初的分数相比, 分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

18. 三棱锥  $A-BCD$  及其侧视图、俯视图如图所示. 设  $M, N$  分别为线段  $AD, AB$  的中点,  $P$  为线段  $BC$  上的点, 且  $MN \perp NP$ .

- (1) 证明:  $P$  为线段  $BC$  的中点;
- (2) 求二面角  $A-NP-M$  的余弦值.



19. 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 点  $(a_n, b_n)$  在函数  $f(x) = 2^x$  的图象上 ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

- (1) 若  $a_1 = -2$ , 点  $(a_8, 4b_7)$  在函数  $f(x)$  的图象上, 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ ;
- (2) 若  $a_1 = 1$ , 函数  $f(x)$  的图象在点  $(a_2, b_2)$  处的切线在  $x$  轴上的截距为  $2 - \frac{1}{\ln 2}$ , 求数列  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

- (1) 求椭圆  $C$  的标准方程;
- (2) 设  $F$  为椭圆  $C$  的左焦点,  $T$  为直线  $x = -3$  上任意一点, 过  $F$  作  $TF$  的垂线交椭圆  $C$  于点  $P, Q$ .

① 证明:  $OT$  平分线段  $PQ$  (其中  $O$  为坐标原点);

② 当  $\frac{|TF|}{|PQ|}$  最小时, 求点  $T$  的坐标.

21. 已知函数  $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $e = 2.71828 \dots$  为自然对数的底数.

- (1) 设  $g(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数, 求函数  $g(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的最小值;
- (2) 若  $f(1) = 0$ , 函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内有零点, 求  $a$  的取值范围.

# 2014 普通高等学校招生考试 (四川卷文)

## 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{x \mid (x+1)(x-2) \leq 0\}$ , 集合  $B$  为整数集, 则  $A \cap B =$  ( )
- (A)  $\{-1, 0\}$  (B)  $\{0, 1\}$
- (C)  $\{-2, -1, 0, 1\}$  (D)  $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 在“世界读书日”前夕, 为了了解某地 5000 名居民某天的阅读时间, 从中抽取了 200 名居民的阅读时间进行统计分析. 在这个问题中, 5000 名居民的阅读时间的全体是 ( )

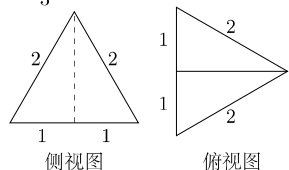
- (A) 总体 (B) 个体
- (C) 样本的容量 (D) 从总体中抽取的一个样本

3. 为了得到函数  $y = \sin(x+1)$  的图象, 只需把函数  $y = \sin x$  的图象上所有的点 ( )

- (A) 向左平行移动 1 个单位长度 (B) 向右平行移动 1 个单位长度
- (C) 向左平行移动  $\pi$  个单位长度 (D) 向右平行移动  $\pi$  个单位长度

4. 某三棱锥的侧视图、俯视图如图所示, 则该三棱锥的体积是 ( )

(锥体体积公式:  $V = \frac{1}{3}Sh$ , 其中  $S$  为底面面积,  $h$  为高)

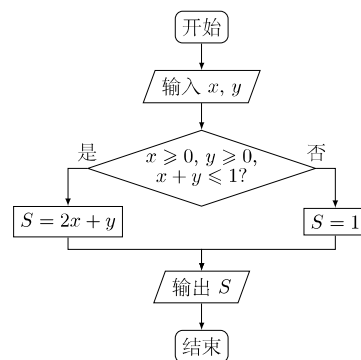


- (A) 3 (B) 2 (C)  $\sqrt{3}$  (D) 1

5. 若  $a > b > 0, c < d < 0$ , 则一定有 ( )

- (A)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  (B)  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$  (C)  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$  (D)  $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则输出的  $S$  的最大值为 ( )

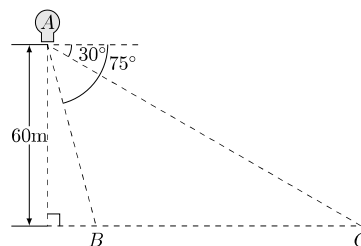


- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 已知  $b > 0, \log_5 b = a, \lg b = c, 5^d = 10$ , 则下列等式一定成立的是 ( )

- (A)  $d = ac$  (B)  $a = cd$  (C)  $c = ad$  (D)  $d = a + c$

8. 如图, 从气球  $A$  上测得正前方的河流的两岸  $B, C$  的俯角分别为  $75^\circ, 30^\circ$ , 此时气球的高是 60 m, 则河流的宽度  $BC$  等于 ( )



- (A)  $240(\sqrt{3}-1)$  m (B)  $180(\sqrt{2}-1)$  m
- (C)  $120(\sqrt{3}-1)$  m (D)  $30(\sqrt{3}+1)$  m

