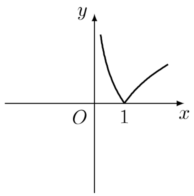
2005 普通高等学校春季招生考试 (北京卷理)

一、选择题

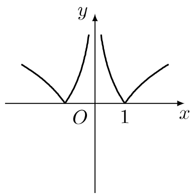
1. $\mathrm{i}-2$ 的共轭复数是 ( )

(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $-2+\mathrm{i}$ (D) $-2-\mathrm{i}$

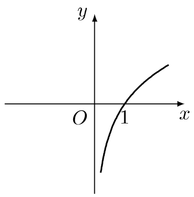
2. 函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象是 ( )



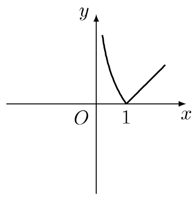
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 有如下三个命题:
① 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线;
② 垂直于同一个平面的两条直线是平行直线;
③ 过平面 α 的一条斜线有一个平面与平面 α 垂直.
其中正确命题的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 如果函数 $f(x)=\sin(\pi x+\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ 的最小正周期是 T, 且当 $x=2$ 时取得最大值, 那么 ( )

(A) $T=2$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ (B) $T=1$, $\theta=\pi$

(C) $T=2$, $\theta=\pi$ (D) $T=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

5. 设 $abc\neq 0$, "$ac>0$"是"曲线 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆"的 ( )

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

6. 已知双曲线的两个焦点为 $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$, P 是此双曲线上的一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$, 则该双曲线的方程是 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ (D) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\sin A\cos B=\sin C$, 那么 $\triangle ABC$ 一定是 ( )

(A) 直角三角形 (B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形 (D) 正三角形

8. 若不等式 $(-1)^n a<2+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-2,\dfrac{3}{2}\right)$ (B) $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$ (C) $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$

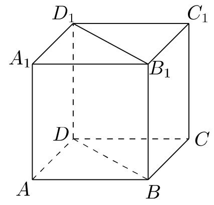
二、填空题

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{2n^2-3}=$______.

10. 已知 $\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\sin\theta$ 的值为______, $\cos 2\theta$ 的值为______.

11. 若圆 $x^2+y^2+mx-\dfrac{1}{4}=0$ 与直线 $y=-1$ 相切, 且其圆心在 y 轴的左侧, 则 m 的值为______.

12. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a, 将该正方体沿对角面 BB_1D_1D 切成两块, 再将这两块拼接成一个不是正方体的四棱柱, 那么所得四棱柱的全面积为______.



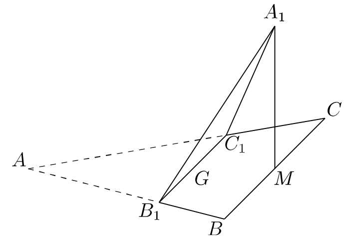
13. 从 -1, 0, 1 , 2 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数, 可组成不同的二次函数共有______个, 其中不同的偶函数共有______个. (用数字作答)

14. 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是______; 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant -3$ 的解集不是空集, 则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题

15. 设函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M, 函数 $g(x)=\sqrt{1-\dfrac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N. 求:
(1) 集合 M, N;
(2) 集合 $M\cap N$, $M\cup N$.

16. 如图, 正三角形 ABC 的边长为 3, 过其中心 G 作 BC 边的平行线, 分别交 AB、AC 于 B_1、C_1. 将 $\triangle AB_1C_1$ 沿 B_1C_1 折起到 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位置, 使点 A_1 在平面 BB_1C_1C 上的射影恰是线段 BC 的中点 M. 求:
(1) 二面角 $A_1-B_1C_1-M$ 的大小;
(2) 异面直线 A_1B_1 与 CC_1 所成角的大小. (用反三角函数表示)



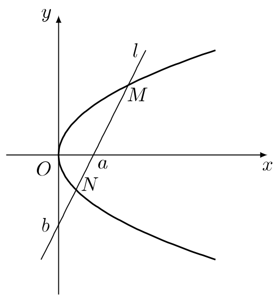
17. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1=2$, $a_3=18$; $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=2$, $b_1+b_2+b_3+b_4=a_1+a_2+a_3>20$.
(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式;
(3) 设 $P_n=b_1+b_4+b_7+\cdots+b_{3n-2}$, $Q_n=b_{10}+b_{12}+b_{14}+\cdots+b_{2n+8}$, 其中 $n=1,2,\cdots$, 试比较 P_n 与 Q_n 的大小, 并证明你的结论.

18. 如图, O 为坐标原点, 直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b, 且交抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 于 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$ 两点.

(1) 写出直线 l 的截距式方程;

(2) 证明: $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{b}$;

(3) 当 $a=2p$ 时, 求 $\angle MON$ 的大小.



19. 经过长期观测得到: 在交通繁忙的时段内, 某公路段汽车的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v (千米/小时) 之间的函数关系为: $y=\dfrac{920v}{v^2+3v+1600}$ $(v>0)$.

(1) 在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时, 车流量最大? 最大车流量为多少? (精确到 0.1 千辆/小时)

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车站的平均速度应在什么范围内?

20. 现有一组互不相同且从小到大排列的数据: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 其中 $a_0=0$. 为提取反映数据间差异程度的某种指标, 今对其进行如下加工: 记 $T=a_0+a_1+\cdots+a_5$, $x_n=\dfrac{n}{5}$, $y_n=\dfrac{1}{T}(a_0+a_1+\cdots+a_n)$, 作函数 $y=f(x)$, 使其图象为逐点依次连接点 $P_n(x_n,y_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots, 5)$ 的折线.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值;

(2) 设 $P_{n-1}P_n$ 的斜率为 k_n $(n=1, 2, 3, 4, 5)$, 判断 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 的大小关系;

(3) 证明: 当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)<x$;

(4) 求由函数 $y=x$ 与 $y=f(x)$ 的图象所围成图形的面积. (用 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 表示)

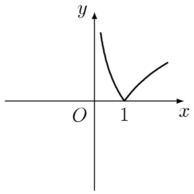
2005 普通高等学校春季招生考试 (北京卷文)

一、选择题

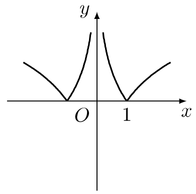
1. $\mathrm{i}-2$ 的共轭复数是 ( )

(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $-2+\mathrm{i}$ (D) $-2-\mathrm{i}$

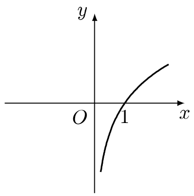
2. 函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象是 ( )



