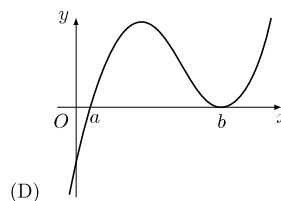
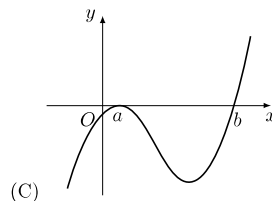
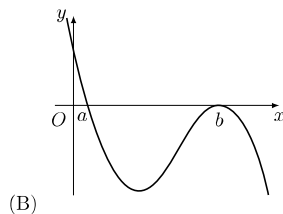
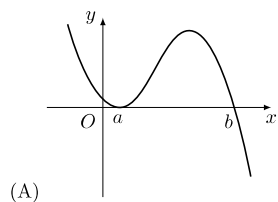


# 2009 普通高等学校招生考试 (安徽卷理)

## 一、选择题

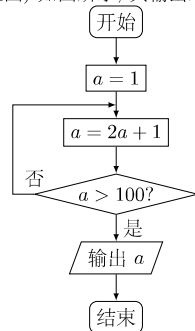
1.  $i$  是虚数单位, 若  $\frac{1+7i}{2-i} = a+bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ), 则乘积  $ab$  的值是 ( )  
(A) -15 (B) -3 (C) 3 (D) 15
2. 若集合  $A = \{x \mid |2x-1| < 3\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{2x+1}{3-x} < 0\right\}$ , 则  $A \cap B$  是 ( )  
(A)  $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } 2 < x < 3\right\}$   
(B)  $\{x \mid 2 < x < 3\}$   
(C)  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$   
(D)  $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2}\right\}$
3. 下列曲线中离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  的是 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{10} = 1$
4. 下列选项中,  $p$  是  $q$  的必要不充分条件的是 ( )  
(A)  $p: a+c > b+d, q: a > b$  且  $c > d$   
(B)  $p: a > 1, b > 1, q: f(x) = a^x - b$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象不过第二象限  
(C)  $p: x = 1, q: x^2 = x$   
(D)  $p: a > 1, q: f(x) = \log_a x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 在  $(0, +\infty)$  上为增函数
5. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $a_1 + a_3 + a_5 = 105$ ,  $a_2 + a_4 + a_6 = 99$ . 以  $S_n$  表示  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则使得  $S_n$  达到最大值的  $n$  是 ( )  
(A) 21 (B) 20 (C) 19 (D) 18
6. 设  $a < b$ , 函数  $y = (x-a)^2(x-b)$  的图象可能是 ( )



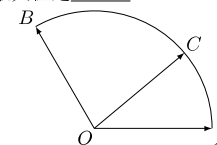
7. 若不等式组  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+3y \geq 4, \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$  所表示的平面区域被直线  $y = kx + \frac{4}{3}$  分为面积相等的两部分, 则  $k$  的值是 ( )  
(A)  $\frac{7}{3}$  (B)  $\frac{3}{7}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$
8. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin \omega x + \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ),  $y = f(x)$  的图象与直线  $y = 2$  的两个相邻交点的距离等于  $\pi$ , 则  $f(x)$  的单调递增区间是 ( )  
(A)  $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$  (B)  $\left[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$   
(C)  $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$  (D)  $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$
9. 已知函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上满足  $f(x) = 2f(2-x) - x^2 + 8x - 8$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程是 ( )  
(A)  $y = 2x - 1$  (B)  $y = x$  (C)  $y = 3x - 2$  (D)  $y = -2x + 3$
10. 考察正方体 6 个面的中心, 甲从这 6 个点中任意选两个点连成直线, 乙也从这 6 个点中任意选两个点连成直线, 则所得的两条直线相互平行但不重合的概率等于 ( )  
(A)  $\frac{1}{75}$  (B)  $\frac{2}{75}$  (C)  $\frac{3}{75}$  (D)  $\frac{4}{75}$

## 二、填空题

11. 若随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(X \leq \mu) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
12. 以直角坐标系的原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴, 并在两种坐标系中取相同的长度单位. 已知直线的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ), 它与曲线  $\begin{cases} x = 1 + 2\cos \alpha, \\ y = 2 + 2\sin \alpha, \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数) 相交于两点  $A$  和  $B$ , 则  $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ .
13. 程序框图 (即算法流程图) 如图所示, 其输出结果是\_\_\_\_\_.



14. 给定两个长度为 1 的平面向量  $\vec{OA}$  和  $\vec{OB}$ , 它们的夹角为  $120^\circ$ . 如图所示, 点  $C$  在以  $O$  为圆心的圆弧  $\widehat{AB}$  上变动. 若  $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ , 其中  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则  $x + y$  的最大值是\_\_\_\_\_.



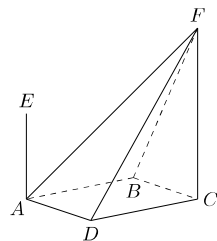
15. 对于四面体  $ABCD$ , 下列命题正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确命题的编号)  
① 相对棱  $AB$  与  $CD$  所在的直线异面;  
② 由顶点  $A$  作四面体的高, 其垂足是  $\triangle BCD$  的三条高线的交点;  
③ 若分别作  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  的边  $AB$  上的高, 则这两条高所在直线异面;  
④ 分别作三组相对棱中点的连线, 所得的三条线段相交于一点;  
⑤ 最长棱必有某个端点, 由它引出的另两条棱的长度之和大于最长棱.

## 三、解答题

16. 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin(C - A) = 1$ ,  $\sin B = \frac{1}{3}$ .  
(1) 求  $\sin A$  的值;  
(2) 设  $AC = \sqrt{6}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

17. 某地有  $A, B, C, D$  四人先后感染了甲型 H1N1 流感, 其中只有  $A$  到过疫区.  $B$  肯定是受  $A$  感染的. 对于  $C$ , 因为难以断定他是受  $A$  还是受  $B$  感染的, 于是假定他受  $A$  和受  $B$  感染的概率都是  $\frac{1}{2}$ . 同样也假定  $D$  受  $A, B$  和  $C$  感染的概率都是  $\frac{1}{3}$ . 在这种假定之下,  $B, C, D$  中直接受  $A$  感染的人数  $X$  就是一个随机变量. 写出  $X$  的分布列 (不要求写出计算过程), 并求  $X$  的均值 (即数学期望).

18. 如图, 四棱锥  $F-ABCD$  的底面  $ABCD$  是菱形, 其对角线  $AC = 2$ ,  $BD = \sqrt{2}$ ,  $AE$ 、 $CF$  都与平面  $ABCD$  垂直,  $AE = 1$ ,  $CF = 2$ .
- (1) 求二面角  $B-AF-D$  的大小;
- (2) 求四棱锥  $E-ABCD$  与四棱锥  $F-ABCD$  公共部分的体积.



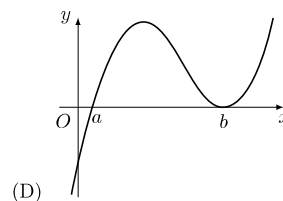
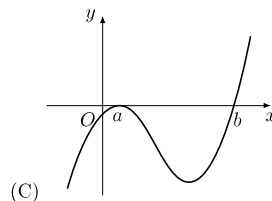
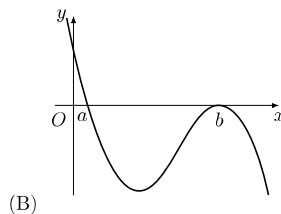
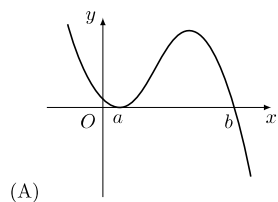
20. 点  $P(x_0, y_0)$  在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 上,  $x_0 = a \cos \beta$ ,  $y_0 = b \sin \beta$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ . 直线  $l_2$  与直线  $l_1: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$  垂直,  $O$  为坐标原点, 直线  $OP$  的倾斜角为  $\alpha$ , 直线  $l_2$  的倾斜角为  $\gamma$ .
- (1) 证明: 点  $P$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  与直线  $l_1$  的唯一交点;
- (2) 证明:  $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma$  构成等比数列.
21. 首项为正数的数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n^2 + 3)$ ,  $n \in \mathbf{N}_+$ .
- (1) 证明: 若  $a_1$  为奇数, 则对一切  $n \geq 2$ ,  $a_n$  都是奇数;
- (2) 若对一切  $n \in \mathbf{N}_+$  都有  $a_{n+1} > a_n$ , 求  $a_1$  的取值范围.

19. 已知函数  $f(x) = x - \frac{2}{x} + a(2 - \ln x)$ , ( $a > 0$ ). 讨论  $f(x)$  的单调性.

# 2009 普通高等学校招生考试 (安徽卷文)

## 一、选择题

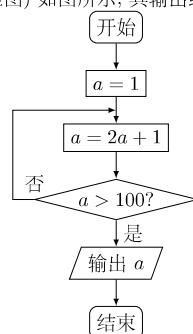
- $i$  是虚数单位,  $i(1+i)$  等于 ( )  
(A)  $1+i$  (B)  $-1-i$  (C)  $1-i$  (D)  $-1+i$
- 若集合  $A = \{x | (2x+1)(x-3) < 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{N}_+ | x \leq 5\}$ , 则  $A \cap B$  是 ( )  
(A)  $\{1, 2, 3\}$  (B)  $\{1, 2\}$  (C)  $\{4, 5\}$  (D)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 不等式组  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+3y \geq 4, \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$  所表示的平面区域的面积等于 ( )  
(A)  $\frac{3}{2}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$
- “ $a+c > b+d$ ”是“ $a > b$  且  $c > d$ ”的 ( )  
(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $a_1 + a_3 + a_5 = 105$ ,  $a_2 + a_4 + a_6 = 99$ , 则  $a_{20}$  等于 ( )  
(A)  $-1$  (B)  $1$  (C)  $3$  (D)  $7$
- 下列曲线中离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  的是 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{10} = 1$
- 直线  $l$  过点  $(-1, 2)$  且与直线  $2x - 3y + 4 = 0$  垂直, 则  $l$  的方程是 ( )  
(A)  $3x + 2y - 1 = 0$  (B)  $3x + 2y + 7 = 0$   
(C)  $2x - 3y + 5 = 0$  (D)  $2x - 3y + 8 = 0$
- 设  $a < b$ , 函数  $y = (x-a)^2(x-b)$  的图象可能是 ( )



- 设函数  $f(x) = \frac{\sin \theta}{3}x^3 + \frac{\sqrt{3}\cos \theta}{2}x^2 + \tan \theta$ , 其中  $\theta \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ , 则导数  $f'(1)$  的取值范围是 ( )  
(A)  $[-2, 2]$  (B)  $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$  (C)  $[\sqrt{3}, 2]$  (D)  $[\sqrt{2}, 2]$
- 考察正方体 6 个面的中心, 从中任意选 3 个点连成三角形, 再把剩下的 3 个点也连成三角形, 则所得的两个三角形全等的概率等于 ( )  
(A)  $1$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $0$

## 二、填空题

- 在空间直角坐标系中, 已知点  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(1, -3, 1)$ , 点  $M$  在  $y$  轴上, 且  $M$  到  $A$  与到  $B$  的距离相等, 则  $M$  的坐标是\_\_\_\_\_.
- 程序框图 (即算法流程图) 如图所示, 其输出结果是\_\_\_\_\_.



- 从长度分别为 2、3、4、5 的四条线段中任意取出三条, 则以这三条线段为边可以构成三角形的概率是\_\_\_\_\_.
- 在平行四边形  $ABCD$  中,  $E$  和  $F$  分别是边  $CD$  和  $BC$  的中点. 若  $\vec{AC} = \lambda \vec{AE} + \mu \vec{AF}$ , 其中  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , 则  $\lambda + \mu =$ \_\_\_\_\_.
- 对于四面体  $ABCD$ , 下列命题正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确命题的编号)  
① 相对棱  $AB$  与  $CD$  所在的直线异面;  
② 由顶点  $A$  作四面体的高, 其垂足是  $\triangle BCD$  的三条高线的交点;  
③ 若分别作  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  的边  $AB$  上的高, 则这两条高所在直线异面;  
④ 任何三个面的面积之和都大于第四个面的面积;  
⑤ 分别作三组相对棱中点的连线, 所得的三条线段相交于一点.

## 三、解答题

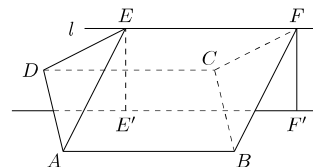
- 在  $\triangle ABC$  中,  $C - A = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin B = \frac{1}{3}$ .  
(1) 求  $\sin A$  的值;  
(2) 设  $AC = \sqrt{6}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

- 某良种培育基地正在培育一种小麦新品种  $A$ , 将其与原有的一个优良品种  $B$  进行对照试验, 两种小麦各种植了 25 亩, 所得亩产数据 (单位: 千克) 如下:  
品种  $A$ : 357, 359, 367, 368, 375, 388, 392, 399, 400, 405, 412, 414, 415, 421, 423, 423, 427, 430, 430, 434, 443, 445, 451, 454.  
品种  $B$ : 363, 371, 374, 383, 385, 386, 391, 392, 394, 395, 397, 397, 400, 401, 401, 403, 406, 407, 410, 412, 415, 416, 422, 430.  
(1) 完成所附的茎叶图;  
(2) 用茎叶图处理现有的数据, 有什么优点?  
(3) 通过观察茎叶图, 对品种  $A$  与  $B$  的亩产量及其稳定性进行比较, 写出统计结论.

$A$		$B$
		35
		36
		37
		38
		39
		40
		41
		42
		43
		44
		45

18. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 以原点为圆心、椭圆短半轴长为半径的圆与直线  $y = x + 2$  相切.
- (1) 求  $a$  与  $b$ ;
- (2) 设该椭圆的左、右焦点分别为  $F_1$  和  $F_2$ , 直线  $l_1$  过  $F_2$  且与  $x$  轴垂直, 动直线  $l_2$  与  $y$  轴垂直, 交  $l_1$  于点  $P$ . 求线段  $PF_1$  的垂直平分线与  $l_2$  的交点  $M$  的轨迹方程, 并指明曲线类型.

20. 如图,  $ABCD$  的边长为 2 的正方形, 直线  $l$  与平面  $ABCD$  平行,  $E$  和  $F$  是  $l$  上的两个不同点, 且  $EA = ED$ ,  $FB = FC$ .  $E'$  和  $F'$  是平面  $ABCD$  内的两点,  $EE'$  和  $FF'$  都与平面  $ABCD$  垂直.
- (1) 证明: 直线  $E'F'$  垂直且平分线段  $AD$ ;
- (2) 若  $\angle EAD = \angle EAB = 60^\circ$ ,  $EF = 2$ , 求多面体  $ABCDEF$  的体积.



21. 已知函数  $f(x) = x - \frac{2}{x} + 1 - a \ln x$ ,  $a > 0$ .
- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 设  $a = 3$ , 求  $f(x)$  在区间  $[1, e^2]$  上值域, 其中  $e = 0.71828 \dots$  是自然对数的底数.

19. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2n^2 + 2n$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n = 2 - b_n$ .
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $c_n = a_n^2 \cdot b_n$ , 证明: 当且仅当  $n \geq 3$  时,  $c_{n+1} < c_n$ .



## 2009 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

### 一、选择题

- 在复平面内, 复数  $z = i(1 + 2i)$  对应的点位于 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 已知向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  不共线,  $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + \mathbf{b}$  ( $k \in \mathbf{R}$ ),  $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . 如果  $\mathbf{c} \parallel \mathbf{d}$ , 那么 ( )  
(A)  $k = 1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  同向 (B)  $k = 1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  反向  
(C)  $k = -1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  同向 (D)  $k = -1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  反向
- 为了得到函数  $y = \lg \frac{x+3}{10}$  的图象, 只需把函数  $y = \lg x$  的图象上所有的点 ( )  
(A) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度  
(B) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度  
(C) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度  
(D) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
- 若正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为 1,  $AB_1$  与底面  $ABCD$  成  $60^\circ$  角, 则  $A_1C_1$  到底面  $ABCD$  的距离为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (B) 1 (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$
- “ $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ )”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 若  $(1 + \sqrt{2})^5 = a + b\sqrt{2}$  ( $a, b$  为有理数), 则  $a + b =$  ( )  
(A) 45 (B) 55 (C) 70 (D) 80
- 用 0 到 9 这 10 个数字, 可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为 ( )  
(A) 324 (B) 328 (C) 360 (D) 648
- 点  $P$  在直线  $l: y = x - 1$  上, 若存在过  $P$  的直线交抛物线  $y = x^2$  于  $A, B$  两点, 且  $|PA| = |AB|$ , 则称点  $P$  为“ $\mathcal{A}$  点”, 那么下列结论中正确的是 ( )  
(A) 直线  $l$  上的所有点都是“ $\mathcal{A}$  点”  
(B) 直线  $l$  上仅有有限个点是“ $\mathcal{A}$  点”  
(C) 直线  $l$  上的所有点都不是“ $\mathcal{A}$  点”  
(D) 直线  $l$  上有无穷多个点 (但不是所有的点) 是“ $\mathcal{A}$  点”

### 二、填空题

9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{x - 1} =$ \_\_\_\_\_.

10. 若实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ x \leq 4, \\ y \leq 5, \end{cases}$  则  $s = y - x$  的最小值为\_\_\_\_\_.

11. 设  $f(x)$  是偶函数. 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线的斜率为 1, 则该曲线在  $(-1, f(-1))$  处的切线的斜率为\_\_\_\_\_.

12. 椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$  的焦点为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在椭圆上. 若  $|PF_1| = 4$ , 则  $|PF_2| =$ \_\_\_\_\_;  $\angle F_1PF_2$  的大小为\_\_\_\_\_.

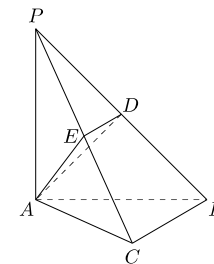
13. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \geq 0, \end{cases}$  则不等式  $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$  的解集为\_\_\_\_\_.

14. 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_{4n-3} = 1, a_{4n-1} = 0, a_{2n} = a_n, n \in \mathbf{N}^*$ , 则  $a_{2009} =$ \_\_\_\_\_;  $a_{2014} =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $B = \frac{\pi}{3}, \cos A = \frac{4}{5}$ ,  $b = \sqrt{3}$ .  
(1) 求  $\sin C$  的值;  
(2) 求  $\triangle ABC$  的面积.

16. 如图, 在三棱锥  $P - ABC$  中,  $PA \perp$  底面  $ABC$ ,  $PA = AB$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 90^\circ$ , 点  $D, E$  分别在棱  $PB, PC$  上, 且  $DE \parallel BC$ .  
(1) 求证:  $BC \perp$  平面  $PAC$ ;  
(2) 当  $D$  为  $PB$  的中点时, 求  $AD$  与平面  $PAC$  所成的角的大小;  
(3) 是否存在点  $E$  使得二面角  $A - DE - P$  为直二面角? 并说明理由.



17. 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是  $\frac{1}{3}$ , 遇到红灯时停留的时间都是 2 min.  
(1) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;  
(2) 求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间  $\xi$  的分布列及期望.

18. 设函数  $f(x) = xe^{kx}$  ( $k \neq 0$ ).
- (1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
  - (2) 求函数  $f(x)$  的单调区间;
  - (3) 若函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内单调递增, 求  $k$  的取值范围.
19. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为  $\sqrt{3}$ , 右准线方程为  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- (1) 求双曲线  $C$  的方程;
  - (2) 设直线  $l$  是圆  $O: x^2 + y^2 = 2$  上动点  $P(x_0, y_0)$  ( $x_0 y_0 \neq 0$ ) 处的切线,  $l$  与双曲线  $C$  交于不同的两点  $A, B$ , 证明  $\angle AOB$  的大小为定值.
20. 已知数集  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ( $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2$ ) 具有性质  $P$ : 对任意的  $i, j$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ),  $a_i a_j$  与  $\frac{a_j}{a_i}$  两数中至少有一个属于  $A$ .
- (1) 分别判断数集  $\{1, 3, 4\}$  与  $\{1, 2, 3, 6\}$  是否具有性质  $P$ , 并说明理由;
  - (2) 证明:  $a_1 = 1$ , 且  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$ ;
  - (3) 证明: 当  $n = 5$  时,  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  成等比数列.

## 2009 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

### 一、选择题

1. 设集合  $A = \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 \leq 1\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$  (B)  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$   
 (C)  $\{x \mid x < 2\}$  (D)  $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$
2. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1)$ ,  $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + \mathbf{b}$  ( $k \in \mathbf{R}$ ),  $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . 如果  $\mathbf{c} \parallel \mathbf{d}$ , 那么 ( )  
 (A)  $k = 1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  同向 (B)  $k = 1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  反向  
 (C)  $k = -1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  同向 (D)  $k = -1$  且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{d}$  反向
3. 若  $(1 + \sqrt{2})^4 = a + b\sqrt{2}$  ( $a, b$  为有理数), 则  $a + b =$  ( )  
 (A) 33 (B) 29 (C) 23 (D) 19
4. 为了得到函数  $y = \lg \frac{x+3}{10}$  的图象, 只需把函数  $y = \lg x$  的图象上所有的点 ( )  
 (A) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度  
 (B) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度  
 (C) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度  
 (D) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
5. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的无重复数字的四位偶数的个数为 ( )  
 (A) 8 (B) 24 (C) 48 (D) 120
6. “ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
7. 若正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为 1,  $AB_1$  与底面  $ABCD$  成  $60^\circ$  角, 则  $A_1C_1$  到底面  $ABCD$  的距离为 ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (B) 1 (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$
8. 设  $D$  是正  $\triangle P_1P_2P_3$  及其内部的点构成的集合, 点  $P_0$  是  $\triangle P_1P_2P_3$  的中心. 若集合  $S = \{P \mid P \in D, |PP_0| \leq |PP_i|, i = 1, 2, 3\}$ , 则集合  $S$  表示的平面区域是 ( )  
 (A) 三角形区域 (B) 四边形区域 (C) 五边形区域 (D) 六边形区域

### 二、填空题

9. 若  $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ,  $\tan \theta > 0$ , 则  $\cos \theta =$ \_\_\_\_\_.
10. 若数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $a_5 =$ \_\_\_\_\_; 前 8 项的和  $S_8 =$ \_\_\_\_\_. (用数字作答)

11. 若实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ x \leq 4, \\ y \leq 5, \end{cases}$  则  $s = x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1, \\ -x, & x > 1. \end{cases}$  若  $f(x) = 2$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.

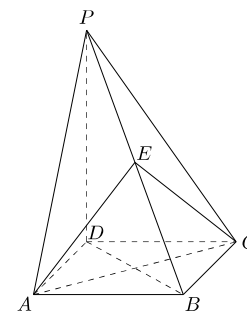
13. 椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$  的焦点为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在椭圆上. 若  $|PF_1| = 4$ , 则  $|PF_2| =$ \_\_\_\_\_;  $\angle F_1PF_2$  的大小为\_\_\_\_\_.

14. 设  $A$  是整数集的一个非空子集. 对于  $k \in A$ , 如果  $k - 1 \notin A$ , 那么  $k$  是  $A$  的一个“孤立元”. 给定  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 由  $S$  的 3 个元素构成的所有集合中, 不含“孤立元”的集合共有\_\_\_\_\_个.

### 三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\pi - x)\cos x$ .  
 (1) 求  $f(x)$  的最小正周期;  
 (2) 求  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值和最小值.

16. 如图, 四棱锥  $P - ABCD$  的底面是正方形,  $PD \perp ABCD$ , 点  $E$  在棱  $PB$  上.  
 (1) 求证: 平面  $AEC \perp$  平面  $PDB$ ;  
 (2) 当  $PD = \sqrt{2}AB$  且  $E$  为  $PB$  的中点时, 求  $AE$  与平面  $PDB$  所成的角的大小.



17. 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是  $\frac{1}{3}$ , 遇到红灯时停留的时间都是 2 min.  
 (1) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;  
 (2) 这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间至多是 4 min 的概率.

18. 设函数  $f(x) = x^3 - 3ax + b$  ( $a \neq 0$ ).
- (1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(x))$  处与直线  $y = 8$  相切, 求  $a, b$  的值;
  - (2) 求函数  $f(x)$  的单调区间与极值点.
19. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为  $\sqrt{3}$ , 右准线方程为  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- (1) 求双曲线  $C$  的方程;
  - (2) 已知直线  $x - y + m = 0$  与双曲线  $C$  交于不同的两点  $A, B$ , 且线段  $AB$  的中点在圆  $x^2 + y^2 = 5$  上, 求  $m$  的值.
20. 设数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = pn + q$  ( $n \in \mathbf{N}^*, P > 0$ ). 数列  $\{b_m\}$  定义如下: 对于正整数  $m, b_m$  是使得不等式  $a_n \geq m$  成立的所有  $n$  中的最小值.
- (1) 若  $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$ , 求  $b_3$ ;
  - (2) 若  $p = 2, q = -1$ , 求数列  $\{b_m\}$  的前  $2m$  项和公式;
  - (3) 是否存在  $p$  和  $q$ , 使得  $b_m = 3m + 2$  ( $m \in \mathbf{N}^*$ )? 如果存在, 求  $p$  和  $q$  的取值范围; 如果不存在, 请说明理由.

## 2009 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

### 一、选择题

- 直线  $y = x + 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  的位置关系是 ( )  
(A) 相切 (B) 相交但直线不过圆心  
(C) 直线过圆心 (D) 相离
- 已知复数  $z$  的实部为  $-1$ , 虚部为  $2$ , 则  $\frac{5i}{z} =$  ( )  
(A)  $2 - i$  (B)  $2 + i$  (C)  $-2 - i$  (D)  $-2 + i$
- $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^8$  的展开式中  $x^4$  的系数是 ( )  
(A) 16 (B) 70 (C) 560 (D) 1120
- 已知  $|a| = 1, |b| = 6, a \cdot (b - a) = 2$ , 则向量  $a$  与  $b$  的夹角是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
- 不等式  $|x + 3| - |x - 1| \leq a^2 - 3a$  对任意实数  $x$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )  
(A)  $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$  (B)  $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$   
(C)  $[1, 2]$  (D)  $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
- 锅中煮有芝麻馅汤圆 6 个, 花生馅汤圆 5 个, 豆沙馅汤圆 4 个, 这三种汤圆的外部特征完全相同. 从中任意舀取 4 个汤圆, 则每种汤圆都至少取到 1 个的概率为 ( )  
(A)  $\frac{8}{91}$  (B)  $\frac{25}{91}$  (C)  $\frac{48}{91}$  (D)  $\frac{60}{91}$
- 设  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$ , 向量  $m = (\sqrt{3} \sin A, \sin B)$ ,  $n = (\cos B, \sqrt{3} \cos A)$ , 若  $m \cdot n = 1 + \cos(A + B)$ , 则  $C =$  ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{2\pi}{3}$  (D)  $\frac{5\pi}{6}$
- 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{x+1} - ax - b \right) = 2$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $a - b$  的值为 ( )  
(A)  $-6$  (B)  $-2$  (C)  $2$  (D)  $6$
- 已知二面角  $\alpha - l - \beta$  的大小为  $50^\circ$ ,  $P$  为空间中任意一点, 则过点  $P$  且与平面  $\alpha$  和平面  $\beta$  所成的角都是  $25^\circ$  的直线的条数为 ( )  
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 已知以  $T = 4$  为周期的函数  $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1], \\ 1 - |x - 2|, & x \in (1, 3], \end{cases}$  其中  $m > 0$ . 若方程  $3f(x) = x$  恰有 5 个实数解, 则  $m$  的取值范围为 ( )  
(A)  $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{8}{3}\right)$  (B)  $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{7}\right)$  (C)  $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$  (D)  $\left(\frac{4}{3}, \sqrt{7}\right)$

### 二、填空题

- 若  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2^x > 1\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$  是奇函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去当村官, 每个乡镇至少一名, 则不同的分配方案有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)
- 设  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, b_n = \left| \frac{a_n + 2}{a_n - 1} \right|, n \in \mathbf{N}^*$ , 则数列  $\{b_n\}$  的通项  $b_n =$ \_\_\_\_\_.
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ . 若双曲线上存在一点  $P$  使  $\frac{\sin \angle PF_1 F_2}{\sin \angle PF_2 F_1} = \frac{a}{c}$ , 则该双曲线的离心率的取值范围为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

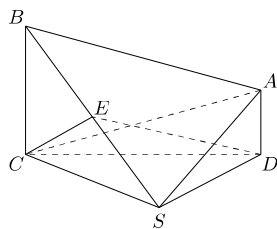
- 设函数  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2\frac{\pi}{8}x + 1$ .  
(1) 求  $f(x)$  的最小正周期;  
(2) 若函数  $y = g(x)$  与  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称, 求当  $x \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$  时  $y = g(x)$  的最大值.

- 某单位为绿化环境, 移栽了甲、乙两种大树各 2 株. 设甲、乙两种大树移栽的成活率分别为  $\frac{2}{3}$  和  $\frac{1}{2}$ , 且各株大树是否成活互不影响. 求移栽的 4 株大树中:  
(1) 两种大树各成活 1 株的概率;  
(2) 成活的株数  $\xi$  的分布列与期望.

- 设函数  $f(x) = ax^2 + bx + k (k > 0)$  在  $x = 0$  处取得极值, 且曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线垂直于直线  $x + 2y + 1 = 0$ .  
(1) 求  $a, b$  的值;  
(2) 若函数  $g(x) = \frac{e^x}{f(x)}$ , 讨论  $g(x)$  的单调性.

19. 如图, 在四棱锥  $S-ABCD$  中,  $AD \parallel BC$  且  $AD \perp CD$ ; 平面  $CSD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $CS \perp DS$ ,  $CS = 2AD = 2$ ,  $E$  为  $BS$  的中点,  $CE = \sqrt{2}$ ,  $AS = \sqrt{3}$ . 求:

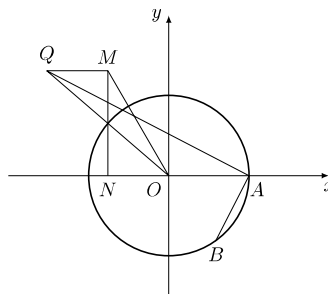
- (1) 点  $A$  到平面  $BCS$  的距离;
- (2) 二面角  $E-CD-A$  的大小.



20. 已知以原点  $O$  为中心的椭圆的一条准线方程为  $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $M$  是椭圆上的动点.

- (1) 若点  $C, D$  的坐标分别是  $(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ , 求  $|MC| \cdot |MD|$  的最大值;

- (2) 如图, 点  $A$  的坐标为  $(1, 0)$ ,  $B$  是圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的点,  $N$  是点  $M$  在  $x$  轴上的射影, 点  $Q$  满足条件:  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ ,  $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ . 求线段  $QB$  的中点  $P$  的轨迹方程.



21. 设  $m$  个不全相等的正数  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ( $m \geq 7$ ) 依次围成一个圆圈.

- (1) 若  $m = 2009$ , 且  $a_1, a_2, \dots, a_{1005}$  是公差为  $d$  的等差数列, 而  $a_1, a_{2009}, a_{2008}, \dots, a_{1006}$  是公比为  $q$  的等比数列; 数列  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的前  $n$  项和  $S_n$  ( $n \leq m$ ) 满足:  $S_3 = 15, S_{2009} = S_{2007} + 12a_1$ , 求通项  $a_n$  ( $n \leq m$ );
- (2) 若每个数  $a_n$  ( $n \leq m$ ) 是其左右相邻两数平方的等比中项, 求证:  $a_1 + \dots + a_6 + a_7^2 + \dots + a_m^2 > ma_1 a_2 \dots a_m$ .

## 2009 普通高等学校招生考试 (重庆卷文)

### 一、选择题

- 圆心在  $y$  轴上, 半径为 1, 且过点  $(1, 2)$  的圆的方程为 ( )  
 (A)  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  (B)  $x^2 + (y + 2)^2 = 1$   
 (C)  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$  (D)  $x^2 + (y - 3)^2 = 1$
- 命题“若一个数是负数, 则它的平方是正数”的逆命题是 ( )  
 (A) “若一个数是负数, 则它的平方不是正数”  
 (B) “若一个数的平方是正数, 则它是负数”  
 (C) “若一个数不是负数, 则它的平方不是正数”  
 (D) “若一个数的平方不是正数, 则它不是负数”
- $(x + 2)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数是 ( )  
 (A) 20 (B) 40 (C) 80 (D) 160
- 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, x)$ . 若  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  与  $4\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$  平行, 则实数  $x$  的值是 ( )  
 (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2
- 设  $\{a_n\}$  是公差不为 0 的等差数列,  $a_1 = 2$  且  $a_1, a_3, a_6$  成等比数列, 则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n =$  ( )  
 (A)  $\frac{n^2}{4} + \frac{7n}{4}$  (B)  $\frac{n^2}{3} + \frac{5n}{3}$  (C)  $\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{4}$  (D)  $n^2 + n$
- 下列关系式中正确的是 ( )  
 (A)  $\sin 11^\circ < \cos 10^\circ < \sin 168^\circ$  (B)  $\sin 168^\circ < \sin 11^\circ < \cos 10^\circ$   
 (C)  $\sin 11^\circ < \sin 168^\circ < \cos 10^\circ$  (D)  $\sin 168^\circ < \cos 10^\circ < \sin 11^\circ$
- 已知  $a > 0, b > 0$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab}$  的最小值是 ( )  
 (A) 2 (B)  $2\sqrt{2}$  (C) 4 (D) 5
- 12 个篮球队中有 3 个强队, 将这 12 个队任意分成 3 个组 (每组 4 个队), 则 3 个强队恰好被分在同一组的概率为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{55}$  (B)  $\frac{3}{55}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$
- 在正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 顶点  $B_1$  到对角线  $BD_1$  和到平面  $A_1BCD_1$  的距离分别为  $h$  和  $d$ , 则下列命题中正确的是 ( )  
 (A) 若侧棱的长小于底面的边长, 则  $\frac{h}{d}$  的取值范围为  $(0, 1)$   
 (B) 若侧棱的长小于底面的边长, 则  $\frac{h}{d}$  的取值范围为  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$   
 (C) 若侧棱的长大于底面的边长, 则  $\frac{h}{d}$  的取值范围为  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right)$   
 (D) 若侧棱的长大于底面的边长, 则  $\frac{h}{d}$  的取值范围为  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

- 把函数  $f(x) = x^3 - 3x$  的图象  $C_1$  向右平移  $u$  个单位长度, 再向下平移  $v$  个单位长度后得到图象  $C_2$ . 若对任意的  $u > 0$ , 曲线  $C_1$  与  $C_2$  至多只有一个交点, 则  $v$  的最小值为 ( )  
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

### 二、填空题

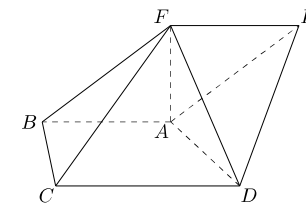
- 若  $U = \{n | n \text{ 是小于 9 的正整数}\}$ ,  $A = \{n \in U | n \text{ 是奇数}\}$ ,  $B = \{n \in U | n \text{ 是 3 的倍数}\}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) =$ \_\_\_\_\_.
- 记  $f(x) = \log_3(x + 1)$  的反函数为  $y = f^{-1}(x)$ , 则方程  $f^{-1}(x) = 8$  的解  $x =$ \_\_\_\_\_.
- 5 个人站成一排, 其中甲、乙两人不相邻的排法有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)
- 从一堆苹果中任取 5 只, 称得它们的质量如下 (单位: 克)  
 125    124    121    123    127  
 则该样本标准差  $s =$ \_\_\_\_\_ (克). (用数字作答)
- 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ . 若椭圆上存在一点  $P$  使  $\frac{a}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2F_1}$ , 则该椭圆的离心率的取值范围为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

- 设函数  $f(x) = (\sin \omega x + \cos \omega x)^2 + 2\cos^2 \omega x$  ( $\omega > 0$ ) 的最小正周期为  $\frac{2\pi}{3}$ .  
 (1) 求  $\omega$  的最小正周期.  
 (2) 若函数  $y = g(x)$  的图象是由  $y = f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度得到, 求  $y = g(x)$  的单调增区间.