9. 设  $m \in \mathbf{R}$ , 过定点  $A$  的动直线  $x + my = 0$  和过定点  $B$  的动直线  $mx - y - m + 3 = 0$  交于点  $P(x, y)$ , 则  $|PA| + |PB|$  的取值范围是 ( )

- (A)  $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$  (B)  $[\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$  (C)  $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$  (D)  $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$

10. 已知  $F$  是抛物线  $y^2 = x$  的焦点, 点  $A, B$  在该抛物线上且位于  $x$  轴的两侧,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$  (其中  $O$  为坐标原点), 则  $\triangle ABO$  与  $\triangle AFO$  面积之和的最小值是 ( )

- (A) 2 (B) 3 (C)  $\frac{17\sqrt{2}}{8}$  (D)  $\sqrt{10}$

## 二、填空题

11. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的离心率等于\_\_\_\_\_.

12. 复数  $\frac{2-2i}{1+i}$  =\_\_\_\_\_.

13. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的周期为 2 的函数, 当  $x \in [-1, 1)$  时,  $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$  则  $f\left(\frac{3}{2}\right)$  =\_\_\_\_\_.

14. 平面向量  $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (1, 2), \mathbf{c} = m\mathbf{a} + \mathbf{b} (m \in \mathbf{R})$ , 且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{a}$  的夹角等于  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角, 则  $m$  =\_\_\_\_\_.

15. 以  $A$  表示值域为  $\mathbf{R}$  的函数组成的集合,  $B$  表示具有如下性质的函数  $\varphi(x)$  组成的集合: 对于函数  $\varphi(x)$ , 存在一个正数  $M$ , 使得函数  $\varphi(x)$  的值域包含于区间  $[-M, M]$ . 例如, 当  $\varphi_1(x) = x^3, \varphi_2(x) = \sin x$  时,  $\varphi_1(x) \in A, \varphi_2(x) \in B$ . 现有如下命题:

- ① 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 则“ $f(x) \in A$ ”的充要条件是“ $\forall b \in \mathbf{R}, \exists a \in D, f(a) = b$ ”;
- ② 函数  $f(x) \in B$  的充要条件是  $f(x)$  有最大值和最小值;
- ③ 若函数  $f(x), g(x)$  的定义域相同, 且  $f(x) \in A, g(x) \in B$ , 则  $f(x) + g(x) \notin B$ ;
- ④ 若函数  $f(x) = a \ln(x+2) + \frac{x}{x^2+1} (x > -2, a \in \mathbf{R})$  有最大值, 则  $f(x) \in B$ .

其中的真命题有\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

16. 一个盒子里装有三张卡片, 分别标记有数字 1, 2, 3, 这三张卡片除标记的数字外完全相同. 随机有放回地抽取 3 次, 每次抽取 1 张, 将抽取的卡片上的数字依次记为  $a, b, c$ .

- (1) 求“抽取的卡片上的数字满足  $a + b = c$ ”的概率;
- (2) 求“抽取的卡片上的数字  $a, b, c$  不完全相同”的概率.

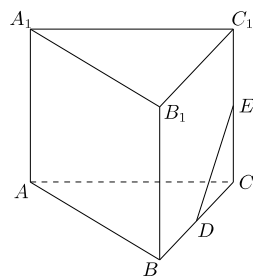
17. 已知函数  $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

- (1) 求  $f(x)$  的单调递增区间;
- (2) 若  $\alpha$  是第二象限角,  $f\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{4}{5} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\alpha$ , 求  $\cos \alpha - \sin \alpha$  的值.

18. 在如图所示的多面体中, 四边形  $ABB_1A_1$  和  $ACC_1A_1$  都为矩形.

(1) 若  $AC \perp BC$ , 证明: 直线  $BC \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ;

(2) 设  $D, E$  分别是线段  $BC, CC_1$  的中点, 在线段  $AB$  上是否存在一点  $M$ , 使直线  $DE \parallel$  平面  $A_1MC$ ? 请证明你的结论.



20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F(-2, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 设  $O$  为坐标原点,  $T$  为直线  $x = -3$  上一点, 过  $F$  作  $TF$  的垂线交椭圆于  $P, Q$ . 当四边形  $OPTQ$  是平行四边形时, 求四边形  $OPTQ$  的面积.

21. 已知函数  $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $e = 2.71828 \dots$  为自然对数的底数.

(1) 设  $g(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数, 求函数  $g(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的最小值;

(2) 若  $f(1) = 0$ , 函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内有零点, 证明:  $e - 2 < a < 1$ .