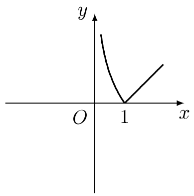
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 下列命题中, 正确的是 ( )

(A) 经过不同的三点有且只有一个平面

(B) 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线

(C) 垂直于同一个平面的两条直线是平行直线

(D) 垂直于同一个平面的两个平面平行

4. 如果函数 $f(x)=\sin(\pi x+\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ 的最小正周期是 T, 且当 $x=2$ 时取得最大值, 那么 ( )

(A) $T=2$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ (B) $T=1$, $\theta=\pi$

(C) $T=2$, $\theta=\pi$ (D) $T=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

5. 设 $abc\neq 0$, "$ac>0$"是"曲线 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆"的 ( )

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

6. 直线 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 被圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 所截得的线段的长为 ( )

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\sin A\cos B=\sin C$, 那么 $\triangle ABC$ 一定是 ( )

(A) 直角三角形 (B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形 (D) 正三角形

8. 若不等式 $(-1)^n a<2+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-2,\dfrac{3}{2}\right)$ (B) $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$ (C) $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$

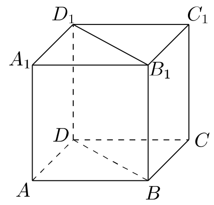
二、填空题

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2n^2-3}=$______.

10. 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的离心率是______, 准线方程是______.

11. 已知 $\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\sin\theta$ 的值为______, $\cos 2\theta$ 的值为______.

12. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a, 将该正方体沿对角面 BB_1D_1D 切成两块, 再将这两块拼接成一个不是正方体的四棱柱, 那么所得四棱柱的全面积为______.



13. 从 0, 1 , 2, 3 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数, 可组成不同的一次函数共有______个, 不同的二次函数共有______个. (用数字作答)

14. 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题

15. 设函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M, 函数 $g(x)=\sqrt{(x-3)(x-1)}$ 的定义域为集合 N. 求:

(1) 集合 M, N;

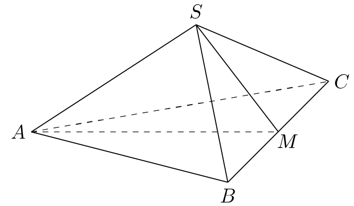
(2) 集合 $M\cap N$, $M\cup N$.

16. 如图, 正三棱锥 $S-ABC$ 中, 底面边长是 3, 棱锥的侧面积等于底面积的 2 倍, M 是 BC 的中点. 求:

(1) $\dfrac{AM}{SM}$ 的值;

(2) 二面角 $S-BC-A$ 的大小;

(3) 正三棱锥 $S-ABC$ 的体积.



17. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1=2$, $a_4=54$; $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=2$, $b_1+b_2+b_3+b_4=a_1+a_2+a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n 的公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

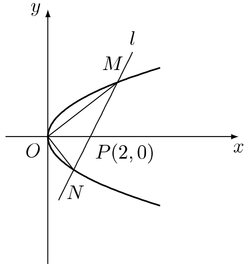
(3) 设 $U_n=b_1+b_4+b_7+\cdots+b_{3n-2}$, 其中 $n=1,2,\cdots$, 求 U_{10} 的值.

18. 如图, O 为坐标原点, 过点 $P(2,0)$ 且斜率为 k 的直线 l 交抛物线 $y^2=2x$ 于 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$ 两点.

(1) 写出直线 l 的截距式方程;

(2) 求 x_1x_2 与 y_1y_2 的值;

(3) 求证: $OM\perp ON$.



19. 经过长期观测得到: 在交通繁忙的时段内, 某公路段汽车的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v (千米/小时) 之间的函数关系为: $y=\dfrac{920v}{v^2+3v+1600}$ $(v>0)$.

(1) 在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时, 车流量最大? 最大车流量为多少? (精确到 0.1 千辆/小时)

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车站的平均速度应在什么范围内?

20. 现有一组互不相同且从小到大排列的数据: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 其中 $a_0=0$. 为提取反映数据间差异程度的某种指标, 今对其进行如下加工: 记 $T=a_0+a_1+\cdots+a_5$, $x_n=\dfrac{n}{5}$, $y_n=\dfrac{1}{T}(a_0+a_1+\cdots+a_n)$, 作函数 $y=f(x)$, 使其图象为逐点依次连接点 $P_n(x_n,y_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots, 5)$ 的折线.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值;

(2) 设 $P_{n-1}P_n$ 的斜率为 k_n $(n=1, 2, 3, 4, 5)$, 判断 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 的大小关系;

(3) 证明: $f(x_n)<x_n$ $(n=1, 2, 3, 4)$.

2005 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 方程 $\lg x^2-\lg(x+2)=0$ 的解集是______.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{1+2+\cdots+n}=$______.

3. 若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, 且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$______.

4. 函数 $f(x)=-x^2$ $(x\in(-\infty,-2])$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=4$, 则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

6. 某班共有 40 名学生, 其中只有一对双胞胎, 若从中一次随机抽查三位学生的作业, 则这对双胞胎的作业同时被抽中的概率是______. (结果用最简分数表示)

7. 双曲线 $9x^2-16y^2=1$ 的焦距是______.

8. 若 $(x+2)^n=x^n+\cdots+ax^3+bx^2+cx+2^n$ $(n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 3)$, 且 $a:b=3:2$, 则 $n=$______.

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n $(n\in\mathbf{N})$. 关于数列 $\{a_n\}$ 有下列三个命题:
① 若 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列, 则 $a_n=a_{n+1}\quad(n\in\mathbf{N})$;
② 若 $S_n=an^2+bn$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列;
③ 若 $S_n=1-(-1)^n$, 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.
这些命题中, 真命题的序号是______.

10. 若集合 $A=\{x\mid 3\cos 2\pi x=3^x,\ x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $B=\{y\mid y^2=1,\ y\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$______.

11. 函数 $y=\sin x+\arcsin x$ 的值域是______.

12. 已知函数 $f(x)=2^x+\log_2 x$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=0.1n$ $(n\in\mathbf{N})$, 当 $|f(a_n)-2005|$ 取得最小值时, $n=$______.

