2001 普通高等学校春季招生考试 (京蒙皖理)

一、选择题

1. 集合 $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 的子集个数是 ( )

(A) 32 (B) 31 (C) 16 (D) 15

2. 函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 对于任意的实数 $x,\ y$ 都有 ( )

(A) $f(xy)=f(x)f(y)$ (B) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(C) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (D) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}=$ ( )

(A) 0 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

4. 函数 $y=-\sqrt{1-x}$ $(x\leqslant 1)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=x^2-1$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$ (B) $y=x^2-1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

(C) $y=1-x^2$ $(x\leqslant 0)$ (D) $y=1-x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

5. 极坐标系中, 圆 $\rho=4\cos\theta+3\sin\theta$ 的圆心的坐标是 ( )

(A) $\left(\dfrac{5}{2},\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ (B) $\left(5,\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$ (C) $\left(5,\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ (D) $\left(\dfrac{5}{2},\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

6. 设动点 P 在直线 $x=1$ 上, O 为坐标原点. 以 OP 为直角边、点 O 为直角顶点作等腰 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$, 则动点 Q 的轨迹是 ( )

(A) 圆 (B) 两条平行直线

(C) 抛物线 (D) 双曲线

7. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) 8 (C) 18 (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 若 A、B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\cos B-\sin A,\sin B-\cos A)$ 在 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

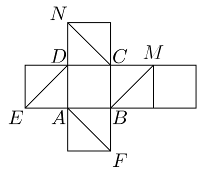
9. 如果圆锥的侧面展开图是半圆, 那么这个圆锥的顶角 (圆锥轴截面中两条母线的夹角) 是 ( )

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

10. 若实数 a,b 满足 $a+b=2$, 则 3^a+3^b 的最小值是 ( )

(A) 18 (B) 6 (C) $2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt[4]{3}$

11. 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中, ① BM 与 ED 平行; ② CN 与 BE 是异面直线; ③ CN 与 BM 成 60° 角; ④ DM 与 BN 垂直. 以上四个命题中, 正确命题的序号是 ( )



(A) ①②③ (B) ②④ (C) ③④ (D) ②③④

12. 根据市场调查结果, 预测某种家用商品从年初开始的 n 个月内累积的需求量 S_n (万件) 近似地满足 $S_n=\dfrac{n}{90}(21n-n^2-5)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$. 按此预测, 在本年度内, 需求量超过 1.5 万件的月份是 ( )

(A) 5 月、6 月 (B) 6 月、7 月 (C) 7 月、8 月 (D) 8 月、9 月

二、填空题

13. 已知球内接正方体的表面积为 S, 那么球体积等于______.

14. 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 长轴上一个顶点为 A, 以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 该三角形的面积是______.

15. 已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ (α、β、γ 均为锐角), 那么 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 的最大值等于______.

16. 已知 m、n 是直线, α、β、γ 是平面, 给出下列命题:

① 若 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$;

② 若 $\alpha\parallel\beta$, $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, 则 $m\parallel n$;

③ 若 m 不垂直于 α, 则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线;

④ 若 $\alpha\cap\beta=m$, $n\parallel m$, 且 $n\not\subset\alpha$, $n\not\subset\beta$, 则 $n\parallel\alpha$ 且 $n\parallel\beta$.

其中正确的命题的序号是______. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ $(a>b>0)$, 求 $f(x)$ 的单调区间, 并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

18. 已知 $z^7=1$ $(z\in\mathbf{C}$ 且 $z\neq 1)$.

(1) 证明 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$;

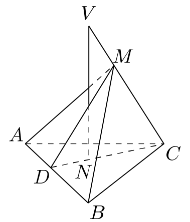
(2) 设 z 的辐角为 α, 求 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$ 的值.

19. 已知 VC 是 $\triangle ABC$ 所在平面的一条斜线, 点 N 是 V 在平面 ABC 上的射影, 且在 $\triangle ABC$ 的高 CD 上. $AB=a$, VC 与 AB 之间的距离为 h, 点 $M\in VC$.

(1) 证明 $\angle MDC$ 是二面角 $M-AB-C$ 的平面角;

(2) 当 $\angle MDC=\angle CVN$ 时, 证明 $VC\perp$ 平面 AMB;

(3) 若 $\angle MDC=\angle CVN=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求四面体 $MABC$ 的体积.



20. 在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, 使这 $n+2$ 个数成等比数列; 又在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$, 使这 $n+2$ 个数成等差数列. 记 $A_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$, $B_n = b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$.
(1) 求数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 的通项;
(2) 当 $n \geqslant 7$ 时, 比较 A_n 与 B_n 的大小, 并证明你的结论.

21. 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x $(0 < x < 1)$, 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$. 已知年利润 = (出厂价 − 投入成本) × 年销售量.
(1) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;
(2) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?

22. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. 过动点 $M(a, 0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A、B, $|AB| \leqslant 2p$.
(1) 求 a 的取值范围;
(2) 若线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N, 求 $\mathrm{Rt}\triangle NAB$ 面积的最大值.

2001 普通高等学校春季招生考试 (京蒙皖文)

一、选择题

1. 集合 $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 的子集个数是 ( )

(A) 32　(B) 31　(C) 16　(D) 15

2. 函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 对于任意的实数 x, y 都有 ( )

(A) $f(xy)=f(x)f(y)$　(B) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(C) $f(x+y)=f(x)f(y)$　(D) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}=$ ( )

(A) 0　(B) 2　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

4. 函数 $y=-\sqrt{1-x}$ $(x\leqslant 1)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=x^2-1$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$　(B) $y=x^2-1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

(C) $y=1-x^2$ $(x\leqslant 0)$　(D) $y=1-x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

5. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两焦点, 过点 F_2 的直线交椭圆于点 A, B, 若 $|AB|=5$, 则 $|AF_1|+|BF_1|=$ ( )

(A) 11　(B) 10　(C) 9　(D) 16

6. 设动点 P 在直线 $x=1$ 上, O 为坐标原点. 以 OP 为直角边、点 O 为直角顶点作等腰 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$, 则动点 Q 的轨迹是 ( )

(A) 圆　(B) 两条平行直线

(C) 抛物线　(D) 双曲线

7. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{4}{3}$　(B) 8　(C) 18　(D) $\dfrac{1}{2}$

8. 若 A、B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\cos B-\sin A, \sin B-\cos A)$ 在 ( )

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

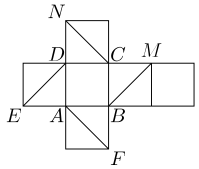
9. 如果圆锥的侧面展开图是半圆, 那么这个圆锥的顶角 (圆锥轴截面中两条母线的夹角) 是 ( )

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 90°

10. 若实数 a, b 满足 $a+b=2$, 则 3^a+3^b 的最小值是 ( )

(A) 18　(B) 6　(C) $2\sqrt{3}$　(D) $2\sqrt[4]{3}$

11. 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中, ① BM 与 ED 平行; ② CN 与 BE 是异面直线; ③ CN 与 BM 成 60° 角; ④ DM 与 BN 垂直. 以上四个命题中, 正确命题的序号是 ( )



(A) ①②③　(B) ②④　(C) ③④　(D) ②③④

12. 根据市场调查结果, 预测某种家用商品从年初开始的 n 个月内累积的需求量 S_n (万件) 近似地满足 $S_n=\dfrac{n}{90}(21n-n^2-5)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$. 按此预测, 在本年度内, 需求量超过 1.5 万件的月份是 ( )

(A) 5 月、6 月　(B) 6 月、7 月　(C) 7 月、8 月　(D) 8 月、9 月

二、填空题

13. 已知球内接正方体的表面积为 S, 那么球体积等于______.

14. 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 长轴上一个顶点为 A, 以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 该三角形的面积是______.

15. 已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ (α、β、γ 均为锐角), 那么 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 的最大值等于______.

16. 已知 m、n 是直线, α、β、γ 是平面, 给出下列命题:

① 若 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$;

② 若 $\alpha\parallel\beta$, $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, 则 $m\parallel n$;

③ 若 m 不垂直于 α, 则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线;

④ 若 $\alpha\cap\beta=m$, $n\parallel m$, 且 $n\not\subset\alpha$, $n\not\subset\beta$, 则 $n\parallel\alpha$ 且 $n\parallel\beta$.

其中正确的命题的序号是______. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

17. 方程 $2x^2+mx+n=0$ 有实根, 且 2, m, n 为等差数列的前三项. 求该等差数列公差 d 的取值范围.

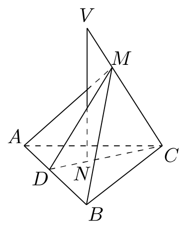
18. 设函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ $(a>b>0)$, 求 $f(x)$ 的单调区间, 并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

19. 已知 $z^7=1$ ($z\in\mathbf{C}$ 且 $z\neq 1$).

(1) 证明 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$;

(2) 设 z 的辐角为 α, 求 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$ 的值.

20. 已知 VC 是 $\triangle ABC$ 所在平面的一条斜线, 点 N 是 V 在平面 ABC 上的射影, 且在 $\triangle ABC$ 的高 CD 上. $AB=a$, VC 与 AB 之间的距离为 h, 点 $M\in VC$.
(1) 证明 $\angle MDC$ 是二面角 $M-AB-C$ 的平面角;
(2) 当 $\angle MDC=\angle CVN$ 时, 证明 $VC\perp$ 平面 AMB;
(3) 若 $\angle MDC=\angle CVN=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求四面体 $MABC$ 的体积.