19. 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 点  $(a_n, b_n)$  在函数  $f(x) = 2^x$  的图象上 ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

(1) 证明: 数列  $\{b_n\}$  为等比数列;

(2) 若  $a_1 = 1$ , 函数  $f(x)$  的图象在点  $(a_2, b_2)$  处的切线在  $x$  轴上的截距为  $2 - \frac{1}{\ln 2}$ , 求数列  $\{a_n b_n^2\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

# 2014 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

## 一、选择题

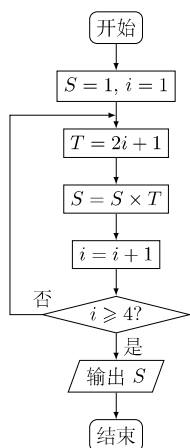
1.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{7+i}{3+4i} =$  ( )

- (A)  $1-i$  (B)  $-1+i$  (C)  $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$  (D)  $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ y \geq 1, \end{cases}$  则目标函数  $z = x+2y$  的最小值为 ( )

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 阅读下面的程序框图, 运行相应的程序, 输出的  $S$  的值为 ( )



- (A) 15 (B) 105 (C) 245 (D) 945

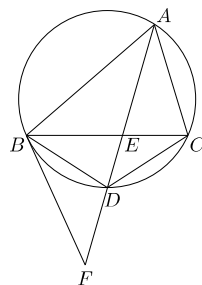
4. 函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$  的单调递增区间是 ( )

- (A)  $(0, +\infty)$  (B)  $(-\infty, 0)$  (C)  $(2, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -2)$

5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线平行于直线  $l: y = 2x + 10$ , 双曲线的一个焦点在直线  $l$  上, 则双曲线的方程为 ( )

- (A)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$   
(C)  $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$  (D)  $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

6. 如图,  $\triangle ABC$  是圆的内接三角形,  $\angle BAC$  的平分线交圆于点  $D$ , 交  $BC$  于  $E$ , 过点  $B$  的圆的切线与  $AD$  的延长线交于点  $F$ , 在上述条件下, 给出下列四个结论: ①  $BD$  平分  $\angle CBF$ ; ②  $FB^2 = FD \cdot FA$ ; ③  $AE \cdot CE = BE \cdot DE$ ; ④  $AF \cdot BD = AB \cdot BF$ . 则所有正确结论的序号是 ( )



- (A) ①② (B) ③④ (C) ①②③ (D) ①②④

7. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > b$ ”是“ $a|a| > b|b|$ ”的 ( )

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

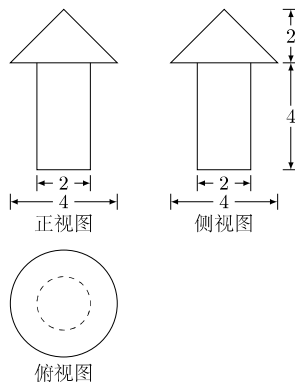
8. 已知菱形  $ABCD$  的边长为 2,  $\angle BAD = 120^\circ$ , 点  $E, F$  分别在边  $BC, DC$  上,  $BE = \lambda BC, DF = \mu DC$ , 若  $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1, \vec{CE} \cdot \vec{CF} = -\frac{2}{3}$ , 则  $\lambda + \mu =$  ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{5}{6}$  (D)  $\frac{7}{12}$

## 二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 4:5:5:6, 则应从一年级本科生中抽取\_\_\_\_\_名学生.

10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_m<sup>3</sup>.



11. 设  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $-1$  的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和. 若  $S_1, S_2, S_4$  成等比数列, 则  $a_1$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 已知  $b - c = \frac{1}{4}a, 2\sin B = 3\sin C$ , 则  $\cos A$  的值为\_\_\_\_\_.

13. 在以  $O$  为极点的极坐标系中, 圆  $\rho = 4\sin\theta$  和直线  $\rho\sin\theta = a$  相交于  $A, B$  两点. 若  $\triangle AOB$  是等边三角形, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = |x^2 + 3x|, x \in \mathbf{R}$ . 若方程  $f(x) - a|x-1| = 0$  恰有 4 个互异的实数根, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

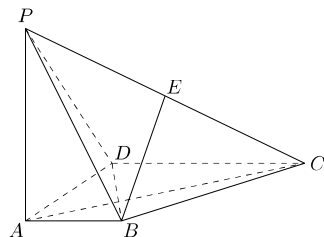
15. 已知函数  $f(x) = \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in \mathbf{R}$ .

- (1) 求  $f(x)$  的最小正周期;  
(2) 求  $f(x)$  在闭区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的最大值和最小值.

16. 某大学志愿者协会有 6 名男同学, 4 名女同学. 在这 10 名同学中, 3 名同学来自数学学院, 其余 7 名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学, 到希望小学进行支教活动 (每位同学被选到的可能性相同).

- (1) 求选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率;  
(2) 设  $X$  为选出的 3 名同学中女同学的人数, 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AD = DC = AP = 2$ ,  $AB = 1$ , 点  $E$  为棱  $PC$  的中点.
- (1) 证明:  $BE \perp DC$ ;
  - (2) 求直线  $BE$  与平面  $PBD$  所成角的正弦值;
  - (3) 若  $F$  为棱  $PC$  上一点, 满足  $BF \perp AC$ , 求二面角  $F-AB-P$  的余弦值.