- 某单位为绿化环境, 移栽了甲、乙两种大树各 2 株. 设甲、乙两种大树移栽的成活率分别为  $\frac{5}{6}$  和  $\frac{4}{5}$ , 且各株大树是否成活互不影响. 求移栽的 4 株大树中:  
 (1) 至少有 1 株成活的概率;  
 (2) 两种大树各成活 1 株的概率.

- 如图, 在五面体  $ABCDEF$  中,  $AB \parallel DC$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,  $CD = AD = 2$ , 四边形  $ABFE$  为平行四边形,  $FA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $FC = 3$ ,  $ED = \sqrt{7}$ . 求:  
 (1) 直线  $AB$  到平面  $EFCD$  的距离;  
 (2) 二面角  $F - AD - E$  的平面角的正切值.

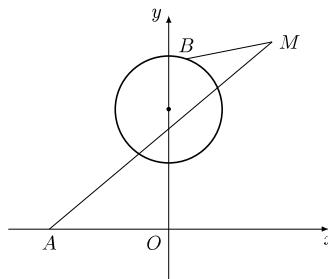


19. 已知  $f(x) = x^2 + bx + c$  为偶函数, 曲线  $y = f(x)$  过点  $(2, 5)$ ,  $g(x) = (x + a)f(x)$ .

- (1) 求曲线  $y = g(x)$  有斜率为 0 的切线, 求实数  $a$  的取值范围;
- (2) 若当  $x = -1$  时函数  $y = g(x)$  取得极值, 确定  $y = g(x)$  的单调区间.

20. 已知以原点  $O$  为中心的双曲线的一条准线方程为  $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 离心率  $e = \sqrt{5}$ .

- (1) 求该双曲线的方程;
- (2) 如图, 点  $A$  的坐标为  $(-\sqrt{5}, 0)$ ,  $B$  是圆  $x^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 1$  上的点, 点  $M$  在双曲线右支上, 求  $|MA| + |MB|$  的最小值, 并求此时  $M$  点的坐标.



21. 已知  $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 求  $b_1, b_2, b_3$  的值;
- (2) 设  $c_n = b_n b_{n+1}$ ,  $S_n$  为数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和, 求证:  $S_n \geq 17n$ ;
- (3) 求证:  $|b_{2n} - b_n| < \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{17^{n-2}}$ .



# 2009 普通高等学校招生考试 (大纲卷 I 理)

## 一、选择题

1. 设集合  $A = \{4, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{3, 4, 7, 8, 9\}$ , 全集  $U = A \cup B$ , 则集合  $\complement_U(A \cap B)$  中的元素共有 ( )  
(A) 3 个 (B) 4 个 (C) 5 个 (D) 6 个
2. 已知  $\frac{\bar{z}}{1+i} = 2+i$ , 则复数  $z =$  ( )  
(A)  $-1+3i$  (B)  $1-3i$  (C)  $3+i$  (D)  $3-i$
3. 不等式  $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$  的解集为 ( )  
(A)  $\{x \mid 0 < x < 1\} \cup \{x \mid x > 1\}$  (B)  $\{x \mid 0 < x < 1\}$   
(C)  $\{x \mid -1 < x < 0\}$  (D)  $\{x \mid x < 0\}$
4. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的渐近线与抛物线  $y = x^2 + 1$  相切, 则该双曲线的离心率等于 ( )  
(A)  $\sqrt{3}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $\sqrt{6}$
5. 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学, 2 名女同学. 若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 ( )  
(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 300 种 (D) 345 种
6. 设  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  是单位向量, 且  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 则  $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})$  的最小值为 ( )  
(A)  $-2$  (B)  $\sqrt{2} - 2$  (C)  $-1$  (D)  $1 - \sqrt{2}$
7. 已知三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱与底面边长都相等,  $A_1$  在底面  $ABC$  上的射影为  $BC$  的中点, 则异面直线  $AB$  与  $CC_1$  所成的角的余弦值为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$  (D)  $\frac{3}{4}$
8. 如果函数  $y = 3 \cos(2x + \varphi)$  的图象关于点  $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$  中心对称, 那么  $|\varphi|$  的最小值为 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
9. 已知直线  $y = x + 1$  与曲线  $y = \ln(x + a)$  相切, 则  $a$  的值为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C)  $-1$  (D)  $-2$
10. 已知二面角  $\alpha - l - \beta$  为  $60^\circ$ , 动点  $P$ 、 $Q$  分别在面  $\alpha$ 、 $\beta$  内,  $P$  到  $\beta$  的距离为  $\sqrt{3}$ ,  $Q$  到  $\alpha$  的距离为  $2\sqrt{3}$ , 则  $P$ 、 $Q$  两点之间距离的最小值为 ( )  
(A)  $\sqrt{2}$  (B) 2 (C)  $2\sqrt{3}$  (D) 4
11. 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若  $f(x+1)$  与  $f(x-1)$  都是奇函数, 则 ( )  
(A)  $f(x)$  是偶函数 (B)  $f(x)$  是奇函数  
(C)  $f(x) = f(x+2)$  (D)  $f(x+3)$  是奇函数

12. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的右焦点为  $F$ , 右准线为  $l$ , 点  $A \in l$ , 线段  $AF$  交  $C$  于点  $B$ . 若  $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则  $|\overrightarrow{AF}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{2}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{3}$  (D) 3

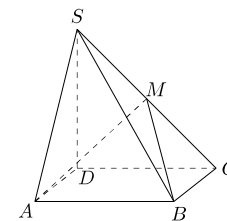
## 二、填空题

13.  $(x-y)^{10}$  的展开式中,  $x^7y^3$  的系数与  $x^3y^7$  的系数之和等于\_\_\_\_\_.
14. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_9 = 72$ , 则  $a_2 + a_4 + a_9 =$ \_\_\_\_\_.
15. 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的各顶点都在同一球面上. 若  $AB = AC = AA_1 = 2$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ , 则此球的表面积等于\_\_\_\_\_.
16. 若  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , 则函数  $y = \tan 2x \tan^3 x$  的最大值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边长分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 已知  $a^2 - c^2 = 2b$ , 且  $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$ , 求  $b$ .

18. 如图, 四棱锥  $S - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $SD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD = \sqrt{2}$ ,  $DC = SD = 2$ , 点  $M$  在侧棱  $SC$  上,  $\angle ABM = 60^\circ$ .  
(1) 证明:  $M$  是侧棱  $SC$  的中点;  
(2) 求二面角  $S - AM - B$  的大小.



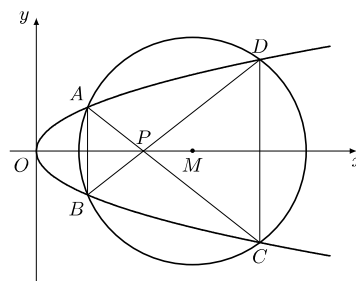
19. 甲、乙二人进行一次围棋比赛, 约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利, 比赛结束. 假设在一局中, 甲获胜的概率为 0.6, 乙获胜的概率为 0.4, 各局比赛结果相互独立, 已知前 2 局中, 甲、乙各胜 1 局.  
(1) 求甲获得这次比赛胜利的概率;  
(2) 设  $\xi$  表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数, 求  $\xi$  得分布列及数学期望.

20. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n + \frac{n+1}{2^n}$ .

- (1) 设  $b_n = \frac{a_n}{n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

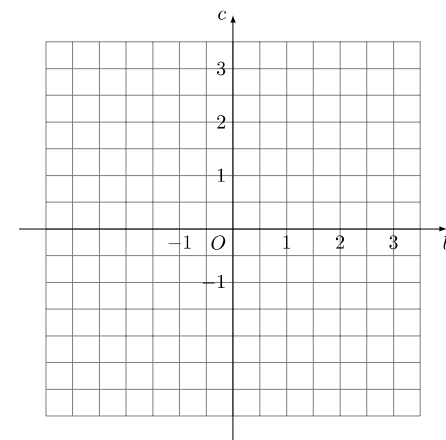
21. 如图, 已知抛物线  $E: y^2 = x$  与圆  $M: (x-4)^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 相交于  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四个点.

- (1) 求  $r$  的取值范围;
- (2) 当四边形  $ABCD$  的面积最大时, 求对角线  $AC$ 、 $BD$  的交点  $P$  坐标.



22. 设函数  $f(x) = x^3 + 3bx^2 + 3cx$  在两个极值点  $x_1$ 、 $x_2$ , 且  $x_1 \in [-1, 0]$ ,  $x_2 \in [1, 2]$ .

- (1) 求  $b$ 、 $c$  满足的约束条件, 并在下面的坐标平面内, 画出满足这些条件的点  $(b, c)$  的区域;
- (2) 证明:  $-10 \leq f(x_2) \leq -\frac{1}{2}$ .



# 2009 普通高等学校招生考试 (大纲卷 I 文)

## 一、选择题

- $\sin 585^\circ$  的值为 ( )  
(A)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 设集合  $A = \{4, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{3, 4, 7, 8, 9\}$ , 全集  $U = A \cup B$ , 则集合  $\complement_U(A \cap B)$  中的元素共有 ( )  
(A) 3 个 (B) 4 个 (C) 5 个 (D) 6 个
- 不等式  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1$  的解集为 ( )  
(A)  $\{x \mid 0 < x < 1\} \cup \{x \mid x > 1\}$  (B)  $\{x \mid 0 < x < 1\}$   
(C)  $\{x \mid -1 < x < 0\}$  (D)  $\{x \mid x < 0\}$
- 已知  $\tan \alpha = 4$ ,  $\cot \beta = \frac{1}{3}$ , 则  $\tan(\alpha + \beta) =$  ( )  
(A)  $\frac{7}{11}$  (B)  $-\frac{7}{11}$  (C)  $\frac{7}{13}$  (D)  $-\frac{7}{13}$
- 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的渐近线与抛物线  $y = x^2 + 1$  相切, 则该双曲线的离心率等于 ( )  
(A)  $\sqrt{3}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $\sqrt{6}$
- 已知函数  $f(x)$  的反函数为  $g(x) = 1 + 2\lg x$  ( $x > 0$ ), 则  $f(1) + g(1) =$  ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
- 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学, 2 名女同学. 若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 ( )  
(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 300 种 (D) 345 种
- 设非零向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  满足  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ , 则  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$  ( )  
(A)  $150^\circ$  (B)  $120^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $30^\circ$
- 已知三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱与底面边长都相等,  $A_1$  在底面  $ABC$  上的射影为  $BC$  的中点, 则异面直线  $AB$  与  $CC_1$  所成的角的余弦值为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$  (D)  $\frac{3}{4}$
- 如果函数  $y = 3\cos(2x + \varphi)$  的图象关于点  $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$  中心对称, 那么  $|\varphi|$  的最小值为 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
- 已知二面角  $\alpha - l - \beta$  为  $60^\circ$ , 动点  $P$ 、 $Q$  分别在面  $\alpha$ 、 $\beta$  内,  $P$  到  $\beta$  的距离为  $\sqrt{3}$ ,  $Q$  到  $\alpha$  的距离为  $2\sqrt{3}$ , 则  $P$ 、 $Q$  两点之间距离的最小值为 ( )  
(A)  $\sqrt{2}$  (B) 2 (C)  $2\sqrt{3}$  (D) 4

- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的右焦点为  $F$ , 右准线  $l$ , 点  $A \in l$ , 线段  $AF$  交  $C$  于点  $B$ . 若  $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则  $|\overrightarrow{AF}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{2}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{3}$  (D) 3
- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的右焦点为  $F$ , 右准线为  $l$ , 点  $A \in l$ , 线段  $AF$  交  $C$  于点  $B$ . 若  $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则  $|\overrightarrow{AF}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{2}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{3}$  (D) 3

## 二、填空题

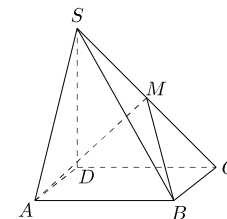
- $(x - y)^{10}$  的展开式中,  $x^7y^3$  的系数与  $x^3y^7$  的系数之和等于\_\_\_\_\_.
- 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_9 = 72$ , 则  $a_2 + a_4 + a_9 =$ \_\_\_\_\_.
- 已知  $OA$  为球  $O$  的半径, 过  $OA$  的中点  $M$  且垂直于  $OA$  的平面截球面得到圆  $M$ . 若圆  $M$  的面积为  $3\pi$ , 则球  $O$  的表面积等于\_\_\_\_\_.
- 若直线  $m$  被两平行线  $l_1: x - y + 1 = 0$  与  $l_2: x - y + 3 = 0$  所截得的线段的长为  $2\sqrt{2}$ , 则  $m$  的倾斜角可以是  
①  $15^\circ$     ②  $30^\circ$     ③  $45^\circ$     ④  $60^\circ$     ⑤  $75^\circ$   
其中正确答案的序号是\_\_\_\_\_. (写出所有正确答案的序号)

## 三、解答题

- 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $l$ , 公比是正数的等比数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 已知  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 3$ ,  $a_3 + b_3 = 17$ ,  $T_3 - S_3 = 12$ , 求  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式.

- 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边长分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 已知  $a^2 - c^2 = 2b$ , 且  $\sin B = 4 \cos A \sin C$ , 求  $b$ .

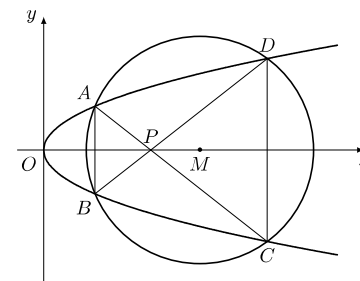
- 如图, 四棱锥  $S - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $SD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD = \sqrt{2}$ ,  $DC = SD = 2$ , 点  $M$  在侧棱  $SC$  上,  $\angle ABM = 60^\circ$ .  
(1) 证明:  $M$  是侧棱  $SC$  的中点;  
(2) 求二面角  $S - AM - B$  的大小.



21. 甲、乙二人进行一次围棋比赛, 约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利, 比赛结束, 假设在一局中, 甲获胜的概率为 0.6, 乙获胜的概率为 0.4, 各局比赛结果相互独立, 已知前 2 局中, 甲、乙各胜 1 局.
- (1) 求再赛 2 局结束这次比赛的概率;
  - (2) 求甲获得这次比赛胜利的概率.

22. 已知函数  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6$ .
- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
  - (2) 设点  $P$  在曲线  $y = f(x)$  上, 若该曲线在点  $P$  处的切线  $l$  通过坐标原点, 求  $l$  的方程.

23. 如图, 已知抛物线  $E: y^2 = x$  与圆  $M: (x-4)^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 相交于  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四个点.
- (1) 求  $r$  的取值范围;
  - (2) 当四边形  $ABCD$  的面积最大时, 求对角线  $AC$ 、 $BD$  的交点  $P$  坐标.

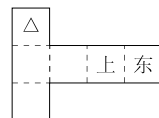


# 2009 普通高等学校招生考试 (大纲卷 II 理)

## 一、选择题

- $\frac{10i}{2-i} =$  ( )  
(A)  $-2+4i$  (B)  $-2-4i$  (C)  $2+4i$  (D)  $2-4i$
- 设集合  $A = \{x | x > 3\}$ ,  $B = \left\{x \left| \frac{x-1}{x-4} < 0 \right.\right\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $\emptyset$  (B)  $(3, 4)$  (C)  $(-2, 1)$  (D)  $(4, +\infty)$
- 已知  $\triangle ABC$  中,  $\cot A = -\frac{12}{5}$ , 则  $\cos A =$  ( )  
(A)  $\frac{12}{13}$  (B)  $\frac{5}{13}$  (C)  $-\frac{5}{13}$  (D)  $-\frac{12}{13}$
- 曲线  $y = \frac{x}{2x-1}$  在点  $(1, 1)$  处的切线方程为 ( )  
(A)  $x - y - 2 = 0$  (B)  $x + y - 2 = 0$   
(C)  $x + 4y - 5 = 0$  (D)  $x - 4y - 5 = 0$
- 已知正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 2AB$ ,  $E$  为  $AA_1$  中点, 则异面直线  $BE$  与  $CD_1$  所成的角的余弦值为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  (D)  $\frac{3}{5}$
- 已知向量  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$ ,  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5\sqrt{2}$ , 则  $|\mathbf{b}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{5}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C)  $5$  (D)  $25$
- 设  $a = \log_3 \pi$ ,  $b = \log_2 \sqrt{3}$ ,  $c = \log_3 \sqrt{2}$ , 则 ( )  
(A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $b > a > c$  (D)  $b > c > a$
- 若将函数  $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后, 与函数  $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象重合, 则  $\omega$  的最小值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{2}$
- 已知直线  $y = k(x+2)$  ( $k > 0$ ) 与抛物线  $C: y^2 = 8x$  相交于  $A, B$  两点,  $F$  为  $C$  的焦点. 若  $|FA| = 2|FB|$ , 则  $k =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 ( )  
(A) 6 种 (B) 12 种 (C) 30 种 (D) 36 种
- 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 过  $F$  且斜率为  $\sqrt{3}$  的直线交  $C$  于  $A, B$  两点, 若  $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$ . 则  $C$  的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{6}{5}$  (B)  $\frac{7}{5}$  (C)  $\frac{5}{8}$  (D)  $\frac{9}{5}$

12. 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北. 现有沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平, 得到如图的平面图形, 则标“△”的面的方位是 ( )



- (A) 南 (B) 北 (C) 西 (D) 下

## 二、填空题

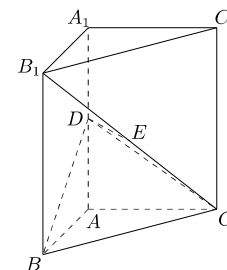
- $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数为\_\_\_\_\_.
- 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $a_5 = 5a_3$ , 则  $\frac{S_9}{S_5} =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $OA$  是球  $O$  的半径,  $M$  是  $OA$  的中点, 过  $M$  且与  $OA$  成  $45^\circ$  角的平面截球  $O$  的表面得到圆  $C$ . 若圆  $C$  的面积等于  $\frac{7\pi}{4}$ , 则球  $O$  的表面积等于\_\_\_\_\_.
- 已知  $AC, BD$  为圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  的两条相互垂直的弦, 垂足为  $M(1, \sqrt{2})$ , 则四边形  $ABCD$  的面积的最大值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边长分别为  $a, b, c$ ,  $\cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}$ ,  $b^2 = ac$ , 求  $B$ .

18. 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB \perp AC$ ,  $D, E$  分别为  $AA_1, B_1C$  的中点,  $DE \perp$  平面  $BCC_1$ .

- 证明:  $AB = AC$ ;
- 设二面角  $A - BD - C$  为  $60^\circ$ , 求  $B_1C$  与平面  $BCD$  所成的角的大小.



- 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_1 = 1$ ,  $S_{n+1} = 4a_n + 2$ .  
(1) 设  $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ , 证明数列  $\{b_n\}$  是等比数列;  
(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

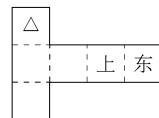
20. 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 5 名工人, 其中有 3 名女工人. 现采用分层抽样方法 (层内采用不放回简单随机抽样) 从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核.
- (1) 求从甲、乙两组各抽取的人数;
  - (2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;
  - (3) 记  $\xi$  表示抽取的 3 名工人中男工人数, 求  $\xi$  的分布列及数学期望.
21. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过右焦点  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 当  $l$  的斜率为 1 时, 坐标原点  $O$  到  $l$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- (1) 求  $a, b$  的值;
  - (2)  $C$  上是否存在点  $P$ , 使得当  $l$  绕  $F$  转到某一位置时, 有  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  成立? 若存在, 求出所有的  $P$  的坐标与  $l$  的方程; 若不存在, 说明理由.
22. 设函数  $f(x) = x^2 + a \ln(1+x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ .
- (1) 求  $a$  的取值范围, 并讨论  $f(x)$  的单调性;
  - (2) 证明:  $f(x_2) > \frac{1-2\ln 2}{4}$ .

# 2009 普通高等学校招生考试 (大纲卷 II 文)

## 一、选择题

- 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $M = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $N = \{5, 6, 7\}$ , 则  $\complement_U(M \cup N) =$  ( )  
(A)  $\{5, 7\}$  (B)  $\{2, 4\}$  (C)  $\{2, 4, 8\}$  (D)  $\{1, 3, 5, 6, 7\}$
- 函数  $y = \sqrt{-x} (x \leq 0)$  的反函数是 ( )  
(A)  $y = x^2 (x \geq 0)$  (B)  $y = -x^2 (x \geq 0)$   
(C)  $y = x^2 (x \leq 0)$  (D)  $y = -x^2 (x \leq 0)$
- 函数  $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$  的图象 ( )  
(A) 关于原点对称 (B) 关于直线  $y = -x$  对称  
(C) 关于  $y$  轴对称 (D) 关于直线  $y = x$  对称
- 已知  $\triangle ABC$  中,  $\cot A = -\frac{12}{5}$ , 则  $\cos A =$  ( )  
(A)  $\frac{12}{13}$  (B)  $\frac{5}{13}$  (C)  $-\frac{5}{13}$  (D)  $-\frac{12}{13}$
- 已知正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 2AB$ ,  $E$  为  $AA_1$  中点, 则异面直线  $BE$  与  $CD_1$  所成的角的余弦值为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  (D)  $\frac{3}{5}$
- 已知向量  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$ ,  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5\sqrt{2}$ , 则  $|\mathbf{b}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{5}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C) 5 (D) 25
- 设  $a = \lg e$ ,  $b = (\lg e)^2$ ,  $c = \lg \sqrt{e}$ , 则 ( )  
(A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $c > a > b$  (D)  $c > b > a$
- 双曲线  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$  的渐近线与圆  $(x-3)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  相切, 则  $r =$  ( )  
(A)  $\sqrt{3}$  (B) 2 (C) 3 (D) 6
- 若将函数  $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后, 与函数  $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象重合, 则  $\omega$  的最小值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{2}$
- 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 则甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有 ( )  
(A) 6 种 (B) 12 种 (C) 24 种 (D) 30 种
- 已知直线  $y = k(x+2) (k > 0)$  与抛物线  $C: y^2 = 8x$  相交于  $A, B$  两点,  $F$  为  $C$  的焦点. 若  $|FA| = 2|FB|$ , 则  $k =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

- 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北. 现有沿该正方体的一些棱将正方体剪开, 外面朝上展平, 得到如图的平面图形, 则标“△”的面的方位是 ( )



- (A) 南 (B) 北 (C) 西 (D) 下

## 二、填空题

- 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $a_1 = 1$ ,  $S_6 = 4S_3$ , 则  $a_4 =$ \_\_\_\_\_.
- $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数为\_\_\_\_\_.
- 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 5$  和点  $A(1, 2)$ , 则过  $A$  且与圆  $O$  相切的直线与两坐标轴围成的三角形的面积等于\_\_\_\_\_.
- 设  $OA$  是球  $O$  的半径,  $M$  是  $OA$  的中点, 过  $M$  且与  $OA$  成  $45^\circ$  角的平面截球  $O$  的表面得到圆  $C$ . 若圆  $C$  的面积等于  $\frac{7\pi}{4}$ , 则球  $O$  的表面积等于\_\_\_\_\_.

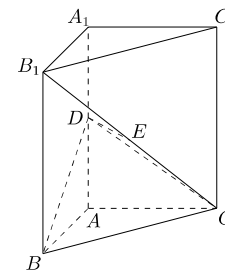
## 三、解答题

- 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3a_7 = -16$ ,  $a_4 + a_6 = 0$ , 求  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

- 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边长分别为  $a, b, c$ ,  $\cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}$ ,  $b^2 = ac$ , 求  $B$ .

- 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB \perp AC$ ,  $D, E$  分别为  $AA_1, B_1C$  的中点,  $DE \perp$  平面  $BCC_1$ .

- (1) 证明:  $AB = AC$ ;
- (2) 设二面角  $A - BD - C$  为  $60^\circ$ , 求  $B_1C$  与平面  $BCD$  所成的角的大小.



20. 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 10 名工人, 其中有 6 名女工人. 现采用分层抽样方法 (层内采用不放回简单随机抽样) 从甲、乙两组中共抽取 4 名工人进行技术考核.
- (1) 求从甲、乙两组各抽取的人数;
  - (2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;
  - (3) 求抽取的 4 名工人中恰有 2 名男工人的概率.

21. 设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1+a)x^2 + 4ax + 24a$ , 其中常数  $a > 1$ .
- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
  - (2) 若当  $x \geq 0$  时,  $f(x) > 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

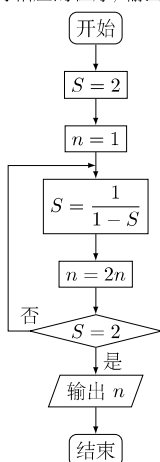
22. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过右焦点  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点, 当  $l$  的斜率为 1 时, 坐标原点  $O$  到  $l$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- (1) 求  $a$ ,  $b$  的值;
  - (2)  $C$  上是否存在点  $P$ , 使得当  $l$  绕  $F$  转到某一位置时, 有  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  成立? 若存在, 求出所有的  $P$  的坐标与  $l$  的方程; 若不存在, 说明理由.



# 2009 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

## 一、选择题

- 函数  $f(x) = \sin x \cos x$  的最小值是 ( )  
(A)  $-1$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $1$
- 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x > 0\}$ , 则  $\complement_U A$  等于 ( )  
(A)  $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$  (B)  $\{x \mid 0 < x < 2\}$   
(C)  $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$  (D)  $\{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$
- 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_3 = 6, a_1 = 4$ , 则公差  $d$  等于 ( )  
(A)  $1$  (B)  $\frac{5}{3}$  (C)  $2$  (D)  $3$
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) dx$  等于 ( )  
(A)  $\pi$  (B)  $2$  (C)  $\pi - 2$  (D)  $\pi + 2$
- 下列函数  $f(x)$  中, 满足“对任意  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ ”的是 ( )  
(A)  $f(x) = \frac{1}{x}$  (B)  $f(x) = (x-1)^2$   
(C)  $f(x) = e^x$  (D)  $f(x) = \ln(x+1)$
- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果是 ( )



- (A)  $2$  (B)  $4$  (C)  $8$  (D)  $16$
- 设  $m, n$  是平面  $\alpha$  内的两条不同直线,  $l_1, l_2$  是平面  $\beta$  内的两条相交直线, 则  $\alpha \parallel \beta$  的一个充分而不必要条件是 ( )  
(A)  $m \parallel \beta$  且  $l_1 \parallel \alpha$  (B)  $m \parallel l_1$  且  $n \parallel l_2$   
(C)  $m \parallel \beta$  且  $n \parallel \beta$  (D)  $m \parallel \beta$  且  $n \parallel l_2$

- 已知某运动员每次投篮命中的概率都为  $40\%$ . 现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率: 先由计算器算出  $0$  到  $9$  之间取整数值的随机数, 指定  $1, 2, 3, 4$  表示命中,  $5, 6, 7, 8, 9, 0$  表示不命中; 再以每三个随机数为一组, 代表三次投篮的结果. 经随机模拟产生了  $20$  组随机数:  

907	966	191	925	271	932	812	458	569	683
431	257	393	027	556	488	730	113	537	989

 据此估计, 该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为 ( )  
(A)  $0.35$  (B)  $0.25$  (C)  $0.20$  (D)  $0.15$

- 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为同一平面内具有相同起点的任意三个非零向量, 且满足  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  不共线,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}, |\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$ , 则  $|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$  的值一定等于 ( )  
(A) 以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为两边的三角形面积  
(B) 以  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  为两边的三角形面积  
(C) 以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为邻边的平行四边形的面积  
(D) 以  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  为邻边的平行四边形的面积
- 函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象关于直线  $x = -\frac{b}{2a}$  对称. 据此可推测, 对任意的非零实数  $a, b, c, m, n, p$ , 关于  $x$  的方程  $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$  的解集都不可能是 ( )  
(A)  $\{1, 2\}$  (B)  $\{1, 4\}$  (C)  $\{1, 2, 3, 4\}$  (D)  $\{1, 4, 16, 64\}$

## 二、填空题

- 若  $\frac{2}{1-i} = a + bi$  ( $i$  为虚数单位,  $a, b \in \mathbf{R}$ ) 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.
- 某校开展“爱我海西、爱我家乡”摄影比赛,  $9$  位评委为参赛作品  $A$  给出的分数如茎叶图所示. 记分员在去掉一个最高分和一个最低分后, 算的平均分为  $91$ , 复核员在复核时, 发现有一个数字 (茎叶图中的  $x$ ) 无法看清. 若记分员计算无误, 则数字  $x$  应该是\_\_\_\_\_.

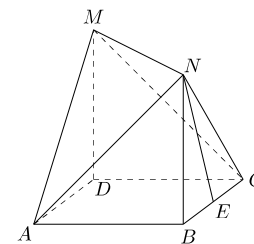
		作品 A					
8	8	9	9	9	2	3	x
	2	3	2				

- 过抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  作倾斜角为  $45^\circ$  的直线交抛物线于  $A, B$  两点, 若线段  $AB$  的长为  $8$ , 则  $p =$ \_\_\_\_\_.
- 若曲线  $f(x) = ax^3 + \ln x$  存在垂直于  $y$  轴的切线, 则实数  $a$  取值范围是\_\_\_\_\_.
- 五位同学围成一圈依序循环报数, 规定:  
 ① 第一位同学首次报出的数为  $1$ , 第二位同学首次报出的数也为  $1$ , 之后每位同学所报出的数都是前两位同学所报出的数之和;  
 ② 若报出的数为  $3$  的倍数, 则报该数的同学需拍手一次.  
 已知甲同学第一个报数, 当五位同学依序循环报到第  $100$  个数时, 甲同学拍手的总次数为\_\_\_\_\_.

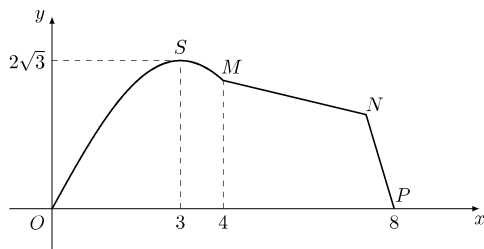
## 三、解答题

- 从集合  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  的所有非空子集中, 等可能地取出一个.  
 (1) 记性质  $r$ : 集合中的所有元素之和为  $10$ , 求所取出的非空子集满足性质  $r$  的概率;  
 (2) 记所取出的非空子集的元素个数为  $\xi$ , 求  $\xi$  的分布列和数学期望  $E\xi$ .

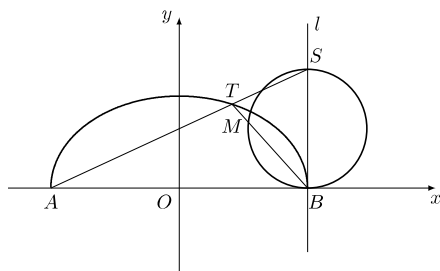
- 如图, 四边形  $ABCD$  是边长为  $1$  的正方形,  $MD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $NB \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $MD = NB = 1$ ,  $E$  为  $BC$  的中点.  
 (1) 求异面直线  $NE$  与  $AM$  所成角的余弦值;  
 (2) 在线段  $AN$  上是否存在点  $S$ , 使得  $ES \perp$  平面  $AMN$ ? 若存在, 求线段  $AS$  的长; 若不存在, 请说明理由.



18. 如图, 某市拟在长为 8 km 的道路  $OP$  的一侧修建一条运动赛道. 赛道的前一部分为曲线段  $OSM$ , 该曲线段为函数  $y = A \sin \omega x$  ( $A > 0, \omega > 0$ ),  $x \in [0, 4]$  的图象, 且图象的最高点为  $S(3, 2\sqrt{3})$ ; 赛道的后一部分为折线段  $MNP$ . 为保证参赛运动员的安全, 限定  $\angle MNP = 120^\circ$ .
- (1) 求  $A, \omega$  的值和  $M, P$  两点间的距离;  
 (2) 应如何设计, 才能使折线段赛道  $MNP$  最长?



19. 已知  $A, B$  分别为曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$  ( $y \geq 0, a > 0$ ) 与  $x$  轴的左、右两个交点, 直线  $l$  过点  $B$ , 且与  $x$  轴垂直,  $S$  为  $l$  上异于点  $B$  的一点, 连结  $AS$  交曲线  $C$  于点  $T$ .
- (1) 若曲线  $C$  为半圆, 点  $T$  为圆弧  $\widehat{AB}$  的三等分点, 试求出点  $S$  的坐标;  
 (2) 如图, 点  $M$  是以  $SB$  为直径的圆与线段  $TB$  的交点. 试问: 是否存在  $a$ , 使得  $O, M, S$  三点共线? 若存在, 求出  $a$  的值, 若不存在, 请说明理由.



20. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ , 且  $f'(-1) = 0$ .
- (1) 试用含  $a$  的代数式表示  $b$ , 并求  $f(x)$  的单调区间;  
 (2) 令  $a = -1$ , 设函数  $f(x)$  在  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) 处取得极值, 记点  $M(x_1, f(x_1)), N(x_2, f(x_2)), P(m, f(m)), x_1 < m < x_2$ . 请仔细观察曲线  $f(x)$  在点  $P$  处的切线与线段  $MP$  的位置变化趋势, 并解释以下问题:
- ① 若对任意的  $m \in (t, x_2]$ , 线段  $MP$  与曲线  $f(x)$  均有异于  $M, P$  的公共点, 试确定  $t$  的最小值, 并证明你的结论;  
 ② 若存在点  $Q(n, f(n)), x_1 \leq n < m$ , 使得线段  $PQ$  与曲线  $f(x)$  有异于  $P, Q$  的公共点, 请直接写出  $m$  的取值范围. (不必给出求解过程)

21. 三选二.

【A】已知矩阵  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  所对应的线性变换把点  $A(x, y)$  变成点  $A'(13, 5)$ , 试求  $M$  的逆矩阵及点  $A$  的坐标.

【B】已知直线  $l: 3x + 4y - 12 = 0$  与圆  $C: \begin{cases} x = -1 + 2 \cos \theta, \\ y = 2 + 2 \sin \theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 试判断他们的公共点个数.

【C】解不等式  $|2x - 1| < |x| + 1$ .