21. 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x $(0<x<1)$, 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$. 已知年利润 $=$ (出厂价 $-$ 投入成本) $\times$ 年销售量.
(1) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;
(2) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?

22. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$. 过动点 $M(a,0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A、B.
(1) 若 $|AB|\leqslant 2p$, 求 a 的取值范围;
(2) 若线段 AB 的垂直平分线交 AB 于点 Q, 交 x 轴于点 N, 试求 $\mathrm{Rt}\triangle MNQ$ 的面积.

2001 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 函数 $f(x)=x^2+1\ (x\leqslant 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

2. 若复数 z 满足方程 $\bar{z}\mathrm{i}=\mathrm{i}-1$ (i 是虚数单位), 则 $z=$______.

3. 函数 $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ 的最小正周期为______.

4. 二项式 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项的值为______.

5. 若双曲线的一个顶点坐标为 $(3,0)$, 焦距为 10, 则它的标准方程为______.

6. 圆心在直线 $y=x$ 上且与 x 轴相切于点 $(1,0)$ 的圆的方程为______.

7. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n=$______.

8. 若向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 所成角的大小为______.

9. 在大小相同的 6 个球中, 2 个红球, 4 个是白球. 若从中任意选取 3 个, 则所选的 3 个球中至少有 1 个红球的概率是______. (结果用分数表示)

10. 若记号"$*$"表示求两个实数 a 与 b 的算术平均数的运算, 即 $a*b=\dfrac{a+b}{2}$, 则两边均含有运算符号"$*$"和"$+$", 且对于任意 3 个实数 a、b、c 都能成立的一个等式可以是______.

11. 关于 x 的函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 有以下命题:
(1) 对任意的 φ, $f(x)$ 都是非奇非偶函数;
(2) 不存在 φ, 使 $f(x)$ 既是奇函数, 又是偶函数;
(3) 存在 φ, 使 $f(x)$ 是奇函数;
(4) 对任意的 φ, $f(x)$ 都不是偶函数.
其中一个假命题的序号是______. 因为当 $\varphi=$______时, 该命题的结论不成立.

12. 甲、乙两人于同一天分别携款 1 万元到银行储蓄, 甲存五年期定期储蓄, 年利率为 2.88%. 乙存一年期定期储蓄, 年利率为 2.25%, 并在每年到期时将本息续存一年期定期储蓄. 按规定每次计息时, 储户须交纳利息的 20% 作为利息税, 若存满五年后两人同时从银行取出存款, 则甲与乙所得本息之和的差为______元. (假定利率五年内保持不变, 结果精确到 1 分)

二、选择题

13. 若 a、b 为实数, 则 $a>b>0$ 是 $a^2>b^2$ 的 ( )
(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件　(D) 既非充分条件也非必要条件

14. 若直线 $x=1$ 的倾斜角为 α, 则 α ( )
(A) 等于 0　(B) 等于 $\dfrac{\pi}{4}$　(C) 等于 $\dfrac{\pi}{2}$　(D) 不存在

15. 若有平面 α 与 β, 且 $\alpha\cap\beta=l$, $\alpha\perp\beta$, $P\in\alpha$, $P\notin l$, 则下列命题中的假命题为 ( )
(A) 过点 P 且垂直于 α 的直线平行于 β
(B) 过点 P 且垂直于 l 的平面垂直于 β
(C) 过点 P 且垂直于 β 的直线在 α 内
(D) 过点 P 且垂直于 l 的直线在 α 内

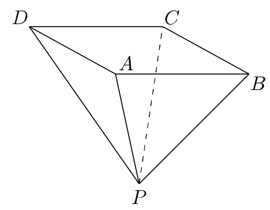
16. 若数列 $\{a_n\}$ 前 8 项的值各异, 且 $a_{n+8}=a_n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 都成立, 则下列数列中可取遍 $\{a_n\}$ 前 8 项值的数列为 ( )
(A) $\{a_{2k+1}\}$　(B) $\{a_{3k+1}\}$　(C) $\{a_{4k+1}\}$　(D) $\{a_{6k+1}\}$

三、解答题

17. 已知 $\mathbf{R}$ 为全集, $A=\left\{x\,\middle|\,\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\right\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1\right\}$, 求 $\overline{A}\cap B$.

18. 已知 $\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\tan\alpha}=k\ \left(\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 试用 k 表示 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

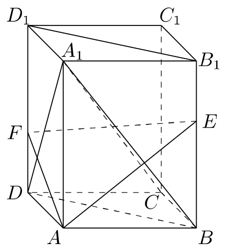
19. 用一块钢锭浇铸一个厚度均匀, 且全面积为 2 平方米的正四棱锥形有盖容器 (如图), 设容器的高为 h 米, 盖子边长为 a 米.
(1) 求 a 关于 h 的函数解析式;
(2) 设容器的容积为 V 立方米, 则当 h 为何值时, V 最大? 求出 V 的最大值.
注: 求解本题时, 不计容器的厚度.



20. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E、F 分别 BB_1、DD_1 上, 且 $AE\perp A_1B$, $AF\perp A_1D$.

(1) 求证: $A_1C\perp$ 平面 AEF;

(2) 若规定两个平面所成的角是这两个平面所组成的二面角中的锐角 (或直角), 则在空间中有定理: 若两条直线分别垂直于两个平面, 则这两条直线所成的角与这两个平面所成的角相等. 试根据上述定理, 在 $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=5$ 时, 求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 所成的角的大小. (用反三角函数值表示)



21. 已知椭圆 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$, 点 $P(a,b)$ 的坐标满足 $a^2+\frac{b^2}{2}\leqslant 1$. 过点 P 的直线 l 与椭圆交于 A、B 两点, 点 Q 为线段 AB 的中点, 求:

(1) 点 Q 的轨迹方程;

(2) 点 Q 的轨迹与坐标轴的交点的个数.

22. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, S_n 为它的前 n 项和.

(1) 用 S_n 表示 S_{n+1};

(2) 是否存在自然数 c 和 k, 使得 $\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$ 成立.

2001 普通高等学校招生考试 (全国卷理)

一、选择题

1. 若 $\sin\theta\cos\theta > 0$, 则 θ 在 ( )

(A) 第一、二象限 (B) 第一、三象限

(C) 第一、四象限 (D) 第二、四象限

2. 过点 $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是( )

(A) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ (B) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ (D) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

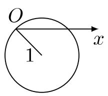
3. 设 $\{a_n\}$ 是递增等差数列, 前三项的和为 12, 前三项的积为 48, 则它的首项是 ( )

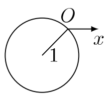
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

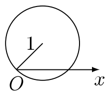
4. 若定义在区间 $(-1,0)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$, 则 a 的取值范围是 ( )

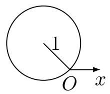
(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (D) $(0,+\infty)$

5. 极坐标方程 $\rho=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图形是 ( )

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 函数 $y=\cos x+1$ $(-\pi\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=-\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

(B) $y=\pi-\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

(C) $y=\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

(D) $y=\pi+\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

7. 若椭圆经过原点, 且焦点为 $F_1(1,0)$, $F_2(3,0)$, 则其离心率为 ( )

(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

8. 若 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则 ( )

(A) $a>b$ (B) $a<b$ (C) $ab<1$ (D) $ab>2$

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=\sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为 ( )

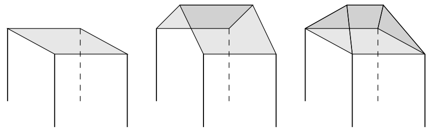
(A) $60°$ (B) $90°$ (C) $45°$ (D) $120°$

10. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题中, 正确的命题是 ( )

① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;
④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

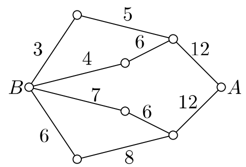
11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1, P_2, P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则 ( )



① ② ③

(A) $P_3>P_2>P_1$ (B) $P_3>P_2=P_1$ (C) $P_3=P_2>P_1$ (D) $P_3=P_2=P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为 ( )



(A) 26 (B) 24 (C) 20 (D) 19

二、填空题

13. 若一个椭圆的轴截面是等边三角形, 其面积为 $\sqrt{3}$, 则这个椭圆的侧面积是______.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1\perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q=$______.

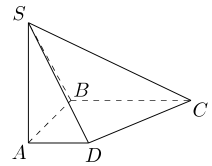
16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 $(n>1)$, 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为______.

三、解答题

17. 如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ABC=90°$, $SA\perp$ 面 $ABCD$, $SA=AB=BC=1$, $AD=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(2) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



18. 已知复数 $z_1=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^3$.

(1) 求 $\arg z_1$ 及 $|z_1|$;

(2) 当复数 z 满足 $|z|=1$, 求 $|z-z_1|$ 的最大值.

19. 设抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 经过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点. 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC\mathbin{/\!/}x$ 轴. 证明直线 AC 经过原点 O.

20. 已知 i, m, n 是正整数, 且 $1 < i \leqslant m < n$.

(1) 证明: $n^i \mathrm{A}_m^i < m^i \mathrm{A}_n^i$;

(2) 证明: $(1+m)^n > (1+n)^m$.