19. 已知  $q$  和  $n$  均为给定的大于 1 的自然数. 设集合  $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ , 集合  $A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$ .
- (1) 当  $q = 2, n = 3$  时, 用列举法表示集合  $A$ ;
  - (2) 设  $s, t \in A$ ,  $s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}$ ,  $t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$ , 其中  $a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n$ . 证明: 若  $a_n < b_n$ , 则  $s < t$ .

20. 已知函数  $f(x) = x - ae^x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $x \in \mathbf{R}$ , 已知函数  $y = f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ .
- (1) 求  $a$  的取值范围;
  - (2) 证明  $\frac{x_2}{x_1}$  随着  $a$  的减小而增大;
  - (3) 证明  $x_1 + x_2$  随着  $a$  的减小而增大.

18. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 右顶点为  $A$ , 上顶点为  $B$ , 已知  $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2|$ .
- (1) 求椭圆的离心率;
  - (2) 设  $P$  为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段  $PB$  为直径的圆经过点  $F_1$ , 经过原点  $O$  的直线  $l$  与该圆相切. 求直线  $l$  的斜率.



# 2014 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

## 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{7+i}{3+4i} =$  ( )

- (A)  $1-i$  (B)  $-1+i$  (C)  $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$  (D)  $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ y \geq 1, \end{cases}$  则目标函数  $z = x + 2y$  的最

小值为 ( )

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 已知命题  $p: \forall x > 0$ , 总有  $(x+1)e^x > 1$ , 则  $\neg p$  为 ( )

- (A)  $\exists x_0 \leq 0$ , 使得  $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$  (B)  $\exists x_0 > 0$ , 使得  $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$   
(C)  $\forall x > 0$ , 总有  $(x+1)e^x \leq 1$  (D)  $\forall x \leq 0$ , 总有  $(x+1)e^x \leq 1$

4. 设  $a = \log_2 \pi$ ,  $b = \log_{\frac{1}{2}} \pi$ ,  $c = \pi^{-2}$ , 则 ( )

- (A)  $a > b > c$  (B)  $b > a > c$  (C)  $a > c > b$  (D)  $c > b > a$

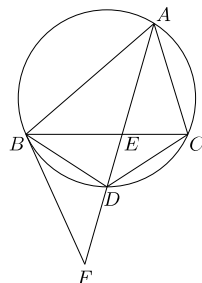
5. 设  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $-1$  的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 若  $S_1, S_2, S_4$  成等比数列, 则  $a_1 =$  ( )

- (A) 2 (B) -2 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $-\frac{1}{2}$

6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线平行于直线  $l: y = 2x + 10$ , 双曲线的一个焦点在直线  $l$  上, 则双曲线的方程为 ( )

- (A)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$   
(C)  $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$  (D)  $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

7. 如图,  $\triangle ABC$  是圆的内接三角形,  $\angle BAC$  的平分线交圆于点  $D$ , 交  $BC$  于  $E$ , 过点  $B$  的圆的切线与  $AD$  的延长线交于点  $F$ , 在上述条件下, 给出下列四个结论: ①  $BD$  平分  $\angle CBF$ ; ②  $FB^2 = FD \cdot FA$ ; ③  $AE \cdot CE = BE \cdot DE$ ; ④  $AF \cdot BD = AB \cdot BF$ . 则所有正确结论的序号是 ( )



- (A) ①② (B) ③④ (C) ①②③ (D) ①②④

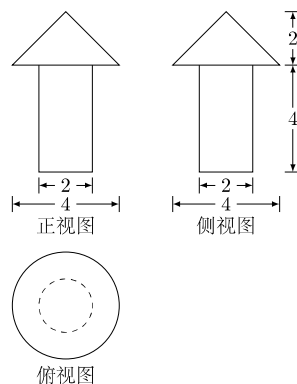
8. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ),  $x \in \mathbf{R}$ . 在曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = 1$  的交点中, 若相邻交点距离的最小值为  $\frac{\pi}{3}$ , 则  $f(x)$  的最小正周期为 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{2\pi}{3}$  (C)  $\pi$  (D)  $2\pi$

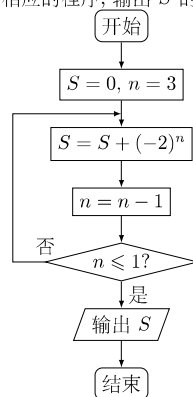
## 二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为  $4:5:5:6$ , 则应从一年级本科生中抽取\_\_\_\_\_名学生.

10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_m<sup>3</sup>.



11. 阅读如图的框图, 运行相应的程序, 输出  $S$  的值为\_\_\_\_\_.



12. 函数  $f(x) = \lg x^2$  的单调递减区间是\_\_\_\_\_.