# 2009 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

## 一、选择题

1. 若集合  $A = \{x \mid x > 0\}$ ,  $B = \{x \mid x < 3\}$ , 则  $A \cap B$  等于

- (A)  $\{x \mid x < 0\}$  (B)  $\{x \mid 0 < x < 3\}$   
(C)  $\{x \mid x > 3\}$  (D)  $\mathbf{R}$

2. 下列函数中, 与函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  有相同定义域的是

- (A)  $f(x) = \ln x$  (B)  $f(x) = \frac{1}{x}$  (C)  $f(x) = |x|$  (D)  $f(x) = e^x$

3. 一个容量 100 的样本, 其数据的分组与各组的频数如下表

组别	(0, 10]	(10, 20]	(20, 30]	(30, 40]	(40, 50]	(50, 60]	(60, 70]
频数	12	13	24	15	16	13	7

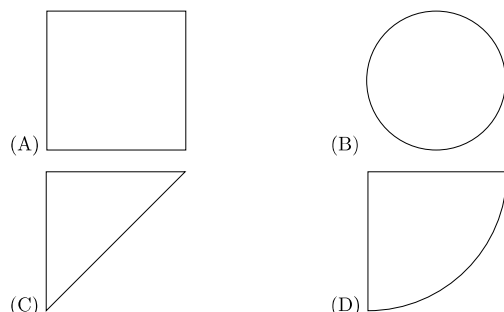
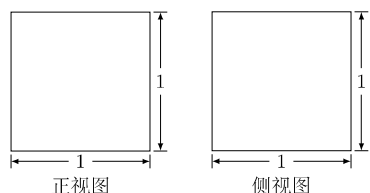
则样本数据落在 (10, 40) 上的频率为 ( )

- (A) 0.13 (B) 0.39 (C) 0.52 (D) 0.64

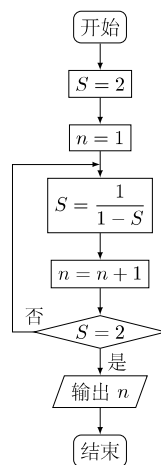
4. 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$  ( $a > 0$ ) 的离心率为 2, 则  $a$  等于 ( )

- (A) 2 (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{3}{2}$  (D) 1

5. 如图, 某几何体的正视图与侧视图都是边长为 1 的正方形, 且体积为  $\frac{1}{2}$ . 则该集合体的俯视图可以是 ( )



6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果是 ( )

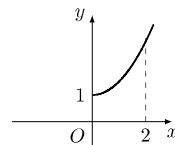


- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 已知锐角  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{3}$ ,  $BC = 4$ ,  $CA = 3$ , 则角  $C$  的大小为 ( )

- (A)  $75^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $30^\circ$

8. 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  的部分图象如图所示, 则在  $(-2, 0)$  上, 下列函数中与  $f(x)$  的单调性不同的是 ( )



- (A)  $y = x^2 + 1$  (B)  $y = |x| + 1$   
(C)  $y = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0, \\ x^3 + 1, & x < 0. \end{cases}$  (D)  $y = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$

9. 在平面直角坐标系中, 若不等式组  $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ x - 1 \leq 0, \\ ax - y + 1 \geq 0, \end{cases}$  ( $a$  为常数) 所表示的平面区域内的面积等于 2, 则  $a$  的值为 ( )

- (A) -5 (B) 1 (C) 2 (D) 3

10. 设  $m, n$  是平面  $\alpha$  内的两条不同直线,  $l_1, l_2$  是平面  $\beta$  内的两条相交直线, 则  $\alpha \parallel \beta$  的一个充分而不必要条件是 ( )

- (A)  $m \parallel \beta$  且  $l_1 \parallel \alpha$  (B)  $m \parallel l_1$  且  $n \parallel l_2$   
(C)  $m \parallel \beta$  且  $n \parallel \beta$  (D)  $m \parallel \beta$  且  $n \parallel l_2$

11. 函数  $f(x)$  的零点与  $g(x) = 4^x + 2x - 2$  的零点之差的绝对值不超过 0.25, 则  $f(x)$  可以是 ( )

- (A)  $f(x) = 4x - 1$  (B)  $f(x) = (x - 1)^2$   
(C)  $f(x) = e^x - 1$  (D)  $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$

12. 设  $a, b, c$  为同一平面内具有相同起点的任意三个非零向量, 且满足  $a$  与  $b$  不共线,  $a \perp c$ ,  $|a| = |c|$ , 则  $|b \cdot c|$  的值一定等于 ( )

- (A) 以  $a, b$  为邻边的平行四边形的面积  
(B) 以  $b, c$  为邻边的平行四边形的面积  
(C) 以  $a, b$  为两边的三角形面积  
(D) 以  $b, c$  为两边的三角形面积

## 二、填空题

13. 复数  $i^2(1 + i)$  的实部是\_\_\_\_\_.

14. 点  $A$  为周长等于 3 的圆周上的一个定点. 若在该圆周上随机取一点  $B$ , 则劣弧  $\widehat{AB}$  的长度小于 1 的概率为\_\_\_\_\_.

15. 若曲线  $f(x) = ax^2 + \ln x$  存在垂直于  $y$  轴的切线, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 五位同学围成一圈依序循环报数, 规定:

- ① 第一位同学首次报出的数为 1, 第二位同学首次报出的数也为 1, 之后每位同学所报出的数都是前两位同学所报出的数之和;  
② 若报出的数为 3 的倍数, 则报该数的同学需拍手一次.  
当第 30 个数被报出时, 五位同学拍手的总次数为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 等比数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = 2$ ,  $a_4 = 16$ .

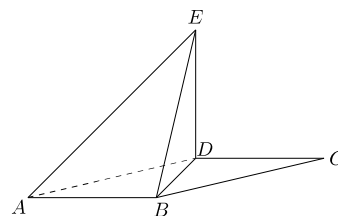
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 若  $a_3, a_5$  分别为等差数列  $\{b_n\}$  的第 3 项和第 5 项, 试求数列  $\{b_n\}$  的通项公式及前  $n$  项和  $S_n$ .

18. 袋中有大小、形状相同的红、黑球各一个, 现一次有放回地随机摸取 3 次, 每次摸取一个球.
- (1) 试问: 一共有多少种不同的结果? 请列出所有可能的结果;
  - (2) 若摸到红球时得 2 分, 摸到黑球时得 1 分, 求 3 次摸球所得总分为 5 的概率.

19. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ , 其中  $\omega > 0$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ .

- (1) 若  $\cos \frac{\pi}{4} \cos \varphi - \sin \frac{3\pi}{4} \sin \varphi = 0$ , 求  $\varphi$  的值;
- (2) 在 (1) 的条件下, 若函数  $f(x)$  的图象的相邻两条对称轴之间的距离等于  $\frac{\pi}{3}$ , 求函数  $f(x)$  的解析式; 并求最小正实数  $m$ , 使得函数  $f(x)$  的图象左平移  $m$  个单位所对应的函数是偶函数.

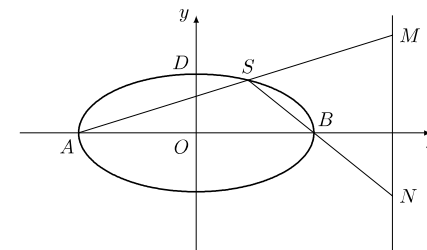
20. 如图, 平行四边形  $ABCD$  中,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 4$ . 将  $\triangle CBD$  沿  $BD$  折起到  $\triangle EBD$  的位置, 使平面  $EDB \perp$  平面  $ABD$ .
- (1) 求证:  $AB \perp DE$ ;
  - (2) 求三棱锥  $E-ABD$  的侧面积.



21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ , 且  $f'(-1) = 0$ .

- (1) 试用含  $a$  的代数式表示  $b$ ;
- (2) 求  $f(x)$  的单调区间;
- (3) 令  $a = -1$ , 设函数  $f(x)$  在  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) 处取得极值, 记点  $M(x_1, f(x_1))$ ,  $N(x_2, f(x_2))$ . 证明: 线段  $MN$  与曲线  $f(x)$  存在异于  $M, N$  的公共点.

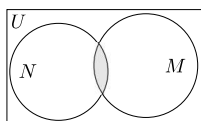
22. 已知直线  $x - 2y + 2 = 0$  经过椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左顶点  $A$  和上顶点  $D$ , 椭圆  $C$  的右顶点为  $B$ , 点  $S$  和椭圆  $C$  上位于  $x$  轴上方的动点, 直线  $AS, BS$  与直线  $l: x = \frac{10}{3}$  分别交于  $M, N$  两点.
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
  - (2) 求线段  $MN$  的长度的最小值;
  - (3) 当线段  $MN$  的长度最小时, 在椭圆  $C$  上是否存在这样的点  $T$ , 使得  $\triangle TSB$  的面积为  $\frac{1}{5}$ ? 若存在, 确定点  $T$  的个数, 若不存在, 说明理由.



# 2009 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

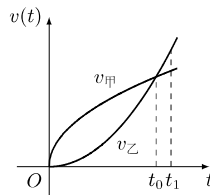
## 一、选择题

1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $M = \{x | -2 \leq x - 1 \leq 2\}$  和  $N = \{x | x = 2k - 1, k = 1, 2, \dots\}$  的关系的韦恩 (Venn) 图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有 ( )



- (A) 3 个 (B) 2 个 (C) 1 个 (D) 无穷个
2. 设  $z$  是复数,  $\alpha(z)$  表示满足  $z^n = 1$  的最小正整数  $n$ , 则对虚数单位  $i$ ,  $\alpha(i) =$  ( )  
(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2
3. 若函数  $y = f(x)$  是函数  $y = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的反函数, 其图象经过点  $(\sqrt{a}, a)$ , 则  $f(x) =$  ( )  
(A)  $\log_2 x$  (B)  $\log_{\frac{1}{2}} x$  (C)  $\frac{1}{2^x}$  (D)  $x^2$
4. 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且  $a_5 \cdot a_{2n-5} = 2^{2n}$  ( $n \geq 3$ ), 则当  $n \geq 1$  时,  $\log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{2n-1} =$  ( )  
(A)  $n(2n-1)$  (B)  $(n+1)^2$  (C)  $n^2$  (D)  $(n-1)^2$
5. 给定下列四个命题:  
① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;  
② 若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;  
③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行;  
④ 若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.  
其中, 为真命题的是 ( )  
(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ②和④
6. 一质点受到平面上的三个力  $F_1, F_2, F_3$  (单位: 牛顿) 的作用而处于平衡状态. 已知  $F_1, F_2$  成  $60^\circ$  角, 且  $F_1, F_2$  的大小分别为 2 和 4, 则  $F_3$  的大小为 ( )  
(A) 6 (B) 2 (C)  $2\sqrt{5}$  (D)  $2\sqrt{7}$
7. 2010 年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作, 若其中小张和小赵只能从事前两项工作, 其余三人均能从事这四项工作, 则不同的选派方案共有 ( )  
(A) 36 种 (B) 12 种 (C) 18 种 (D) 48 种

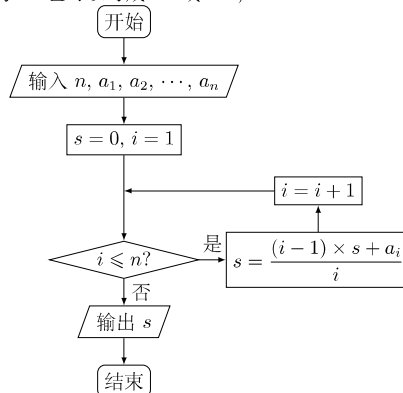
8. 已知甲、乙两车由同一起点同时出发, 并沿同一路线 (假定为直线) 行驶. 甲车、乙车的速度曲线分别为  $v_{\text{甲}}$  和  $v_{\text{乙}}$  (如图所示). 那么对于图中给定的  $t_0$  和  $t_1$ , 下列判断中一定正确的是 ( )



- (A) 在  $t_1$  时刻, 甲车在乙车前面 (B)  $t_1$  时刻后, 甲车在乙车后面  
(C) 在  $t_0$  时刻, 两车的位置相同 (D)  $t_0$  时刻后, 乙车在甲车前面

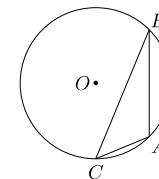
## 二、填空题

9. 随机抽取某产品  $n$  件, 测得其长度分别为  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 则如图所示的程序框图输出的  $s =$ \_\_\_\_\_,  $s$  表示的样本的数字特征是\_\_\_\_\_. (注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”或“:=”)



10. 若平面向量  $a, b$  满足  $|a + b| = 1, a + b$  平行于  $x$  轴,  $b = (2, -1)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
11. 已知椭圆  $G$  的中心在坐标原点, 长轴在  $x$  轴上, 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 且  $G$  上一点到  $G$  的两个焦点的距离之和为 12, 则椭圆  $G$  的方程为\_\_\_\_\_.
12. 已知离散型随机变量  $X$  的分布列如下表. 若  $EX = 0, DX = 1$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.
- |     |     |     |     |                |
|-----|-----|-----|-----|----------------|
| $X$ | -1  | 0   | 1   | 2              |
| $P$ | $a$ | $b$ | $c$ | $\frac{1}{12}$ |
13. 若直线  $l_1: \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + kt, \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与直线  $l_2: \begin{cases} x = s, \\ y = 1 - 2s, \end{cases}$  ( $s$  为参数) 垂直, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
14. 不等式  $\frac{|x+1|}{|x+2|} \geq 1$  的实数解为\_\_\_\_\_.

15. 如图, 点  $A, B, C$  是圆  $O$  上的点, 且  $AB = 4, \angle ACB = 45^\circ$ , 则圆  $O$  的面积等于\_\_\_\_\_.



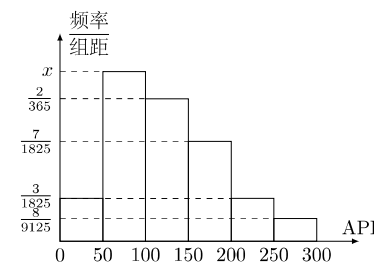
## 三、解答题

16. 已知向量  $a = (\sin \theta, -2)$  与  $b = (1, \cos \theta)$  互相垂直, 其中  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ .  
(1) 求  $\sin \theta \cos \theta$  的值;  
(2) 若  $\sin(\theta - \varphi) = \frac{\sqrt{10}}{10}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\cos \varphi$  的值.

17. 根据空气质量指数 API (为整数) 的不同, 可将空气质量分级如下表: 对某城市一年 (365 天) 的空气质量进行监测, 获得 API 数据按照区间  $[0, 50]$ ,  $(50, 100]$ ,  $(100, 150]$ ,  $(150, 200]$ ,  $(200, 250]$ ,  $(250, 300]$  进行分组, 得到频率分布直方图如图.

API	0 ~ 50	51 ~ 100	101 ~ 150	151 ~ 200	201 ~ 250	251 ~ 300	> 300
级别	I	II	III <sub>1</sub>	III <sub>2</sub>	IV <sub>1</sub>	IV <sub>2</sub>	V
状况	优	良	轻度污染	轻度污染	中度污染	中度污染	重度污染

- (1) 求直方图中  $x$  的值;  
(2) 计算一年中空气质量分别为良和轻度污染的天数;  
(3) 求该城市某一周至少有 2 天的空气质量为良或轻度污染的概率.  
(结果用分数表示. 已知  $5^7 = 78125, 2^7 = 128, \frac{3}{1825} + \frac{2}{365} + \frac{7}{1825} + \frac{3}{1825} + \frac{8}{9125} = \frac{123}{9125}, 365 = 73 \times 5$ )

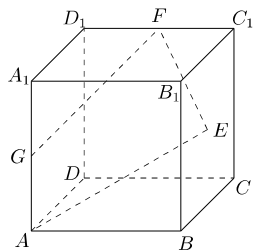


18. 如图, 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2, 点  $E$  是正方形  $BCC_1B_1$  的中心, 点  $F, G$  分别是棱  $C_1D_1, AA_1$  的中点. 设点  $E_1, G_1$  分别是点  $E, G$  在平面  $DCC_1D_1$  内的正投影.

(1) 求以  $E$  为顶点, 以四边形  $FGAE$  在平面  $DCC_1D_1$  内的正投影为底面边界的棱锥的体积;

(2) 证明: 直线  $FG_1 \perp FEE_1$ ;

(3) 求异面直线  $E_1G_1$  与  $EA$  所成角的正弦值.



19. 已知曲线  $C: y = x^2$  与直线  $l: x - y + 2 = 0$  交于两点  $A(x_A, y_A)$  和  $B(x_B, y_B)$ , 且  $x_A < x_B$ . 记曲线  $C$  在点  $A$  和点  $B$  之间那一段  $L$  与线段  $AB$  所围成的平面区域 (含边界) 为  $D$ . 设点  $P(s, t)$  是  $L$  上的任一点, 且点  $P$  与点  $A$  和点  $B$  均不重合.

(1) 若点  $Q$  是线段  $AB$  的中点, 试求线段  $PQ$  的中点  $M$  的轨迹方程;

(2) 若曲线  $G: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + a^2 + \frac{51}{25} = 0$  与  $D$  有公共点, 试求  $a$  的最小值.

20. 已知二次函数  $y = g(x)$  的导函数的图象与直线  $y = 2x$  平行, 且  $y = g(x)$  在  $x = -1$  处取得极小值  $m - 1$  ( $m \neq 0$ ). 设  $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ .

(1) 若曲线  $y = f(x)$  上的点  $P$  到点  $Q(0, 2)$  的距离的最小值为  $\sqrt{2}$ , 求  $m$  的值;

(2)  $k$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) 如何取值时, 函数  $y = f(x) - kx$  存在零点, 并求出零点.

21. 已知曲线  $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 从点  $P(-1, 0)$  向曲线  $C_n$  引斜率为  $k_n$  ( $k_n > 0$ ) 的切线  $l_n$ , 切点为  $P_n(x_n, y_n)$ .

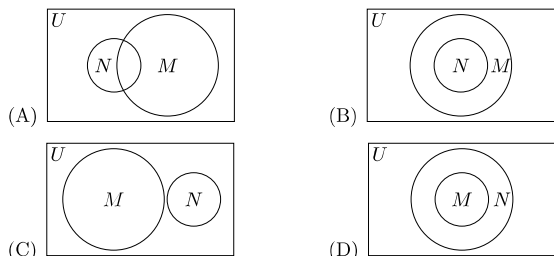
(1) 求数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  的通项公式;

(2) 证明:  $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot \dots \cdot x_{2n-1} < \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} < \sqrt{2} \sin \frac{x_n}{y_n}$ .

# 2009 普通高等学校招生考试 (广东卷文)

## 一、选择题

1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 则正确表示集合  $M = \{-1, 0, 1\}$  和  $N = \{x \mid x^2 + x = 0\}$  关系的韦恩 (Venn) 图是 ( )



2. 下列  $n$  的取值中, 使  $i^n = 1$  ( $i$  是虚数单位) 的是 ( )

(A)  $n = 2$  (B)  $n = 3$  (C)  $n = 4$  (D)  $n = 5$

3. 已知平面向量  $\mathbf{a} = (x, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-x, x^2)$ , 则向量  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  ( )

(A) 平行于  $x$  轴 (B) 平行于第一、三象限的角平分线  
(C) 平行于  $y$  轴 (D) 平行于第二、四象限的角平分线

4. 若函数  $y = f(x)$  是函数  $y = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的反函数, 且  $f(2) = 1$ , 则  $f(x) =$  ( )

(A)  $\log_2 x$  (B)  $\frac{1}{2^x}$  (C)  $\log_{\frac{1}{2}} x$  (D)  $2^{x-2}$

5. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为正数, 且  $a_3 \cdot a_9 = 2a_5^2$ ,  $a_2 = 1$ , 则  $a_1 =$  ( )

(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D) 2

6. 给定下列四个命题:

- ① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;  
② 若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;  
③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行;  
④ 若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中, 为真命题的是 ( )

(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ②和④

7. 已知  $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $a = c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ , 且  $\angle A = 75^\circ$ , 则  $b =$  ( )

(A) 2 (B)  $4 + 2\sqrt{3}$  (C)  $4 - 2\sqrt{3}$  (D)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

8. 函数  $f(x) = (x - 3)e^x$  的单调递增区间是 ( )

(A)  $(-\infty, 2)$  (B)  $(0, 3)$  (C)  $(1, 4)$  (D)  $(2, +\infty)$

9. 函数  $y = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$  是 ( )

(A) 最小正周期为  $\pi$  的奇函数 (B) 最小正周期为  $\pi$  的偶函数

(C) 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的奇函数 (D) 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的偶函数

10. 广州 2010 年亚运会火炬传递在  $A, B, C, D, E$  五个城市之间进行, 各城市之间的距离 (单位: 百公里) 见下表. 若以  $A$  为起点,  $E$  为终点, 每个城市经过且只经过一次, 那么火炬传递的最短路线距离是 ( )

	A	B	C	D	E
A	0	5	4	5	6
B	5	0	7	6	2
C	4	7	0	9	8.6
D	5	6	9	0	5
E	6	2	8.6	5	0

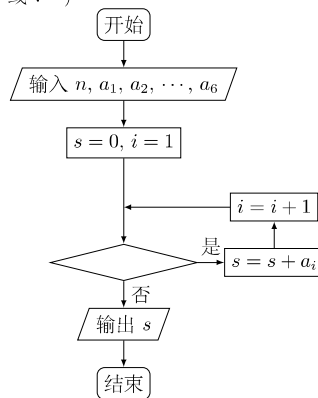
(A) 20.6 (B) 21 (C) 22 (D) 23

## 二、填空题

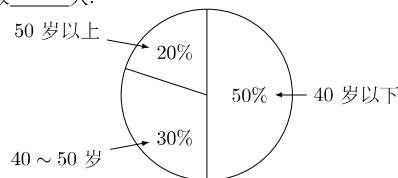
11. 某篮球队 6 名主力队员在最近三场比赛中投进的三分球个数如下表所示:

队员 $i$	1	2	3	4	5	6
三分球个数	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$

如图是统计该 6 名队员在最近三场比赛中投进的三分球总数的程序框图, 则图中判断框应填\_\_\_\_\_, 输出的  $s =$ \_\_\_\_\_. (注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“ $\leftarrow$ ”或“ $:=$ ”)



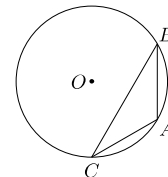
12. 某单位 200 名职工的年龄分布情况如图, 现要从中抽取 40 名职工工作样本. 用系统抽样法, 将全体职工随机按 1 ~ 200 编号, 并按编号顺序平均分为 40 组 (1 ~ 5 号, 6 ~ 10 号, ..., 196 ~ 200 号). 若第 5 组抽出的号码为 22, 则第 8 组抽出的号码应是\_\_\_\_\_. 若用分层抽样方法, 则 40 岁以下年龄段应抽取\_\_\_\_\_人.



13. 以点  $(2, -1)$  为圆心且与直线  $x + y = 6$  相切的圆的方程是\_\_\_\_\_.

14. 若直线  $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与直线  $4x + ky = 1$  垂直, 则常数  $k =$ \_\_\_\_\_.

15. 如图, 点  $A, B, C$  是圆  $O$  上的点, 且  $AB = 4$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ , 则圆  $O$  的面积等于\_\_\_\_\_.



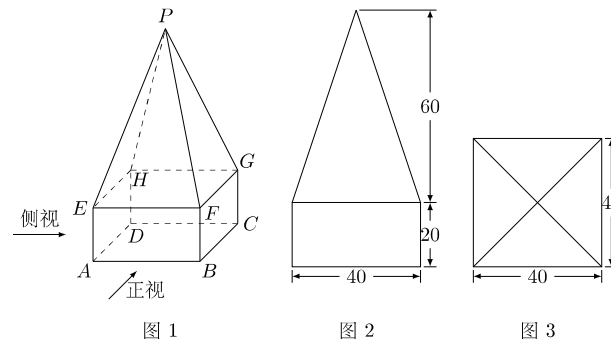
## 三、解答题

16. 已知向量  $\mathbf{a} = (\sin \theta, -2)$  与  $\mathbf{b} = (1, \cos \theta)$  互相垂直, 其中  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

- (1) 求  $\sin \theta \cos \theta$  的值;  
(2) 若  $5 \cos(\theta - \varphi) = 3\sqrt{5} \cos \varphi$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\cos \varphi$  的值.

17. 某高速公路收费站入口处的安全标识墩如图 1 所示. 墩的上半部分是正四棱锥  $P-EFGH$ , 下半部分是长方体  $ABCD-EFGH$ . 图 2、图 3 分别是该标识墩的正 (主) 视图和俯视图 (单位: cm).

- (1) 请画出该安全标识墩的侧 (左) 视图;  
(2) 求该安全标识墩的体积;  
(3) 证明: 直线  $BD \perp$  平面  $PEG$ .



18. 随机抽取某中学甲、乙两班各 10 名同学, 测量他们的身高 (单位: cm), 获得身高数据的茎叶图如图.
- (1) 根据茎叶图判断哪个班的平均身高较高;
  - (2) 计算甲班的样本方差;
  - (3) 现从乙班这 10 名同学中随机抽取两名身高不低于 173 cm 的同学, 求身高为 176 cm 的同学被抽中的概率.

甲班					乙班			
			2	18	1			
9	9	1	0	17	0	3	6	8
8	8	3	2	16	2	5	8	
			8	15	9			

20. 已知点  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$  是函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图象上一点. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $f(n) - c$ . 数列  $\{b_n\}$  ( $b_n > 0$ ) 的首项为  $c$ , 且前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$  ( $n \geq 2$ ).
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;
  - (2) 若数列  $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 问满足  $T_n > \frac{1000}{2009}$  的最小正整数  $n$  是多少?

21. 已知二次函数  $y = g(x)$  的导函数的图象与直线  $y = 2x$  平行, 且  $y = g(x)$  在  $x = -1$  处取得极小值  $m - 1$  ( $m \neq 0$ ). 设  $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ .
- (1) 若曲线  $y = f(x)$  上的点  $P$  到点  $Q(0, 2)$  的距离的最小值为  $\sqrt{2}$ , 求  $m$  的值;
  - (2)  $k$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) 如何取值时, 函数  $y = f(x) - kx$  存在零点, 并求出零点.

19. 已知椭圆  $G$  的中心在坐标原点, 长轴在  $x$  轴上, 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 两个焦点分别为  $F_1$  和  $F_2$ , 椭圆  $G$  上一点到  $F_1$  和  $F_2$  的距离之和为 12. 圆  $C_k$ :  $x^2 + y^2 + 2kx - 4y - 21 = 0$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) 的圆心为点  $A_k$ .
- (1) 求椭圆  $G$  的方程;
  - (2) 求  $\triangle A_k F_1 F_2$  面积;
  - (3) 问是否存在圆  $C_k$  包围椭圆  $G$ ? 请说明理由.



# 2009 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

## 一、选择题

- 已知  $P = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (1, 0) + m(0, 1), m \in \mathbf{R}\}$ ,  $Q = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (1, 1) + n(-1, 1), n \in \mathbf{R}\}$  是两个向量集合, 则  $P \cap Q =$  ( )  
(A)  $\{(1, 1)\}$  (B)  $\{(-1, 1)\}$  (C)  $\{(1, 0)\}$  (D)  $\{(0, 1)\}$
- 函数  $y = \frac{1-ax}{1+ax} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{1}{a} \right)$  的反函数是 ( )  
(A)  $y = \frac{1-ax}{1+ax} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{1}{a} \right)$  (B)  $y = \frac{1+ax}{1-ax} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{1}{a} \right)$   
(C)  $y = \frac{1+x}{a(1-x)} (x \in \mathbf{R}, x \neq 1)$  (D)  $y = \frac{1-x}{a(1+x)} (x \in \mathbf{R}, x \neq -1)$
- 投掷两颗骰子, 得到其向上的点数分别为  $m$  和  $n$ , 则复数  $(m+ni)(n-mi)$  为实数的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{12}$
- 函数  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$  的图象  $F$  按向量  $\mathbf{a}$  平移到  $F'$ ,  $F'$  的解析式  $y = f(x)$ , 当  $y = f(x)$  为奇函数时, 向量  $\mathbf{a}$  可以等于 ( )  
(A)  $\left(-\frac{\pi}{6}, -2\right)$  (B)  $\left(-\frac{\pi}{6}, 2\right)$  (C)  $\left(\frac{\pi}{6}, -2\right)$  (D)  $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$
- 将甲、乙、丙、丁四名同学分到三个不同的班, 每个班至少分到一名同学, 且甲、乙两名同学不能分到一个班, 则不同分法的种数为 ( )  
(A) 18 (B) 24 (C) 30 (D) 36
- 设  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right)^{2n} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n})^2 - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1})^2 \right] =$  ( )  
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$  的准线过椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的焦点, 则直线  $y = kx + 2$  与椭圆至多有一个交点的充要条件是 ( )  
(A)  $k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (B)  $k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$   
(C)  $k \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  (D)  $k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
- 在“家电下乡”活动中, 某厂要将 100 台洗衣机运往邻近的乡镇, 现有 4 辆甲型货车和 8 辆乙型货车可供使用, 每辆甲型货车运输费用 400 元, 可装洗衣机 20 台; 每辆乙型货车运输费用 300 元, 可装洗衣机 10 台, 若每辆至多只运一次, 则该厂所花的最少运输费用为 ( )  
(A) 2000 元 (B) 2200 元 (C) 2400 元 (D) 2800 元

- 设球的半径为时间  $t$  的函数  $R(t)$ . 若球的体积以均匀速度  $c$  增长, 则球的表面积的增长速度与球半径 ( )  
(A) 成正比, 比例系数为  $c$  (B) 成正比, 比例系数为  $2c$   
(C) 成反比, 比例系数为  $c$  (D) 成反比, 比例系数为  $2c$

- 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形状来研究数, 例如:

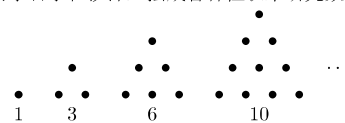


图 1

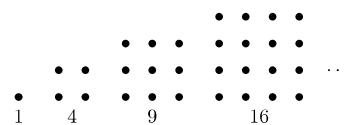


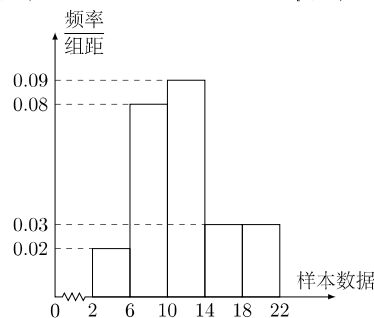
图 2

他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10,  $\dots$ , 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地, 称图 2 中的 1, 4, 9, 16,  $\dots$  这样的数成为正方形数. 下列数中及时三角形数又是正方形数的是 ( )

- (A) 289 (B) 1024 (C) 1225 (D) 1378

## 二、填空题

- 已知关于  $x$  的不等式  $\frac{ax-1}{x+1} < 0$  的解集是  $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 样本容量为 200 的频率分布直方图. 根据样本的频率分布直方图估计, 样本数落在  $[6, 10)$  内的频数为\_\_\_\_\_, 数据落在  $[2, 10)$  内的概率约为\_\_\_\_\_.



- 卫星和地面之间的电视信号沿直线传播, 电视信号能够传送到达的地面区域, 称为这个卫星的覆盖区域. 为了转播 2008 年北京奥运会, 我国发射了“中星九号”广播电视直播卫星, 它离地球表面的距离约为 36000 km. 已知地球半径约为 6400 km, 则“中星九号”覆盖区域内的任意两点的球面距离的最大值约为\_\_\_\_\_km. (结果中保留反余弦的符号)
- 已知函数  $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin x$ , 则  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$  的值为\_\_\_\_\_.

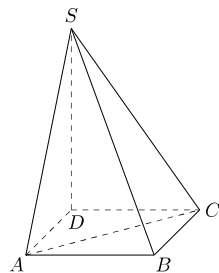
- 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = m$  ( $m$  为正整数),  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时,} \\ 3a_n + 1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$  若  $a_6 = 1$ , 则  $m$  所有可能的取值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 一个盒子里装有 4 张大小形状完全相同的卡片, 分别标有数 2, 3, 4, 5; 另一个盒子也装有 4 张大小形状完全相同的卡片, 分别标有数 3, 4, 5, 6. 现从一个盒子中任取一张卡片, 其上面的数记为  $x$ ; 再从另一盒子里任取一张卡片, 其上面的数记为  $y$ , 记随机变量  $\eta = x + y$ , 求  $\eta$  的分布列和数学期望.

- 已知向量  $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $\mathbf{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$ ,  $\mathbf{c} = (-1, 0)$ .  
(1) 求向量  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  的长度的最大值;  
(2) 设  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , 且  $\mathbf{a} \perp (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ , 求  $\cos \beta$  的值.

18. 如图, 四棱锥  $S-ABCD$  的底面是正方形,  $SD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $SD = 2a$ ,  $AD = \sqrt{2}a$ , 点  $E$  是  $SD$  上的点, 且  $DE = \lambda a$  ( $0 < \lambda \leq 2$ ).
- (1) 求证: 对任意的  $\lambda \in (0, 2]$ , 都有  $AC \perp BE$ ;
- (2) 设二面角  $C-AE-D$  的大小为  $\theta$ , 直线  $BE$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\varphi$ . 若  $\tan \theta \cdot \tan \varphi = 1$ , 求  $\lambda$  的值.



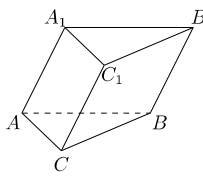
20. 过抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的对称轴上一点  $A(a, 0)$  ( $a > 0$ ) 的直线与抛物线相交于  $M$ 、 $N$  两点, 自  $M$ 、 $N$  向直线  $l: x = -a$  作垂线, 垂足分别为  $M_1$ 、 $N_1$ .
- (1) 当  $a = \frac{p}{2}$  时, 求证:  $AM_1 \perp AN_1$ ;
- (2) 记  $\triangle AMM_1$ 、 $\triangle AM_1N_1$ 、 $\triangle ANN_1$  的面积分别为  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ , 是否存在  $\lambda$ , 使得对任意的  $a > 0$ , 都有  $S_2^2 = \lambda S_1 S_3$  成立. 若存在, 求出  $\lambda$  的值; 若不存在, 说明理由.

21. 在  $\mathbf{R}$  上定义运算  $\otimes$ :  $p \otimes q = -\frac{1}{3}(p-c)(q-b) + 4bc$  ( $p$ 、 $q$  为实常数). 记  $f_1(x) = x^2 - 2c$ ,  $f_2(x) = x - 2b$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 令  $f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x)$ .
- (1) 如果函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处有极值  $-\frac{4}{3}$ , 试确定  $b$ 、 $c$  的值;
- (2) 求曲线  $y = f(x)$  上斜率为  $c$  的切线与该曲线的公共点;
- (3) 记  $g(x) = |f'(x)|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 的最大值为  $M$ . 若  $M \geq k$  对任意的  $b$ 、 $c$  恒成立, 试求  $k$  的最大值.

19. 已知  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$  ( $n$  为正整数).
- (1) 令  $b_n = 2^n a_n$ , 求证数列  $\{b_n\}$  是等差数列, 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 令  $c_n = \frac{n+1}{n} a_n$ ,  $T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ , 试比较  $T_n$  与  $\frac{5n}{2n+1}$  的大小, 并予以证明.