21. 从社会效益和经济效益出发, 某地投入资金进行生态环境建设, 并以此发展旅游产业. 根据规划, 本年度投入 800 万元, 以后每年投入将比上年减少 $\dfrac{1}{5}$. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元, 由于该项建设对旅游业的促进作用, 预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 $\dfrac{1}{4}$.

(1) 设 n 年内 (本年度为第一年) 总投入为 a_n 万元, 旅游业总收入为 b_n 万元. 写出 a_n, b_n 的表达式;

(2) 至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入?

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于直线 $x=1$ 对称, 对任意 x_1, $x_2 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, 都有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, 且 $f(1) = a > 0$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

(2) 证明设 $f(x)$ 是周期函数;

(3) 记 $a_n = f\left(2n + \dfrac{1}{2n}\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln a_n)$.

2001 普通高等学校招生考试 (全国卷文)

一、选择题

1. $\tan 300^\circ + \cot 405^\circ$ 的值为 ( )

(A) $1+\sqrt{3}$ (B) $1-\sqrt{3}$ (C) $-1-\sqrt{3}$ (D) $-1+\sqrt{3}$

2. 过点 $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是( )

(A) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ (B) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ (D) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

3. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形, 其面积为 $\sqrt{3}$, 则这个圆锥的全面积是 ( )

(A) 3π (B) $3\sqrt{3}\pi$ (C) 6π (D) 9π

4. 若定义在区间 $(-1,0)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (D) $(0,+\infty)$

5. 已知复数 $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathrm{i}$, 则 $\arg\dfrac{1}{z}$ 是

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{5\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{11\pi}{6}$

6. 函数 $y=2^{-x}+1\ (x>0)$ 的反函数是

(A) $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$ (B) $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$

(C) $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$ (D) $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$

7. 若椭圆经过原点, 且焦点为 $F_1(1,0)$, $F_2(3,0)$, 则其离心率为 ( )

(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

8. 若 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则 ( )

(A) $a>b$ (B) $a<b$ (C) $ab<1$ (D) $ab>2$

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=\sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为 ( )

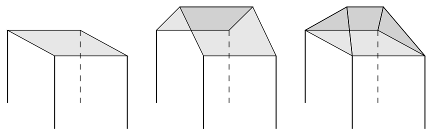
(A) 60° (B) 90° (C) 45° (D) 120°

10. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题中, 正确的命题是 ( )

① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;
④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

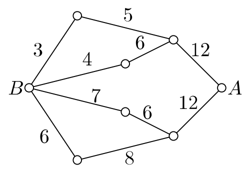
(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1, P_2, P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则 ( )



(A) $P_3>P_2>P_1$ (B) $P_3>P_2=P_1$ (C) $P_3=P_2>P_1$ (D) $P_3=P_2=P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为 ( )



(A) 26 (B) 24 (C) 20 (D) 19

二、填空题

13. $\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^{10}$ 的二项展开式中 x^3 的系数为______.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1\perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q=$______.

16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 $(n>1)$, 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为______.

三、解答题

17. 已知等差数列前三项为 a, 4, $3a$, 前 n 项的和为 S_n, $S_k=2550$.

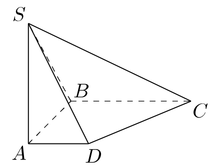
(1) 求 a 及 k 的值;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}\right)$.

18. 如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $SA\perp$ 面 $ABCD$, $SA=AB=BC=1$, $AD=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(2) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



19. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$, $BC=6$, $CD=DA=4$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

20. 设抛物线 $y^2 = 2px\ (p > 0)$ 的焦点为 F, 经过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点. 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC \parallel x$ 轴. 证明直线 AC 经过原点 O.

21. 设计一幅宣传画, 要求画面面积为 $4840\ \text{cm}^2$, 画面的宽与高的比为 $\lambda\ (\lambda < 1)$, 画面的上、下各留 8 cm 空白, 左、右各留 5 cm 空白. 怎样确定画面的高与宽尺寸, 能使宣传画所用纸张面积最小?

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称, 对任意 x_1, $x_2 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

(2) 证明设 $f(x)$ 是周期函数.

2001 普通高等学校招生考试 (广东卷)

一、选择题

1. 不等式 $\dfrac{x-1}{x-3}>0$ 的解集为 ( )

(A) $\{x\mid x<1\}$ (B) $\{x\mid x>3\}$

(C) $\{x\mid x<1$ 或 $x>3\}$ (D) $\{x\mid 1<x<3\}$

2. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形, 其面积为 $\sqrt{3}$, 则这个圆锥的全面积是 ( )

(A) 3π (B) $3\sqrt{3}\pi$ (C) 6π (D) 9π

3. 极坐标方程 $\rho^2\cos 2\theta=1$ 所表示的曲线是 ( )