13. 已知菱形  $ABCD$  的边长为 2,  $\angle BAD = 120^\circ$ , 点  $E, F$  分别在边  $BC, DC$  上,  $BC = 3BE, DC = \lambda DF$ . 若  $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1$ , 则  $\lambda$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0, \\ 2|x - 2|, & x > 0, \end{cases}$  若函数  $y = f(x) - a|x|$  恰有 4 个零点, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

15. 某校夏令营有 3 名男同学  $A, B, C$  和 3 名女同学  $X, Y, Z$ , 其年级情况如下表:

	一年级	二年级	三年级
男同学	$A$	$B$	$C$
女同学	$X$	$Y$	$Z$

现从这 6 名同学中随机选出 2 人参加知识竞赛 (每人被选到的可能性相同).

(1) 用表中字母列举出所有可能的结果;

(2) 设  $M$  为事件“选出的 2 人来自不同年级且恰有 1 名男同学和 1 名女同学”, 求事件  $M$  发生的概率.

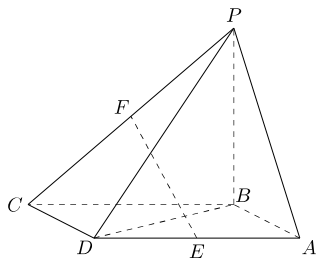
16. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$ ,  $\sin B = \sqrt{6} \sin C$ .

(1) 求  $\cos A$  的值;

(2) 求  $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$  的值.

17. 如图, 四棱锥  $PABCD$  的底面  $ABCD$  是平行四边形,  $BA = BD = \sqrt{2}$ ,  $AD = 2$ ,  $PA = PD = \sqrt{5}$ ,  $E, F$  分别是棱  $AD, PC$  的中点.

- (1) 证明:  $EF \parallel$  平面  $PAB$ ;  
 (2) 若二面角  $P-AD-B$  为  $60^\circ$ ,  
 ① 证明: 平面  $PBC \perp$  平面  $ABCD$ ;  
 ② 求直线  $EF$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值.



19. 已知函数  $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3$  ( $a > 0$ ),  $x \in \mathbf{R}$ .

- (1) 求  $f(x)$  的单调区间和极值;  
 (2) 若对于任意的  $x_1 \in (2, +\infty)$ , 都存在  $x_2 \in (1, +\infty)$ , 使得  $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$ , 求  $a$  的取值范围.

20. 已知  $q$  和  $n$  均为给定的大于 1 的自然数. 设集合  $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ , 集合  $A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$ .

- (1) 当  $q = 2, n = 3$  时, 用列举法表示集合  $A$ ;  
 (2) 设  $s, t \in A$ ,  $s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}$ ,  $t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$ , 其中  $a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n$ . 证明: 若  $a_n < b_n$ , 则  $s < t$ .

18. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 右顶点为  $A$ ,

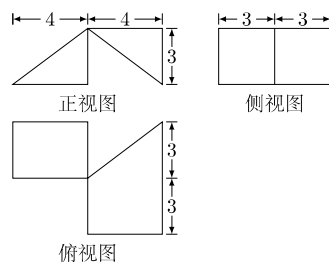
上顶点为  $B$ , 已知  $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2|$ .

- (1) 求椭圆的离心率;  
 (2) 设  $P$  为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段  $PB$  为直径的圆经过点  $F_1$ , 经过点  $F_2$  的直线  $l$  与该圆相切与点  $M$ ,  $|MF_2| = 2\sqrt{2}$ . 求椭圆的方程.

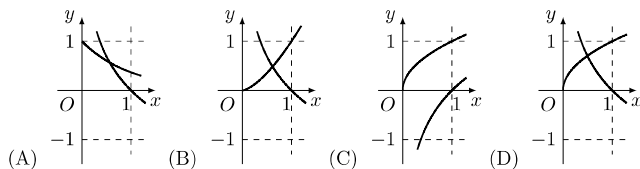
# 2014 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

## 一、选择题

1. 设全集  $U = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 2\}$ , 集合  $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 \geq 5\}$ , 则  $\complement_U A =$  ( )  
(A)  $\emptyset$  (B)  $\{2\}$  (C)  $\{5\}$  (D)  $\{2, 5\}$
2. 已知  $i$  是虚数单位,  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a = b = 1$ ”是“ $(a + bi)^2 = 2i$ ”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的表面积是 ( )