# 2009 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

## 一、选择题

- 若向量  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (4, 2)$ , 则  $\mathbf{c} =$  ( )  
(A)  $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$  (B)  $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$  (C)  $-\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  (D)  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$
- 函数  $y = \frac{1-2x}{1+2x} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{1}{2} \right)$  的反函数是 ( )  
(A)  $y = \frac{1+2x}{1-2x} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{1}{2} \right)$  (B)  $y = \frac{1-2x}{1+2x} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{1}{2} \right)$   
(C)  $y = \frac{1+x}{2(1-x)} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq 1 \right)$  (D)  $y = \frac{1-x}{2(1+x)} \left( x \in \mathbf{R}, x \neq -1 \right)$
- “ $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 从 5 名志愿者中选派 4 人在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天. 要求星期五有一人参加, 星期六有两人参加, 星期日有一人参加, 则不同的选派方法共有 ( )  
(A) 120 种 (B) 96 种 (C) 60 种 (D) 48 种
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$  的准线经过椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的焦点, 则  $b =$  ( )  
(A) 3 (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D)  $\sqrt{2}$
- 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle ACC_1 = 60^\circ$ ,  $\angle BCC_1 = 45^\circ$ , 侧棱  $CC_1$  的长为 1, 则该三棱柱的高等于 ( )  
  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 函数  $y = \cos \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) - 2$  的图象  $F$  按向量  $\mathbf{a}$  平移到  $F'$ ,  $F'$  的解析式  $y = f(x)$ , 当  $y = f(x)$  为奇函数时, 向量  $\mathbf{a}$  可以等于 ( )  
(A)  $\left( \frac{\pi}{6}, -2 \right)$  (B)  $\left( \frac{\pi}{6}, 2 \right)$  (C)  $\left( -\frac{\pi}{6}, -2 \right)$  (D)  $\left( -\frac{\pi}{6}, 2 \right)$
- 在“家电下乡”活动中, 某厂要将 100 台洗衣机运往邻近的乡镇, 现有 4 辆甲型货车和 8 辆乙型货车可供使用, 每辆甲型货车运输费用 400 元, 可装洗衣机 20 台; 每辆乙型货车运输费用 300 元, 可装洗衣机 10 台, 若每辆至多只运一次, 则该厂所花的最少运输费用为 ( )  
(A) 2000 元 (B) 2200 元 (C) 2400 元 (D) 2800 元

- 设  $x \in \mathbf{R}$ , 记不超过  $x$  的最大整数为  $[x]$ , 令  $\{x\} = x - [x]$ , 则  $\left\{ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}$ ,  $\left[ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]$ ,  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  ( )  
(A) 是等差数列但不是等比数列 (B) 是等比数列但不是等差数列  
(C) 既是等差数列又是等比数列 (D) 既不是等差数列也不是等比数列

- 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形状来研究数, 例如:

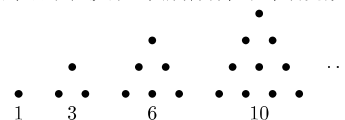


图 1

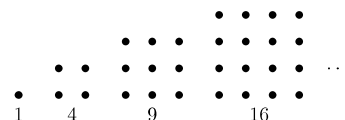


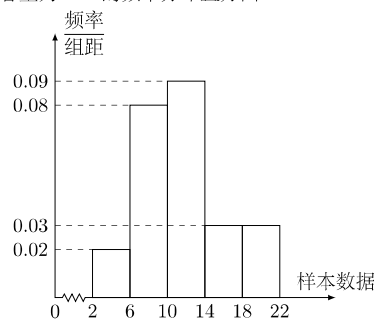
图 2

他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10,  $\dots$ , 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地, 称图 2 中的 1, 4, 9, 16,  $\dots$  这样的数成为正方形数. 下列数中及时三角形数又是正方形数的是 ( )

- (A) 289 (B) 1024 (C) 1225 (D) 1378

## 二、填空题

- 已知  $(1+ax)^5 = 1+10x+bx^2+\dots+a^5x^5$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_.
- 甲、乙、丙三人将参加某项测试, 他们能达标的概率分别是 0.8、0.6、0.5, 则三人都达标的概率是\_\_\_\_\_, 三人中至少有一人达标的概率是\_\_\_\_\_.
- 设集合  $A = \{x \mid \log_2 x < 1\}$ ,  $B = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+2} < 1 \right\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
- 过原点  $O$  作圆  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$  的两条切线, 设切点分别为  $P$ 、 $Q$ , 则线段  $PQ$  的长为\_\_\_\_\_.
- 下图是样本容量为 200 的频率分布直方图.

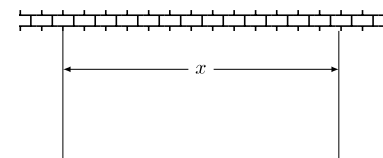


根据样本的频率分布直方图估计, 样本数据落在  $[6, 10)$  内的频数为\_\_\_\_\_, 数据落在  $[2, 10)$  内的概率约为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

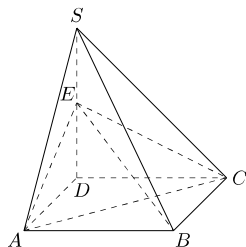
- 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分别为角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边, 且  $\sqrt{3}a = 2c \sin A$ .  
(1) 确定角  $C$  的大小;  
(2) 若  $c = \sqrt{7}$ , 且  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 求  $a+b$  的值.

- 围建一个面积为  $360 \text{ m}^2$  的矩形场地, 要求矩形场地的一面利用旧墙 (利用旧墙需维修), 其它三面围墙要新建, 在旧墙的对面的新墙上要留一个宽度为  $2 \text{ m}$  的进出口. 如图所示, 已知旧墙的维修费用为  $45 \text{ 元/m}$ , 新墙的造价为  $180 \text{ 元/m}$ . 设利用的旧墙的长度为  $x$  (单位:  $\text{m}$ ), 修建此矩形场地围墙的总费用为  $y$  (单位: 元).  
(1) 将  $y$  表示为  $x$  的函数;  
(2) 试确定  $x$ , 使修建此矩形场地围墙的总费用最小, 并求出最小总费用.



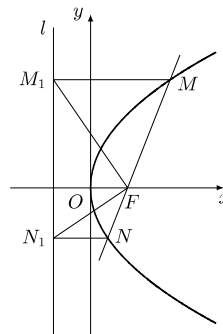
18. 如图, 四棱锥  $S-ABCD$  的底面是正方形,  $SD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $SD = AD = a$ , 点  $E$  是  $SD$  上的点, 且  $DE = \lambda a$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ).

- (1) 求证: 对任意的  $\lambda \in (0, 1]$ , 都有  $AC \perp BE$ ;  
(2) 若二面角  $C-AE-D$  的大小为  $60^\circ$ , 求  $\lambda$  的值.



20. 如图, 过抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  的直线与抛物线相交于  $M$ 、 $N$  两点, 自  $M$ 、 $N$  向准线  $l$  作垂线, 垂足分别为  $M_1$ 、 $N_1$ .

- (1) 求证:  $FM_1 \perp FN_1$ ;  
(2) 记  $\triangle FMM_1$ 、 $\triangle FM_1N_1$ 、 $\triangle FNN_1$  的面积分别为  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ , 试判断  $S_2^2 = 4S_1S_3$  是否成立, 并证明你的结论.



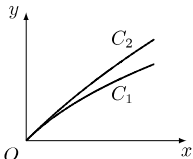
21. 已知关于  $x$  的函数  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + bc$ , 其导函数为  $f'(x)$ . 令  $g(x) = |f'(x)|$ , 记函数  $g(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值为  $M$ .
- (1) 如果函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处有极值  $-\frac{4}{3}$ , 试确定  $b$ 、 $c$  的值;  
(2) 若  $|b| > 1$ , 证明对任意的  $c$ , 都有  $M > 2$ ;  
(3) 若  $M \geq k$  对任意的  $b$ 、 $c$  恒成立, 试求  $k$  的最大值.

19. 已知  $\{a_n\}$  是一个公差大于 0 的等差数列, 且满足  $a_3a_6 = 55$ ,  $a_2 + a_7 = 16$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 若数列  $\{a_n\}$  和数列  $\{b_n\}$  满足等式:  $a_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_n}{2^n}$  ( $n$  为正整数), 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

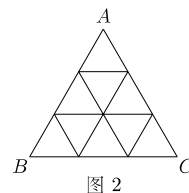
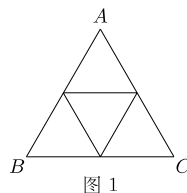
# 2009 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

## 一、选择题

- 若  $\log_2 a < 0$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^b > 1$ , 则 ( )  
(A)  $a > 1, b > 0$  (B)  $a > 1, b < 0$   
(C)  $0 < a < 1, b > 0$  (D)  $0 < a < 1, b < 0$
- 对于非零向量  $a, b$ , “ $a + b = 0$ ”是“ $a \parallel b$ ”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 将函数  $y = \sin x$  的图象向左平移  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) 的单位后, 得到函数  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 则  $\varphi$  等于 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{5\pi}{6}$  (C)  $\frac{7\pi}{6}$  (D)  $\frac{11\pi}{6}$
- 如图, 当参数  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$  时, 连续函数  $y = \frac{x}{1 + \lambda x}$  ( $x \geq 0$ ) 的图象分别对应曲线  $C_1$  和  $C_2$ , 则 ( )  
  
(A)  $0 < \lambda_1 < \lambda$  (B)  $0 < \lambda < \lambda_1$  (C)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  (D)  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
- 从 10 名大学生毕业生中选 3 个人担任村长助理, 则甲、乙至少有 1 人入选, 而丙没有入选的不同选法的种数位 ( )  
(A) 85 (B) 56 (C) 49 (D) 28
- 已知  $D$  是由不等式组  $\begin{cases} x - 2y \geq 0, \\ x + 3y \geq 0 \end{cases}$  所确定的平面区域, 则圆  $x^2 + y^2 = 4$  在区域  $D$  内的弧长为 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\frac{3\pi}{4}$  (D)  $\frac{3\pi}{2}$
- 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱上到异面直线  $AB, CC_1$  的距离相等的点的个数为 ( )  
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 设函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义. 对于给定的正数  $K$ , 定义函数  $f_K(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq K, \\ K, & f(x) > K. \end{cases}$  取函数  $f(x) = 2 - x - e^{-x}$ . 若对任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $f_K(x) = f(x)$ , 则 ( )  
(A)  $K$  的最大值为 2 (B)  $K$  的最小值为 2  
(C)  $K$  的最大值为 1 (D)  $K$  的最小值为 1

## 二、填空题

- 某班共 30 人, 其中 15 人喜爱篮球运动, 10 人喜爱乒乓球运动, 8 人对这两项运动都不喜爱, 则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为\_\_\_\_\_.
- 在  $(1+x)^3 + (1+\sqrt{x})^3 + (1+\sqrt[3]{x})^3$  的展开式中,  $x$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)
- 若  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $2 \tan x + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 已知以双曲线  $C$  的两个焦点及虚轴的两个端点为原点的四边形中, 有一个内角为  $60^\circ$ , 则双曲线  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
- 一个总体分为  $A, B$  两层, 其个体数之比为  $4:1$ , 用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为 10 的样本. 已知  $B$  层中甲、乙都被抽到的概率为  $\frac{1}{28}$ , 则总体中的个体数为\_\_\_\_\_.
- 在半径为 13 的球面上有  $A, B, C$  三点,  $AB = 6, BC = 8, CA = 10$ , 则  
(1) 球心到平面  $ABC$  的距离为\_\_\_\_\_;  
(2) 过  $A, B$  两点的大圆面与平面  $ABC$  所成二面角为 (锐角) 的正切值为\_\_\_\_\_.
- 将正  $\triangle ABC$  分割成  $n^2$  ( $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ) 个全等的小正三角形 (图 1, 图 2 分别给出了  $n = 2, 3$  的情形), 在每个三角形的顶点各放置一个数, 使位于  $\triangle ABC$  的三边及平行于某边的任一直线上的数 (当数的个数不少于 3 时) 都分别依次成等差数列. 若顶点  $A, B, C$  处的三个数互不相同且和为 1, 记所有顶点上的数之和为  $f(n)$ , 则有  $f(2) = 2, f(3) =$ \_\_\_\_\_,  $\dots$ ,  $f(n) =$ \_\_\_\_\_.

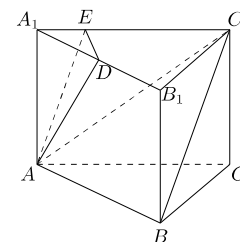


## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 3\overrightarrow{BC}^2$ , 求角  $A, B, C$  的大小.

- 为拉动经济增长, 某市决定新建一批重点工程, 分别为基础设施工程、民生工程 and 产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ . 现在 3 名工人独立地从中任选一个项目参与建设.  
(1) 求他们选择的项目所属类别互不相同的概率;  
(2) 记  $\xi$  为 3 人中选择的项目属于基础设施工程或产业建设工程的人数, 求  $\xi$  的分布列及数学期望.

- 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = \sqrt{2}AA_1$ . 点  $D$  是  $A_1B_1$  的中点, 点  $E$  在  $A_1C_1$  上, 且  $DE \perp AE$ .  
(1) 证明: 平面  $ADE \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ;  
(2) 求直线  $AD$  和平面  $ABC_1$  所成角的正弦值.

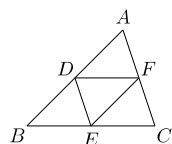


19. 某地建一座桥, 两端的桥墩已建好, 这两墩相距  $m$  米, 余下工程只需要建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算, 一个桥墩的工程费用为 256 万元, 距离为  $x$  米的相邻两墩之间的桥面工程费用为  $(2 + \sqrt{x})x$  万元. 假设桥墩等距离分布, 所有桥墩都视为点, 且不考虑其他因素, 记余下工程的费用为  $y$  万元.
- (1) 试写出  $y$  关于  $x$  的函数关系式;
- (2) 当  $m = 640$  米时, 需新建多少个桥墩才能使  $y$  最小?
20. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P$  到点  $F(3, 0)$  的距离的 4 倍与它到直线  $x = 2$  的距离的 3 倍之和记为  $d$ . 当点  $P$  运动时,  $d$  恒等于点  $P$  的横坐标与 18 之和.
- (1) 求点  $P$  的轨迹  $C$ ;
- (2) 设过点  $F$  的直线  $l$  与轨迹  $C$  相交于  $M, N$  两点, 求线段  $MN$  长度的最大值.
21. 对于数列  $\{u_n\}$ , 若存在常数  $M > 0$ , 对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 恒有  $|u_{n+1} - u_n| + |u_n - u_{n-1}| + \cdots + |u_2 - u_1| \leq M$ , 则称数列  $\{u_n\}$  为  $B$ -数列.
- (1) 首项为 1, 公比为  $q$  ( $|q| < 1$ ) 的等比数列是否为  $B$ -数列? 请说明理由;
- (2) 设  $S_n$  是数列  $\{x_n\}$  的前  $n$  项和, 给出下列两组论断:
- $A$  组: ① 数列  $\{x_n\}$  是  $B$ -数列      ② 数列  $\{x_n\}$  不是  $B$ -数列
- $B$  组: ③ 数列  $\{S_n\}$  是  $B$ -数列      ④ 数列  $\{S_n\}$  不是  $B$ -数列
- 请以其中一组中的一个论断为条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题. 判断所给命题的真假, 并证明你的结论;
- (3) 若数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都是  $B$ -数列, 证明: 数列  $\{a_n b_n\}$  也是  $B$ -数列.

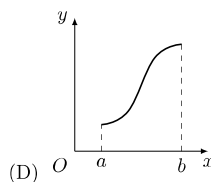
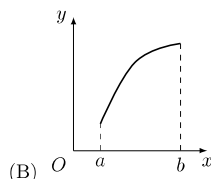
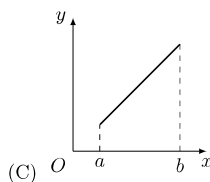
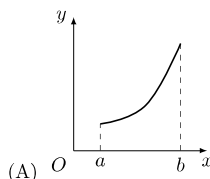
# 2009 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

## 一、选择题

- $\log_2 \sqrt{2}$  的值为 ( )  
(A)  $-\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$
- 抛物线  $y^2 = -8x$  的焦点坐标是 ( )  
(A) (2, 0) (B) (-2, 0) (C) (4, 0) (D) (-4, 0)
- 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_2 = 3$ ,  $a_6 = 11$ , 则  $S_7$  等于 ( )  
(A) 13 (B) 35 (C) 49 (D) 63
- 如图,  $D, E, F$  分别是  $\triangle ABC$  的边  $AB, BC, CA$  的中点, 则 ( )



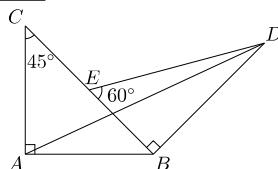
- (A)  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$  (B)  $\vec{BD} - \vec{CF} + \vec{DF} = \vec{0}$   
(C)  $\vec{AD} + \vec{CE} - \vec{CF} = \vec{0}$  (D)  $\vec{BD} - \vec{BE} - \vec{FC} = \vec{0}$
- 某地政府召集 5 家企业的负责人开会, 其中甲企业有 2 人到会, 其余 4 家企业各有 1 人到会, 会上有 3 人发言, 则这 3 人来自 3 家不同企业的可能情况的种数为 ( )  
(A) 14 (B) 16 (C) 20 (D) 48
- 平面六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 既与  $AB$  共面也与  $CC_1$  共面的棱的条数为 ( )  
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
- 若函数  $y = f(x)$  的导函数在区间  $[a, b]$  上是增函数, 则函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的图象可能是 ( )



- 设函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义. 对于给定的正数  $K$ , 定义函数  $f_K(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq K, \\ K, & f(x) > K. \end{cases}$  取函数  $f(x) = 2^{-|x|}$ . 当  $K = \frac{1}{2}$  时, 函数  $f_K(x)$  的单调递增区间为 ( )  
(A)  $(-\infty, 0)$  (B)  $(0, +\infty)$  (C)  $(-\infty, -1)$  (D)  $(1, +\infty)$

## 二、填空题

9. 某班共 30 人, 其中 15 人喜爱篮球运动, 10 人喜爱乒乓球运动, 8 人对这两项运动都不喜爱, 则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为\_\_\_\_\_.
10. 若  $x > 0$ , 则  $x + \frac{2}{x}$  的最小值为\_\_\_\_\_.
11. 在  $(1 + \sqrt{x})^4$  的展开式中,  $x$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)
12. 一个总体分为  $A, B$  两层, 用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为 10 的样本. 已知  $B$  层中每个个体被抽到的概率都为  $\frac{1}{12}$ , 则总体中的个体数为\_\_\_\_\_.
13. 过双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一个焦点作圆  $x^2 + y^2 = a^2$  的两条切线, 切点分别为  $A, B$ . 若  $\angle AOB = 120^\circ$  ( $O$  是坐标原点), 则双曲线  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
14. 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $BC = 1, B = 2A$ , 则  $\frac{AC}{\cos A}$  的值等于\_\_\_\_\_,  $AC$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
15. 如图, 两块斜边长相等的直角三角板拼在一起. 若  $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_,  $y =$ \_\_\_\_\_.

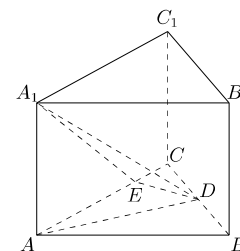


## 三、解答题

16. 已知向量  $\mathbf{a} = (\sin \theta, \cos \theta - 2 \sin \theta)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2)$ .  
(1) 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 求  $\tan \theta$  的值;  
(2) 若  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ,  $0 < \theta < \pi$ , 求  $\theta$  的值.

17. 为拉动经济增长, 某市决定新建一批重点工程, 分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ . 现在 3 名工人独立地从中任选一个项目参与建设. 求:  
(1) 他们选择的项目所属类别互不相同的概率;  
(2) 至少有 1 人选择的项目属于民生工程的概率.

18. 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 4, AA_1 = \sqrt{7}$ . 点  $D$  是  $BC$  的中点, 点  $E$  在  $AC$  上, 且  $DE \perp A_1E$ .  
(1) 证明: 平面  $A_1DE \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ;  
(2) 求直线  $AD$  和平面  $A_1DE$  所成角的正弦值.



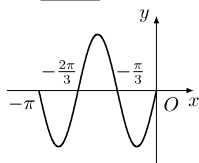
19. 已知函数  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$  的导函数的图象关于直线  $x = 2$  对称.
- (1) 求  $b$  的值;
  - (2) 若  $f(x)$  在  $x = t$  处取得极小值, 记此极小值为  $g(t)$ , 求  $g(t)$  的定义域和值域.
20. 已知椭圆  $C$  的中心在原点, 焦点在  $x$  轴上, 以两个焦点和短轴的两个端点为顶点的四边形是一个面积为 8 的正方形 (记为  $Q$ ).
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
  - (2) 设点  $P$  是椭圆  $C$  的左准线与  $x$  轴的交点, 过点  $P$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $M, N$  两点. 当线段  $MN$  的中点落在正方形  $Q$  内 (包括边界) 时, 求直线  $l$  的斜率的取值范围.
21. 对于数列  $\{u_n\}$ , 若存在常数  $M > 0$ , 对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 恒有  $|u_{n+1} - u_n| + |u_n - u_{n-1}| + \cdots + |u_2 - u_1| \leq M$ , 则称数列  $\{u_n\}$  为  $B$ -数列.
- (1) 首项为 1, 公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列是否为  $B$ -数列? 请说明理由;
  - (2) 设  $S_n$  是数列  $\{x_n\}$  的前  $n$  项和, 给出下列两组论断:  
 A 组: ① 数列  $\{x_n\}$  是  $B$ -数列    ② 数列  $\{x_n\}$  不是  $B$ -数列  
 B 组: ③ 数列  $\{S_n\}$  是  $B$ -数列    ④ 数列  $\{S_n\}$  不是  $B$ -数列  
 请以其中一组中的一个论断为条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题. 判断所给命题的真假, 并证明你的结论;
  - (3) 若数列  $\{a_n\}$  是  $B$ -数列, 证明: 数列  $\{a_n^2\}$  也是  $B$ -数列.



# 2009 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

## 一、填空题

- 若复数  $z_1 = 4 + 29i$ ,  $z_2 = 6 + 9i$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则复数  $(z_1 - z_2)i$  的实部为\_\_\_\_\_.
- 已知向量  $\mathbf{a}$  和向量  $\mathbf{b}$  的夹角为  $30^\circ$ ,  $|\mathbf{a}| = 2$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ , 则向量  $\mathbf{a}$  和向量  $\mathbf{b}$  的数量积  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ \_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 6$  的单调减区间为\_\_\_\_\_.
- 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A, \omega, \varphi$  为常数,  $A > 0, \omega > 0$ ) 在闭区间  $[-\pi, 0]$  上的图象如图所示, 则  $\omega =$ \_\_\_\_\_.

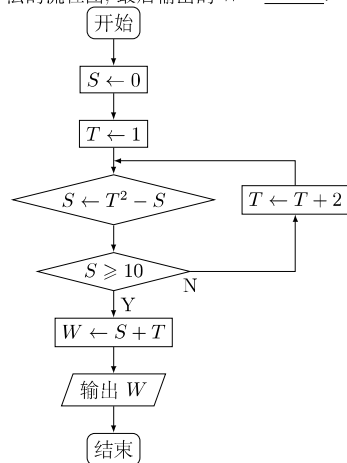


- 现有 5 根竹竿, 它们的长度 (单位: m) 分别为 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 若从中一次随机抽取 2 根竹竿, 则它们的长度恰好相差 0.3 m 的概率为\_\_\_\_\_.
- 某校甲、乙两个班级各有 5 名编号为 1, 2, 3, 4, 5 的学生进行投篮练习, 每人投 10 次, 投中的次数如下表:

学生	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号
甲班	6	7	7	8	7
乙班	6	7	6	7	9

则以上两组数据的方差中较小的一个为  $s^2 =$ \_\_\_\_\_.

- 如图是一个算法的流程图, 最后输出的  $W =$ \_\_\_\_\_.



- 在平面上, 若两个正三角形的边长的比为  $1 : 2$ , 则它们的面积比为  $1 : 4$ ; 类似地, 在空间内, 若两个正四面体的棱长的比为  $1 : 2$ , 则它们的体积比为\_\_\_\_\_.

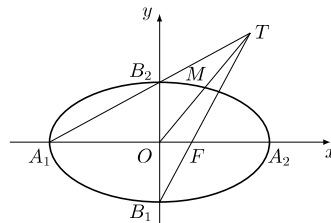
- 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P$  在曲线  $C: y = x^3 - 10x + 3$  上, 且在第二象限内, 已知曲线  $C$  在点  $P$  处的切线的斜率为 2, 则点  $P$  的坐标为\_\_\_\_\_.

- 已知  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 函数  $f(x) = a^x$ , 若实数  $m, n$  满足  $f(m) > f(n)$ , 则  $m, n$  的大小关系为\_\_\_\_\_.

- 已知集合  $A = \{x | \log_2 x \leq 2\}$ ,  $B = (-\infty, a)$ , 若  $A \subseteq B$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $(c, +\infty)$ , 其中  $c =$ \_\_\_\_\_.

- 设  $\alpha$  和  $\beta$  为不重合的两个平面, 给出下列命题:
  - 若  $\alpha$  内的两条相交直线分别平行于  $\beta$  内的两条直线, 则  $\alpha$  平行于  $\beta$ ;
  - 若  $\alpha$  外一条直线  $l$  与  $\alpha$  内的一条直线平行, 则  $l$  和  $\alpha$  平行;
  - 设  $\alpha$  和  $\beta$  相交于直线  $l$ , 若  $\alpha$  内有一条直线垂直于  $l$ , 则  $\alpha$  和  $\beta$  垂直;
  - 直线  $l$  与  $\alpha$  垂直的充分必要条件是  $l$  与  $\alpha$  内的两条直线垂直.
 上面命题中, 真命题的序号\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

- 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的四个顶点,  $F$  为其右焦点, 直线  $A_1B_2$  与直线  $B_1F$  相交于点  $T$ , 线段  $OT$  与椭圆的交点  $M$  恰为线段  $OT$  的中点, 则该椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.

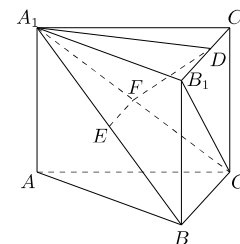


- 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列,  $|q| > 1$ , 令  $b_n = a_n + 1 (n = 1, 2, \dots)$ , 若数列  $\{b_n\}$  有连续四项在集合  $\{-53, -23, 19, 37, 82\}$  中, 则  $6q =$ \_\_\_\_\_.

## 二、解答题

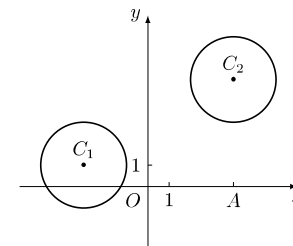
- 设向量  $\mathbf{a} = (4 \cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $\mathbf{b} = (\sin \beta, 4 \cos \beta)$ ,  $\mathbf{c} = (\cos \beta, -4 \sin \beta)$ .
  - 若  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$  垂直, 求  $\tan(\alpha + \beta)$  的值;
  - 求  $|\mathbf{b} + \mathbf{c}|$  的最大值;
  - 若  $\tan \alpha \tan \beta = 16$ , 求证:  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ .

- 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $E, F$  分别是  $A_1B, A_1C$  的中点, 点  $D$  在  $B_1C_1$  上,  $A_1D \perp B_1C$ . 求证:
  - $EF \parallel$  平面  $ABC$ ;
  - 平面  $A_1FD \perp$  平面  $BB_1C_1C$ .



- 设  $\{a_n\}$  是公差不为零的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 满足  $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2$ ,  $S_7 = 7$ .
  - 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式及前  $n$  项和  $S_n$ ;
  - 试求所有的正整数  $m$ , 使得  $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$  为数列  $\{a_n\}$  中的项.

- 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆  $C_1: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$  和圆  $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$ .
  - 若直线  $l$  过点  $A(4, 0)$ , 且被圆  $C_1$  截得的弦长为  $2\sqrt{3}$ , 求直线  $l$  的方程;
  - 设  $P$  为平面上的点, 满足: 存在过点  $P$  的无穷多对互相垂直的直线  $l_1$  和  $l_2$ , 它们分别与圆  $C_1$  和圆  $C_2$  相交, 且直线  $l_1$  被圆  $C_1$  截得的弦长与直线  $l_2$  被圆  $C_2$  截得的弦长相等, 试求所有满足条件的点  $P$  的坐标.



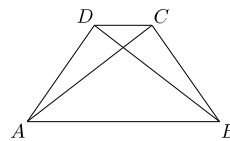
19. 按照某学者的理论, 假设一个人生产某产品单件成本为  $a$  元, 如果他卖出该产品的单价为  $m$  元, 则他的满意度为  $\frac{m}{m+a}$ ; 如果他买进该产品的单价为  $n$  元, 则他的满意度为  $\frac{n}{n+a}$ . 如果一个人对两种交易 (卖出或买进) 的满意度分别为  $h_1$  和  $h_2$ , 则他对这两种交易的综合满意度为  $\sqrt{h_1 h_2}$ . 现假设甲生产  $A$ 、 $B$  两种产品的单件成本分别为 12 元和 5 元, 乙生产  $A$ 、 $B$  两种产品的单件成本分别为 3 元和 20 元, 设产品  $A$ 、 $B$  的单价分别为  $m_A$  元和  $m_B$  元, 甲买进  $A$  与卖出  $B$  的综合满意度为  $h_{\text{甲}}$ , 乙卖出  $A$  与买进  $B$  的综合满意度为  $h_{\text{乙}}$ .
- (1) 求  $h$  和  $h_{\text{乙}}$  关于  $m_A$ 、 $m_B$  的表达式; 当  $m_A = \frac{3}{5}m_B$  时, 求证:  $h_{\text{甲}} = h_{\text{乙}}$ ;
- (2) 设  $m_A = \frac{3}{5}m_B$ , 当  $m_A$ 、 $m_B$  分别为多少时, 甲、乙两人的综合满意度均最大? 最大的综合满意度为多少?
- (3) 记 (2) 中最大的综合满意度为  $h_0$ , 试问能否适当选取  $m_A$ 、 $m_B$  的值, 使得  $h_{\text{甲}} \geq h_0$  和  $h_{\text{乙}} \geq h_0$  同时成立, 但等号不同时成立? 试说明理由.

20. 设  $a$  为实数, 函数  $f(x) = 2x^2 + (x-a)|x-a|$ .

- (1) 若  $f(0) \geq 1$ , 求  $a$  的取值范围;
- (2) 求  $f(x)$  的最小值;
- (3) 设函数  $h(x) = f(x)$ ,  $x \in (a, +\infty)$ , 直接写出 (不需给出演算步骤) 不等式  $h(x) \geq 1$  的解集.

21. 四选二.

【A】如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ . 求证:  $AB \parallel CD$ .



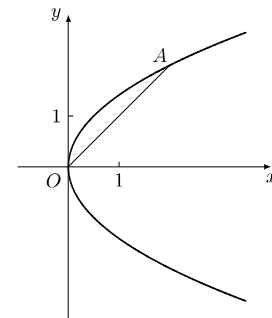
【B】求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  的逆矩阵.

【C】已知曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}, \\ y = 3(t + \frac{1}{t}), \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $t > 0$ ), 求曲线  $C$  的普通方程.

【D】设  $a \geq b > 0$ , 求证:  $3a^3 + 2b^3 \geq 3a^2b + 2ab^2$ .

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $C$  的顶点在原点, 经过点  $A(2, 2)$ , 其焦点  $F$  在  $x$  轴上.

- (1) 求抛物线  $C$  的标准方程;
- (2) 求过点  $F$ , 且与直线  $OA$  垂直的直线的方程;
- (3) 设过点  $M(m, 0)$  ( $m > 0$ ) 的直线交抛物线  $C$  于  $D$ 、 $E$  两点,  $ME = 2DM$ , 记  $D$  和  $E$  两点间的距离为  $f(m)$ , 求  $f(m)$  关于  $m$  的表达式.



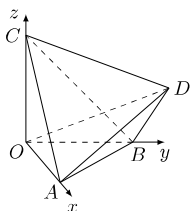
23. 对于正整数  $n \geq 2$ , 用  $T_n$  表示关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  有实数根的有序数组  $(a, b)$  的组数, 其中  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $a$  和  $b$  可以相等); 对于随机选取的  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $a$  和  $b$  可以相等), 记  $P_n$  为关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  有实数根的概率.

- (1) 求  $T_{n^2}$  和  $P_{n^2}$ ;
- (2) 求证: 对任意正整数  $n \geq 2$ , 有  $P_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

# 2009 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

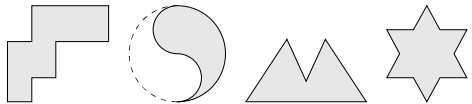
## 一、选择题

- 若复数  $z = (x^2 - 1) + (x - 1)i$  为纯虚数, 则实数  $x$  的值为 ( )  
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) -1 或 1
- 函数  $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$  的定义域为 ( )  
(A)  $(-4, -1)$  (B)  $(-4, 1)$  (C)  $(-1, 1)$  (D)  $(-1, 1]$
- 已知全集  $U = A \cup B$  中有  $m$  个元素,  $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$  中有  $n$  个元素. 若  $A \cap B$  非空, 则  $A \cap B$  的元素个数为 ( )  
(A)  $mn$  (B)  $m + n$  (C)  $n - m$  (D)  $m - n$
- 若函数  $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos x$ ,  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , 则  $f(x)$  的最大值为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C)  $\sqrt{3} + 1$  (D)  $\sqrt{3} + 2$
- 设函数  $f(x) = g(x) + x^2$ , 曲线  $y = g(x)$  在点  $(1, g(1))$  处的切线方程为  $y = 2x + 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处切线的斜率为 ( )  
(A) 4 (B)  $-\frac{1}{4}$  (C) 2 (D)  $-\frac{1}{2}$
- 过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点  $F_1$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于点  $P$ ,  $F_2$  为右焦点, 若  $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$ , 则椭圆的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{3}$
- $(1 + ax + by)^n$  展开式中不含  $x$  的项的系数绝对值的和为 243, 不含  $y$  的项的系数绝对值的和为 32, 则  $a, b, n$  的值可能为 ( )  
(A)  $a = 2, b = -1, n = 5$  (B)  $a = -2, b = -1, n = 6$   
(C)  $a = -1, b = 2, n = 6$  (D)  $a = 1, b = 2, n = 5$
- 数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = n^2 \left( \cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} \right)$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{30}$  为 ( )  
(A) 470 (B) 490 (C) 495 (D) 510
- 如图, 正四面体  $ABCD$  的顶点  $A, B, C$  分别在两两垂直的三条射线  $Ox, Oy, Oz$  上, 则在下列命题中, 错误的为 ( )



- (A)  $O - ABC$  是正三棱锥 (B) 直线  $OB \parallel$  平面  $ACD$

(C) 直线  $AD$  与  $OB$  所成的角是  $45^\circ$  (D) 二面角  $D - OB - A$  为  $45^\circ$

- 为了庆祝六一儿童节, 某食品厂制作了 3 种不同的精美卡片, 每袋食品随机装入一张卡片, 集齐 3 种卡片可获奖, 现购买该种食品 5 袋, 能获奖的概率为 ( )  
(A)  $\frac{31}{81}$  (B)  $\frac{33}{81}$  (C)  $\frac{48}{81}$  (D)  $\frac{50}{81}$
- 一个平面封闭区域内任意两点距离的最大值称为该区域的“直径”, 封闭区域边界曲线的长度与区域直径之比称为区域的“周率”, 下面四个平面区域 (阴影部分) 的周率从左到右依次记为  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ , 则下列关系中正确的是 ( )  
  
(A)  $\tau_1 > \tau_4 > \tau_3$  (B)  $\tau_3 > \tau_1 > \tau_2$  (C)  $\tau_4 > \tau_2 > \tau_3$  (D)  $\tau_3 > \tau_4 > \tau_2$
- 设函数  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  ( $a < 0$ ) 的定义域为  $D$ , 若所有点  $(s, f(t))$  ( $s, t \in D$ ) 构成一个正方形区域, 则  $a$  的值为 ( )  
(A) -2 (B) -4 (C) -8 (D) 不能确定

## 二、填空题

- 已知向量  $\mathbf{a} = (3, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (k, 7)$ . 若  $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \parallel \mathbf{b}$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 正三棱柱  $ABC - A_1 B_1 C_1$  内接于半径为 2 的球, 若  $A, B$  两点的球面距离为  $\pi$ , 则正三棱柱的体积为\_\_\_\_\_.
- 若不等式  $\sqrt{9 - x^2} \leq k(x + 2) - \sqrt{2}$  的解集为区间  $[a, b]$ , 且  $b - a = 2$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 设直线系  $M: x \cos \theta + (y - 2) \sin \theta = 1$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), 对于下列四个命题:  
A.  $M$  中所有直线均经过一个定点;  
B. 存在定点  $P$  不在  $M$  中的任一条直线上;  
C. 对于任意整数  $n$  ( $n \geq 3$ ), 存在正  $n$  边形, 其所有边均在  $M$  中的直线上;  
D.  $M$  中的直线所能围成的正三角形面积都相等.  
其中真命题的代号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的代号)

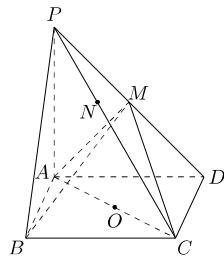
## 三、解答题

- 设函数  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .  
(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;  
(2) 若  $k > 0$ , 求不等式  $f'(x) + k(1 - x)f(x) > 0$  的解集.