二、选择题

13. 已知直线 l、m、n 及平面 α, 下列命题中的假命题是 ( )
(A) 若 $l\parallel m$, $m\parallel n$, 则 $l\parallel n$　　(B) 若 $l\perp\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $l\perp n$
(C) 若 $l\perp m$, $m\parallel n$, 则 $l\perp n$　　(D) 若 $l\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $l\parallel n$

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是 ( )
(A) 直角三角形　　(B) 等边三角形
(C) 钝角三角形　　(D) 等腰直角三角形

15. 若 a、b、c 是常数, 则"$a>0$ 且 $b^2-4ac<0$"是"对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $ax^2+bx+c>0$"的 ( )
(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

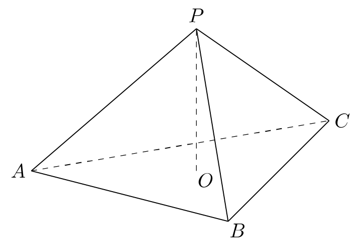
16. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 有下列三个命题:
① 若存在常数 M, 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $f(x)\leqslant M$, 则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值;
② 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq x_0$, 有 $f(x)<f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值;
③ 若存在 $x_0\in\mathrm{R}$, 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.
这些命题中, 真命题的个数是 ( )
(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

三、解答题

17. 已知 z 是复数, $z+2\mathrm{i}$, $\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}$ 均为实数 (i 为虚数单位), 且复数 $(z+a\mathrm{i})^2$ 在复平面上对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

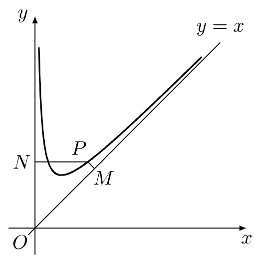
18. 已知 $\tan\alpha$ 是方程 $x^2+2x\sec\alpha+1=0$ 的两个根中较小的根, 求 α 的值.

19. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $72\sqrt{3}$, 侧面与底面所成的二面角的大小为 60°.
(1) 证明: $PA\perp BC$;
(2) 求底面中心 O 到侧面的距离.

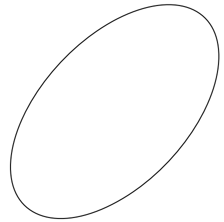


20. 某市 2004 年底有住房面积 1200 万平方米, 计划从 2005 年起, 每年拆除 20 万平方米的旧住房. 假定该市每年新建住房面积是上年年底住房面积的 5%.
(1) 分别求 2005 年底和 2006 年底的住房面积;
(2) 求 2024 年底的住房面积. (计算结果以万平方米为单位, 且精确到 0.01)

21. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f(2)=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 设点 P 是函数图象上的任意一点, 过点 P 分别作直线 $y=x$ 和 y 轴的垂线, 垂足分别为 M、N.
(1) 求 a 的值;
(2) 问: $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由;
(3) 设 O 为坐标原点, 求四边形 $OMPN$ 面积的最小值.



22. (1) 求右焦点坐标是 $(2,0)$, 且经过点 $(-2,-\sqrt{2})$ 的椭圆的标准方程;
(2) 已知椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$. 设斜率为 k 的直线 l, 交椭圆 C 于 A、B 两点, AB 的中点为 M. 证明: 当直线 l 平行移动时, 动点 M 在一条过原点的定直线上;
(3) 利用 (2) 所揭示的椭圆几何性质, 用作图方法找出下面给定椭圆的中心, 简要写出作图步骤, 并在图中标出椭圆的中心.



2005 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 设合集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x\mid x>1\}$, $P=\{x\mid x^2>1\}$, 则下列关系中正确的是 ( )
   (A) $M=P$　(B) $P\subsetneqq M$
   (C) $M\subsetneqq P$　(D) $\complement_U M\cap P=\varnothing$

2. "$m=\dfrac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的 ( )
   (A) 充分必要条件　(B) 充分而不必要条件
   (C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 若 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, 且 $\vec{c}\perp\vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为( )
   (A) 30°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 150°

4. 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线, 则该圆夹在两条切线间的劣弧长为 ( )
   (A) π　(B) 2π　(C) 4π　(D) 6π

5. 对任意的锐角 α, β, 下列不等关系中正确的是 ( )
   (A) $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$　(B) $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$
   (C) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$　(D) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

6. 在正四面体 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, 下面四个结论中不成立的是 ( )
   (A) $BC\parallel$ 平面 PDF　(B) $DF\perp$ 平面 PAE
   (C) 平面 $PDF\perp$ 平面 ABC　(D) 平面 $PAE\perp$ 平面 ABC

7. 北京《财富》全球论坛期间, 某高校有 14 名志愿者参加接待工作, 若每天早、中、晚三班, 每班 4 人, 每人每天最多值一班, 则开幕式当天不同的排班种数为 ( )
   (A) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}$　(B) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{A}_{12}^{4}\mathrm{A}_{8}^{4}$
   (C) $\dfrac{\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}}{\mathrm{A}_{3}^{3}}$　(D) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}\mathrm{A}_{3}^{3}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}$ ( )
   (A) 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减
   (B) 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上递增, 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减
   (C) 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上递减
   (D) 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减

二、填空题

9. 若 $z_1=a+2\mathrm{i}$, $z_2=3-4\mathrm{i}$, 且 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为______.

10. 已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=2$, 则 $\tan\alpha$ 的值为______, $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为______.

11. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是______. (用数字作答)

12. 过原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线, 则切点的坐标为______, 切线的斜率为______.

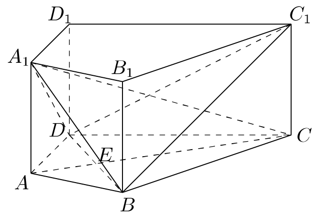
13. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, 有如下结论:
   ① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;
   ② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;
   ③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$;
   ④ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.
   当 $f(x)=\lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是______.

14. 已知 n 次式项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.
   如果在一种算法中, 计算 x_0^k $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法, 3 次加法), 那么计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.
   下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x)=a_0$, $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$. 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算, 计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.
   (1) 求 $f(x)$ 的单调减区间;
   (2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.

16. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2$, $DC=2\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{3}$, $AD\perp DC$, $AC\perp BD$, 垂足为 E.
   (1) 求证: $BD\perp A_1C$;
   (2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小;
   (3) 求异面直线 AD 与 BC_1 所成角的大小.



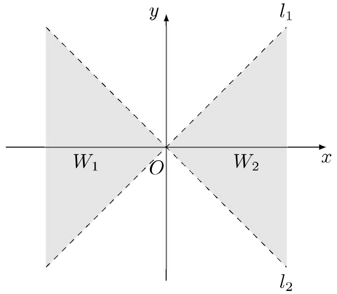
17. 甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率为 $\dfrac{2}{3}$.
   (1) 记甲击中目标的次数为 ξ, 求 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$;
   (2) 求乙至多击中目标 2 次的概率;
   (3) 求甲恰好比乙多击中目标 2 次的概率.

18. 如图, 直线 l_1: $y=kx$ $(k>0)$ 与直线 l_2: $y=-kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W, 其左半部分记为 W_1, 右半部分记为 W_2.