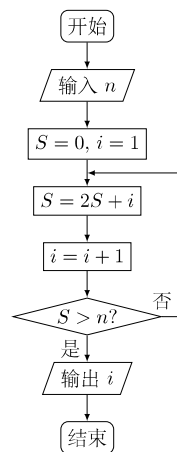
- (A)  $90 \text{ cm}^2$  (B)  $129 \text{ cm}^2$  (C)  $132 \text{ cm}^2$  (D)  $138 \text{ cm}^2$
4. 为了得到函数  $y = \sin 3x + \cos 3x$  的图象, 可以将函数  $y = \sqrt{2} \cos 3x$  的图象  
(A) 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位 (B) 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位  
(C) 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位
5. 在  $(1+x)^6(1+y)^4$  的展开式中, 记  $x^m y^n$  项的系数为  $f(m, n)$ , 则  $f(3, 0) + f(2, 1) + f(1, 2) + f(0, 3) =$  ( )  
(A) 45 (B) 60 (C) 120 (D) 210
6. 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , 且  $0 < f(-1) = f(-2) = f(-3) \leq 3$ , 则  
(A)  $c \leq 3$  (B)  $3 < c \leq 6$  (C)  $6 < c \leq 9$  (D)  $c > 9$
7. 在同一直角坐标系中, 函数  $f(x) = x^a$  ( $x \geq 0$ ),  $g(x) = \log_a x$  的图象可能是 ( )



8. 记  $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y, \\ y, & x < y, \end{cases}$   $\min\{x, y\} = \begin{cases} y, & x \geq y, \\ x, & x < y, \end{cases}$  设  $a, b$  为平面向量, 则 ( )  
(A)  $\min\{|a+b|, |a-b|\} \leq \min\{|a|, |b|\}$   
(B)  $\min\{|a+b|, |a-b|\} \geq \min\{|a|, |b|\}$   
(C)  $\max\{|a+b|^2, |a-b|^2\} \leq |a|^2 + |b|^2$   
(D)  $\max\{|a+b|^2, |a-b|^2\} \geq |a|^2 + |b|^2$
9. 已知甲盒中仅有 1 个球且为红球, 乙盒中有  $m$  个红球和  $n$  个蓝球 ( $m \geq 3, n \geq 3$ ), 从乙盒中随机抽取  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 个球放入甲盒中.  
(a) 放入  $i$  个球后, 甲盒中含有红球的个数记为  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ );  
(b) 放入  $i$  个球后, 从甲盒中取 1 个球是红球的概率记为  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ). 则 ( )  
(A)  $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$  (B)  $p_1 < p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$   
(C)  $p_1 > p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$  (D)  $p_1 < p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$
10. 设函数  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2(x - x^2), f_3(x) = \frac{1}{3}|\sin 2\pi x|, a_i = \frac{i}{99}, i = 0, 1, 2, \dots, 99$ . 记  $I_k = |f_k(a_1) - f_k(a_0)| + |f_k(a_2) - f_k(a_1)| + \dots + |f_k(a_{99}) - f_k(a_{98})|, k = 1, 2, 3$ , 则 ( )  
(A)  $I_1 < I_2 < I_3$  (B)  $I_2 < I_1 < I_3$  (C)  $I_1 < I_3 < I_2$  (D)  $I_3 < I_2 < I_1$

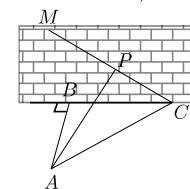
## 二、填空题

11. 若某程序框图如图所示, 当输入 50 时, 则该程序运行后输出的结果是\_\_\_\_\_.



12. 随机变量  $\xi$  的取值为 0, 1, 2, 若  $P(\xi = 0) = \frac{1}{5}, E(\xi) = 1$ , 则  $D(\xi) =$ \_\_\_\_\_.
13. 当实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + 2y - 4 \leq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ x \geq 1 \end{cases}$  时,  $1 \leq ax + y \leq 4$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 在 8 张奖券中有一、二、三等奖各 1 张, 其余 5 张无奖. 将这 8 张奖券分配给 4 个人, 每人 2 张, 不同的获奖情况有\_\_\_\_\_种 (用数字作答).
15. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$  若  $f(f(a)) \leq 2$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 设直线  $x - 3y + m = 0$  ( $m \neq 0$ ) 与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两条渐近线分别交于点  $A, B$ . 若点  $P(m, 0)$  满足  $|PA| = |PB|$ , 则该双曲线的离心率是\_\_\_\_\_.
17. 如图, 某人在垂直于水平地面  $ABC$  的墙面前的点  $A$  处进行射击训练. 已知点  $A$  到墙面的距离为  $AB$ , 某目标点  $P$  沿墙面上的射线  $CM$  移动, 此人为了准确瞄准目标点  $P$ , 需计算由点  $A$  观察点  $P$  的仰角  $\theta$  的大小. 若  $AB = 15 \text{ m}, AC = 25 \text{ m}, \angle BCM = 30^\circ$ , 则  $\tan \theta$  的最大值是\_\_\_\_\_. (仰角  $\theta$  为直线  $AP$  与平面  $ABC$  所成角)



## 三、解答题

18. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a \neq b, c = \sqrt{3}, \cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B$ .  
(1) 求角  $C$  的大小;  
(2) 若  $\sin A = \frac{4}{5}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19. 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足  $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = (\sqrt{2})^{b_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ). 若  $\{a_n\}$  为等比数列, 且  $a_1 = 2$ ,  $b_3 = 6 + b_2$ .