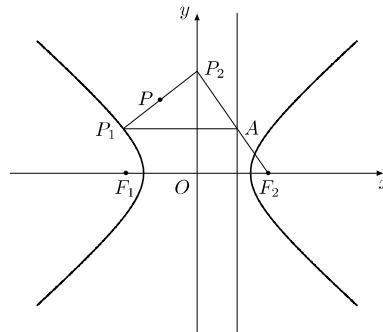
- 某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是  $\frac{1}{2}$ . 若某人获得两个“支持”, 则给予 10 万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予 5 万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助, 令  $\xi$  表示该公司的资助总额.  
(1) 写出  $\xi$  的分布列;  
(2) 求数学期望  $E\xi$ .

- $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\tan C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ ,  
 $\sin(B - A) = \cos C$ .  
(1) 求  $A, C$ ;  
(2) 若  $S_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3}$ , 求  $a, c$ .

20. 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = AD = 4$ ,  $AB = 2$ . 以  $AC$  的中点  $O$  为球心、 $AC$  为直径的球面交  $PD$  于点  $M$ , 交  $PC$  于点  $N$ .
- (1) 求证: 平面  $ABM \perp$  平面  $PCD$ ;
  - (2) 求直线  $CD$  与平面  $ACM$  所成的角的大小;
  - (3) 求点  $N$  到平面  $ACM$  的距离.



21. 已知点  $P_1(x_0, y_0)$  为双曲线  $\frac{x^2}{8b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b$  为正常数) 上任一点,  $F_2$  为双曲线的右焦点, 过  $P_1$  作右准线的垂线, 垂足为  $A$ , 连接  $F_2A$  并延长交  $y$  轴于  $P_2$ .
- (1) 求线段  $P_1P_2$  的中点  $P$  的轨迹  $E$  的方程;
  - (2) 设轨迹  $E$  与  $x$  轴交于  $B, D$  两点, 在  $E$  上任取一点  $Q(x_1, y_1)$  ( $y_1 \neq 0$ ), 直线  $QB, QD$  分别交  $y$  轴于  $M, N$  两点, 求证: 以  $MN$  为直径的圆过两定点.

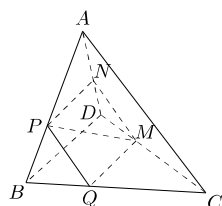


22. 各项均为正数的数列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ , 且对满足  $m + n = p + q$  的正整数  $m, n, p, q$  都有  $\frac{a_m + a_n}{(1 + a_m)(1 + a_n)} = \frac{a_p + a_q}{(1 + a_p)(1 + a_q)}$ .
- (1) 当  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{4}{5}$  时, 求通项  $a_n$ ;
  - (2) 证明: 对任意  $a$ , 存在与  $a$  有关的常数  $\lambda$ , 使得对于每个正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{\lambda} \leq a_n \leq \lambda$ .

# 2009 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

## 一、选择题

- 下列命题是真命题的为 ( )  
(A) 若  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ , 则  $x = y$  (B) 若  $x^2 = 1$ , 则  $x = 1$   
(C) 若  $x = y$ , 则  $\sqrt{x} = \sqrt{y}$  (D) 若  $x < y$ , 则  $x^2 < y^2$
- 函数  $y = \frac{\sqrt{-x^2 - 3x + 4}}{x}$  的定义域为 ( )  
(A)  $[-4, 1]$  (B)  $[-4, 0)$  (C)  $(0, 1]$  (D)  $[-4, 0) \cup (0, 1]$
- 50 名学生参加甲、乙两项体育活动, 每人至少参加了一项, 参加甲项的学生有 30 名, 参加乙项的学生有 25 名, 则仅参加了一项活动的学生人数为 ( )  
(A) 50 (B) 45 (C) 40 (D) 35
- 函数  $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos x$  的最小正周期为 ( )  
(A)  $2\pi$  (B)  $\frac{3\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
- 已知函数  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的偶函数, 若对于  $x \geq 0$ , 都有  $f(x+2) = f(x)$ , 且当  $x \in [0, 2)$  时,  $f(x) = \log_2(x+1)$ , 则  $f(-2008) + f(2009)$  的值为 ( )  
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
- 若  $C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$  能被 7 整除, 则  $x, n$  的值可能为 ( )  
(A)  $x = 4, n = 3$  (B)  $x = 4, n = 4$  (C)  $x = 5, n = 4$  (D)  $x = 6, n = 5$
- 设  $F_1$  和  $F_2$  为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两个焦点, 若  $F_1, F_2, P(0, 2b)$  是正三角形的三个顶点, 则双曲线的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{3}{2}$  (B) 2 (C)  $\frac{5}{2}$  (D) 3
- 公差不为零的等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $a_4$  是  $a_3$  与  $a_7$  的等比中项,  $S_8 = 32$ , 则  $S_{10}$  等于 ( )  
(A) 18 (B) 24 (C) 60 (D) 90
- 如图, 在四面体  $ABCD$  中, 截面  $PQMN$  是正方形, 则在下列命题中, 错误的为 ( )



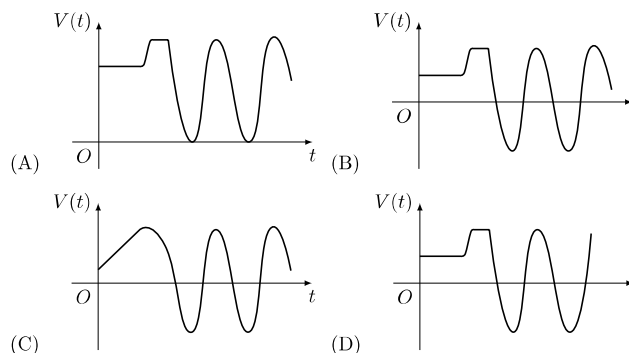
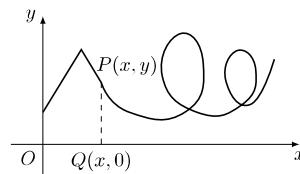
(A)  $AC \perp BD$

(B)  $AC \parallel$  截面  $PQMN$

(C)  $AC = BD$

(D) 异面直线  $PM$  与  $BD$  所成的角为  $45^\circ$

- 甲、乙、丙、丁 4 个足球队参加比赛, 假设每场比赛各队取胜的概率相等, 现任意将这 4 个队分成两个组 (每组两个队) 进行比赛, 胜者再赛. 则甲、乙相遇的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{2}$
- 如图所示, 一质点  $P(x, y)$  在  $xOy$  平面上沿曲线运动, 速度大小不变, 其在  $x$  轴上的投影点  $Q(x, 0)$  的运动速度  $V = V(t)$  的图象大致为 ( )



- 若存在过点  $(1, 0)$  的直线与曲线  $y = x^3$  和  $y = ax^2 + \frac{15}{4}x - 9$  都相切, 则  $a$  等于 ( )  
(A) -1 或  $-\frac{25}{64}$  (B) -1 或  $\frac{21}{4}$  (C)  $-\frac{7}{4}$  或  $-\frac{25}{64}$  (D)  $-\frac{7}{4}$  或 7

## 二、填空题

- 已知向量  $\mathbf{a} = (3, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (k, 2)$ . 若  $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \perp \mathbf{b}$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 体积为 8 的一个正方体, 其全面积与球  $O$  的表面积相等, 则球  $O$  的体积等于\_\_\_\_\_.
- 若不等式  $\sqrt{4-x^2} \leq k(x+1)$  的解集为区间  $[a, b]$ , 且  $b - a = 1$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 设直线系  $M: x \cos \theta + (y - 2) \sin \theta = 1 (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ , 对于下列四个命题:  
A. 存在一个圆与所有直线相交;  
B. 存在一个圆与所有直线不相交;  
C. 存在一个圆与所有直线相切;  
D.  $M$  中的直线所能围成的正三角形面积都相等.  
其中真命题的代号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的代号)

## 三、解答题

- 设函数  $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - a$ .  
(1) 对于任意实数  $x$ ,  $f'(x) \geq m$  恒成立, 求  $m$  的最大值;  
(2) 若方程  $f(x) = 0$  有且仅有一个实根, 求  $a$  的取值范围.

- 某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是  $\frac{1}{2}$ . 若某人获得两个“支持”, 则给予 10 万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予 5 万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助. 求:  
(1) 该公司的资助总额为零的概率;  
(2) 该公司的资助总额超过 15 万元的概率.

19.  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $A = \frac{\pi}{6}$ ,  $(1 + \sqrt{3})c = 2b$ .

(1) 求  $C$ ;

(2) 若  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 1 + \sqrt{3}$ , 求  $a, b, c$ .

21. 数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = n^2 \left( \cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} \right)$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ .

(1) 求  $S_n$ ;

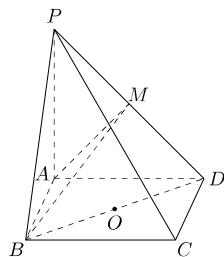
(2)  $b_n = \frac{S_{3n}}{n \cdot 4^n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = AD = 4$ ,  $AB = 2$ . 以  $BD$  的中点  $O$  为球心、 $BD$  为直径的球面交  $PD$  于点  $M$ .

(1) 求证: 平面  $ABM \perp$  平面  $PCD$ ;

(2) 求直线  $PC$  与平面  $ABM$  所成的角;

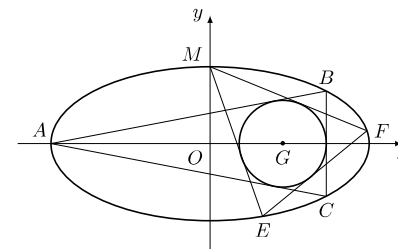
(3) 求点  $O$  到平面  $ABM$  的距离.



22. 如图, 已知圆  $G: (x - 2)^2 + y^2 = r^2$  是椭圆  $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$  的内接  $\triangle ABC$  的内切圆, 其中  $A$  为椭圆的左顶点.

(1) 求圆  $G$  的半径  $r$ ;

(2) 过点  $M(0, 1)$  作圆  $G$  的两条切线交椭圆于  $E, F$  两点, 证明: 直线  $EF$  与圆  $G$  相切.



# 2009 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

## 一、选择题

1. 已知集合  $M = \{x | -3 < x \leq 5\}$ ,  $N = \{x | -5 < x < 5\}$ , 则  $M \cap N = ( )$

- (A)  $\{x | -5 < x < 5\}$  (B)  $\{x | -3 < x < 5\}$   
(C)  $\{x | -5 < x \leq 5\}$  (D)  $\{x | -3 < x \leq 5\}$

2. 已知复数  $z = 1 - 2i$ , 那么  $\frac{1}{\bar{z}} = ( )$

- (A)  $\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5}i$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}i$  (C)  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$  (D)  $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

3. 平面向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $\mathbf{a} = (2, 0)$ ,  $|\mathbf{b}| = 1$ , 则  $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = ( )$

- (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C) 4 (D) 12

4. 已知圆  $C$  与直线  $x - y = 0$  及  $x - y - 4 = 0$  都相切, 圆心在直线  $x + y = 0$  上, 则圆  $C$  的方程为  $( )$

- (A)  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$  (B)  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$   
(C)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$  (D)  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

5. 从 5 名男医生、4 名女医生中选 3 名医生组成一个医疗小分队, 要求其中男、女医生都有, 则不同的组队方案共有  $( )$

- (A) 70 种 (B) 80 种 (C) 100 种 (D) 140 种

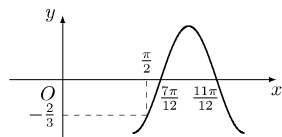
6. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\frac{S_6}{S_3} = 3$ , 则  $\frac{S_9}{S_6} = ( )$

- (A) 2 (B)  $\frac{7}{3}$  (C)  $\frac{8}{3}$  (D) 3

7. 曲线  $y = \frac{x}{x-2}$  在点  $(1, -1)$  处的切线方程为  $( )$

- (A)  $y = x - 2$  (B)  $y = -3x + 2$  (C)  $y = 2x - 3$  (D)  $y = -2x + 1$

8. 已知函数  $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  的图象如图所示,  $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{3}$ , 则  $f(0) = ( )$

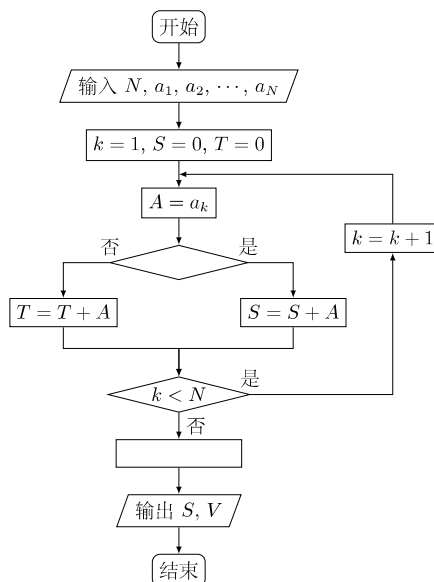


- (A)  $-\frac{2}{3}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$

9. 已知偶函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  单调增加, 则满足  $f(2x - 1) < f(\frac{1}{3})$  的  $x$  取值范围是  $( )$

- (A)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (B)  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (C)  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  (D)  $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

10. 某店一个月的收入和支出总共记录了  $N$  个数据  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , 其中收入记为正数, 支出记为负数. 该店用下边的程序框图计算月总收入  $S$  和月净盈利  $V$ , 那么在图中空白的判断框和处理框中, 应分别填入下列四个选项中的  $( )$



- (A)  $A > 0, V = S - T$  (B)  $A < 0, V = S - T$   
(C)  $A > 0, V = S + T$  (D)  $A < 0, V = S + T$

11. 正六棱锥  $P - ABCDEF$  中,  $G$  为  $PB$  的中点, 则三棱锥  $D - GAC$  与三棱锥  $P - GAC$  体积之比为  $( )$

- (A) 1 : 1 (B) 1 : 2 (C) 2 : 1 (D) 3 : 2

12. 若  $x_1$  满足  $2x + 2^x = 5$ ,  $x_2$  满足  $2x + 2\log_2(x - 1) = 5$ , 则  $x_1 + x_2 = ( )$

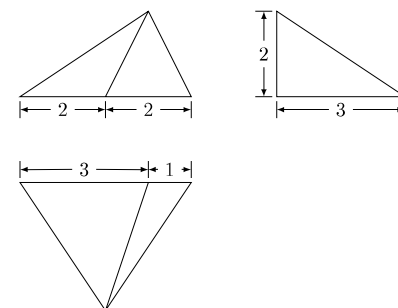
- (A)  $\frac{5}{2}$  (B) 3 (C)  $\frac{7}{2}$  (D) 4

## 二、填空题

13. 某企业有 3 个分厂生产同一种电子产品, 第一、二、三分厂的产量之比为 1 : 2 : 1, 用分层抽样方法 (每个分厂的产品为一层) 从 3 个分厂生产的电子产品中共取 100 件作使用寿命的测试, 由所得的测试结果算得从第一、二、三分厂取出的产品的使用寿命的平均值分别为 980 h, 1020 h, 1032 h, 则抽取的 100 件产品的使用寿命的平均值为\_\_\_\_\_h.

14. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $6S_5 - 5S_3 = 5$ , 则  $a_4 =$ \_\_\_\_\_.

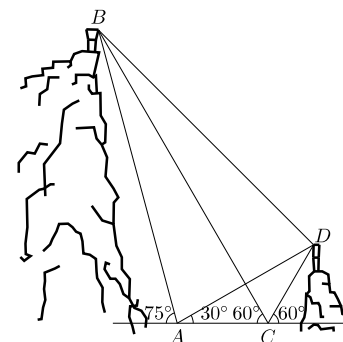
15. 设某几何体的三视图如下 (尺寸的长度单位为 m). 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_m<sup>3</sup>.



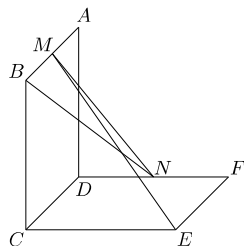
16. 已知  $F$  是双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  的左焦点,  $A(1, 4)$ ,  $P$  是双曲线右支上的动点, 则  $|PF| + |PA|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 如图,  $A, B, C, D$  都在同一个与水平面垂直的平面内,  $B, D$  为两岛上的两座灯塔的塔顶. 测量船于水面  $A$  处测得  $B$  点和  $D$  点的仰角分别为  $75^\circ$ ,  $30^\circ$ , 于水面  $C$  处测得  $B$  点和  $D$  点的仰角均为  $60^\circ$ ,  $AC = 0.1$  km. 试探究图中  $B, D$  间距离与另外哪两点间距离相等, 然后求  $B, D$  的距离. (计算结果精确到 0.01 km,  $\sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\sqrt{6} \approx 2.449$ )



18. 如图, 已知两个正方形  $ABCD$  和  $DCEF$  不在同一平面内,  $M, N$  分别为  $AB, DF$  的中点.
- (1) 若平面  $ABCD \perp$  平面  $DCEF$ , 求直线  $MN$  与平面  $DCEF$  所成角的正弦值;
- (2) 用反证法证明: 直线  $ME$  与  $BN$  是两条异面直线.



19. 某人向一目标射击 4 次, 每次击中目标的概率为  $\frac{1}{3}$ . 该目标分为 3 个不同的部分, 第一、二、三部分面积之比为  $1:3:6$ . 击中目标时, 击中任何一部分的概率与其面积成正比.
- (1) 设  $X$  表示目标被击中的次数, 求  $X$  的分布列;
- (2) 若目标被击中 2 次,  $A$  表示事件“第一部分至少被击中 1 次或第二部分被击中 2 次”, 求  $P(A)$ .

20. 已知椭圆  $C$  过点  $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 两个焦点为  $(-1, 0), (1, 0)$ .
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2)  $E, F$  是椭圆  $C$  上的两个动点, 如果直线  $AE$  的斜率与  $AF$  的斜率互为相反数, 证明直线  $EF$  的斜率为定值, 并求出这个定值.

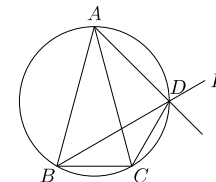
21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x, a > 1$ .
- (1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;
- (2) 证明: 若  $a < 5$ , 则对于任意  $x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2$ , 有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$ .

22. 三选一.

【A】已知  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $D$  是  $\triangle ABC$  外接圆劣弧  $\widehat{AC}$  上的点 (不与点  $A, C$  重合), 延长  $BD$  至  $E$ .

(1) 求证:  $AD$  的延长线平分  $\angle CDE$ ;

(2) 若  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $\triangle ABC$  中  $BC$  边上的高为  $2 + \sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  外接圆的面积.



【B】在直角坐标系  $xOy$  中, 以  $O$  为极点,  $x$  正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ,  $M, N$  分别为  $C$  与  $x$  轴,  $y$  轴的交点.

(1) 写出  $C$  的直角坐标方程, 并求  $M, N$  的极坐标;

(2) 设  $MN$  的中点为  $P$ , 求直线  $OP$  的极坐标方程.

【C】设函数  $f(x) = |x-1| + |x-a|$ .

(1) 若  $a = -1$ , 解不等式  $f(x) \geq 3$ ;

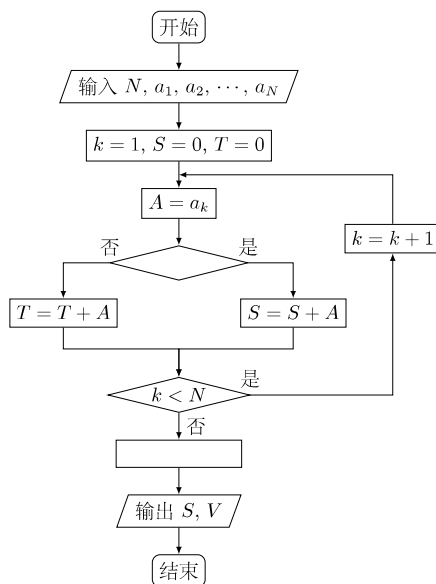
(2) 如果  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 2$ , 求  $a$  的取值范围.



# 2009 普通高等学校招生考试 (辽宁卷文)

## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{x | -3 < x \leq 5\}$ ,  $N = \{x | x < -5 \text{ 或 } x > 5\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )  
 (A)  $\{x | x < -5 \text{ 或 } x > -3\}$  (B)  $\{x | -5 < x < 5\}$   
 (C)  $\{x | -3 < x < 5\}$  (D)  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$
- 已知复数  $z = 1 - 2i$ , 那么  $\frac{1}{z} =$  ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5}i$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}i$  (C)  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$  (D)  $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
- $\{a_n\}$  为等差数列, 且  $a_7 - 2a_4 = -1$ ,  $a_3 = 0$ , 则公差  $d =$  ( )  
 (A)  $-2$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $2$
- 平面向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $\mathbf{a} = (2, 0)$ ,  $|\mathbf{b}| = 1$ , 则  $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| =$  ( )  
 (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C)  $4$  (D)  $12$
- 如果把地球看成一个球体, 则地球上北纬  $60^\circ$  纬线长和赤道线长的比值为 ( )  
 (A)  $0.8$  (B)  $0.75$  (C)  $0.5$  (D)  $0.25$
- 已知函数  $f(x)$  满足: 当  $x \geq 4$  时,  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ; 当  $x < 4$  时,  $f(x) = f(x+1)$ . 则  $f(2 + \log_2 3) =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{24}$  (B)  $\frac{1}{12}$  (C)  $\frac{1}{8}$  (D)  $\frac{3}{8}$
- 已知圆  $C$  与直线  $x - y = 0$  及  $x - y - 4 = 0$  都相切, 圆心在直线  $x + y = 0$  上, 则圆  $C$  的方程为 ( )  
 (A)  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$  (B)  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$   
 (C)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  (D)  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$
- 已知  $\tan \theta = 2$ , 则  $\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta =$  ( )  
 (A)  $-\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{5}{4}$  (C)  $-\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{4}{5}$
- $ABCD$  为长方形,  $AB = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $O$  为  $AB$  的中点. 在长方形  $ABCD$  内随机取一点, 取到的点到  $O$  的距离大于  $1$  的概率为 ( )  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $1 - \frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{8}$  (D)  $1 - \frac{\pi}{8}$
- 某店一个月的收入和支出总共记录了  $N$  个数据  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , 其中收入记为正数, 支出记为负数. 该店用下边的程序框图计算月总收入  $S$  和月净盈利  $V$ , 那么在图中空白的判断框和处理框中, 应分别填入下列四个选项中的 ( )

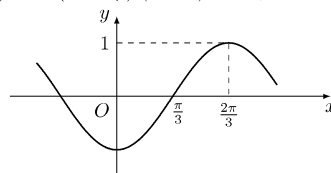


- (A)  $A > 0, V = S - T$  (B)  $A < 0, V = S - T$   
 (C)  $A > 0, V = S + T$  (D)  $A < 0, V = S + T$

11. 下列 4 个命题  
 $p_1: \exists x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^x$   $p_2: \exists x \in (0, 1), \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$   
 $p_3: \forall x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} x$   $p_4: \forall x \in (0, \frac{1}{3}), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{3}} x$   
 其中的真命题是 ( )  
 (A)  $p_1, p_3$  (B)  $p_1, p_4$  (C)  $p_2, p_3$  (D)  $p_2, p_4$
12. 已知偶函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  单调增加, 则满足  $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$  的  $x$  取值范围是 ( )  
 (A)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  (B)  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  (C)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$  (D)  $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

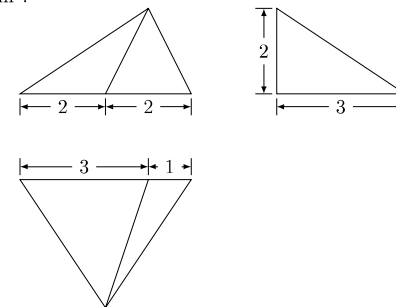
## 二、填空题

13. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 四边形  $ABCD$  的边  $AB \parallel DC$ ,  $AD \parallel BC$ . 已知点  $A(-2, 0)$ ,  $B(6, 8)$ ,  $C(8, 6)$ , 则  $D$  点的坐标为\_\_\_\_\_.
14. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象如图所示, 则  $\omega =$ \_\_\_\_\_.



15. 若函数  $f(x) = \frac{x^2 + a}{x + 1}$  在  $x = 1$  处取极值, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

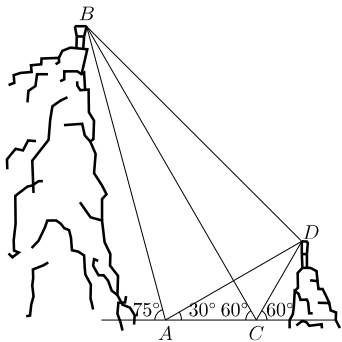
16. 设某几何体的三视图如下 (尺寸的长度单位为 m). 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_  $m^3$ .



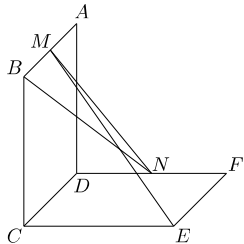
## 三、解答题

17. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知  $S_1, S_3, S_2$  成等差数列.  
 (1) 求  $\{a_n\}$  的公比  $q$ ;  
 (2) 求  $a_1 - a_3 = 3$ , 求  $S_n$ .

18. 如图,  $A, B, C, D$  都在同一个与水平面垂直的平面内,  $B, D$  为两岛上的两座灯塔的塔顶. 测量船于水面  $A$  处测得  $B$  点和  $D$  点的仰角分别为  $75^\circ, 30^\circ$ , 于水面  $C$  处测得  $B$  点和  $D$  点的仰角均为  $60^\circ, AC = 0.1$  km. 试探究图中  $B, D$  间距离与另外哪两点间距离相等, 然后求  $B, D$  的距离. (计算结果精确到 0.01 km,  $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{6} \approx 2.449$ )



19. 如图, 已知两个正方形  $ABCD$  和  $DCEF$  不在同一平面内,  $M, N$  分别为  $AB, DF$  的中点.
- (1) 若  $CD = 2$ , 平面  $ABCD \perp$  平面  $DCEF$ , 求直线  $MN$  的长;
- (2) 用反证法证明: 直线  $ME$  与  $BN$  是两条异面直线.



20. 某企业有两个分厂生产某种零件, 按规定内径尺寸 (单位: mm) 的值落在  $[29.94, 30.06]$  的零件为优质品. 从两个分厂生产的零件中个抽出 500 件, 量其内径尺寸, 得结果如下表:

甲厂	
分组	频数
[29.86, 29.90)	12
[29.90, 29.94)	63
[29.84, 29.98)	86
[29.98, 30.02)	182
[30.02, 30.06)	92
[30.06, 30.10)	61
[30.10, 30.14)	4

乙厂	
分组	频数
[29.86, 29.90)	29
[29.90, 29.94)	71
[29.84, 29.98)	85
[29.98, 30.02)	159
[30.02, 30.06)	76
[30.06, 30.10)	62
[30.10, 30.14)	18

- (1) 试分别估计两个分厂生产的零件的优质品率;
- (2) 由于以上统计数据填下面  $2 \times 2$  列联表, 并问是否有 99% 的把握认为“两个分厂生产的零件的质量有差异”.

	甲厂	乙厂	合计
优质品			
非优质品			
合计			

附:  $\chi^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}, \frac{P(\chi^2 \geq k)}{k} \begin{matrix} 0.05 & 0.01 \\ 3.841 & 6.635 \end{matrix}$

21. 设  $f(x) = e^x(ax^2 + x + 1)$ , 且曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线与  $x$  轴平行.
- (1) 求  $a$  的值, 并讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 证明: 当  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $|f(\cos \theta) - f(\sin \theta)| < 2$ .

22. 已知椭圆  $C$  过点  $A(1, \frac{3}{2})$ , 两个焦点为  $(-1, 0), (1, 0)$ .
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2)  $E, F$  是椭圆  $C$  上的两个动点, 如果直线  $AE$  的斜率与  $AF$  的斜率互为相反数, 证明直线  $EF$  的斜率为定值, 并求出这个定值.

# 2009 普通高等学校招生考试 (琼、宁卷理)

## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ , 则  $A \cap \complement_{\mathbf{N}} B =$  ( )  
(A)  $\{1, 5, 7\}$  (B)  $\{3, 5, 7\}$  (C)  $\{1, 3, 9\}$  (D)  $\{1, 2, 3\}$
- 复数  $\frac{3+2i}{2-3i} - \frac{3-2i}{2+3i} =$  ( )  
(A) 0 (B) 2 (C)  $-2i$  (D) 2
- 对变量  $x, y$  有观测数据  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ), 得散点图 1; 对变量  $u, v$  有观测数据  $(u_i, v_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ), 得散点图 2. 由这两个散点图可以判断 ( )

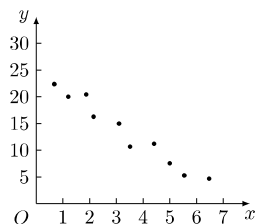


图 1

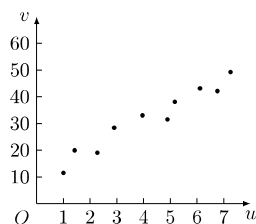
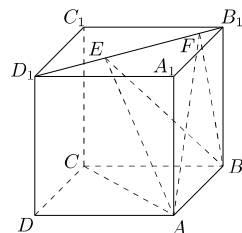


图 2

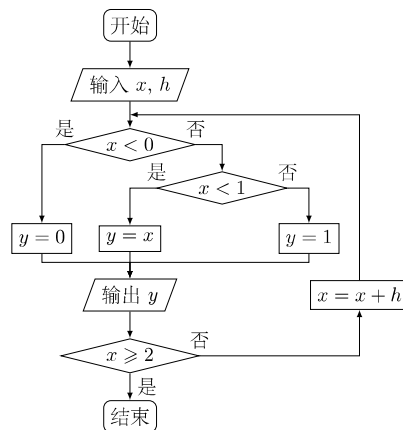
- 变量  $x$  与  $y$  正相关,  $u$  与  $v$  正相关
  - 变量  $x$  与  $y$  正相关,  $u$  与  $v$  负相关
  - 变量  $x$  与  $y$  负相关,  $u$  与  $v$  正相关
  - 变量  $x$  与  $y$  负相关,  $u$  与  $v$  负相关
- 双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  的焦点到渐近线的距离为 ( )  
(A)  $2\sqrt{3}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{3}$  (D) 1
  - 有四个关于三角函数的命题:  
 $p_1: \exists x \in \mathbf{R}, \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2};$   
 $p_2: \exists x, y \in \mathbf{R}, \sin(x-y) = \sin x - \sin y;$   
 $p_3: \forall x \in [0, \pi], \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sin x;$   
 $p_4: \sin x = \cos y \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}.$   
 其中假命题的是 ( )  
 (A)  $p_1, p_4$  (B)  $p_2, p_4$  (C)  $p_1, p_3$  (D)  $p_2, p_3$
  - 设  $x, y$  满足  $\begin{cases} 2x + y \geq 4, \\ x - y \geq -1, \\ x - 2y \leq 2, \end{cases}$  则  $z = x + y$  ( )  
 (A) 有最小值 2, 最大值 3 (B) 有最小值 2, 无最大值  
 (C) 有最大值 3, 无最小值 (D) 既无最小值, 也无最大值

- 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $4a_1, 2a_2, a_3$  成等差数列. 若  $a_1 = 1$ , 则  $S_4 =$  ( )  
(A) 7 (B) 8 (C) 15 (D) 16
- 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱线长为 1, 线段  $B_1D_1$  上有两个动点  $E, F$ , 且  $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则下列结论中错误的是 ( )

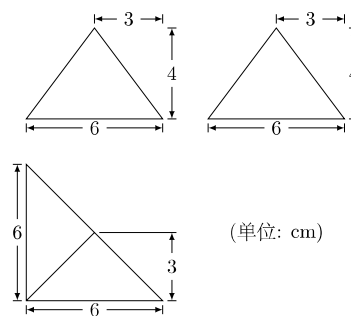


- $AC \perp BE$
  - $EF \parallel$  平面  $ABCD$
  - 三棱锥  $A - BEF$  的体积为定值
  - 异面直线  $AE, BF$  所成的角为定值
- 已知  $O, N, P$  在  $\triangle ABC$  所在平面内, 且  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ ,  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$ ,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ , 则点  $O, N, P$  依次是  $\triangle ABC$  的 ( )  
 (A) 重心、外心、垂心 (B) 重心、外心、内心  
 (C) 外心、重心、垂心 (D) 外心、重心、内心

- 如果执行如图的程序框图, 输入  $x = -2, h = 0.5$ , 那么输出的各个数的和等于 ( )



- 3
  - 3.5
  - 4
  - 4.5
- 一个棱锥的三视图如图, 则该棱锥的全面积 (单位:  $\text{cm}^2$ ) 为 ( )

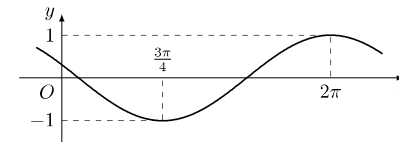


(单位: cm)

- $48 + 12\sqrt{2}$
  - $48 + 24\sqrt{2}$
  - $36 + 12\sqrt{2}$
  - $36 + 24\sqrt{2}$
- 用  $\min\{a, b, c\}$  表示  $a, b, c$  三个数中的最小值. 设  $f(x) = \min\{2^x, x + 2, 10 - x\}$  ( $x \geq 0$ ), 则  $f(x)$  的最大值为 ( )  
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

## 二、填空题

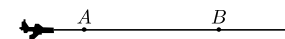
- 设已知抛物线  $C$  的顶点在坐标原点, 焦点为  $F(1, 0)$ , 直线  $l$  与抛物线  $C$  相交于  $A, B$  两点. 若  $AB$  的中点为  $(2, 2)$ , 则直线  $l$  的方程为\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $y = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\pi \leq \varphi < \pi$ ) 的图象如图所示, 则  $\varphi =$ \_\_\_\_\_.



- 7 名志愿者中安排 6 人在周六、周日两天参加社区公益活动. 若每天安排 3 人, 则不同的安排方案共有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)
- 等差数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知  $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0, S_{2m-1} = 38$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 为了测量两山顶  $M, N$  间的距离, 飞机沿水平方向在  $A, B$  两点进行测量.  $A, B, M, N$  在同一个铅垂平面内 (如示意图), 飞机能够测量的数据有俯角和  $A, B$  间的距离, 请设计一个方案, 包括: ① 指出需要测量的数据 (用字母表示, 并在图中标出); ② 用文字和公式写出计算  $M, N$  间的距离的步骤.



18. 某工厂有工人 1000 名, 其中 250 名工人参加过短期培训 (称为  $A$  类工人), 另外 750 名工人参加过长期培训 (称为  $B$  类工人), 现用分层抽样方法 (按  $A$  类、 $B$  类分二层) 从该工厂的工人中共抽查 100 名工人, 调查他们的生产能力 (此处生产能力指一天加工的零件数).

- (1) 求甲、乙两工人都被抽到的概率, 其中甲为  $A$  类工人, 乙为  $B$  类工人;  
(2) 从  $A$  类工人中的抽查结果和从  $B$  类工人中的抽插结果分别如下表 1 和表 2.