(1) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2;

(2) 若区域 W 中的动点 $P(x,y)$ 到 l_1, l_2 的距离之积等于 d^2, 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(3) 设不过原点 O 的直线 l 与 (2) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点. 求证: $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a\neq\frac{1}{4}$, 且 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, & n \text{ 为偶数},\\ a_n+\frac{1}{4}, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$ 记 $b_n=a_{2n-1}-\frac{1}{4}$, $n=1, 2, 3, \cdots$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

20. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数, 若存在 $x^*\in(0,1)$, 使得 $f(x)$ 在 $[0,x^*]$ 上单调递增, 在 $[x^*,1]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 $[0,\,1]$ 上的单峰函数, x^* 为峰点, 包含峰点的区间为含峰区间. 对任意的 $[0,1]$ 上的单峰函数 $f(x)$, 下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

(1) 证明: 对任意的 x_1, $x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 则 $(0,x_2)$ 为含峰区间; 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则 $(x_1,1)$ 为含峰区间;

(2) 对给定的 r $(0<r<0.5)$, 证明: 存在 $x_1, x_2\in(0,1)$, 满足 $x_2-x_1\geqslant 2r$, 使得由 (1) 所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5+r$;

(3) 选取 x_1, $x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, 由 (1) 可确定含峰区间为 $(0,x_2)$ 或 $(x_1,1)$, 在所得的含峰区间内选取 x_3, 由 x_3 与 x_1 或 x_3 与 x_2 类似地可确定一个新的含峰区间, 在第一次确定的含峰区间为 $(0,x_2)$ 的情况下, 试确定 x_1, x_2, x_3 的值, 满足两两之差的绝地值不小于 0.02, 且使得新的含峰区间的长度缩短到 0.34.

注: 区间长度等于区间的右端点与左端点之差.

2005 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 设合集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x\mid x>1\}$, $P=\{x\mid x^2>1\}$, 则下列关系中正确的是 ( )

(A) $M=P$　(B) $P\subsetneqq M$　(C) $M\subsetneqq P$　(D) $M\cap P=\mathbf{R}$

2. 为了得到函数 $y=2^{x-3}-1$ 的图象, 只需把函数 $y=2^x$ 的图象上所有的点 ( )

(A) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

(B) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

(C) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(D) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

3. "$m=\frac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的 ( )

(A) 充分必要条件　(B) 充分而不必要条件　(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 若 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, 且 $\vec{c}\perp\vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为( )

(A) 30°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 150°

5. 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线, 则这两条切线的夹角的大小为 ( )

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) $\frac{2\pi}{3}$

6. 对任意的锐角 α, β, 下列不等关系中正确的是 ( )

(A) $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$　(B) $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$

(C) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$　(D) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

7. 在正四面体 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, 下面四个结论中不成立的是 ( )

(A) BC // 平面 PDF　(B) $DF\perp$ 平面 PAE

(C) 平面 $PDF\perp$ 平面 ABC　(D) 平面 $PAE\perp$ 平面 ABC

8. 五个工程队承建某项工程的 5 个不同的子项目, 每个工程队承建 1 项, 其中甲工程队不能承建 1 号子项目, 则不同的承建方案共有 ( )

(A) $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_4^4$ 种　(B) $\mathrm{C}_4^1\mathrm{A}_4^4$ 种　(C) C_4^4 种　(D) A_4^4 种

二、填空题

9. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程是______, 焦点坐标是______.

10. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是______. (用数字作答)

11. 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{2-x}$ 的定义域为______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=\sqrt{3}$, $\angle A=45^\circ$, $\angle C=75^\circ$, 则 BC 的长为______.

13. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, 有如下结论:

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;

② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;

③ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$;

④ $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

当 $f(x)=\lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是______.

14. 已知 n 次式项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

如果在一种算法中, 计算 x_0^k $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法, 3 次加法), 那么计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x)=a_0$, $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$. 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算, 计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.

三、解答题

15. 已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$, 求:

(1) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值;

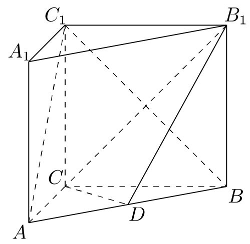
(2) $\frac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-2\cos\alpha}$ 的值.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=3$, $BC=4$, $AB=5$, $AA_1=4$, 点 D 是 AB 的中点.

(1) 求证: $AC\perp BC_1$;

(2) 求证: AC_1 // 平面 CDB_1;

(3) 求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值.



17. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}S_n$, $n=1,2,3,\cdots$, 求:

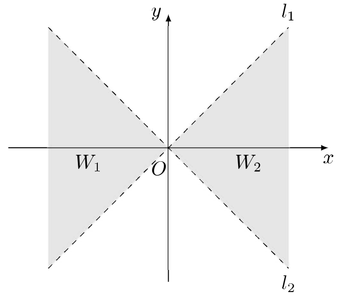
(1) a_2, a_3, a_4 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 的值.

18. 甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率为 $\frac{2}{3}$.
(1) 甲恰好击中目标 2 次的概率;
(2) 乙至少击中目标 2 次的概率;
(3) 乙恰好比甲多击中目标 2 次的概率.

19. 已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间;
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.

20. 如图, 直线 l_1: $y=kx$ $(k>0)$ 与直线 l_2: $y=-kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W, 其左半部分记为 W_1, 右半部分记为 W_2.
(1) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2;
(2) 若区域 W 中的动点 $P(x,y)$ 到 l_1, l_2 的距离之积等于 d^2, 求点 P 的轨迹 C 的方程;
(3) 设不过原点 O 的直线 l 与 (2) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点. 求证: $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.



2005 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的圆的方程为 ( )

(A) $(x-2)^2+y^2=5$　(B) $x^2+(y-2)^2=5$

(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=5$　(D) $x^2+(y+2)^2=5$

2. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2005}=$ ( )

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) 2^{2005}　(D) -2^{2005}

3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数, 且 $f(2)=0$, 则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,2)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　(D) $(-2,2)$

4. 已知 $A(3,1)$, $B(6,1)$, $C(4,3)$, D 为线段 BC 的中点, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 的夹角为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{4}{5}$　(B) $\arccos\dfrac{4}{5}$

(C) $\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$　(D) $-\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$

5. 若 x, y 是正数, 则 $\left(x+\dfrac{1}{2y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值是 ( )

(A) 3　(B) $\dfrac{7}{2}$　(C) 4　(D) $\dfrac{9}{2}$

6. 已知 α、β 均为锐角, 若 p: $\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$, q: $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 对于不重合的两个平面 α 与 β, 给定下列条件:

① 存在平面 γ, 使得 α、β 都垂直于 γ;

② 存在平面 γ, 使得 α、β 都平行于 γ;

③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等;

④ 存在异面直线 l、m, 使得 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$.