(A) 两条相交直线 (B) 圆 (C) 椭圆 (D) 双曲线

4. 若定义在区间 $(-1,1)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (D) $(0,+\infty)$

5. 已知复数 $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathrm{i}$, 则 $\arg\dfrac{1}{z}$ 是

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{5\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{11\pi}{6}$

6. 函数 $y=2^{-x}+1\ (x>0)$ 的反函数是

(A) $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$ (B) $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$

(C) $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$ (D) $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$

7. 若 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则 ( )

(A) $a>b$ (B) $a<b$ (C) $ab<1$ (D) $ab>2$

8. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=\sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为 ( )

(A) 60° (B) 90° (C) 45° (D) 120°

9. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题中, 正确的命题是 ( )

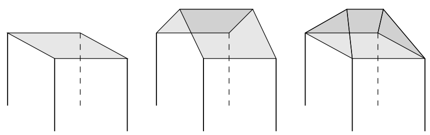
① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;
④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

10. 对于抛物线 $y^2=4x$ 上任意一点 Q, 点 $P(a,0)$ 都满足 $|PQ|\geqslant|a|$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,0)$ (B) $(-\infty,2]$ (C) $[0,2]$ (D) $(0,2)$

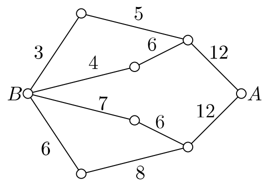
11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1, P_2, P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则 ( )



① ② ③

(A) $P_3>P_2>P_1$ (B) $P_3>P_2=P_1$ (C) $P_3=P_2>P_1$ (D) $P_3=P_2=P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为 ( )



(A) 26 (B) 24 (C) 20 (D) 19

二、填空题

13. 已知甲、乙两组各有 8 人, 现从每组抽取 4 人进行计算机知识竞赛, 比赛人员的组成共有______种可能. (用数字作答)

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1\perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q=$______.

16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 $(n>1)$, 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为______.

三、解答题

17. 求函数 $y=(\sin x+\cos x)^2+2\cos^2 x$ 的最小正周期.

18. 已知等差数列前三项为 a, 4, $3a$, 前 n 项的和为 S_n, $S_k=2550$.

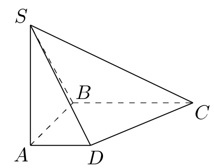
(1) 求 a 及 k 的值;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}\right)$.

19. 如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $SA\perp$ 面 $ABCD$, $SA=AB=BC=1$, $AD=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(2) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



20. 设计一幅宣传画，要求画面面积为 $4840\ \mathrm{cm}^2$，画面的宽与高的比为 λ ($\lambda < 1$)，画面的上、下各留 8 cm 空白，左、右各留 5 cm 空白．怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传画所用纸张面积最小？ 如果要求 $\lambda \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$，那么 λ 为何值时，能使宣传画所用纸张面积最小？

21. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右准线 l 与 x 轴相交于点 E，过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆相交于 A，B 两点，点 C 在右准线 l 上，且 $BC \parallel x$ 轴，求证：直线 AC 经过线段 EF 的中点．

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 x_1，$x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$．

(1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{4}\right)$；

(2) 证明设 $f(x)$ 是周期函数；

(3) 记 $a_n = f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$．

2001 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\in(-\infty,1],\\ \log_{81}x, & x\in(1,+\infty),\end{cases}$ 则满足 $f(x)=\frac{1}{4}$ 的 x 值为______.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2n-7$ $(n\in\mathbf{N})$, 则 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=$______.

3. 设 P 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上一动点, O 为坐标原点, M 为线段 OP 的中点, 则点 M 的轨迹方程为______.

4. 设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x—15),\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\cos\frac{x}{2}>0x\in\mathbf{R}\right\}$, 则 $A\cap B$ 的元素个数为______个.

5. 抛物线 $x^2-4y-3=0$ 的焦点坐标为______.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q>0$ 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=7$, 则此数列的首项 a_1 的取值范围是______.

7. 某餐厅供应客饭, 每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 荤 2 素共 4 种不同的品种. 现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜, 若要保证每位顾客有 200 种以上不同的选择, 则餐厅至少还需要准备不同的素菜品种______种. (结果用数值表示)

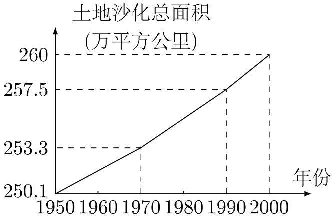
8. 在代数式 $(4x^2-2x-5)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, 常数项为______.

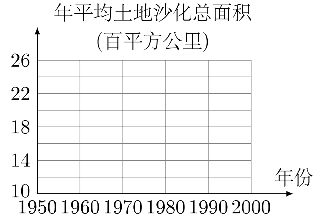
9. 设 $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$, 则 $\arccos x$ 的取值范围为______.