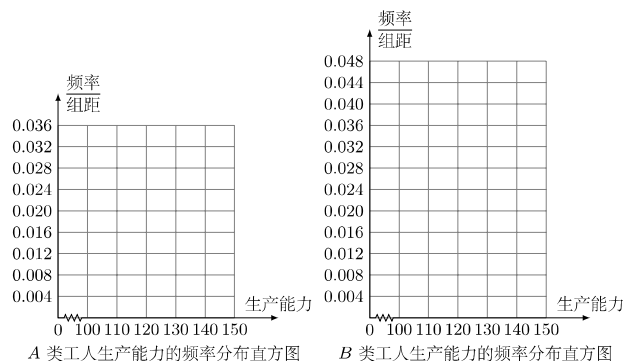
表 1:

生产能力分组	[100, 110)	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150)
人数	4	8	$x$	5	3

表 2:

生产能力分组	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150)
人数	6	$y$	36	18

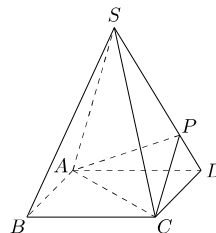
- ① 先确定  $x, y$ , 再在答题纸上完成下列频率分布直方图. 就生产能力而言,  $A$  类工人中个体间的差异程度与  $B$  类工人中个体间的差异程度哪个更小? (不用计算, 可通过观察直方图直接回答结论)



- ② 分别估计  $A$  类工人和  $B$  类工人生产能力的平均数, 并估计该工厂工人的生产能力的平均数. (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

19. 如图, 四棱锥  $S-ABCD$  的底面是正方形, 每条侧棱的长都是地面边长的  $\sqrt{2}$  倍,  $P$  为侧棱  $SD$  上的点.

- (1) 求证:  $AC \perp SD$ ;  
(2) 若  $SD \perp$  平面  $PAC$ , 求二面角  $P-AC-D$  的大小;  
(3) 在 (2) 的条件下, 侧棱  $SC$  上是否存在一点  $E$ , 使得  $BE \parallel$  平面  $PAC$ . 若存在, 求  $SE:EC$  的值; 若不存在, 试说明理由.



20. 已知椭圆  $C$  的中心为直角坐标系  $xOy$  的原点, 焦点在  $x$  轴上, 它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1.

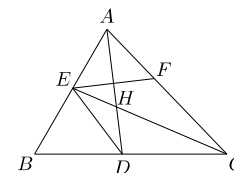
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
(2) 若  $P$  为椭圆  $C$  上的动点,  $M$  为过  $P$  且垂直于  $x$  轴的直线上的点,  $\frac{|OP|}{|OM|} = \lambda$ , 求点  $M$  的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

21. 已知函数  $f(x) = (x^3 + 3x^2 + ax + b)e^{-x}$ .

- (1) 若  $a = b = -3$ , 求  $f(x)$  的单调区间;  
(2) 若  $f(x)$  在  $(-\infty, \alpha)$ ,  $(2, \beta)$  单调增加, 在  $(\alpha, 2)$ ,  $(\beta, +\infty)$  单调减少, 证明:  $\beta - \alpha < 6$ .

22. 如图, 已知  $\triangle ABC$  的两条角平分线  $AD$  和  $CE$  相交于  $H$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $F$  在  $AC$  上, 且  $AE = AF$ .

- (1) 证明: 证明:  $B, D, H, E$  四点共圆;  
(2) 证明:  $CE$  平分  $\angle DEF$ .



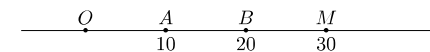
23. 已知曲线  $C_1: \begin{cases} x = -4 + \cos t, \\ y = 3 + \sin t, \end{cases}$  ( $t$  为参数),  $C_2: \begin{cases} x = 8 \cos \theta, \\ y = 3 \sin \theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数).

- (1) 化  $C_1, C_2$  的方程为普通方程, 并说明它们分别表示什么曲线  
(2) 若  $C_1$  上的点  $P$  对应的参数为  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $Q$  为  $C_2$  上的动点, 求  $PQ$  中点

- $M$  到直线  $C_3: \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -2 + t, \end{cases}$  ( $t$  为参数) 距离的最小值.

24. 如图,  $O$  为数轴的原点,  $A, B, M$  为数轴上三点,  $C$  为线段  $OM$  上的动点, 设  $x$  表示  $C$  与原点的距离,  $y$  表示  $C$  到  $A$  距离 4 倍与  $C$  到  $B$  距离的 6 倍的和.

- (1) 将  $y$  表示成  $x$  的函数;  
(2) 要使  $y$  的值不超过 70,  $x$  应该在什么范围内取值?



# 2009 普通高等学校招生考试 (琼、宁卷文)

## 一、选择题

- 已知集合  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $\{3, 5\}$  (B)  $\{3, 6\}$  (C)  $\{3, 7\}$  (D)  $\{3, 9\}$
- 复数  $\frac{3+2i}{2-3i} =$  ( )  
(A) 1 (B) -1 (C) i (D) -i
- 对变量  $x, y$  有观测数据  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ), 得散点图 1; 对变量  $u, v$  有观测数据  $(u_i, v_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ), 得散点图 2. 由这两个散点图可以判断 ( )

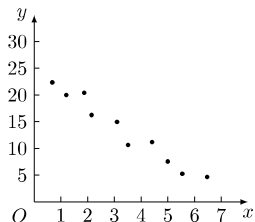


图 1

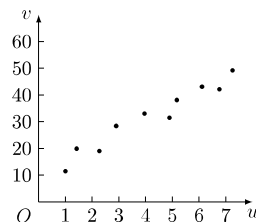
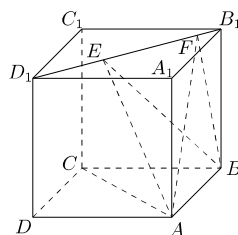


图 2

- 变量  $x$  与  $y$  正相关,  $u$  与  $v$  正相关  
(A) 变量  $x$  与  $y$  正相关,  $u$  与  $v$  负相关  
(B) 变量  $x$  与  $y$  负相关,  $u$  与  $v$  正相关  
(C) 变量  $x$  与  $y$  负相关,  $u$  与  $v$  负相关
- 有四个关于三角函数的命题:  
 $p_1: \exists x \in \mathbf{R}, \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2};$   
 $p_2: \exists x, y \in \mathbf{R}, \sin(x-y) = \sin x - \sin y;$   
 $p_3: \forall x \in [0, \pi], \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sin x;$   
 $p_4: \sin x = \cos y \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}.$   
 其中假命题的是 ( )  
 (A)  $p_1, p_4$  (B)  $p_2, p_4$  (C)  $p_1, p_3$  (D)  $p_2, p_3$
- 已知圆  $C_1: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ , 圆  $C_2$  与圆  $C_1$  关于直线  $x - y - 1 = 0$  对称, 则圆  $C_2$  的方程为 ( )  
 (A)  $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$  (B)  $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$   
 (C)  $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$  (D)  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$
- 设  $x, y$  满足  $\begin{cases} 2x + y \geq 4, \\ x - y \geq -1, \\ x - 2y \leq 2, \end{cases}$  则  $z = x + y$  ( )

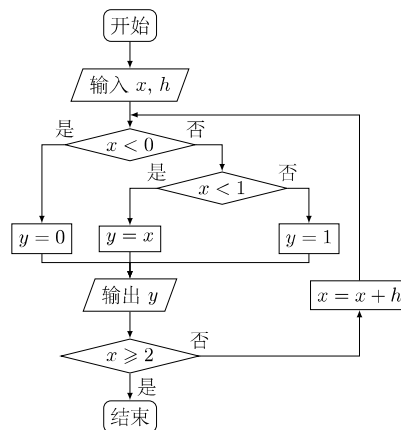
- (A) 有最小值 2, 最大值 3 (B) 有最小值 2, 无最大值  
(C) 有最大值 3, 无最小值 (D) 既无最小值, 也无最大值

- 已知  $\mathbf{a} = (-3, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 0)$ , 向量  $\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}$  与  $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  垂直, 则实数  $\lambda$  的值为 ( )  
 (A)  $-\frac{1}{7}$  (B)  $\frac{1}{7}$  (C)  $-\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{6}$
- 等差数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知  $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0$ ,  $S_{2m-1} = 38$ , 则  $m =$  ( )  
 (A) 38 (B) 20 (C) 10 (D) 9
- 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1, 线段  $B_1D_1$  上有两个动点  $E, F$ , 且  $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则下列结论中错误的是 ( )



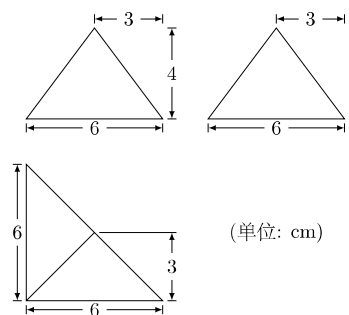
- (A)  $AC \perp BE$   
(B)  $EF \parallel$  平面  $ABCD$   
(C) 三棱锥  $A - BEF$  的体积为定值  
(D) 异面直线  $AE, BF$  所成的角为定值

- 如果执行如图的程序框图, 输入  $x = -2$ ,  $h = 0.5$ , 那么输出的各个数的和等于 ( )



- (A) 3 (B) 3.5 (C) 4 (D) 4.5

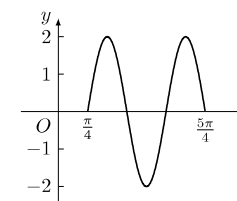
- 一个棱锥的三视图如图, 则该棱锥的全面积 (单位:  $\text{cm}^2$ ) 为 ( )



- (A)  $48 + 12\sqrt{2}$  (B)  $48 + 24\sqrt{2}$  (C)  $36 + 12\sqrt{2}$  (D)  $36 + 24\sqrt{2}$
- 用  $\min\{a, b, c\}$  表示  $a, b, c$  三个数中的最小值. 设  $f(x) = \min\{2^x, x + 2, 10 - x\}$  ( $x \geq 0$ ), 则  $f(x)$  的最大值为 ( )  
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

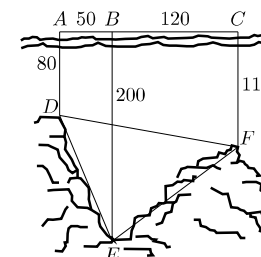
## 二、填空题

- 曲线  $y = xe^x + 2x + 1$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.
- 已知抛物线  $C$  的顶点坐标为原点, 焦点在  $x$  轴上, 直线  $y = x$  与抛物线  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $P(2, 2)$  为  $AB$  的中点, 则抛物线  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.
- 等比数列  $a_n$  的公比  $q > 0$ , 已知  $a_2 = 1$ ,  $a_{n+2} + a_{n+1} = 6a_n$ , 则  $a_n$  的前 4 项和  $S_4 =$ \_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  的图象如图所示, 则  $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) =$ \_\_\_\_\_.

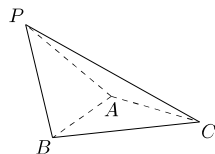


## 三、解答题

- 如图, 为了解某海域海底构造, 在海平面内一条直线上的  $A, B, C$  三点进行测量, 已知  $AB = 50$  m,  $BC = 120$  m, 于  $A$  处测得水深  $AD = 80$  m, 于  $B$  处测得水深  $BE = 200$  m, 于  $C$  处测得水深  $CF = 110$  m, 求  $\angle DEF$  的余弦值.



18. 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $\triangle PAB$  是等边三角形,  $\angle PAC = \angle PBC = 90^\circ$ .
- (1) 求证:  $AB \perp PC$ ;
- (2) 若  $PC = 4$ , 且平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ , 求三棱锥  $P-ABC$  体积.



19. 某工厂有工人 1000 名, 其中 250 名工人参加过短期培训 (称为  $A$  类工人), 另外 750 名工人参加过长期培训 (称为  $B$  类工人), 现用分层抽样方法 (按  $A$  类、 $B$  类分二层) 从该工厂的工人中共抽查 100 名工人, 调查他们的生产能力 (此处生产能力指一天加工的零件数).
- (1) 求甲、乙两工人都被抽到的概率, 其中甲为  $A$  类工人, 乙为  $B$  类工人;
- (2) 从  $A$  类工人中的抽查结果和从  $B$  类工人中的抽插结果分别如下表 1 和表 2.

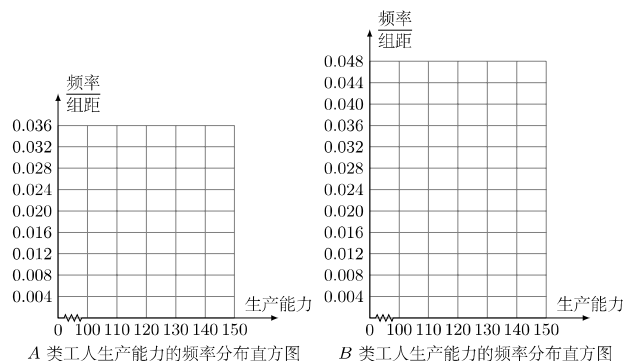
表 1:

生产能力分组	[100, 110)	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150)
人数	4	8	$x$	5	3

表 2:

生产能力分组	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150)
人数	6	$y$	36	18

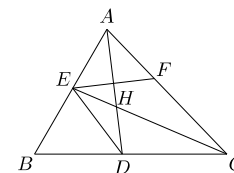
① 先确定  $x, y$ , 再在答题纸上完成下列频率分布直方图. 就生产能力而言,  $A$  类工人中个体间的差异程度与  $B$  类工人中个体间的差异程度哪个更小? (不用计算, 可通过观察直方图直接回答结论)



② 分别估计  $A$  类工人和  $B$  类工人生产能力的平均数, 并估计该工厂工人的生产能力的平均数. (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

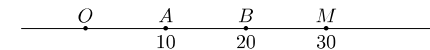
20. 已知椭圆  $C$  的中心为直角坐标系  $xOy$  的原点, 焦点在  $x$  轴上, 它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1.
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 若  $P$  为椭圆  $C$  上的动点,  $M$  为过  $P$  且垂直于  $x$  轴的直线上的点,  $\frac{|OP|}{|OM|} = e$  ( $e$  为椭圆  $C$  的离心率), 求点  $M$  的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

22. 如图, 已知  $\triangle ABC$  的两条角平分线  $AD$  和  $CE$  相交于  $H$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $F$  在  $AC$  上, 且  $AE = AF$ .
- (1) 证明: 证明:  $B, D, H, E$  四点共圆;
- (2) 证明:  $CE$  平分  $\angle DEF$ .



23. 已知曲线  $C_1: \begin{cases} x = -4 + \cos t, \\ y = 3 + \sin t, \end{cases}$  ( $t$  为参数),  $C_2: \begin{cases} x = 8 \cos \theta, \\ y = 3 \sin \theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数).
- (1) 化  $C_1, C_2$  的方程为普通方程, 并说明它们分别表示什么曲线
- (2) 若  $C_1$  上的点  $P$  对应的参数为  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $Q$  为  $C_2$  上的动点, 求  $PQ$  中点  $M$  到直线  $C_3: \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -2 + t, \end{cases}$  ( $t$  为参数) 距离的最小值.

24. 如图,  $O$  为数轴的原点,  $A, B, M$  为数轴上三点,  $C$  为线段  $OM$  上的动点, 设  $x$  表示  $C$  与原点的距离,  $y$  表示  $C$  到  $A$  距离 4 倍与  $C$  到  $B$  距离的 6 倍的和.
- (1) 将  $y$  表示成  $x$  的函数;
- (2) 要使  $y$  的值不超过 70,  $x$  应该在什么范围内取值?



# 2009 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

## 一、选择题

1. 集合  $A = \{0, 2, a\}$ ,  $B = \{1, a^2\}$ . 若  $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$ , 则  $a$  的值为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

2. 复数  $\frac{3-i}{1-i}$  等于 ( )

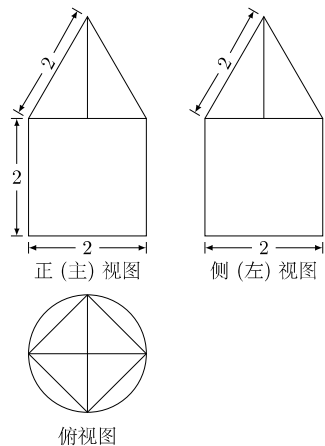
(A)  $1+2i$  (B)  $1-2i$  (C)  $2+i$  (D)  $2-i$

3. 将函数  $y = \sin 2x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 再向上平移 1 个单位, 所得图象的函数解析式是 ( )

(A)  $y = \cos 2x$  (B)  $y = 2\cos^2 x$

(C)  $y = 1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  (D)  $y = 2\sin^2 x$

4. 一空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



(A)  $2\pi + 2\sqrt{3}$  (B)  $4\pi + 2\sqrt{3}$  (C)  $2\pi + \frac{2\sqrt{3}}{3}$  (D)  $4\pi + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 已知  $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面,  $m$  为平面  $\alpha$  内的一条直线, 则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $m \perp \beta$ ”的 ( )

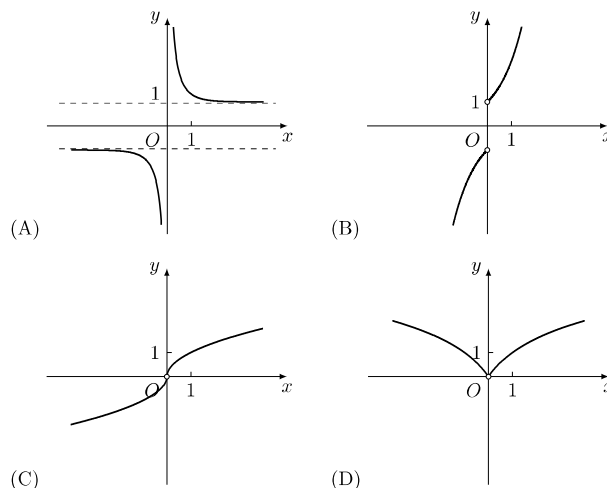
(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

6. 函数  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  的图象大致为 ( )



7. 设  $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面内的一点,  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BP}$ , 则 ( )

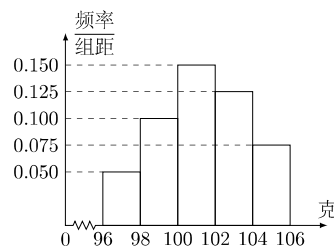
(A)  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \mathbf{0}$

(B)  $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \mathbf{0}$

(C)  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$

(D)  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$

8. 某工厂对一批产品进行了抽样检测. 如图是根据抽样检测后的产品净重(单位: 克)数据绘制的频率分布直方图, 其中产品净重的范围是  $[96, 106]$ , 样本数据分组为  $[96, 98)$ ,  $[98, 100)$ ,  $[100, 102)$ ,  $[102, 104)$ ,  $[104, 106]$ . 已知样本中产品净重小于 100 克的个数是 36, 则样本中净重大于或等于 98 克并且小于 104 克的产品的个数是 ( )



(A) 90 (B) 75 (C) 60 (D) 45

9. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线与抛物线  $y = x^2 + 1$  只有一个公共点, 则双曲线的离心率为 ( )

(A)  $\frac{5}{4}$

(B) 5

(C)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(D)  $\sqrt{5}$

10. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x), & x \leq 0, \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0, \end{cases}$  则  $f(2009)$  的值为 ( )

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

11. 在区间  $[-1, 1]$  上随机取一个数  $x$ ,  $\cos \frac{\pi x}{2}$  的值介于 0 到  $\frac{1}{2}$  之间的概率为 ( )

(A)  $\frac{1}{3}$

(B)  $\frac{2}{\pi}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D)  $\frac{2}{3}$

12. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 3x - y - 6 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$  若目标函数  $z = ax + by$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) 的是最大值为 12, 则  $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$  的最小值为 ( )

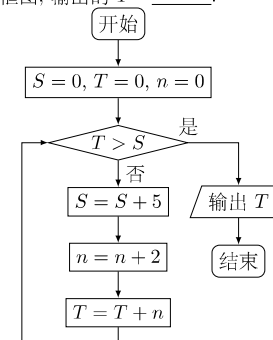
(A)  $\frac{25}{6}$  (B)  $\frac{8}{3}$  (C)  $\frac{11}{3}$  (D) 4

## 二、填空题

13. 不等式  $|2x-1| - |x-2| < 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x) = a^x - x - a$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 有两个零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 执行如图的程序框图, 输出的  $T =$ \_\_\_\_\_.



16. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$ , 满足  $f(x-4) = -f(x)$ , 且在区间  $[0, 2]$  上是增函数, 若方程  $f(x) = m$  ( $m > 0$ ) 在区间  $[-8, 8]$  上有四个不同的根  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

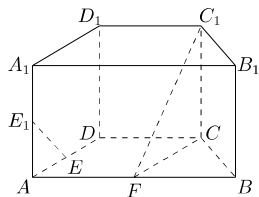
17. 设函数  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2 x$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的最大值和最小正周期;

(2) 设  $A, B, C$  为  $\triangle ABC$  的三个内角, 若  $\cos B = \frac{1}{3}$ ,  $f\left(\frac{C}{3}\right) = -\frac{1}{4}$ , 且  $C$  为锐角, 求  $\sin A$ .

18. 如图, 在直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为等腰梯形,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = CD = 2$ ,  $AA_1 = 2$ ,  $E$ 、 $E_1$ 、 $F$  分别是棱  $AD$ 、 $AA_1$ 、 $AB$  的中点.

- (1) 证明: 直线  $EE_1 \parallel$  平面  $FCC_1$ ;  
(2) 求二面角  $B - FC_1 - C$  的余弦值.



19. 在某校组织的一次篮球定点投篮训练中, 规定每人最多投 3 次; 在  $A$  处每投进一球得 3 分, 在  $B$  处每投进一球得 2 分; 如果前两次得分之和超过 3 分即停止投篮, 否则投第三次, 某同学在  $A$  处的命中率  $q_1$  为 0.25, 在  $B$  处的命中率为  $q_2$ , 该同学选择先在  $A$  处投一球, 以后都在  $B$  处投, 用  $\xi$  表示该同学投篮训练结束后所得的总分, 其分布列为

$\xi$	0	2	3	4	5
$p$	0.03	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$

- (1) 求  $q_2$  的值;  
(2) 求随机变量  $\xi$  的数学期望  $E\xi$ ;  
(3) 试比较该同学选择都在  $B$  处投篮得分超过 3 分与选择上述方式投篮得分超过 3 分的概率的大小.

20. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 点  $(n, S_n)$  均在函数  $y = b^x + r$  ( $b > 0$  且  $b \neq 1$ ,  $b, r$  均为常数) 的图象上.

- (1) 求  $r$  的值;  
(2) 当  $b = 2$  时, 记  $b_n = 2(\log_2 a_n + 1)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ). 证明: 对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 不等式  $\frac{b_1 + 1}{b_1} \cdot \frac{b_2 + 1}{b_2} \cdots \frac{b_n + 1}{b_n} > \sqrt{n+1}$  成立.

21. 两县城  $A$  和  $B$  相距 20 km, 现计划在两县城外以  $AB$  为直径的半圆弧  $\widehat{AB}$  上选择一点  $C$  建造垃圾处理厂, 其对城市的影响度与所选地点到城市的距离有关, 对城  $A$  和城  $B$  的总影响度为城  $A$  与城  $B$  的影响度之和. 记  $C$  点到城  $A$  的距离为  $x$  km, 建在  $C$  处的垃圾处理厂对城  $A$  和城  $B$  的总影响度为  $y$ . 统计调查表明: 垃圾处理厂对城  $A$  的影响度与所选地点到城  $A$  的距离的平方成反比, 比例系数为 4; 对城  $B$  的影响度与所选地点到城  $B$  的距离的平方成反比, 比例系数为  $k$ , 当垃圾处理厂建在  $\widehat{AB}$  的中点时, 对城  $A$  和城  $B$  的总影响度为 0.065.

- (1) 将  $y$  表示成  $x$  的函数;  
(2) 讨论 (1) 中函数的单调性, 并判断弧  $\widehat{AB}$  上是否存在一点, 使建在此处的垃圾处理厂对城  $A$  和城  $B$  的总影响度最小? 若存在, 求出该点到城  $A$  的距离; 若不存在, 说明理由.

22. 设椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b > 0$ ) 过  $M(2, \sqrt{2})$ ,  $N(\sqrt{6}, 1)$  两点,  $O$  为坐标原点.

- (1) 求椭圆  $E$  的方程;  
(2) 是否存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与椭圆  $E$  恒有两个交点  $A, B$ , 且  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ? 若存在, 写出该圆的方程, 并求  $|AB|$  的取值范围; 若不存在, 说明理由.



# 2009 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

## 一、选择题

1. 集合  $A = \{0, 2, a\}$ ,  $B = \{1, a^2\}$ . 若  $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$ , 则  $a$  的值为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

2. 复数  $\frac{3-i}{1-i}$  等于 ( )

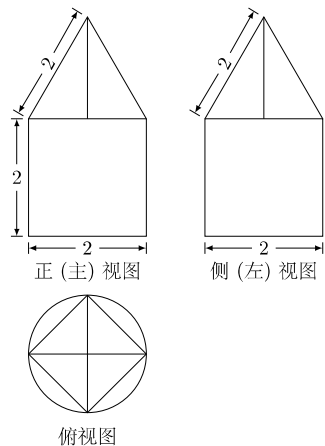
(A)  $1+2i$  (B)  $1-2i$  (C)  $2+i$  (D)  $2-i$

3. 将函数  $y = \sin 2x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 再向上平移 1 个单位, 所得图象的函数解析式是 ( )

(A)  $y = \cos 2x$  (B)  $y = 2\cos^2 x$

(C)  $y = 1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  (D)  $y = 2\sin^2 x$

4. 一空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



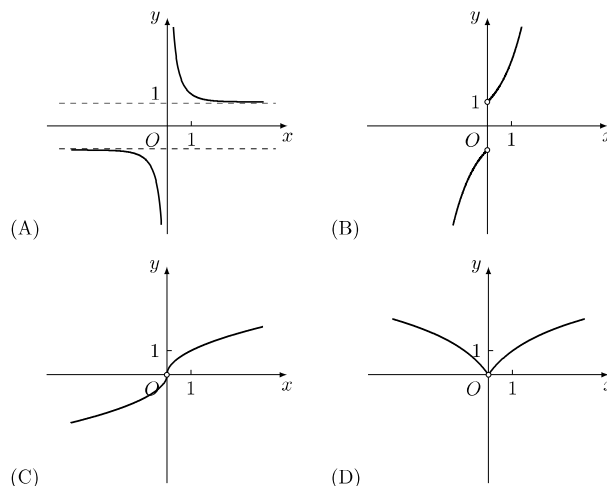
(A)  $2\pi + 2\sqrt{3}$  (B)  $4\pi + 2\sqrt{3}$  (C)  $2\pi + \frac{2\sqrt{3}}{3}$  (D)  $4\pi + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 在  $\mathbf{R}$  上定义运算  $\odot$ :  $a \odot b = ab + 2a + b$ , 则满足  $x \odot (x-2) < 0$  的实数  $x$  的取值范围为 ( )

(A)  $(0, 2)$  (B)  $(-2, 1)$

(C)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$  (D)  $(-1, 2)$

6. 函数  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  的图象大致为 ( )



7. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = \begin{cases} \log_2(4-x), & x \leq 0, \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0, \end{cases}$  则  $f(3)$  的值为 ( )

(A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2

8. 设  $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面内的一点,  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BP}$ , 则 ( )

(A)  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \mathbf{0}$  (B)  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$

(C)  $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \mathbf{0}$  (D)  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$

9. 已知  $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面,  $m$  为平面  $\alpha$  内的一条直线, 则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $m \perp \beta$ ”的 ( )

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

10. 设斜率为 2 的直线  $l$  过抛物线  $y^2 = ax$  ( $a \neq 0$ ) 的焦点  $F$ , 且和  $y$  轴交于点  $A$ . 若  $\triangle OAF$  ( $O$  为坐标原点) 的面积为 4, 则抛物线方程为 ( )

(A)  $y^2 = \pm 4x$  (B)  $y^2 = \pm 8x$  (C)  $y^2 = 4x$  (D)  $y^2 = 8x$

11. 在区间  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  上随机取一个数  $x$ ,  $\cos x$  的值介于 0 到  $\frac{1}{2}$  之间的概率为 ( )

(A)  $\frac{1}{3}$

(B)  $\frac{2}{\pi}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D)  $\frac{2}{3}$

12. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x-4) = -f(x)$ , 且在区间  $[0, 2]$  上是增函数, 则 ( )

(A)  $f(-25) < f(11) < f(80)$  (B)  $f(80) < f(11) < f(-25)$

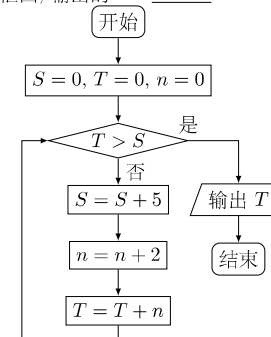
(C)  $f(11) < f(80) < f(-25)$  (D)  $f(-25) < f(80) < f(11)$

## 二、填空题

13. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 = 7$ ,  $a_5 = a_2 + 6$ , 则  $a_6 =$ \_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x) = a^x - x - a$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 有两个零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 执行如图的程序框图, 输出的  $T =$ \_\_\_\_\_.



16. 某公司租赁甲、乙两种设备生产  $A, B$  两类产品, 甲种设备每天能生产  $A$  类产品 5 件和  $B$  类产品 10 件, 乙种设备每天能生产  $A$  类产品 6 件和  $B$  类产品 20 件. 已知设备甲每天的租赁费为 200 元, 设备乙每天的租赁费为 300 元. 现该公司至少要生产  $A$  类产品 50 件,  $B$  类产品 140 件, 所需租赁费最少为\_\_\_\_\_元.

## 三、解答题

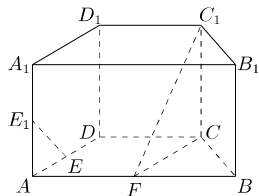
17. 已知函数  $f(x) = 2\sin x \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos x \sin \varphi - \sin x$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 在  $x = \pi$  处取最小值.

(1) 求  $\varphi$  的值;

(2) 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边. 已知  $a = 1, b = \sqrt{2}$ ,

$f(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 求角  $C$ .

18. 如图, 在直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为等腰梯形,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = CD = 2$ ,  $AA_1 = 2$ ,  $E$ 、 $E_1$  分别是棱  $AD$ 、 $AA_1$  的中点.
- (1) 设  $F$  是棱  $AB$  的中点, 证明: 直线  $EE_1 \parallel$  平面  $FCC_1$ ;  
 (2) 证明: 平面  $D_1AC \perp$  平面  $BB_1C_1C$ .



19. 一汽车厂生产  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三类轿车, 每类轿车均有舒适型和标准型两种型号, 某月的产量如下表 (单位: 辆):

	轿车 $A$	轿车 $B$	轿车 $C$
舒适型	100	150	$z$
标准型	300	450	600

按类型分层抽样的方法在这个月生产的轿车中抽取 50 辆, 其中有  $A$  类轿车 10 辆.

- (1) 求  $z$  的值;  
 (2) 用分层抽样的方法在  $C$  类轿车中抽取一个容量为 5 的样本, 将该样本看成一个总体, 从中任取 2 辆, 求至少有 1 辆舒适型轿车的概率;  
 (3) 用随机抽样的方法从  $B$  类舒适型轿车中抽取 8 辆, 经检测它们的得分如下: 9.4, 8.6, 9.2, 9.6, 8.7, 9.3, 9.0, 8.2. 把这 8 辆轿车的得分看作一个总体, 从中任取一个数, 求该数与样本平均数之差的绝对值不超过 0.5 的概率.

20. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 点  $(n, S_n)$  均在函数  $y = b^x + r$  ( $b > 0$  且  $b \neq 1$ ,  $b, r$  均为常数) 的图象上.
- (1) 求  $r$  的值;  
 (2) 当  $b = 2$  时, 记  $b_n = \frac{n+1}{4a_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

22. 设  $m \in \mathbf{R}$ , 在平面直角坐标系中, 已知向量  $\mathbf{a} = (mx, y + 1)$ , 向量  $\mathbf{b} = (x, y - 1)$ ,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 动点  $M(x, y)$  的轨迹为  $E$ .
- (1) 求轨迹  $E$  的方程, 并说明该方程所表示曲线的形状;  
 (2) 已知  $m = \frac{1}{4}$ . 证明: 存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与轨迹  $E$  恒有两个交点  $A, B$ , 且  $OA \perp OB$  ( $O$  为坐标原点), 并求出该圆的方程;  
 (3) 已知  $m = \frac{1}{4}$ . 设直线  $l$  与圆  $C: x^2 + y^2 = R^2$  ( $1 < R < 2$ ) 相切于  $A_1$ , 且  $l$  与轨迹  $E$  只有一个公共点  $B_1$ . 当  $R$  为何值时,  $|A_1B_1|$  取得最大值? 并求最大值.

21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + x + 3$ , 其中  $a \neq 0$ .
- (1) 当  $a, b$  满足什么条件时,  $f(x)$  取得极值?  
 (2) 已知  $a > 0$ , 且  $f(x)$  在区间  $(0, 1]$  上单调递增, 试用  $a$  表示出  $b$  的取值范围.

# 2009 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

## 一、选择题

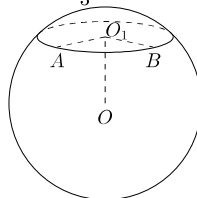
1. 设不等式  $x^2 - x \leq 0$  的解集为  $M$ , 函数  $f(x) = \ln(1 - |x|)$  的定义域为  $N$ , 则  $M \cap N$  为 ( )  
(A)  $[0, 1]$  (B)  $(0, 1)$  (C)  $[0, 1]$  (D)  $(-1, 0]$
2. 已知  $z$  是纯虚数,  $\frac{z+2}{1-i}$  是实数, 那么  $z$  等于 ( )  
(A)  $2i$  (B)  $i$  (C)  $-i$  (D)  $-2i$
3. 函数  $f(x) = \sqrt{2x-4}$  ( $x \geq 4$ ) 的反函数为 ( )  
(A)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$  ( $x \geq 0$ ) (B)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$  ( $x \geq 2$ )  
(C)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$  ( $x \geq 0$ ) (D)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$  ( $x \geq 2$ )
4. 过原点且倾斜角为  $60^\circ$  的直线被圆  $x^2 + y^2 - 4y = 0$  所截得的弦长为 ( )  
(A)  $\sqrt{3}$  (B)  $2$  (C)  $\sqrt{6}$  (D)  $2\sqrt{3}$
5. 若  $3 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$ , 则  $\frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha}$  的值为 ( )  
(A)  $\frac{10}{3}$  (B)  $\frac{5}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $-2$
6. 若  $(1-2x)^{2009} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2009}x^{2009}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2009}}{2^{2009}}$  的值为 ( )  
(A)  $2$  (B)  $0$  (C)  $-1$  (D)  $-2$
7. “ $m > n > 0$ ”是“方程  $mx^2 + ny^2 = 1$  表示焦点在  $y$  轴上的椭圆”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
8. 在  $\triangle ABC$  中,  $M$  是  $BC$  的中点,  $AM = 1$ , 点  $P$  在  $AM$  上且满足  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$ , 则  $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$  等于 ( )  
(A)  $-\frac{4}{9}$  (B)  $-\frac{4}{3}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{4}{9}$
9. 从  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  这六个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数的个数为 ( )  
(A)  $300$  (B)  $216$  (C)  $180$  (D)  $162$
10. 若正方体的棱长为  $\sqrt{2}$ , 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{2}{3}$
11. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \geq 1, \\ x-y \geq -1, \\ 2x-y \leq 2, \end{cases}$  目标函数  $z = ax + 2y$  仅在点  $(1, 0)$  处取得最小值, 则  $a$  的取值范围是 ( )

(A)  $(-1, 2)$  (B)  $(-4, 2)$  (C)  $(-4, 0]$  (D)  $(-2, 4)$

12. 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足: 对任意的  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$  ( $x_1 \neq x_2$ ), 有  $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) > 0$ . 则当  $n \in \mathbf{N}^*$  时, 有 ( )  
(A)  $f(-n) < f(n-1) < f(n+1)$  (B)  $f(n-1) < f(-n) < f(n+1)$   
(C)  $f(n+1) < f(-n) < f(n-1)$  (D)  $f(n+1) < f(n-1) < f(-n)$

## 二、填空题

13. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_6 = S_3 = 12$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$ \_\_\_\_\_.
14. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有\_\_\_\_\_人.
15. 如图球  $O$  的半径为 2, 圆  $O_1$  是一小圆,  $O_1O = \sqrt{2}$ ,  $A, B$  是圆  $O_1$  上两点. 若  $A, B$  两点间的球面距离为  $\frac{2\pi}{3}$ , 则  $\angle AO_1B =$ \_\_\_\_\_.