其中, 可以判定 α 与 β 平行的条件有 ( )

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

8. 若 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式中含 $\dfrac{1}{x^2}$ 项的系数与含 $\dfrac{1}{x^4}$ 项的系数之比为 -5, 则 n 等于 ( )

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10

9. 若动点 (x,y) 在曲线 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 上变化, 则 x^2+2y 的最大值为 ( )

(A) $\begin{cases}\dfrac{b^2}{4}+4, & 0<b<4,\\ 2b, & b\geqslant 4.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}\dfrac{b^2}{4}+4, & 0<b<2,\\ 2b, & b\geqslant 2.\end{cases}$

(C) $\dfrac{b^2}{4}+4$　(D) $2b$

10. 在体积为 1 的三棱锥 $A-BCD$ 侧棱 AB、AC、AD 上分别取点 E、F、G, 使 $AE:EB=AF:FC=AG:GD=2:1$, 记 O 为三平面 BCG、CDE、DBF 的交点, 则三棱锥 $O-BCD$ 的体积等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{1}{8}$　(C) $\dfrac{1}{7}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

二、填空题

11. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-x-6<0\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-2|<2\}$, 则 $A\cap B=$______.

12. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(a,a^3)\ (a\neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=a$ 所围成的三角形的面积为 $\dfrac{1}{6}$, 则 $a=$______.

13. 已知 α、β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, 则 $\tan\alpha=$______.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n}-3^{2n+1}}{2^{3n}+3^{2n}}=$______.

15. 某轻轨列车有 4 节车厢, 现有 6 位乘客准备乘坐, 设每一位乘客进入每节车厢是等可能的, 则这 6 位乘客进入各节车厢的人数恰好为 0, 1, 2, 3 的概率为______.

16. 连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是______. (填写所有正确选项的序号)

① 菱形; ② 有 3 条边相等的四边形; ③ 梯形; ④ 平行四边形; ⑤ 有一组对角相等的四边形.

三、解答题

17. 若函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}-a\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)$ 的最大值为 2, 试确定常数 a 的值.

18. 在一次购物抽奖活动中, 假设某 10 张券中有一等奖券 1 张, 可获价值 50 元的奖品; 有二等奖券 3 张, 每张可获价值 10 元的奖品; 其余 6 张没有奖, 某顾客从此 10 张券中任抽 2 张, 求:

(1) 该顾客中奖的概率;

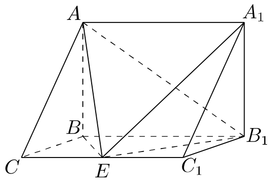
(2) 该顾客获得的奖品总价值 ξ (元) 的概率分布列和期望 $E\xi$.

19. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 讨论函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+ax+a+1)$ 的极值点的个数.

20. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp$ 侧面 BB_1C_1C, E 为棱 CC_1 上异于 C、C_1 的一点, $EA\perp EB_1$, 已知 $AB=\sqrt{2}$, $BB_1=2$, $BC=1$, $\angle BCC_1=\dfrac{\pi}{3}$, 求:

(1) 异面直线 AB 与 EB_1 的距离;

(2) 二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角的正切值.



21. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点, 而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

(1) 求双曲线 C_2 的方程;

(2) 若直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点, 且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$ (其中 O 为原点), 求 k 的取值范围.

22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right)a_n+\dfrac{1}{2^n}$ $(n\geqslant 1)$.

(1) 用数学归纳法证明: $a_n\geqslant 2$ $(n\geqslant 2)$;

(2) 已知不等式 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 成立, 证明:$a_n<\mathrm{e}^2$ $(n\geqslant 1)$, 其中无理数 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$.

2005 普通高等学校招生考试 (重庆卷文)

一、选择题

1. 圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的圆的方程为 ( )

(A) $(x-2)^2+y^2=5$　(B) $x^2+(y-2)^2=5$

(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=5$　(D) $x^2+(y+2)^2=5$

2. $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=$ ( )

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数, 且 $f(2)=0$, 则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,2)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　(D) $(-2,2)$

4. 设向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1)$, 则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 等于 ( )

(A) $(1,1)$　(B) $(-4,-4)$　(C) -4　(D) $(-2,-2)$

5. 不等式组 $\begin{cases}|x-2|<2,\\ \log_2(x^2-1)>1\end{cases}$ 的解集为 ( )

(A) $(0,\sqrt{3})$　(B) $(\sqrt{3},2)$　(C) $(\sqrt{3},4)$　(D) $(2,4)$

6. 已知 α、β 均为锐角, 若 $p:\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$, $q:\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 对于不重合的两个平面 α 与 β, 给定下列条件:

① 存在平面 γ, 使得 α、β 都垂直于 γ;

② 存在平面 γ, 使得 α、β 都平行于 γ;

③ 存在直线 $l\subset\alpha$, 直线 $m\subset\alpha$, 使得 $l\parallel m$;

④ 存在异面直线 l、m, 使得 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$.

其中, 可以判定 α 与 β 平行的条件有 ( )

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

8. 若 $(1+2x)^n$ 展开式中含 x^3 项的系数等于含 x 项的系数的 8 倍, 则 n 等于 ( )

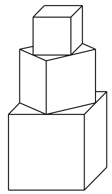
(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11

9. 若动点 (x,y) 在曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 上变化, 则 x^2+2y 的最大值为 ( )

(A) $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4, & 0<b<4,\\ 2b, & b\geqslant 4.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4, & 0<b<2,\\ 2b, & b\geqslant 2.\end{cases}$

(C) $\frac{b^2}{4}+4$　(D) $2b$

10. 有一塔形几何体由若干个正方体构成, 构成方式如图所示, 上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各连接中点, 已知最底层正方体的棱长为 2, 且该塔形的表面积 (含最底层正方体的底面面积) 超过 39, 则该塔形中正方体的个数至少是 ( )



(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

二、填空题

11. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4x+3<0\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid(x-2)(x-5)<0\}$, 则 $A\cap B=$______.

12. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为______.

13. 已知 α、β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, 则 $\tan\alpha=$______.

14. 若 $x^2+y^2=4$, 则 $x-y$ 的最大值是______.

15. 若 10 把钥匙中只有 2 把能打开某锁, 则从中任取 2 把能将该锁打开的概率为______.

16. 已知 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$, B 是圆 $F:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=4$ (F 为圆心) 上一动点, 线段 AB 的垂直平分线交 BF 于 P, 则动点 P 的轨迹方程为______.

三、解答题

17. 若函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sin x+a^2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值为 $\sqrt{2}+3$, 试确定常数 a 的值.