10. 直线 $y=2x-\frac{1}{2}$ 与曲线 $\begin{cases}x=\sin\varphi,\\ y=\cos 2\varphi,\end{cases}$ (φ 为参数) 的交点坐标为______.

11. 已知两个圆: $x^2+y^2=1$ ①与 $x^2+(y-3)^2=1$ ②, 则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线的情况下加以推广, 即要求得到一个更一般的命题, 而已知命题应成为所推广命题的一个特例, 推广的命题为______.

12. 据报道, 我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 下左图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的相关信息, 可将上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积在下右图中图示为:





二、选择题

13. $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的 ( )
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

14. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AC 与 BD 的交点, 若 $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$、$\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b}$、$\overrightarrow{A_1A}=\vec{c}$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ( )
(A) $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ (B) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$
(C) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ (D) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

15. 已知 a、b 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 且 $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, 则下列命题中的假命题是 ( )
(A) 若 $a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$ (B) 若 $\alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$
(C) 若 a、b 相交, 则 α、β 相交 (D) 若 α、β 相交, 则 a、b 相交

16. 用计算器验算函数 $y=\frac{\lg x}{x}$ $(x>1)$ 的若干个值, 可以猜想下列命题中的真命题只能是 ( )
(A) $y=\frac{\lg x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数
(B) $y=\frac{\lg x}{x}$, $x\in(1,+\infty)$ 的值域为 $\left(0,\frac{\lg 3}{3}\right]$
(C) $y=\frac{\lg x}{x}$, $x\in(1,+\infty)$ 有最小值
(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$, $n\in\mathbf{N}$

三、解答题

17. 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 若 $a=4$, $b=5$, $S=5\sqrt{3}$, 求 c 的长度.

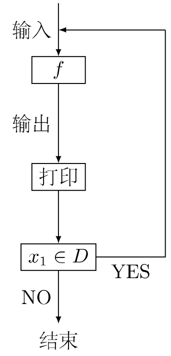
18. 设 F_1、F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点, P 为椭圆上的一点. 已知 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 且 $|PF_1|>|PF_2|$, 求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.

19. 在棱长为 a 的正方体 $OABC-O'A'B'C'$ 中, E、F 分别是棱 AB、BC 上的动点, 且 $AE=BF$.
(1) 求证: $A'F\perp C'E$;
(2) 当三棱锥 $B'-BEF$ 的体积取得最大值时, 求二面角 $B'-EF-B$ 的大小. (结果用反三角函数表示)

20. 对任意一个非零复数 z, 定义集合 $M_z=\{\omega \mid \omega=z^{2n-1},\ n\in\mathbf{N}\}$.
(1) 设 a 是方程 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}$ 的一个根, 试用列举法表示集合 M_a. 若在 M_a 中任取两个数, 求其和为零的概率 P;
(2) 设复数 $\omega\in M_z$, 求证: $M\subseteq M_z$.

21. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药, 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定: 用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药用量的 $\dfrac{1}{2}$, 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药与本次清洗前残留有农药量之比为函数 $f(x)$.
(1) 试规定 $f(0)$ 的值, 并解释其实际意义;
(2) 试根据假定写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质;
(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 现有 a $(a>0)$ 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次. 试问用哪种方案清洗后蔬菜上的农药量比较少? 说明理由.

22. 对任意函数 $f(x)$, $x\in D$, 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:
① 输入数据 $x_0\in D$, 经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$;
② 若 $x_1\notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1\in D$, 则将 x_1 反馈回输入断, 再输出 $x_2=f(x_1)$, 并依此规律继续下去. 现定义 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$.
(1) 若输出 $x_0=\dfrac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$. 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项;
(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数数列, 试求输出的初始数据 x_0 的值;
(3) 若输出 x_0 时, 产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足: 对任意正整数 n 均有 $x_n<x_{n+1}$, 求 x_0 的取值范围.



2001 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\log_9 x$, 则满足 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的 x 值为______.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-7$, 且满足 $a_{n+1}=a_n+2$ $(n\in\mathbf{N})$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{17}=$______.

3. 设 P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 上一动点, O 为坐标原点, M 为线段 OP 的中点, 则点 M 的轨迹方程为______.

4. 设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x\text{—}15),\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\cos\dfrac{x}{2}>0x\in\mathbf{R}\right\}$, 则 $A\cap B$ 的元素个数为______个.

5. 抛物线 $x^2-4y-3=0$ 的焦点坐标为______.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q>0$ 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=7$, 则此数列的首项 a_1 的取值范围是______.

7. 某餐厅供应客饭, 每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 荤 2 素共 4 种不同的品种. 现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜, 若要保证每位顾客有 200 种以上不同的选择, 则餐厅至少还需要准备不同的素菜品种______种. (结果用数值表示)

8. 在代数式 $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, 常数项为______.