(1) 求  $a_n$  与  $b_n$ ;

(2) 设  $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ). 记数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ .

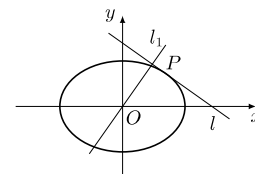
① 求  $S_n$ ;

② 求正整数  $k$ , 使得对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 均有  $S_k \geq S_n$ .

21. 如图, 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 动直线  $l$  与椭圆  $C$  只有一个公共点  $P$ , 且点  $P$  在第一象限.

(1) 已知直线  $l$  的斜率为  $k$ , 用  $a, b, k$  表示点  $P$  的坐标;

(2) 若过原点  $O$  的直线  $l_1$  与  $l$  垂直, 证明: 点  $P$  到直线  $l_1$  的距离的最大值为  $a - b$ .



22. 已知函数  $f(x) = x^3 + 3|x - a|$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

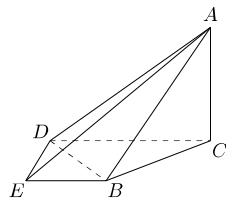
(1) 若  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最大值和最小值分别记为  $M(a)$ ,  $m(a)$ , 求  $M(a) - m(a)$ ;

(2) 设  $b \in \mathbf{R}$ , 若  $[f(x) + b]^2 \leq 4$  对  $x \in [-1, 1]$  恒成立, 求  $3a + b$  的取值范围.

20. 如图, 在四棱锥  $A - BCDE$  中, 平面  $ABC \perp$  平面  $BCDE$ ,  $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$ ,  $AB = CD = 2$ ,  $DE = BE = 1$ ,  $AC = \sqrt{2}$ .

(1) 证明:  $DE \perp$  平面  $ACD$ ;

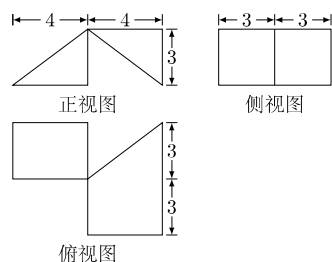
(2) 求二面角  $B - AD - E$  的大小.



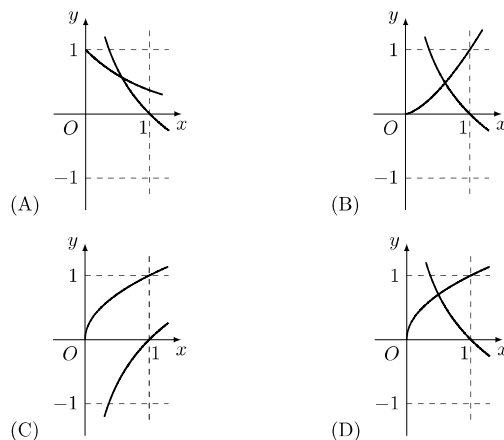
# 2014 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

## 一、选择题

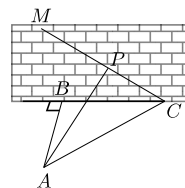
1. 设集合  $S = \{x | x \geq 2\}$ ,  $T = \{x | x \leq 5\}$ , 则  $S \cap T =$  ( )  
(A)  $(-\infty, 5]$  (B)  $[2, +\infty)$  (C)  $(2, 5)$  (D)  $[2, 5]$
2. 设四边形  $ABCD$  的两条对角线为  $AC, BD$ , 则“四边形  $ABCD$  为菱形”是“ $AC \perp BD$ ”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该几何体的体积是 ( )



- (A)  $72 \text{ cm}^3$  (B)  $90 \text{ cm}^3$  (C)  $108 \text{ cm}^3$  (D)  $138 \text{ cm}^3$
4. 为了得到函数  $y = \sin 3x + \cos 3x$  的图象, 可以将函数  $y = \sqrt{2} \cos 3x$  的图象 ( )  
(A) 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位 (B) 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位  
(C) 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位
  5. 已知圆  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  截直线  $x + y + 2 = 0$  所得弦的长度为 4, 则实数  $a$  的值为 ( )  
(A)  $-2$  (B)  $-4$  (C)  $-6$  (D)  $-8$
  6. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面 ( )  
(A) 若  $m \perp n, n \parallel \alpha$ , 则  $m \perp \alpha$   
(B) 若  $m \parallel \beta, \beta \perp \alpha$ , 则  $m \perp \alpha$   
(C) 若  $m \perp \beta, n \perp \beta, n \perp \alpha$ , 则  $m \perp \alpha$   
(D) 若  $m \perp n, n \perp \beta, \beta \perp \alpha$ , 则  $m \perp \alpha$
  7. 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , 且  $0 < f(-1) = f(-2) = f(-3) \leq 3$ , 则 ( )  
(A)  $c \leq 3$  (B)  $3 < c \leq 6$  (C)  $6 < c \leq 9$  (D)  $c > 9$
  8. 在同一直角坐标系中, 函数  $f(x) = x^a$  ( $x \geq 0$ ),  $g(x) = \log_a x$  的图象可能是 ( )