18. 加工某种零件需经过三道工序, 设第一、二、三道工序的合格率分别为 $\frac{9}{10}$、$\frac{8}{9}$、$\frac{7}{8}$, 且各道工序互不影响.

(1) 求该种零件的合格率;

(2) 从该种零件中任取 3 件, 求恰好取到一件合格品的概率和至少取到一件合格品的概率.

19. 设函数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+8$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

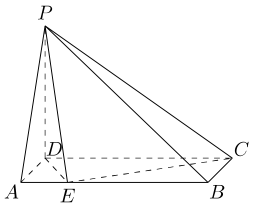
(1) 若 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极值, 求常数 a 的值;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, E 是 AB 上一点, $PE\perp EC$. 已知 $PD=\sqrt{2}$, $CD=2$, $AE=\frac{1}{2}$, 求:

(1) 异面直线 PD 与 EC 的距离;

(2) 二面角 $E-PC-D$ 的大小.



21. 已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2,0)$, 右顶点为 $(\sqrt{3},0)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 l: $y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B, 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$ (其中 O 为原点). 求 k 的取值范围.

22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0$ $(n\geqslant 1)$. 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$ $(n\geqslant 1)$.

(1) 求 b_1、b_2、b_3、b_4 的值;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2005 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

一、选择题

1. 复数 $z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数是 ( )

(A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7+a_9=16$, $a_4=1$, 则 a_{12} 的值是 ( )

(A) 15 (B) 30 (C) 31 (D) 64

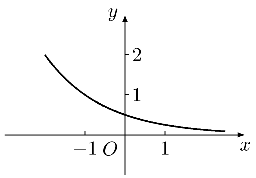
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\overrightarrow{AB}=(k,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3)$, 则 k 的值是 ( )

(A) 5 (B) -5 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

4. 已知直线 m、n 与平面 α, β, 给出下列三个命题:
① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $n\perp m$;
③ 若 $m\perp\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$.
其中真命题的个数是 ( )

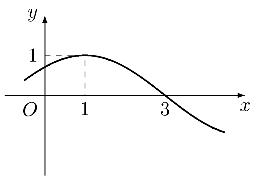
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 若函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图, 其中 a、b 为常数, 则下列结论正确的是 ( )



(A) $a>1$, $b<0$ (B) $a>1$, $b>0$
(C) $0<a<1$, $b>0$ (D) $0<a<1$, $b<0$

6. 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R},\ \omega>0,\ 0\leqslant\varphi<2\pi)$ 的部分图象如图, 则 ( )

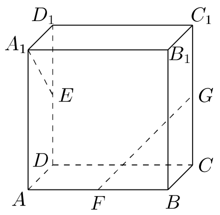


(A) $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (B) $\omega=\frac{\pi}{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$
(C) $\omega=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (D) $\omega=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$

7. 已知 p: $|2x-3|<1$, q: $x(x-3)<0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2$, $AD=1$, 点 E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是 ( )



(A) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

9. 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览, 要求每个城市有一人游览, 每人只游览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览, 则不同的选择方案共有 ( )

(A) 300 种 (B) 240 种 (C) 144 种 (D) 96 种

10. 已知 F_1、F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两焦点, 以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2, 若边 MF_1 的中点在双曲线上, 则双曲线的离心率是 ( )

(A) $4+2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}-1$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\sqrt{3}+1$

11. 设 $a,b\in\mathbf{R}$, $a^2+2b^2=6$, 则 $a+b$ 的最小值是 ( )

(A) $-2\sqrt{2}$ (B) $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{7}{2}$

12. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数, 且 $f(2)=0$, 则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内解的个数的最小值是 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

二、填空题

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项是______. (用数字作答)

14. 非负实数 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 0,\\ x+y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $x+3y$ 的最大值为______.

15. 若常数 b 满足 $|b|>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{b^n}=$______.

16. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题:
若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于______对称, 则函数 $g(x)=$______.
注: 填上你认为可以成为真命题的一件情形即可, 不必考虑所有可能的情形.

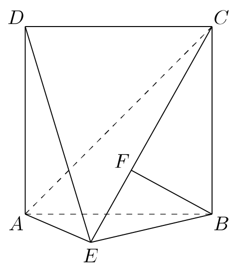
三、解答题

17. 已知 $-\frac{\pi}{2}<x<0$, $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.
(1) 求 $\sin x-\cos x$ 的值;
(2) 求 $\dfrac{3\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\tan x+\cot x}$ 的值.

18. 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{5}$, 投中得 1 分, 投不中得 0 分.
(1) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求两人得分之和 ξ 的数学期望;
(2) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率;

19. 已知函数 $f(x) = \dfrac{ax-6}{x^2+b}$ 的图象在点 $M(-1, f(x))$ 处的切线方程为 $x+2y+5=0$.
(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

20. 如图, 直二面角 $D-AB-E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $AE=EB$, F 为 CE 上的点, 且 $BF\perp$ 平面 ACE.
(1) 求证 $AE\perp$ 平面 BCE;
(2) 求二面角 $B-AC-E$ 的大小;
(3) 求点 D 到平面 ACE 的距离.



21. 已知方向向量为 $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0,-2\sqrt{3})$ 和椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦点, 且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 是否存在过点 $E(-2,0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M、N, 满足 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON\neq 0$ (O 为原点). 若存在, 求直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$. 我们知道当 a 取不同的值时, 得到不同的数列, 如当 $a=1$ 时, 得到无穷数列: $1, 2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \cdots$; 当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时, 得到有穷数列: $-\dfrac{1}{2}, -1, 0$.
(1) 求当 a 为何值时 $a_4=0$;
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-1$, $b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n-1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$, 求证 a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数, 都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$;
(3) 若 $\dfrac{3}{2}<a_n<2$ $(n\geqslant 4)$, 求 a 的取值范围.