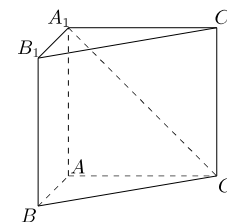


16. 设曲线  $y = x^{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 在点  $(1, 1)$  处的切线与  $x$  轴的交点的横坐标为  $x_n$ , 令  $a_n = \lg x_n$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$  的值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  (其中  $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象与  $x$  轴的交点中, 相邻两个交点之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 且图象上一个最低点为  $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$ .  
(1) 求  $f(x)$  的解析式;  
(2) 当  $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 求  $f(x)$  的值域.

18. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 1, AC = AA_1 = \sqrt{3}, \angle ABC = 60^\circ$ .  
(1) 证明:  $AB \perp A_1C$ ;  
(2) 求二面角  $A - A_1C - B$  的大小.



19. 某食品企业一个月内被消费者投诉的次数用  $\xi$  表示, 据统计, 随机变量  $\xi$  的概率分布如下:

$\xi$	0	1	2	3
$p$	0.1	0.3	$2a$	$a$

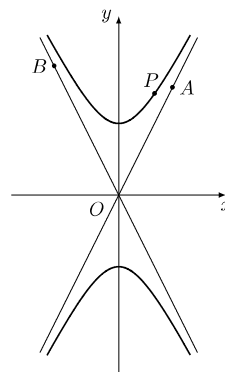
- (1) 求  $a$  的值和  $\xi$  的数学期望;
- (2) 假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响, 求该企业在这两个月内共被消费者投诉 2 次的概率.

20. 已知函数  $f(x) = \ln(ax+1) + \frac{1-x}{1+x}$ ,  $x \geq 0$ , 其中  $a > 0$ .

- (1) 若  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极值, 求  $a$  的值;
- (2) 求  $f(x)$  的单调区间;
- (3) 若  $f(x)$  的最小值为 1, 求  $a$  的取值范围.

21. 已知双曲线  $C$  的方程为  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ), 离心率  $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 顶点到渐近线的距离为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

- (1) 求双曲线  $C$  的方程;
- (2) 如图,  $P$  是双曲线  $C$  上一点,  $A, B$  两点在双曲线  $C$  的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ ,  $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$ , 求  $\triangle AOB$  面积的取值范围.



22. 已知数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 猜想数列  $\{x_n\}$  的单调性, 并证明你的结论;
- (2) 证明:  $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ .

# 2009 普通高等学校招生考试 (陕西卷文)

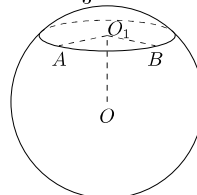
## 一、选择题

1. 设不等式  $x^2 - x \leq 0$  的解集为  $M$ , 函数  $f(x) = \ln(1 - |x|)$  的定义域为  $N$ , 则  $M \cap N$  为 ( )  
(A)  $[0, 1]$  (B)  $(0, 1)$  (C)  $[0, 1]$  (D)  $(-1, 0]$
2. 若  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}$  的值为 ( )  
(A) 0 (B)  $\frac{3}{4}$  (C) 1 (D)  $\frac{5}{4}$
3. 函数  $f(x) = \sqrt{2x-4} (x \geq 4)$  的反函数为 ( )  
(A)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 (x \geq 0)$  (B)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 (x \geq 2)$   
(C)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 (x \geq 0)$  (D)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 (x \geq 2)$
4. 过原点且倾斜角为  $60^\circ$  的直线被圆  $x^2 + y^2 - 4y = 0$  所截得的弦长为 ( )  
(A)  $\sqrt{3}$  (B) 2 (C)  $\sqrt{6}$  (D)  $2\sqrt{3}$
5. 某单位共有老、中、青职工 430 人, 其中青年职工 160 人, 中年职工人数是老年职工人数的 2 倍. 为了解职工身体状况, 现采用分层抽样方法进行调查, 在抽取的样本中有青年职工 32 人, 则该样本中的老年职工人数为 ( )  
(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36
6. 若  $(1 - 2x)^{2009} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2009}x^{2009} (x \in \mathbf{R})$ , 则  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2009}}{2^{2009}}$  的值为 ( )  
(A) 2 (B) 0 (C) -1 (D) -2
7. “ $m > n > 0$ ”是“方程  $mx^2 + ny^2 = 1$  表示焦点在  $y$  轴上的椭圆”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
8. 在  $\triangle ABC$  中,  $M$  是  $BC$  的中点,  $AM = 1$ , 点  $P$  在  $AM$  上且满足  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$ , 则  $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$  等于 ( )  
(A)  $\frac{4}{9}$  (B)  $\frac{4}{3}$  (C)  $-\frac{4}{3}$  (D)  $-\frac{4}{9}$
9. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这七个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数, 其中奇数的个数为 ( )  
(A) 432 (B) 288 (C) 216 (D) 108
10. 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足: 对任意的  $x_1, x_2 \in [0, +\infty) (x_1 \neq x_2)$ , 有  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ . 则 ( )  
(A)  $f(3) < f(-2) < f(1)$  (B)  $f(1) < f(-2) < f(3)$   
(C)  $f(-2) < f(1) < f(3)$  (D)  $f(3) < f(1) < f(-2)$

11. 若正方体的棱长为  $\sqrt{2}$ , 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{2}{3}$
12. 设曲线  $y = x^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$  在点  $(1, 1)$  处的切线与  $x$  轴的交点的横坐标为  $x_n$ , 则  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$  的值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{n}$  (B)  $\frac{1}{n+1}$  (C)  $\frac{n}{n+1}$  (D) 1

## 二、填空题

13. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_6 = S_3 = 12$ , 则  $\{a_n\}$  的通项  $a_n =$ \_\_\_\_\_.
14. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq 1, \\ x - y \geq -1, \\ 2x - y \leq 2, \end{cases}$  目标函数  $z = x + 2y$  的最小值是\_\_\_\_\_, 最大值是\_\_\_\_\_.
15. 如图球  $O$  的半径为 2, 圆  $O_1$  是一小圆,  $O_1O = \sqrt{2}$ ,  $A, B$  是圆  $O_1$  上两点. 若  $A, B$  两点间的球面距离为  $\frac{2\pi}{3}$ , 则  $\angle AO_1B =$ \_\_\_\_\_.



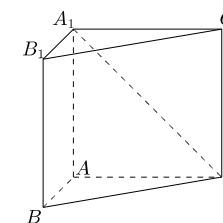
16. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有\_\_\_\_\_人.

## 三、解答题

17. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  (其中  $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的周期为  $\pi$ , 且图象上一个最低点为  $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$ .  
(1) 求  $f(x)$  的解析式;  
(2) 当  $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$  时, 求  $f(x)$  的最值.

18. 据统计, 某食品企业一个月内被消费者投诉的次数为 0, 1, 2 的概率分别为 0.4, 0.5, 0.1.  
(1) 求该企业在一个月内共被消费者投诉不超过 1 次的概率;  
(2) 假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响, 求该企业在这两个月内共被消费者投诉 2 次的概率.

19. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 1, AC = AA_1 = \sqrt{3}, \angle ABC = 60^\circ$ .  
(1) 证明:  $AB \perp A_1C$ ;  
(2) 求二面角  $A - A_1C - B$  的大小.



20. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3ax - 1$ ,  $a \neq 0$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $f(x)$  在  $x = -1$  处取得极值, 直线  $y = m$  与  $y = f(x)$  的图象有三个不同的交点, 求  $m$  的取值范围.

21. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

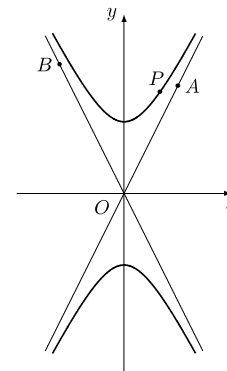
(1) 令  $b_n = a_{n+1} - a_n$ , 证明:  $\{b_n\}$  是等比数列;

(2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

22. 已知双曲线  $C$  的方程为  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ), 离心率  $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 顶点到渐近线的距离为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

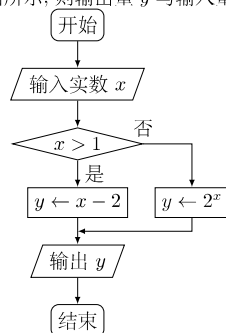
(2) 如图,  $P$  是双曲线  $C$  上一点,  $A, B$  两点在双曲线  $C$  的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ ,  $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$ , 求  $\triangle AOB$  面积的取值范围.



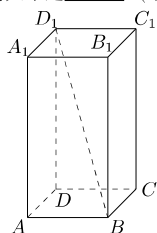
# 2009 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

## 一、填空题

- 若复数  $z$  满足  $z(1+i) = 1-i$  ( $i$  是虚数单位), 则其共轭复数  $\bar{z} =$ \_\_\_\_\_.
- 已知集合  $A = \{x | x \leq 1\}$ ,  $B = \{x | x \geq a\}$ , 且  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 若行列式  $\begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ 1 & x & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  中, 元素 4 的代数余子式大于 0, 则  $x$  满足的条件是\_\_\_\_\_.
- 某算法的程序框如图所示, 则输出量  $y$  与输入量  $x$  满足的关系式是\_\_\_\_\_.



- 如图, 若正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为 2, 高为 4, 则异面直线  $BD_1$  与  $AD$  所成角的大小是\_\_\_\_\_. (结果用反三角函数表示)

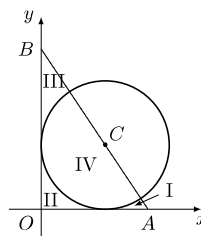


- 函数  $y = 2\cos^2 x + \sin 2x$  的最小值是\_\_\_\_\_.
- 某学校要从 5 名男生和 2 名女生中选出 2 人作为上海世博会志愿者, 若用随机变量  $\xi$  表示选出的志愿者中女生的人数, 则数学期望  $E\xi =$ \_\_\_\_\_. (结果用最简分数表示)
- 已知三个球的半径  $R_1, R_2, R_3$  满足  $R_1 + 2R_2 = 3R_3$ , 则它们的表面积  $S_1, S_2, S_3$  满足的等量关系是\_\_\_\_\_.
- 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的两个焦点,  $P$  为椭圆  $C$  上一点, 且  $\vec{PF_1} \perp \vec{PF_2}$ . 若  $\triangle PF_1F_2$  的面积为 9, 则  $b =$ \_\_\_\_\_.

- 在极坐标系中, 由三条直线  $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}, \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1$  围成图形的面积是\_\_\_\_\_.
- 当  $0 \leq x \leq 1$ , 不等式  $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$  成立, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x) = \sin x + \tan x$ . 项数为 27 的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 且公差  $d \neq 0$ . 若  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{27}) = 0$ , 则当  $k =$ \_\_\_\_\_时,  $f(a_k) = 0$ .
- 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状, 相邻街距都为 1, 两街道相交的点称为格点. 若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系, 现有下述格点  $(-2, 2), (3, 1), (3, 4), (-2, 3), (4, 5), (6, 6)$  为报刊零售点. 请确定一个格点 (除零售点外) \_\_\_\_\_为发行站, 使 6 个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.
- 将函数  $y = \sqrt{4 + 6x - x^2} - 2$  ( $x \in [0, 6]$ ) 的图象绕坐标原点逆时针方向旋转角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ ), 得到曲线  $C$ . 若对于每一个旋转角  $\theta$ , 曲线  $AA_1 = BC = AB = 2$  都是一个函数的图象, 则  $\alpha$  的最大值为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

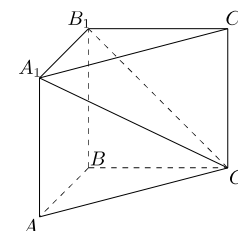
- “ $-2 \leq a \leq 2$ ”是“实系数一元二次方程  $x^2 + ax + 1 = 0$  有虚根”的 ( )  
(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 若事件  $E$  与  $F$  相互独立, 且  $P(E) = P(F) = \frac{1}{4}$ , 则  $P(E \cap F)$  的值等于 ( )  
(A) 0 (B)  $\frac{1}{16}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$
- 在发生某公共卫生事件期间, 有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 10 天, 每天新增疑似病例不超过 7 人”. 根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据, 一定符合该标志的是 ( )  
(A) 甲地: 总体均值为 3, 中位数为 4  
(B) 乙地: 总体均值为 1, 总体方差大于 0  
(C) 丙地: 中位数为 2, 众数为 3  
(D) 丁地: 总体均值为 2, 总体方差为 3
- 过圆  $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  的圆心, 作直线分别交  $x, y$  正半轴于点  $A, B$ ,  $\triangle AOB$  被圆分成四部分 (如图), 若这四部分图形面积满足  $S_I + S_{IV} = S_{II} + S_{III}$ , 则直线  $AB$  有 ( )



- (A) 0 条 (B) 1 条 (C) 2 条 (D) 3 条

## 三、解答题

- 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 = BC = AB = 2$ ,  $AB \perp BC$ , 求二面角  $B_1 - A_1C - C_1$  的大小.



- 有时可用函数  $f(x) = \begin{cases} 0.1 + 15 \ln \frac{a}{a-x}, & x \leq 6, \\ \frac{x-4.4}{x-4}, & x > 6, \end{cases}$  描述学习某学科知识的掌握程度, 其中  $x$  表示某学科知识的学习次数 ( $x \in \mathbf{N}^*$ ),  $f(x)$  表示对该学科知识的掌握程度, 正实数  $a$  与学科知识有关.  
(1) 证明: 当  $x \geq 7$  时, 掌握程度的增加量  $f(x+1) - f(x)$  总是下降;  
(2) 根据经验, 学科甲、乙、丙对应的  $a$  的取值区间分别为  $(115, 121]$ ,  $(121, 127]$ ,  $(121, 133]$ . 当学习某学科知识 6 次时, 掌握程度是 85%, 请确定相应的学科.

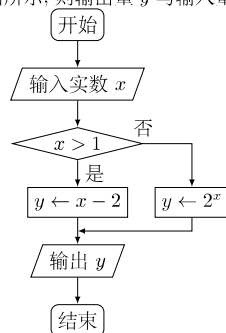
21. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ , 设过点  $A(-3\sqrt{2}, 0)$  的直线  $l$  的方向向量  $\mathbf{e} = (1, k)$ .
- (1) 当直线  $l$  与双曲线  $C$  的一条渐近线  $m$  平行时, 求直线  $l$  的方程及  $l$  与  $m$  的距离;
- (2) 证明: 当  $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 在双曲线  $C$  的右支上不存在点  $Q$ , 使之到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ .
22. 已知函数  $y = f^{-1}(x)$  是  $y = f(x)$  的反函数. 定义: 若对给定的实数  $a$  ( $a \neq 0$ ), 函数  $y = f(x+a)$  与  $y = f^{-1}(x+a)$  互为反函数, 则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  和性质”; 若函数  $y = f(ax)$  与  $y = f^{-1}(ax)$  互为反函数, 则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  积性质”.
- (1) 判断函数  $g(x) = x^2$  ( $x > 0$ ) 是否满足“1 和性质”, 并说明理由;
- (2) 求所有满足“2 和性质”的一次函数;
- (3) 设函数  $y = f(x)$  ( $x > 0$ ) 对任何  $a > 0$ , 满足“ $a$  积性质”. 求  $y = f(x)$  的表达式.
23. 已知  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列,  $\{b_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列.
- (1) 若  $a_n = 3n + 1$ , 是否存在  $m, k \in \mathbf{N}^*$ , 有  $a_m + a_{m+1} = a_k$ ? 请说明理由;
- (2) 找出所有数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ , 使对一切  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ , 并说明理由;
- (3) 若  $a_1 = 5, d = 4, b_1 = q = 3$ , 试确定所有的  $p$ , 使数列  $\{a_n\}$  中存在某个连续  $p$  项的和是数列  $\{b_n\}$  中的一项, 请证明.



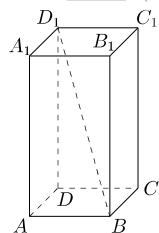
# 2009 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

## 一、填空题

- 函数  $f(x) = x^3 + 1$  的反函数  $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 已知集合  $A = \{x | x \leq 1\}$ ,  $B = \{x | x \geq a\}$ , 且  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 若行列式  $\begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ 1 & x & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  中, 元素 4 的代数余子式大于 0, 则  $x$  满足的条件是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 某算法的程序框图如图所示, 则输出量  $y$  与输入量  $x$  满足的关系式是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



- 如图, 若正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为 2, 高为 4, 则异面直线  $BD_1$  与  $AD$  所成角的大小是  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (结果用反三角函数表示)



- 若球  $O_1$ 、 $O_2$  表面积之比  $\frac{S_1}{S_2} = 4$ , 则它们的半径之比  $\frac{R_1}{R_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

- 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} y \leq 2x, \\ y \geq -2x, \\ x \leq 3, \end{cases}$  则目标函数  $z = x - 2y$  的最小值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- 若等腰直角三角形的直角边长为 2, 则以一直角边所在的直线为轴旋转一周所成的几何体体积是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- 过点  $A(1, 0)$  作倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的直线, 与抛物线  $y^2 = 2x$  交于  $M, N$  两点, 则  $|MN| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

- 函数  $y = 2\cos^2 x + \sin 2x$  的最小值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- 若某学校要从 5 名男生和 2 名女生中选出 3 人作为上海世博会的志愿者, 则选出的志愿者中男女生均不少于 1 名的概率是  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (结果用最简分数表示)

- 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点,  $P$  为椭圆  $C$  上一点, 且  $\overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2}$ . 若  $\triangle PF_1F_2$  的面积为 9, 则  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

- 已知函数  $f(x) = \sin x + \tan x$ . 项数为 27 的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 且公差  $d \neq 0$ . 若  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{27}) = 0$ , 则当  $k = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $f(a_k) = 0$ .

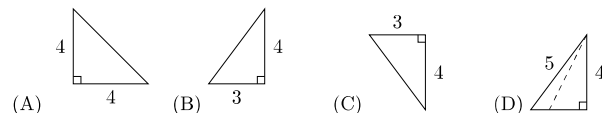
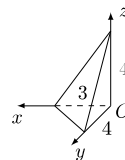
- 某地街道呈现东一西、南一北向的网格状, 相邻街距都为 1, 两街道相交的点称为格点. 若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系, 现有下述格点  $(-2, 2), (3, 1), (3, 4), (-2, 3), (4, 5)$  为报刊零售点. 请确定一个格点  $\underline{\hspace{2cm}}$  为发行站, 使 5 个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.

## 二、选择题

- 已知直线  $l_1: (k-3)x + (4-k)y + 1 = 0$  与  $l_2: 2(k-3)x - 2y + 3 = 0$  平行, 则  $k$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$  ( )

(A) 1 或 3 (B) 1 或 5 (C) 3 或 5 (D) 1 或 2

- 如图, 已知三棱锥的底面是直角三角形, 直角边长分别为 3 和 4, 过直角顶点的侧棱长为 4, 且垂直于底面, 该三棱锥的主视图是  $\underline{\hspace{2cm}}$  ( )



- 点  $P(4, -2)$  与圆  $x^2 + y^2 = 4$  上任一点连续的中点轨迹方程是  $\underline{\hspace{2cm}}$  ( )

(A)  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$  (B)  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$   
(C)  $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 4$  (D)  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$

- 在发生某公共卫生事件期间, 有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 10 天, 每天新增疑似病例不超过 7 人”. 根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据, 一定符合该标志的是  $\underline{\hspace{2cm}}$  ( )

(A) 甲地: 总体均值为 3, 中位数为 4  
(B) 乙地: 总体均值为 1, 总体方差大于 0  
(C) 丙地: 中位数为 2, 众数为 3  
(D) 丁地: 总体均值为 2, 总体方差为 3

## 三、解答题

- 已知复数  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}^+$ ) ( $i$  是虚数单位) 是方程  $x^2 - 4x + 5 = 0$  的根. 复数  $w = u + 3i$  ( $u \in \mathbf{R}$ ) 满足  $|w - z| < 2\sqrt{5}$ , 求  $u$  的取值范围.

- 已知  $\triangle ABC$  的角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 设向量  $\mathbf{m} = (a, b)$ ,  $\mathbf{n} = (\sin B, \sin A)$ ,  $\mathbf{p} = (b-2, a-2)$ .

(1) 若  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ , 求证:  $\triangle ABC$  为等腰三角形;

(2) 若  $\mathbf{m} \perp \mathbf{p}$ , 边长  $c = 2$ , 角  $C = \frac{\pi}{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

21. 有时可用函数  $f(x) = \begin{cases} 0.1 + 15 \ln \frac{a}{a-x}, & x \leq 6, \\ \frac{x-4.4}{x-4}, & x > 6, \end{cases}$  描述学习某学科知识的掌握程度, 其中  $x$  表示某学科知识的学习次数 ( $x \in \mathbf{N}^*$ ),  $f(x)$  表示对该学科知识的掌握程度, 正实数  $a$  与学科知识有关.
- (1) 证明: 当  $x \geq 7$  时, 掌握程度的增加量  $f(x+1) - f(x)$  总是下降;
- (2) 根据经验, 学科甲、乙、丙对应的  $a$  的取值区间分别为  $(115, 121]$ ,  $(121, 127]$ ,  $(121, 133]$ . 当学习某学科知识 6 次时, 掌握程度是 85%, 请确定相应的学科.

22. 已知双曲线  $C$  的中心是原点, 右焦点为  $F(\sqrt{3}, 0)$ , 一条渐近线  $m: x + \sqrt{2}y = 0$ , 设过点  $A(-3\sqrt{2}, 0)$  的直线  $l$  的方向向量  $\mathbf{e} = (1, k)$ .
- (1) 求双曲线  $C$  的方程;
- (2) 若过原点的直线  $a \parallel l$ , 且  $a$  与  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ , 求  $k$  的值;
- (3) 证明: 当  $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 在双曲线  $C$  的右支上不存在点  $Q$ , 使之以到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{6}$ .

23. 已知  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列,  $\{b_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列.
- (1) 若  $a_n = 3n + 1$ , 是否存在  $m, k \in \mathbf{N}^*$ , 有  $a_m + a_{m+1} = a_k$ ? 请说明理由;
- (2) 若  $b_n = aq^n$  ( $a, q$  为常数, 且  $aq \neq 0$ ), 对任意  $m$  存在  $k$ , 有  $b_m \cdot b_{m+1} = b_k$ , 试求  $a, q$  满足的充要条件;
- (3) 若  $a_n = 2n + 1$ ,  $b_n = 3^n$ , 试确定所有的  $p$ , 使数列  $\{b_n\}$  中存在某个连续  $p$  项的和是数列  $\{a_n\}$  中的一项, 请证明.

# 2009 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

## 一、选择题

1. 设集合  $S = \{x \mid |x| < 5\}$ ,  $T = \{x \mid x^2 + 4x - 21 < 0\}$ , 则  $S \cap T =$  ( )

- (A)  $\{x \mid -7 < x < -5\}$  (B)  $\{x \mid 3 < x < 5\}$   
(C)  $\{x \mid -5 < x < 3\}$  (D)  $\{x \mid -7 < x < 5\}$

2. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a + \log_2 x & (\text{当 } x \geq 2 \text{ 时}) \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & (\text{当 } x < 2 \text{ 时}) \end{cases}$  在点  $x = 2$  处连续, 则常数  $a$  的值是 ( )

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

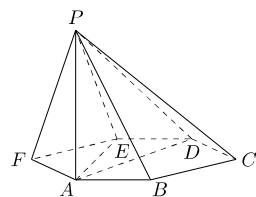
3. 复数  $\frac{(1+2i)^2}{3-4i}$  的值是 ( )

- (A) -1 (B) 1 (C) -i (D) i

4. 已知函数  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 下面结论错误的是 ( )

- (A) 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$   
(B) 函数  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上是增函数  
(C) 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 0$  对称  
(D) 函数  $f(x)$  是奇函数

5. 如图, 已知六棱锥  $P-ABCDEF$  的底面是正六边形,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $PA = 2AB$ , 则下列结论正确的是 ( )



- (A)  $PB \perp AD$   
(B) 平面  $PAB \perp$  平面  $PBC$   
(C) 直线  $BC \parallel$  平面  $PAE$   
(D) 直线  $PD$  与平面  $ABC$  所成的角为  $45^\circ$

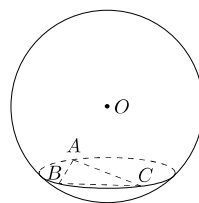
6. 已知  $a, b, c, d$  为实数, 且  $c > d$ . 则“ $a > b$ ”是“ $a - c > b - d$ ”的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 其一条渐近线方程为  $y = x$ , 点  $P(\sqrt{3}, y_0)$  在该双曲线上, 则  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} =$  ( )

- (A) -12 (B) -2 (C) 0 (D) 4

8. 如图, 在半径为 3 的球面上有  $A, B, C$  三点,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $BA = BC$ , 球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离是  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 则  $B, C$  两点的球面距离是 ( )



- (A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\pi$  (C)  $\frac{4\pi}{3}$  (D)  $2\pi$

9. 已知直线  $l_1: 4x - 3y + 6 = 0$  和直线  $l_2: x = -1$ , 抛物线  $y^2 = 4x$  上一动点  $P$  到直线  $l_1$  和直线  $l_2$  的距离之和的最小值是 ( )

- (A) 2 (B) 3 (C)  $\frac{11}{5}$  (D)  $\frac{37}{16}$

10. 某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用  $A$  原料 3 吨、 $B$  原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用  $A$  原料 1 吨、 $B$  原料 3 吨. 销售每吨甲产品可获得利润 5 万元, 每吨乙产品可获得利润 3 万元, 该企业在一个生产周期内消耗  $A$  原料不超过 13 吨,  $B$  原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是 ( )

- (A) 12 万元 (B) 20 万元 (C) 25 万元 (D) 27 万元

11. 3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是 ( )

- (A) 360 (B) 188 (C) 216 (D) 96

12. 已知函数  $f(x)$  是定义在实数集  $\mathbf{R}$  上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数  $x$  都有  $xf(x+1) = (1+x)f(x)$ , 则  $f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$  的值是 ( )

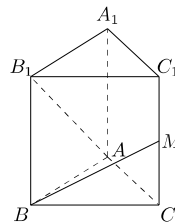
- (A) 0 (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D)  $\frac{5}{2}$

## 二、填空题

13.  $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$  的展开式的常数项是\_\_\_\_\_. (用数字作答)

14. 若  $\odot O_1: x^2 + y^2 = 5$  与  $\odot O_2: (x - m)^2 + y^2 = 20$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) 相交于  $A, B$  两点, 且两圆在点  $A$  处的切线互相垂直, 则线段  $AB$  的长度是\_\_\_\_\_.

15. 如图, 已知正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的各条棱长都相等,  $M$  是侧棱  $CC_1$  的中点, 则异面直线  $AB_1$  和  $BM$  所成的角的大小是\_\_\_\_\_.



16. 设  $V$  是已知平面  $M$  上所有向量的集合. 对于映射  $f: V \rightarrow V$ ,  $\mathbf{a} \in V$ , 记  $\mathbf{a}$  的象为  $f(\mathbf{a})$ . 若映射  $f: V \rightarrow V$  满足: 对所有  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  及任意实数  $\lambda, \mu$  都有  $f(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b})$ , 则  $f$  称为平面  $M$  上的线性变换. 现有下列命题:

- ① 设  $f$  是平面  $M$  上的线性变换, 则  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ;  
② 对  $\mathbf{a} \in V$ , 设  $f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$ , 则  $f$  是平面  $M$  上的线性变换;  
③ 若  $\mathbf{e}$  是平面  $M$  上的单位向量, 对  $\mathbf{a} \in V$ , 设  $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{e}$ , 则  $f$  是平面  $M$  上的线性变换;  
④ 设  $f$  是平面  $M$  上的线性变换,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ , 若  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  共线, 则  $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$  也共线.

其中真命题是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $A, B$  为锐角, 角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\cos 2A = \frac{3}{5}$ ,  $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

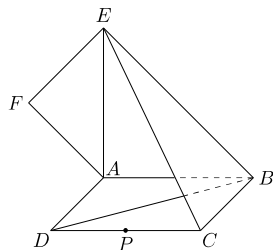
- (1) 求  $A + B$  的值;  
(2) 若  $a - b = \sqrt{2} - 1$ , 求  $a, b, c$  的值.

18. 为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡 (简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡 (简称银卡). 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中  $\frac{3}{4}$  是省外游客, 其余是省内游客. 在省外游客中有  $\frac{1}{3}$  持金卡, 在省内游客中有  $\frac{2}{3}$  持银卡.

- (1) 在该团中随机采访 3 名游客, 求恰有 1 人持金卡且持银卡者少于 2 人的概率;  
(2) 在该团的省内游客中随机采访 3 名游客, 设其中持银卡人数为随机变量  $\xi$ , 求  $\xi$  的分布列及数学期望  $E\xi$ .

19. 如图, 正方形  $ABCD$  所在平面与平面四边形  $ABEF$  所在平面互相垂直,  $\triangle ABE$  是等腰直角三角形,  $AB = AE$ ,  $FA = FE$ ,  $\angle AEF = 45^\circ$ .

- (1) 求证:  $EF \perp$  平面  $BCE$ ;
- (2) 设线段  $CD$  的中点为  $P$ , 在直线  $AE$  上是否存在一点  $M$ , 使得  $PM \parallel$  平面  $BCE$ ? 若存在, 请指出点  $M$  的位置, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 求二面角  $F - BD - A$  的大小.



20. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 右准线方程为 } x = 2.$$

- (1) 求椭圆的标准方程;

- (2) 过点  $F_1$  的直线  $l$  与该椭圆交于  $M, N$  两点, 且  $\left| \overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N} \right| = \frac{2\sqrt{26}}{3}$ , 求直线  $l$  的方程.

21. 已知  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$  函数  $f(x) = \log_a(1 - a^x)$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  的定义域, 并判断  $f(x)$  的单调性;

- (2) 若  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{f(n)}}{a^n + a}$ ;

- (3) 当  $a = e$  ( $e$  为自然对数的底数) 时, 设  $h(x) = (1 - e^{f(x)})(x^2 - m + 1)$ . 若函数  $h(x)$  的极值存在, 求实数  $m$  的取值范围以及函数  $h(x)$  的极值.

22. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 对任意的正整数  $n$ , 都有  $a_n = 5S_n + 1$  成立, 记  $b_n = \frac{4 + a_n}{1 - a_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

- (1) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

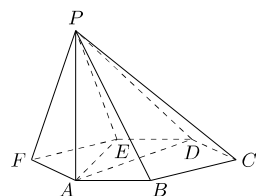
- (2) 记  $c_n = b_{2n} - b_{2n-1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 设数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求证: 对任意正整数  $n$  都有  $T_n < \frac{3}{2}$ ;

- (3) 设数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $R_n$ . 已知正实数  $\lambda$  满足: 对任意正整数  $n$ ,  $R_n \leq \lambda n$  恒成立, 求  $\lambda$  的最小值.

# 2009 普通高等学校招生考试 (四川卷文)

## 一、选择题

1. 设集合  $S = \{x \mid |x| < 5\}$ ,  $T = \{x \mid (x+7)(x-3) < 0\}$ , 则  $S \cap T =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid -7 < x < -5\}$  (B)  $\{x \mid 3 < x < 5\}$   
 (C)  $\{x \mid -5 < x < 3\}$  (D)  $\{x \mid -7 < x < 5\}$
2. 函数  $y = 2^{x+1}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的反函数是 ( )  
 (A)  $y = 1 + \log_2 x$  ( $x > 0$ ) (B)  $y = \log_2(x-1)$  ( $x > 1$ )  
 (C)  $y = -1 + \log_2 x$  ( $x > 0$ ) (D)  $y = \log_2(x+1)$  ( $x > -1$ )
3. 等差数列  $\{a_n\}$  的公差不为零, 首项  $a_1 = 1$ ,  $a_2$  是  $a_1$  和  $a_5$  的等比中项, 则数列  $\{a_n\}$  的前 10 项之和是 ( )  
 (A) 90 (B) 100 (C) 145 (D) 190
4. 已知函数  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 下面结论错误的是 ( )  
 (A) 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$   
 (B) 函数  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上是增函数  
 (C) 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 0$  对称  
 (D) 函数  $f(x)$  是奇函数
5. 设矩形的长为  $a$ , 宽为  $b$ , 其比满足  $b : a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ , 这种矩形给人以美感, 称为黄金矩形. 黄金矩形常应用于工艺品设计中. 下面是某工艺品厂随机抽取两个批次的初加工矩形宽度与长度的比值样本:  
 甲批次: 0.598 0.625 0.628 0.595 0.639  
 乙批次: 0.618 0.613 0.592 0.622 0.620  
 根据上述两个样本来估计两个批次的总体平均数, 与标准值 0.618 比较, 正确结论是 ( )  
 (A) 甲批次的总体平均数与标准值更接近  
 (B) 乙批次的总体平均数与标准值更接近  
 (C) 两个批次总体平均数与标准值接近程度相同  
 (D) 两个批次总体平均数与标准值接近程度不能确定
6. 如图, 已知六棱锥  $P-ABCDEF$  的底面是正六边形,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $PA = 2AB$ , 则下列结论正确的是 ( )



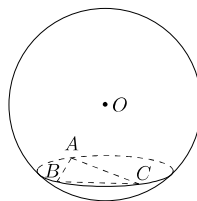
(A)  $PB \perp AD$

(B) 平面  $PAB \perp$  平面  $PBC$

(C) 直线  $BC \parallel$  平面  $PAE$

(D) 直线  $PD$  与平面  $ABC$  所成的角为  $45^\circ$

7. 已知  $a, b, c, d$  为实数, 且  $c > d$ . 则“ $a > b$ ”是“ $a - c > b - d$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 其一条渐近线方程为  $y = x$ , 点  $P(\sqrt{3}, y_0)$  在该双曲线上, 则  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} =$  ( )  
 (A) -12 (B) -2 (C) 0 (D) 4
9. 如图, 在半径为 3 的球面上有  $A, B, C$  三点,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $BA = BC$ , 球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离是  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 则  $B, C$  两点的球面距离是 ( )

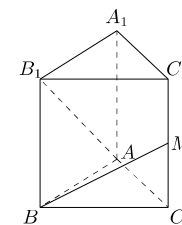


- (A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\pi$  (C)  $\frac{4\pi}{3}$  (D)  $2\pi$

10. 某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用  $A$  原料 3 吨、 $B$  原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用  $A$  原料 1 吨、 $B$  原料 3 吨. 销售每吨甲产品可获得利润 5 万元, 每吨乙产品可获得利润 3 万元, 该企业在一个生产周期内消耗  $A$  原料不超过 13 吨,  $B$  原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是 ( )  
 (A) 12 万元 (B) 20 万元 (C) 25 万元 (D) 27 万元
11. 2 位男生和 3 位女生共 5 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是 ( )  
 (A) 60 (B) 48 (C) 42 (D) 36
12. 已知函数  $f(x)$  是定义在实数集  $\mathbf{R}$  上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数  $x$  都有  $xf(x+1) = (1+x)f(x)$ , 则  $f\left(\frac{5}{2}\right)$  的值是 ( )  
 (A) 0 (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D)  $\frac{5}{2}$

## 二、填空题

13. 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点到准线的距离是\_\_\_\_\_.
14.  $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$  的展开式的常数项是\_\_\_\_\_. (用数字作答)
15. 如图, 已知正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的各条棱长都相等,  $M$  是侧棱  $CC_1$  的中点, 则异面直线  $AB_1$  和  $BM$  所成的角的大小是\_\_\_\_\_.