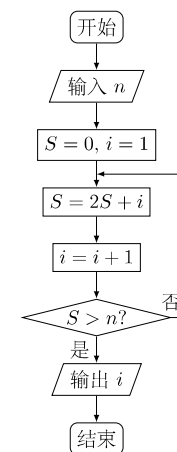
9. 设  $\theta$  为两个非零向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角. 已知对任意实数  $t$ ,  $|\mathbf{b} + t\mathbf{a}|$  的最小值为 1. 则 ( )  
(A) 若  $\theta$  确定, 则  $|\mathbf{a}|$  唯一确定  
(B) 若  $\theta$  确定, 则  $|\mathbf{b}|$  唯一确定  
(C) 若  $|\mathbf{a}|$  确定, 则  $\theta$  唯一确定  
(D) 若  $|\mathbf{b}|$  确定, 则  $\theta$  唯一确定
10. 如图, 某人在垂直于水平地面  $ABC$  的墙面前的点  $A$  处进行射击训练, 已知点  $A$  到墙面的距离为  $AB$ , 某目标点  $P$  沿墙面上的射线  $CM$  移动, 此人为了准确瞄准目标点  $P$ , 需计算由点  $A$  观察点  $P$  的仰角  $\theta$  的大小 (仰角  $\theta$  为直线  $AP$  与平面  $ABC$  所成的角), 若  $AB = 15 \text{ m}$ ,  $AC = 25 \text{ m}$ ,  $\angle BCM = 30^\circ$ , 则  $\tan \theta$  的最大值是 ( )



- (A)  $\frac{\sqrt{30}}{5}$  (B)  $\frac{\sqrt{30}}{10}$  (C)  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$  (D)  $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

## 二、填空题

11. 已知  $i$  是虚数单位, 计算  $\frac{1-i}{(1+i)^2} =$  \_\_\_\_\_.
12. 若实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x+2y-4 \leq 0, \\ x-y-1 \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases}$  则  $x+y$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
13. 若某程序框图如图所示, 当输入 50 时, 则该程序运行后输出的结果是\_\_\_\_\_.



14. 在 3 张奖券中有一、二等奖各一张, 另 1 张无奖. 甲、乙两人各抽取一张, 两人都中奖的概率为\_\_\_\_\_.
15. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$  若  $f(f(a)) = 2$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 则  $a$  的最大值是\_\_\_\_\_.
17. 设直线  $x - 3y + m = 0$  ( $m \neq 0$ ) 与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两条渐近线分别交于点  $A, B$ . 若点  $P(m, 0)$  满足  $|PA| = |PB|$ , 则该双曲线的离心率是\_\_\_\_\_.

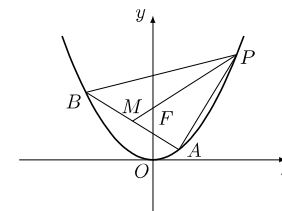
## 三、解答题

18. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $4\sin^2 \frac{A-B}{2} + 4\sin A \sin B = 2 + \sqrt{2}$ .  
(1) 求角  $C$  的大小;  
(2) 已知  $b = 4$ ,  $\triangle ABC$  的面积为 6, 求边长  $c$  的值.

19. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d > 0$ , 设  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $S_2 \cdot S_3 = 36$ .
- (1) 求  $d$  及  $S_n$ ;
  - (2) 求  $m, k$  ( $m, k \in \mathbf{N}^*$ ) 的值, 使得  $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 65$ .

21. 已知函数  $f(x) = x^3 + 3|x - a|$  ( $a > 0$ ), 若  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最小值记为  $g(a)$ .
- (1) 求  $g(a)$ ;
  - (2) 证明: 当  $x \in [-1, 1]$  时, 恒有  $f(x) \leq g(a) + 4$ .

22. 已知  $\triangle ABP$  的三个顶点都在抛物线  $C: x^2 = 4y$  上,  $F$  为抛物线  $C$  的焦点, 点  $M$  为  $AB$  的中点,  $\overrightarrow{PF} = 3\overrightarrow{FM}$ .
- (1) 若  $|PF| = 3$ , 求点  $M$  的坐标;
  - (2) 求  $\triangle ABP$  面积的最大值.



20. 如图, 在四棱锥  $A - BCDE$  中, 平面  $ABC \perp$  平面  $BCDE$ ,  $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$ ,  $AB = CD = 2$ ,  $DE = BE = 1$ ,  $AC = \sqrt{2}$ .
- (1) 证明:  $AC \perp$  平面  $BCDE$ ;
  - (2) 求直线  $AE$  与平面  $ABC$  所成的角的正切值.