2005 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\mid |x-1|\leqslant 1,\ x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $Q=\{x\mid x\in\mathbf{N}\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 ( )

(A) P (B) Q (C) $\{1,2\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 不等式 $\dfrac{2x-1}{3x+1}>0$ 的解集是 ( )

(A) $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{3}\text{ 或 }x>\dfrac{1}{2}\right\}$ (B) $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\right\}$

(C) $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{2}\right\}$ (D) $\left\{x\,\middle|\,x>-\dfrac{1}{3}\right\}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7+a_9=16$, $a_4=1$, 则 a_{12} 的值是 ( )

(A) 15 (B) 30 (C) 31 (D) 64

4. 函数 $y=\cos 2x$ 在下列哪个区间上是减函数 ( )

(A) $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ (C) $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$

5. 下列结论正确的是 ( )

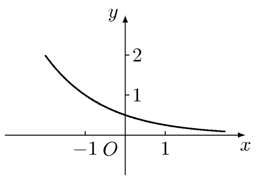
(A) 当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时, $\lg x+\dfrac{1}{\lg x}\geqslant 2$

(B) 当 $x>0$ 时, $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2$

(C) 当 $x\geqslant 2$ 时, $x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值为 2

(D) 当 $0<x\leqslant 2$ 时, $x-\dfrac{1}{x}$ 无最大值

6. 若函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图, 其中 a、b 为常数, 则下列结论正确的是 ( )



(A) $a>1$, $b<0$ (B) $a>1$, $b>0$

(C) $0<a<1$, $b>0$ (D) $0<a<1$, $b<0$

7. 已知直线 m、n 与平面 α, β, 给出下列三个命题:

① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $n\perp m$;
③ 若 $m\perp\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$.

其中真命题的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 已知 p: $a\neq 0$, q: $ab\neq 0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

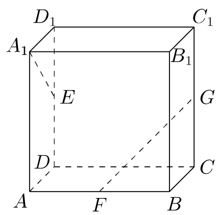
9. 已知定点 A、B 且 $|AB|=4$, 动点 P 满足 $|PA|-|PB|=3$, 则 $|PA|$ 的最小值是 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{7}{2}$ (D) 5

10. 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览, 要求每个城市有一人游览, 每人只游览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览, 则不同的选择方案共有 ( )

(A) 300 种 (B) 240 种 (C) 144 种 (D) 96 种

11. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2$, $AD=1$, 点 E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是 ( )



(A) $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

12. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的偶函数, 且 $f(2)=0$, 则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内解的个数的最小值是 ( )

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

二、填空题

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项是______. (用数字作答)

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\overrightarrow{AB}=(k,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3)$, 则 k 的值是______.

15. 非负实数 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 0,\\ x+y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $x+3y$ 的最大值为______.

16. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题:

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于______对称, 则函数 $g(x)=$______.

注: 填上你认为可以成为真命题的一件情形即可, 不必考虑所有可能的情形.

三、解答题

17. 已知 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$.

(1) 求 $\sin x-\cos x$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$ 的值.

18. 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 与 $\dfrac{2}{5}$, 投中得 1 分, 投不中得 0 分.

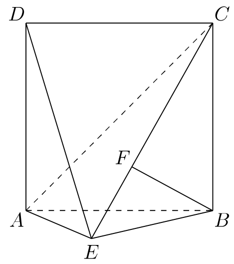
(1) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求两人得分之和 ξ 的数学期望;

(2) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 a_1, a_3, a_2 成等差数列.
(1) 求 q 的值;
(2) 设 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, q 为公差的等差数列, 其前 n 项和为 S_n, 当 $n \geqslant 2$ 时, 比较 S_n 与 b_n 的大小, 并说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + ax + d$ 的图象过点 $P(0,2)$, 且在点 $M(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $6x - y + 7 = 0$.
(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;
(2) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

21. 如图, 直二面角 $D - AB - E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $AE = EB$, F 为 CE 上的点, 且 $BF \perp$ 平面 ACE.
(1) 求证 $AE \perp$ 平面 BCE;
(2) 求二面角 $B - AC - E$ 的大小;
(3) 求点 D 到平面 ACE 的距离.



22. 已知方向向量为 $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0, -2\sqrt{3})$ 和椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的焦点, 且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 是否存在过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M、N, 满足 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \dfrac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON \neq 0$ (O 为原点). 若存在, 求直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

2005 普通高等学校招生考试 (广东卷)

一、选择题

1. 若集合 $M=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$, $N=\{x\mid x^2-3x=0\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{3\}$ (B) $\{0\}$ (C) $\{0,\ 2\}$ (D) $\{0,\ 3\}$

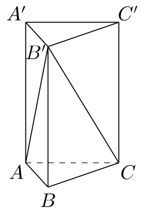
2. 若 $(a-2\mathrm{i})\mathrm{i}=b-\mathrm{i}$, 其中 a、$b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则 $a^2+b^2=$ ( )

(A) 0 (B) 2 (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) 5

3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{6}$ (B) 0 (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

4. 已知高为 3 的直棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的底面是边长为 1 的正三角形 (如图所示), 则三棱锥 $B'-ABC$ 的体积为 ( )



(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

5. 若焦点在 x 轴上的椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $m=$ ( )

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{8}{3}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

6. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是减函数的区间为 ( )

(A) $(2,+\infty)$ (B) $(-\infty,2)$ (C) $(-\infty,0)$ (D) $(0,2)$

7. 给出下列关于互不相同的直线 m、l、n 和平面 α、β 的四个命题:

① 若 $m\subset\alpha$, $l\cap\alpha=A$, $A\notin m$, 则 l 与 m 不共面;

② 若 m、l 是异面直线, $l\parallel\alpha$, $m\parallel\alpha$, 且 $n\perp l$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$;

③ 若 $l\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$;

④ 若 $l\subset\alpha$, $m\subset\alpha$, $l\cap m=A$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

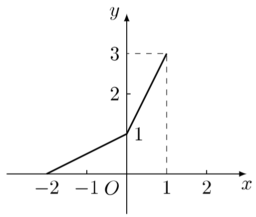
其中为假命题的是 ( )

(A) ① (B) ② (C) ③ (D) ④

8. 先后抛掷两枚均匀的正方体骰子 (它们的六个面分别标有点数 1、2、3、4、5、6), 骰子朝上的面的点数分别为 X、Y, 则 $\log_{2X}Y=1$ 的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{5}{36}$ (C) $\dfrac{1}{12}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

9. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 现将 $y=g(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 2 个单位, 再沿 y 轴向上平移 1 个单位, 所得的图象是由两条线段组成的折线 (如图所示), 则函数 $f(x)$ 的表达式为 ( )



(A) $f(x)=\begin{cases}2x+2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{2}+2, & 0<x\leqslant 2.\end{cases}$ (B) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{2}-2, & 0<x\leqslant 2.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{x}{2}+1, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}2x-6, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{x}{2}-3, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

10. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_2=\dfrac{x_1}{2}$, $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$, $n=3,\ 4,\ \cdots$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, 则 $x_1=$ ( )

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 3 (C) 4 (D) 5

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$ 的定义域是______.

12. 已知向量 $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(x,6)$, 且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 则 $x=$______.

13. 已知 $(x\cos\theta+1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数与 $\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^4$ 的展开式中 x^3 的系数相等, 则 $\cos\theta=$______.