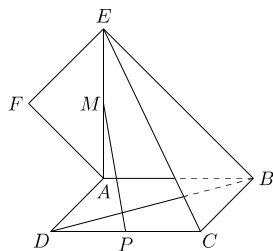


16. 设  $V$  是已知平面  $M$  上所有向量的集合. 对于映射  $f: V \rightarrow V$ ,  $\mathbf{a} \in V$ , 记  $\mathbf{a}$  的象为  $f(\mathbf{a})$ . 若映射  $f: V \rightarrow V$  满足: 对所有  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  及任意实数  $\lambda, \mu$  都有  $f(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b})$ , 则  $f$  称为平面  $M$  上的线性变换. 现有下列命题:  
 ① 设  $f$  是平面  $M$  上的线性变换,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ , 则  $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ ;  
 ② 若  $\mathbf{e}$  是平面  $M$  上的单位向量, 对  $\mathbf{a} \in V$ , 设  $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{e}$ , 则  $f$  是平面  $M$  上的线性变换;  
 ③ 对  $\mathbf{a} \in V$ , 设  $f(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$ , 则  $f$  是平面  $M$  上的线性变换;  
 ④ 设  $f$  是平面  $M$  上的线性变换,  $\mathbf{a} \in V$ , 则对任意实数  $k$  均有  $f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a})$ .  
 其中真命题是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $A, B$  为锐角, 角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$ .  
 (1) 求  $A + B$  的值;  
 (2) 若  $a - b = \sqrt{2} - 1$ , 求  $a, b, c$  的值.
18. 为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡 (简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡 (简称银卡). 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中  $\frac{3}{4}$  是省外游客, 其余是省内游客. 在省外游客中有  $\frac{1}{3}$  持金卡, 在省内游客中有  $\frac{2}{3}$  持银卡.  
 (1) 在该团中随机采访 2 名游客, 求恰有 1 人持银卡的概率;  
 (2) 在该团中随机采访 2 名游客, 求其中持金卡与持银卡人数相等的概率.

19. 如图, 正方形  $ABCD$  所在平面与平面四边形  $ABEF$  所在平面互相垂直,  $\triangle ABE$  是等腰直角三角形,  $AB = AE$ ,  $FA = FE$ ,  $\angle AEF = 45^\circ$ .
- (1) 求证:  $EF \perp$  平面  $BCE$ ;
  - (2) 设线段  $CD$ 、 $AE$  的中点分别为  $P$ 、 $M$ , 求证:  $PM \parallel$  平面  $BCE$ ;
  - (3) 求二面角  $F - BD - A$  的大小.



20. 已知函数  $f(x) = x^3 + 2bx^2 + cx - 2$  的图象在与  $x$  轴交点处的切线方程是  $y = 5x - 10$ .
- (1) 求函数  $f(x)$  的解析式;
  - (2) 设函数  $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}mx$ , 若  $g(x)$  的极值存在, 求实数  $m$  的取值范围以及函数  $g(x)$  取得极值时对应的自变量  $x$  的值.

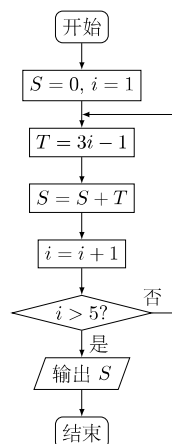
21. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 右准线方程为  $x = 2$ .
- (1) 求椭圆的标准方程;
  - (2) 过点  $F_1$  的直线  $l$  与该椭圆交于  $M, N$  两点, 且  $|\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}| = \frac{2\sqrt{26}}{3}$ , 求直线  $l$  的方程.

22. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 对任意的正整数  $n$ , 都有  $a_n = 5S_n + 1$  成立, 记  $b_n = \frac{4 + a_n}{1 - a_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  与数列  $\{b_n\}$  的通项公式;
  - (2) 设数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $R_n$ , 是否存在正整数  $k$ , 使得  $R_n \geq 4k$  成立? 若存在, 找出一个正整数  $k$ ; 若不存在, 请说明理由;
  - (3) 记  $c_n = b_{2n} - b_{2n-1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 设数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求证: 对任意正整数  $n$  都有  $T_n < \frac{3}{2}$ .

# 2009 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

## 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位,  $\frac{5i}{2-i} =$  ( )  
(A)  $1+2i$  (B)  $-1-2i$  (C)  $1-2i$  (D)  $-1+2i$
2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \geq 3, \\ x-y \geq -1, \\ 2x-y \leq 3, \end{cases}$  则目标函数  $z=2x+3y$  的最小值为 ( )  
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 23
3. 命题“存在  $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \leq 0$ ”的否定是 ( )  
(A) 不存在  $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} > 0$  (B) 存在  $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \geq 0$   
(C) 对任意的  $x \in \mathbf{R}, 2^x \leq 0$  (D) 对任意的  $x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$
4. 设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x - \ln x (x > 0)$ , 则  $y=f(x)$  ( )  
(A) 在区间  $(\frac{1}{e}, 1)$ ,  $(1, e)$  内均有零点  
(B) 在区间  $(\frac{1}{e}, 1)$ ,  $(1, e)$  内均无零点  
(C) 在区间  $(\frac{1}{e}, 1)$  内有零点, 在区间  $(1, e)$  内无零点  
(D) 在区间  $(\frac{1}{e}, 1)$  内无零点, 在区间  $(1, e)$  内有零点
5. 阅读如图的程序框图, 则输出的  $S =$  ( )



- (A) 26 (B) 35 (C) 40 (D) 57

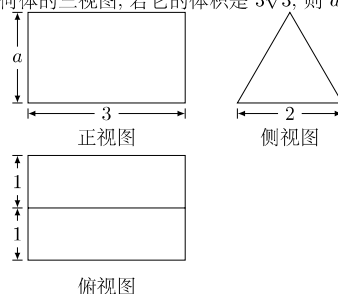
6. 设  $a > 0, b > 0$ . 若  $\sqrt{3}$  是  $3^a$  与  $3^b$  的等比中项, 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为( )  
(A) 8 (B) 4 (C) 1 (D)  $\frac{1}{4}$
7. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (x \in \mathbf{R}, \omega > 0)$  的最小正周期为  $\pi$ . 为了得到函数  $g(x) = \cos \omega x$  的图象, 只要将  $y = f(x)$  的图象 ( )  
(A) 向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度 (D) 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度
8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ 4x - x^2, & x < 0. \end{cases}$  若  $f(2-a^2) > f(a)$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  (B)  $(-1, 2)$   
(C)  $(-2, 1)$  (D)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
9. 设抛物线  $y^2 = 2x$  的焦点为  $F$ , 过点  $M(\sqrt{3}, 0)$  的直线与抛物线相交于  $A, B$  两点, 与抛物线的准线相交于  $C$ ,  $|BF| = 2$ , 则  $\triangle BCF$  与  $\triangle ACF$  的面积之比  $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}} =$  ( )  
(A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{4}{7}$  (D)  $\frac{1}{2}$
10.  $0 < b < 1+a$ . 若关于  $x$  的不等式  $(x-b)^2 > (ax)^2$  的解集中的整数恰有 3 个, 则 ( )  
(A)  $-1 < a < 0$  (B)  $0 < a < 1$  (C)  $1 < a < 3$  (D)  $3 < a < 6$
15. 在四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1, 1)$ ,  $\frac{1}{|\overrightarrow{BA}|}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{|\overrightarrow{BC}|}\overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}$ , 则四边形  $ABCD$  的面积为\_\_\_\_\_.
16. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成没有重复数字的四位数, 其中个位、十位和百位上的数字之和为偶数的四位数共有\_\_\_\_\_个. (用数字作答)

## 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = \sqrt{5}, AC = 3, \sin C = 2 \sin A$ .  
(1) 求  $AB$  的值;  
(2) 求  $\sin(2A - \frac{\pi}{4})$  的值.

## 二、填空题

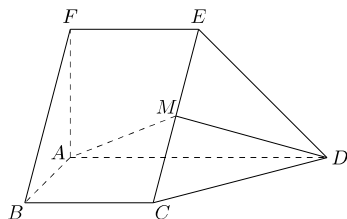
11. 某学院的  $A, B, C$  三个专业共有 1200 名学生. 为了调查这些学生勤工俭学的情况, 拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的  $A$  专业有 380 名学生,  $B$  专业有 420 名学生, 则在该学院的  $C$  专业应抽取\_\_\_\_\_名学生.
12. 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是  $3\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
13. 设直线  $l_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+3t, \end{cases} (t \text{ 为参数})$ , 直线  $l_2$  的方程为  $y = 3x + 4$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的距离为\_\_\_\_\_.
14. 若圆  $x^2 + y^2 = 4$  与圆  $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$  的公共弦的长为  $2\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
18. 在 10 件产品中, 有 3 件一等品, 4 件二等品, 3 件三等品. 从这 10 件产品中任取 3 件, 求:  
(1) 取出的 3 件产品中一等品件数  $X$  的分布列和数学期望;  
(2) 取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率.



13. 设直线  $l_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+3t, \end{cases} (t \text{ 为参数})$ , 直线  $l_2$  的方程为  $y = 3x + 4$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的距离为\_\_\_\_\_.
14. 若圆  $x^2 + y^2 = 4$  与圆  $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$  的公共弦的长为  $2\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

19. 如图, 在五面体  $ABCDEF$  中,  $FA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC \parallel FE$ ,  $AB \perp AD$ ,  $M$  为  $EC$  的中点,  $AF = AB = BC = FE = \frac{1}{2}AD$ .

- (1) 求异面直线  $BF$  与  $DE$  所成的角的大小;
- (2) 证明平面  $AMD \perp$  平面  $CDE$ ;
- (3) 求二面角  $A-CD-E$  的余弦值.



21. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的两个焦点分别为  $F_1(-c, 0)$  和  $F_2(c, 0)$  ( $c > 0$ ), 过点  $E\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$  的直线与椭圆相交与  $A, B$  两点, 且  $F_1A \parallel F_2B$ ,  $|F_1A| = 2|F_2B|$ .
- (1) 求椭圆的离心率;
  - (2) 求直线  $AB$  的斜率;
  - (3) 设点  $C$  与点  $A$  关于坐标原点对称, 直线  $F_2B$  上有一点  $H(m, n)$  ( $m \neq 0$ ) 在  $\triangle AF_1C$  的外接圆上, 求  $\frac{n}{m}$  的值.

22. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$  ( $d \neq 0$ ), 等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$  ( $q > 1$ ). 设  $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ ,  $T_n = a_1b_1 - a_2b_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_nb_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1) 若  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $d = 2$ ,  $q = 3$ , 求  $S_3$  的值;
  - (2) 若  $b_1 = 1$ , 证明  $(1-q)S_{2n} - (1+q)T_{2n} = \frac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ;
  - (3) 若正整数  $n$  满足  $2 \leq n \leq q$ , 设  $k_1, k_2, \cdots, k_n$  和  $l_1, l_2, \cdots, l_n$  是  $1, 2, \cdots, n$  的两个不同的排列,  $c_1 = a_{k_1}b_1 + a_{k_2}b_2 + \cdots + a_{k_n}b_n$ ,  $c_2 = a_{l_1}b_1 + a_{l_2}b_2 + \cdots + a_{l_n}b_n$ , 证明  $c_1 \neq c_2$ .

20. 已知函数  $f(x) = (x^2 + ax - 2a^2 + 3a)e^x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 其中  $a \in \mathbf{R}$ .
- (1) 当  $a = 0$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线的斜率;
  - (2) 当  $a \neq \frac{2}{3}$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间与极值.



# 2009 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

## 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位,  $\frac{5i}{2-i} =$  ( )  
 (A)  $1+2i$  (B)  $-1-2i$  (C)  $1-2i$  (D)  $-1+2i$

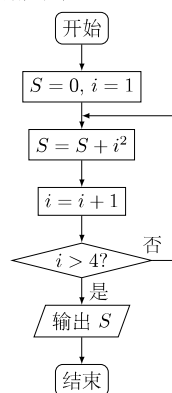
2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \geq 3, \\ x-y \geq -1, \\ 2x-y \leq 3, \end{cases}$  则目标函数  $z=2x+3y$  的最小值为 ( )  
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 23

3. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $x=1$ ”是“ $x^3=x$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的虚轴长为 2, 焦距为  $2\sqrt{3}$ , 则双曲线的渐近线方程为 ( )  
 (A)  $y = \pm\sqrt{2}x$  (B)  $y = \pm 2x$  (C)  $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$  (D)  $y = \pm\frac{1}{2}x$

5. 设  $a = \log_{\frac{1}{3}} 2, b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$ , 则 ( )  
 (A)  $a < b < c$  (B)  $a < c < b$  (C)  $b < c < a$  (D)  $b < a < c$

6. 阅读如图的程序框图, 则输出的  $S =$  ( )



- (A) 14 (B) 20 (C) 30 (D) 55
7. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $x \in \mathbf{R}, \omega > 0$ ) 的最小正周期为  $\pi$ . 将  $y = f(x)$  的图象向左平移  $|\varphi|$  个单位长度, 所得图象关于  $y$  轴对称, 则  $\varphi$  的一个值是 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{3\pi}{8}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{8}$

8. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \geq 0, \\ x + 6, & x < 0, \end{cases}$  则不等式  $f(x) > f(1)$  的解集是 ( )  
 (A)  $(-3, 1) \cup (3, +\infty)$  (B)  $(-3, 1) \cup (2, +\infty)$   
 (C)  $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -3) \cup (1, 3)$

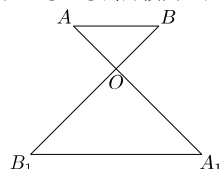
9. 设  $x, y \in \mathbf{R}, a > 1, b > 1$ . 若  $a^x = b^y = 3, a + b = 2\sqrt{3}$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  的最大值为 ( )

- (A) 2 (B)  $\frac{3}{2}$  (C) 1 (D)  $\frac{1}{2}$

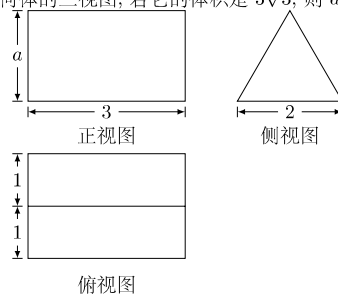
10. 设函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的导函数为  $f'(x)$ , 且  $2f(x) + xf'(x) > x^2$ . 下面的不等式在  $\mathbf{R}$  内恒成立的是 ( )  
 (A)  $f(x) > 0$  (B)  $f(x) < 0$  (C)  $f(x) > x$  (D)  $f(x) < x$

## 二、填空题

11. 如图,  $AA_1$  与  $BB_1$  相交于点  $O, AB \parallel A_1B_1$  且  $AB = \frac{1}{2}A_1B_1$ , 若  $\triangle AOB$  得外接圆直径为 1, 则  $\triangle A_1OB_1$  的外接圆直径为\_\_\_\_\_.



12. 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是  $3\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.



13. 设全集  $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* | \lg x < 1\}$ , 若  $A \cap (\complement_U B) = \{m | m = 2n + 1, n = 0, 1, 2, 3, 4\}$ , 则集合  $B =$ \_\_\_\_\_.

14. 若圆  $x^2 + y^2 = 4$  与圆  $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0$  ( $a > 0$ ) 的公共弦的长为  $2\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

15. 若等边  $\triangle ABC$  的边长为  $2\sqrt{3}$ , 平面内一点  $M$  满足  $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ , 则  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$ \_\_\_\_\_.

16. 若关于  $x$  的不等式  $(2x-1)^2 < ax^2$  的解集中的整数恰好有 3 个, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

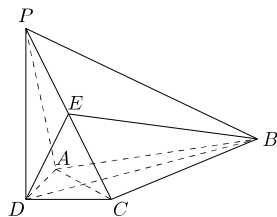
17. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = \sqrt{5}, AC = 3, \sin C = 2 \sin A$ .

- (1) 求  $AB$  的值;  
 (2) 求  $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$  的值.

18. 为了了解某工厂开展群众体育活动的情况, 拟采用分层抽样的方法从  $A, B, C$  三个区中抽取 7 个工厂进行调查, 已知  $A, B, C$  区中分别有 18, 27, 18 个工厂.

- (1) 求从  $A, B, C$  区中分别抽取的工厂个数;  
 (2) 若从抽取的 7 个工厂中随机抽取 2 个进行调查结果的对比, 用列举法计算这 2 个工厂中至少有 1 个来自  $A$  区的概率.

19. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \perp CD$ , 且  $DB$  平分  $\angle ADC$ ,  $E$  为  $PC$  的中点,  $AD = CD = 1$ ,  $DB = 2\sqrt{2}$ .
- (1) 证明  $PA \parallel$  平面  $BDE$ ;
  - (2) 证明  $AC \perp$  平面  $PBD$ ;
  - (3) 求直线  $BC$  与平面  $PBD$  所成的角的正切值.



20. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d$  不为 0, 设  $S_n = a_1 + a_2q + \cdots + a_nq^{n-1}$ ,  $T_n = a_1 - a_2q + \cdots + (-1)^{n-1}a_nq^{n-1}$ ,  $q \neq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1) 若  $q = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $S_3 = 15$ , 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
  - (2) 若  $a_1 = d$ ,  $S_1, S_2, S_3$  成等比数列, 求  $q$  的值.
  - (3) 若  $q \neq \pm 1$ , 证明  $(1-q)S_{2n} - (1+q)T_{2n} = \frac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

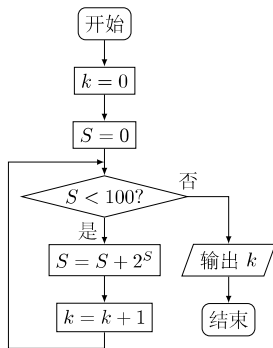
21. 设函数  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m^2 - 1)x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 其中  $m > 0$ .
- (1) 当  $m = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线的斜率;
  - (2) 求函数的单调区间与极值;
  - (3) 已知函数  $f(x)$  有三个互不相同的零点  $0, x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ . 若对任意的  $x \in [x_1, x_2]$ ,  $f(x) > f(1)$  恒成立, 求  $m$  的取值范围.

22. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的两个焦点分别为  $F_1(-c, 0)$  和  $F_2(c, 0)$  ( $c > 0$ ), 过点  $E\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$  的直线与椭圆相交与  $A, B$  两点, 且  $F_1A \parallel F_2B$ ,  $|F_1A| = 2|F_2B|$ .
- (1) 求椭圆的离心率;
  - (2) 求直线  $AB$  的斜率;
  - (3) 设点  $C$  与点  $A$  关于坐标原点对称, 直线  $F_2B$  上有一点  $H(m, n)$  ( $m \neq 0$ ) 在  $\triangle AF_1C$  的外接圆上, 求  $\frac{n}{m}$  的值.

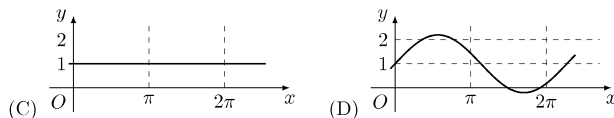
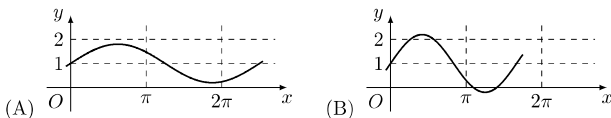
# 2009 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

## 一、选择题

1. 设  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x > 0\}$ ,  $B = \{x | x > 1\}$ , 则  $A \cap \complement_U B =$  ( )  
 (A)  $\{x | 0 \leq x < 1\}$  (B)  $\{x | 0 < x \leq 1\}$   
 (C)  $\{x | x < 0\}$  (D)  $\{x | x > 1\}$
2. 已知  $a, b$  是实数, 则“ $a > 0$  且  $b > 0$ ”是“ $a + b > 0$  且  $ab > 0$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 设  $z = 1 + i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $\frac{2}{z} + z^2 =$  ( )  
 (A)  $-1 - i$  (B)  $-1 + i$  (C)  $1 - i$  (D)  $1 + i$
4. 在二项式  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中, 含  $x^4$  的项的系数是 ( )  
 (A)  $-10$  (B)  $10$  (C)  $-5$  (D)  $5$
5. 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 各棱长相等, 侧棱垂直于底面, 点  $D$  是侧面  $BB_1C_1C$  的中心, 则  $AD$  与平面  $BB_1C_1C$  所成角的大小是 ( )  
 (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $90^\circ$
6. 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出的  $k$  的值是 ( )



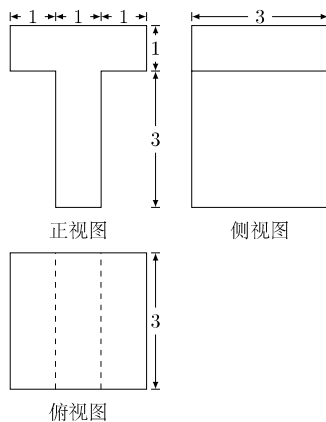
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
7. 设向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足:  $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . 以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}$  的模为边长构成三角形, 则它的边与半径为 1 的圆的公共点个数最多为 ( )  
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
  8. 已知  $a$  是实数, 则函数  $f(x) = 1 + a \sin ax$  的图象不可能是 ( )



9. 过双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右顶点  $A$  作斜率为  $-1$  的直线, 该直线与双曲线的两条渐近线的交点分别为  $B, C$ . 若  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ , 则双曲线的离心率是 ( )  
 (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $\sqrt{10}$
10. 对于正实数  $\alpha$ , 记  $M_\alpha$  为满足下述条件的函数  $f(x)$  构成的集合:  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  且  $x_2 > x_1$ , 有  $-\alpha(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < \alpha(x_2 - x_1)$ . 下列结论中正确的是 ( )  
 (A) 若  $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$ , 则  $f(x) \cdot g(x) \in M_{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$   
 (B) 若  $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$  且  $g(x) \neq 0$ , 则  $\frac{f(x)}{g(x)} \in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$   
 (C) 若  $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$ , 则  $f(x) + g(x) \in M_{\alpha_1 + \alpha_2}$   
 (D) 若  $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$  且  $\alpha_1 > \alpha_2$ , 则  $f(x) - g(x) \in M_{\alpha_1 - \alpha_2}$

## 二、填空题

11. 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q = \frac{1}{2}$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $\frac{S_4}{a_4} =$ \_\_\_\_\_.
12. 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积是\_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

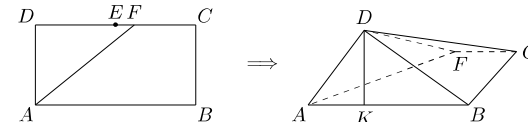


高峰时段用电价格表	
高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.568
超过 50 至 200 的部分	0.598
超过 200 的部分	0.668

低谷时段用电价格表	
高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.288
超过 50 至 200 的部分	0.318
超过 200 的部分	0.388

若某家庭 5 月份的高峰时段用电量为 200 千瓦时, 低谷时段用电量为 100 千瓦时, 则按这种计费方式该家庭本月应付的电费为\_\_\_\_\_元. (用数字作答)

15. 观察下列等式:  
 $C_5^1 + C_5^5 = 2^3 - 2,$   
 $C_9^1 + C_9^5 + C_9^9 = 2^7 + 2^3,$   
 $C_{13}^1 + C_{13}^5 + C_{13}^9 + C_{13}^{13} = 2^{11} - 2^5,$   
 $C_{17}^1 + C_{17}^5 + C_{17}^9 + C_{17}^{13} + C_{17}^{17} = 2^{15} + 2^7,$   
 $\dots\dots$   
 由以上等式推测到一个一般的结论:  
 对于  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $C_{4n+1}^1 + C_{4n+1}^5 + C_{4n+1}^9 + \dots + C_{4n+1}^{4n+1} =$ \_\_\_\_\_.
16. 甲、乙、丙 3 人站到共有 7 级的台阶上, 若每级台阶最多站 2 人, 同一级台阶上的人不区分站的位置, 则不同的站法种数是\_\_\_\_\_.
17. 如图, 在长方形  $ABCD$  中,  $AB = 2, BC = 1, E$  为  $DC$  的中点,  $F$  为线段  $EC$  (端点除外) 上一动点. 现将  $\triangle AFD$  沿  $AF$  折起, 使平面  $ABD \perp$  平面  $ABC$ . 在平面  $ABD$  内过点  $D$  作  $DK \perp AB, K$  为垂足. 设  $AK = t$ , 则  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



## 三、解答题

18. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且满足  $\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ .  
 (1) 求  $\triangle ABC$  的面积;  
 (2) 若  $b + c = 6$ , 求  $a$  的值.
13. 若实数  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 2x - y \leq 4, \\ x - y \geq 0, \end{cases}$  则  $2x + 3y$  的最小值是\_\_\_\_\_.
14. 某地区居民生活用电分为高峰和低谷两个时间段进行分时计价. 该地区的电网销售电价表如下:

19. 在  $1, 2, 3, \dots, 9$  这 9 个自然数中, 任取 3 个数.

(1) 求这 3 个数中恰有 1 个是偶数的概率;

(2) 设  $\xi$  为这 3 个数中两数相邻的组数 (例如: 若取出的数为 1, 2, 3, 则有两组相邻的数 1, 2 和 2, 3, 此时  $\xi$  的值是 2). 求随机变量  $\xi$  的分布列及其数学期望  $E\xi$ .

21. 已知椭圆  $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右顶点为  $A(1, 0)$ , 过  $C_1$  的焦点且垂直长轴的弦长为 1.

(1) 求椭圆  $C_1$  的方程;

(2) 设点  $P$  在抛物线  $C_2: y = x^2 + h$  ( $h \in \mathbf{R}$ ) 上,  $C_2$  在点  $P$  处的切线与  $C_1$  交于点  $M, N$ . 当线段  $AP$  的中点与  $MN$  的中点的横坐标相等时, 求  $h$  的最小值.

22. 已知函数  $f(x) = x^3 - (k^2 - k + 1)x^2 + 5x - 2$ ,  $g(x) = k^2x^2 + kx + 1$ , 其中  $k \in \mathbf{R}$ .

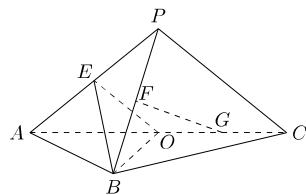
(1) 设函数  $p(x) = f(x) + g(x)$ . 若  $p(x)$  在区间  $(0, 3)$  上不单调, 求  $k$  的取值范围;

(2) 设函数  $q(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ f(x), & x < 0. \end{cases}$  是否存在  $k$ , 对任意给定的非零实数  $x_1$ , 存在唯一的非零实数  $x_2$  ( $x_2 \neq x_1$ ), 使得  $q'(x_2) = q'(x_1)$  成立? 若存在, 求  $k$  的值; 若不存在, 请说明理由.

20. 如图, 平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ,  $\triangle ABC$  是以  $AC$  为斜边的等腰直角三角形,  $E, F, O$  分别为  $PA, PB, AC$  的中点,  $AC = 16, PA = PC = 10$ .

(1) 设  $G$  是  $OC$  的中点, 证明:  $FG \parallel$  平面  $BOE$ ;

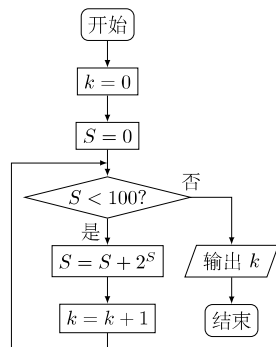
(2) 证明: 在  $\triangle ABO$  内存在一点  $M$ , 使  $FM \perp$  平面  $BOE$ , 并求点  $M$  到  $OA, OB$  的距离.



# 2009 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

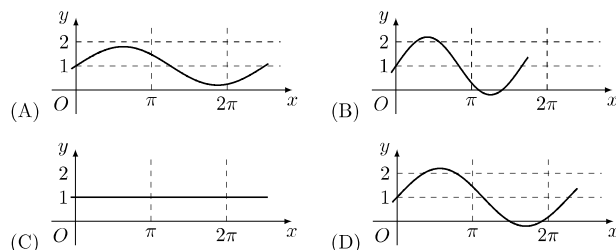
## 一、选择题

1. 设  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x > 0\}$ ,  $B = \{x | x > 1\}$ , 则  $A \cap \complement_U B =$  ( )  
(A)  $\{x | 0 \leq x < 1\}$  (B)  $\{x | 0 < x \leq 1\}$   
(C)  $\{x | x < 0\}$  (D)  $\{x | x > 1\}$
2. “ $x > 0$ ”是“ $x \neq 0$ ”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 设  $z = 1 + i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $\frac{2}{z} + z^2 =$  ( )  
(A)  $1 + i$  (B)  $-1 + i$  (C)  $1 - i$  (D)  $-1 - i$
4. 设  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面,  $l$  是一条直线, 以下命题正确的是 ( )  
(A) 若  $l \perp \alpha$ ,  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \subset \beta$  (B) 若  $l \parallel \alpha$ ,  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $l \subset \beta$   
(C) 若  $l \perp \alpha$ ,  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $l \perp \beta$  (D) 若  $l \parallel \alpha$ ,  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \perp \beta$
5. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -3)$ . 若向量  $\mathbf{c}$  满足  $(\mathbf{c} + \mathbf{a}) \parallel \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c} \perp (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ , 则  $\mathbf{c} =$  ( )  
(A)  $\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{3}\right)$  (B)  $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{9}\right)$  (C)  $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{9}\right)$  (D)  $\left(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3}\right)$
6. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ , 点  $B$  在椭圆上, 且  $BF \perp x$  轴, 直线  $AB$  交  $y$  轴于点  $P$ . 若  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ , 则椭圆的离心率是 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{2}$
7. 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出的  $k$  的值是 ( )



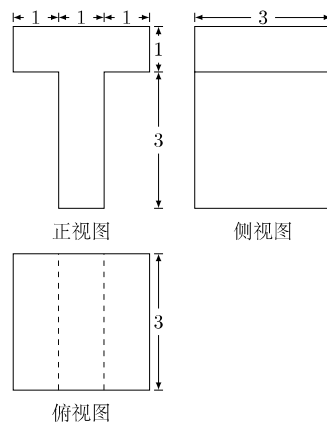
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

8. 若函数  $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 则下列结论正确的是 ( )  
(A)  $\forall a \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数  
(B)  $\forall a \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数  
(C)  $\exists a \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)$  是偶函数  
(D)  $\exists a \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)$  是奇函数
9. 已知三角形的三边长分别为 3, 4, 5, 则它的边与半径为 1 的圆的公共点个数最多为 ( )  
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
10. 已知  $a$  是实数, 则函数  $f(x) = 1 + a \sin ax$  的图象不可能是 ( )

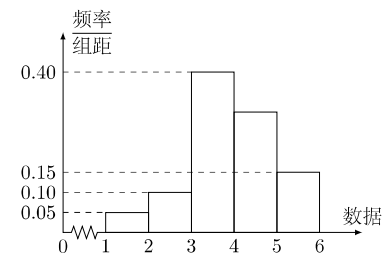


## 二、填空题

11. 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q = \frac{1}{2}$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $\frac{S_4}{a_4} =$ \_\_\_\_\_.
12. 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积是\_\_\_\_\_cm<sup>3</sup>.



13. 若实数  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 2x - y \leq 4, \\ x - y \geq 0, \end{cases}$  则  $2x + 3y$  的最小值是\_\_\_\_\_.
14. 某个容量为 100 的样本的频率分布直方图如下, 则在区间  $[4, 5)$  上的数据的频数为\_\_\_\_\_.



15. 某地区居民生活用电分为高峰和低谷两个时间段进行分时计价. 该地区的电网销售电价表如下:

高峰时间段用电价格表	
高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.568
超过 50 至 200 的部分	0.598
超过 200 的部分	0.668

低谷时间段用电价格表	
高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.288
超过 50 至 200 的部分	0.318
超过 200 的部分	0.388

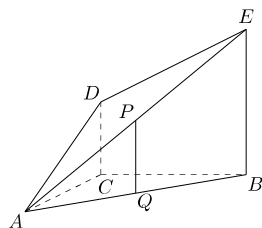
若某家庭 5 月份的高峰时间段用电量为 200 千瓦时, 低谷时间段用电量为 100 千瓦时, 则按这种计费方式该家庭本月应付的电费为\_\_\_\_\_元. (用数字作答)

16. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}$  成等差数列. 类比以上结论有: 设等比数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项积为  $T_n$ , 则  $T_4, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \frac{T_{16}}{T_{12}}$  成等比数列.
17. 有 20 张卡片, 每张卡片上分别标有两个连续的自然数  $k, k+1$ , 其中  $k = 0, 1, 2, \dots, 19$ . 从这 20 张卡片中任取一张, 记事件“该卡片上两个数的各位数字之和 (例如: 若取到标有 9, 10 的卡片, 则卡片上两个数的各位数字之和为  $9 + 1 + 0 = 10$ ) 不小于 14”为  $A$ , 则  $P(A) =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

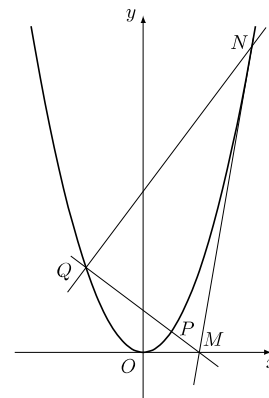
18. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且满足  $\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ .  
(1) 求  $\triangle ABC$  的面积;  
(2) 若  $c = 1$ , 求  $a$  的值.

19. 如图,  $DC \perp$  平面  $ABC$ ,  $EB \parallel DC$ ,  $AC = BC = EB = 2DC = 2$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ ,  $P, Q$  分别为  $AE, AB$  的中点.
- (1) 证明:  $PQ \parallel$  平面  $ACD$ ;
- (2) 求  $AD$  与平面  $ABE$  所成角的正弦值.



21. 已知函数  $f(x) = x^3 + (1-a)x^2 - a(a+2)x + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).
- (1) 若函数  $f(x)$  的图象过原点, 且在原点处的切线斜率是  $-3$ , 求  $a, b$  的值;
- (2) 若函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上不单调, 求  $a$  的取值范围.

22. 已知抛物线  $C: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 上一点  $A(m, 4)$  到其焦点的距离为  $\frac{17}{4}$ .
- (1) 求  $p$  与  $m$  的值;
- (2) 设抛物线  $C$  上一点  $P$  的横坐标为  $t$  ( $t > 0$ ), 过  $P$  的直线交  $C$  于另一点  $Q$ , 交  $x$  轴于点  $M$ , 过点  $Q$  作  $PQ$  的垂线交  $C$  于另一点  $N$ . 若  $MN$  是  $C$  的切线, 求  $t$  的最小值.



20. 设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $S_n = kn^2 + n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 其中  $k$  是常数.
- (1) 求  $a_1$  及  $a_n$ ;
- (2) 若对于任意的  $m \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_m, a_{2m}, a_{4m}$  成等比数列, 求  $k$  的值.