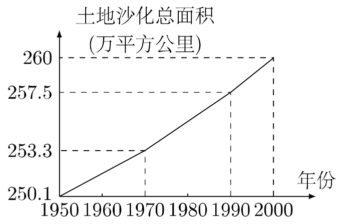
9. 设 $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$, 则 $\arccos x$ 的取值范围为______.

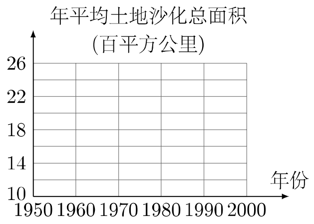
10. 利用下列盈利表中的数据进行决策, 应选择的方案是______.

自然状况	盈利 (万元) 方案 / 概率	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.25	50	70	-20	98
S_2	0.30	65	26	52	82
S_3	0.45	26	16	78	-10

11. 已知两个圆: $x^2+y^2=1$ ①与 $x^2+(y-3)^2=1$ ②, 则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线的情况下加以推广, 即要求得到一个更一般的命题, 而已知命题应成为所推广命题的一个特例, 推广的命题为______.

12. 据报道, 我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 下左图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的相关信息, 可将上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积在下右图中图示为:





二、选择题

13. $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分也非必要条件

14. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AC 与 BD 的交点, 若 $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec a$、$\overrightarrow{A_1D_1}=\vec b$、$\overrightarrow{A_1A}=\vec c$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}\vec a+\dfrac{1}{2}\vec b+\vec c$　(B) $\dfrac{1}{2}\vec a+\dfrac{1}{2}\vec b+\vec c$

(C) $\dfrac{1}{2}\vec a-\dfrac{1}{2}\vec b+\vec c$　(D) $-\dfrac{1}{2}\vec a-\dfrac{1}{2}\vec b+\vec c$

15. 已知 a、b 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 且 $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, 则下列命题中的假命题是 ( )

(A) 若 $a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(B) 若 $\alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$

(C) 若 a、b 相交, 则 α、β 相交　(D) 若 α、β 相交, 则 a、b 相交

16. 用计算器验算函数 $y=\dfrac{\lg x}{x}$ $(x>1)$ 的若干个值, 可以猜想下列命题中的真命题只能是 ( )

(A) $y=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数

(B) $y=\dfrac{\lg x}{x}$, $x\in(1,+\infty)$ 的值域为 $\left(0,\dfrac{\lg 3}{3}\right]$

(C) $y=\dfrac{\lg x}{x}$, $x\in(1,+\infty)$ 有最小值

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=0$, $n\in\mathbf{N}$

三、解答题

17. 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 若 $a=4$, $b=5$, $S=5\sqrt{3}$, 求 c 的长度.

18. 设 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点, P 为椭圆上的一点. 已知 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 且 $|PF_1|>|PF_2|$, 求 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.

19. 在棱长为 a 的正方体 $OABC-O'A'B'C'$ 中, E、F 分别是棱 AB、BC 上的动点, 且 $AE=BF$.

(1) 求证: $A'F\perp C'E$;

(2) 当三棱锥 $B'-BEF$ 的体积取得最大值时, 求二面角 $B'-EF-B$ 的大小. (结果用反三角函数表示)

20. 对任意一个非零复数 z, 定义集合 $M_z=\{\omega\mid\omega=z^{2n-1},\ n\in\mathbf{N}\}$.
(1) 设 a 是方程 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}$ 的一个根, 试用列举法表示集合 M_a. 若在 M_a 中任取两个数, 求其和为零的概率 P;
(2) 设集合 M_z 中只有 3 个元素, 试写出满足条件的一个 z 的值, 并说明理由.

21. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药, 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定: 用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药用量的 $\dfrac{1}{2}$, 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药与本次清洗前残留有农药量之比为函数 $f(x)$.
(1) 试规定 $f(0)$ 的值, 并解释其实际意义;
(2) 试根据假定写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质;
(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 现有 a $(a>0)$ 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次. 试问用哪种方案清洗后蔬菜上的农药量比较少? 说明理由.

22. 对任意函数 $f(x)$, $x\in D$, 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:
① 输入数据 $x_0\in D$, 经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$;
② 若 $x_1\notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1\in D$, 则将 x_1 反馈回输入断, 再输出 $x_2=f(x_1)$, 并依此规律继续下去. 现定义 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$.
(1) 若输出 $x_0=\dfrac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$. 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项;
(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数数列, 试求输出的初始数据 x_0 的值;
(3) 是否存在 x_0, 在输入数据 x_0 时, 该数列发生器产生一个各项均为负数的无穷数列? 若存在, 求出 x_0 的值; 若不存在, 请说明理由.