14. 设平面内有 n 条直线 $(n\geqslant 3)$, 其中有且仅有两条直线互相平行, 任意三条直线不过同一点. 若用 $f(n)$ 表示这 n 条直线交点的个数, 则 $f(4)=$______; 当 $n>4$ 时, $f(n)=$______. (用 n 表示)

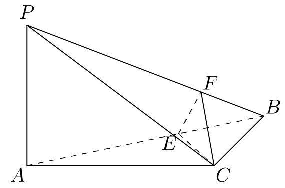
三、解答题

15. 化简 $f(x)=\cos\left(\dfrac{6k+1}{3}\pi+2x\right)+\cos\left(\dfrac{6k-1}{3}\pi-2x\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)$ $(x\in\mathbf{R}\ ,k\in\mathbf{Z})$, 并求函数 $f(x)$ 的值域和最小正周期.

16. 如图所示, 在四面体 $P-ABC$ 中, 已知 $PA=BC=6$, $PC=AB=10$, $AC=8$, $PB=2\sqrt{34}$. F 是线段 PB 上一点, $CF=\dfrac{15}{17}\sqrt{34}$, 点 E 在线段 AB 上, 且 $EF\perp PB$.

(1) 证明: $PB\perp$ 平面 CEF;

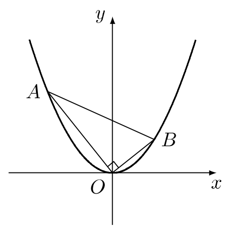
(2) 求二面角 $B-CE-F$ 的大小.



17. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=x^2$ 上异于坐标原点 O 的两不同动点 A、B 满足 $AO\perp BO$ (如图所示).

(1) 求 $\triangle AOB$ 的重心 G (即三角形三条中线的交点) 的轨迹方程;

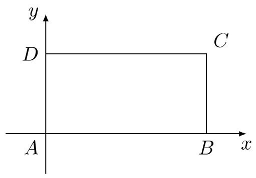
(2) $\triangle AOB$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.



18. 箱中装有大小相同的黄、白两种颜色的乒乓球, 黄、白乒乓球的数量比为 $s:t$. 现从箱中每次任意取出一个球, 若取出的是黄球则结束, 若取出的是白球, 则将其放回箱中, 并继续从箱中任意取出一个球, 但取球的次数最多不超过 n 次, 以 ξ 表示取球结束时已取到白球的次数.
(1) 求 ξ 的分布列;
(2) 求 ξ 的数学期望.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$, $f(7-x)=f(7+x)$, 且在闭区间 $[0,7]$ 上, 只有 $f(1)=f(3)=0$.
(1) 试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性;
(2) 试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005,2005]$ 上的根的个数, 并证明你的结论.

20. 在平面直角坐标系中, 已知矩形 $ABCD$ 的长为 2, 宽为 1, AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上, A 点与坐标原点重合 (如图所示). 将矩形折叠, 使 A 点落在线段 DC 上.
(1) 若折痕所在直线的斜率为 k, 试写出折痕所在直线的方程;
(2) 求折痕的长的最大值.



2005 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

1. 设 P、Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in P,\ b\in Q\}$, 若 $P=\{0,\ 2,\ 5\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

(A) 9　(B) 8　(C) 7　(D) 6

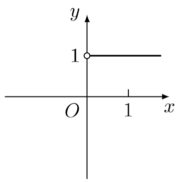
2. 对任意实数 a, b, c, 给出下列命题:
① "$a=b$"是"$ac=bc$"充要条件;
② "$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件;
③ "$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件;
④ "$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.
其中真命题的个数是 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

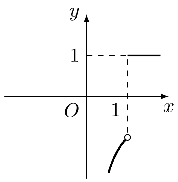
3. $\dfrac{(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $-2-\mathrm{i}$　(B) $-2+\mathrm{i}$　(C) $2-\mathrm{i}$　(D) $2+\mathrm{i}$

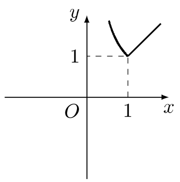
4. 函数 $y=\mathrm{e}^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致是 ( )



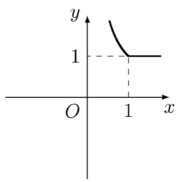
(A)



(B)



(C)



(D)

5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1\ (mn\neq 0)$ 离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为 ( )

(A) $\dfrac{3}{16}$　(B) $\dfrac{3}{8}$　(C) $\dfrac{16}{3}$　(D) $\dfrac{8}{3}$

6. 在 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=x^2$, $y=\cos 2x$ 这四个函数中, 当 $0<x_1<x_2<1$ 时, 使 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

7. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha\in$ ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$　(C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$　(D) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

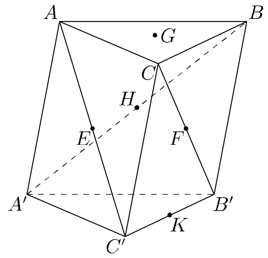
8. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^2}\right)=1$, 则常数 a, b 的值为 ( )

(A) $a=-2$, $b=4$　(B) $a=2$, $b=-4$
(C) $a=-2$, $b=-4$　(D) $a=2$, $b=4$

9. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $2x$ 与 $3\sin x$ 的大小关系 ( )

(A) $2x>3\sin x$　(B) $2x<3\sin x$
(C) $2x=3\sin x$　(D) 与 x 的取值有关

10. 如图, 在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中, 点 E、F、H、K 分别为 AC'、CB'、$A'B$、$B'C'$ 的中点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 从 K、H、G、B' 中取一点作为 P, 使得该棱柱恰有 2 条棱与平面 PEF 平行, 则 P 为 ( )



(A) K　(B) H　(C) G　(D) B'

11. 某初级中学有学生 270 人, 其中一年级 108 人, 二、三年级各 81 人, 现要利用抽样方法抽取 10 人参加某项调查, 考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案, 使用简单随机抽样和分层抽样时, 将学生按一、二、三年级依次统一编号为 1, 2, $\cdots$, 270; 使用系统抽样时, 将学生统一随机编号 1, 2, $\cdots$, 270, 并将整个编号依次分为 10 段. 如果抽得号码有下列四种情况:
① 7, 34, 61, 88, 115, 142, 169, 196, 223, 250;
② 5, 9, 100, 107, 111, 121, 180, 195, 200, 265;
③ 11, 38, 65, 92, 119, 146, 173, 200, 227, 254;
④ 30, 57, 84, 111, 138, 165, 192, 219, 246, 270;
关于上述样本的下列结论中, 正确的是 ( )

(A) ②、③都不能为系统抽样　(B) ②、④都不能为分层抽样
(C) ①、④都可能为系统抽样　(D) ①、③都可能为分层抽样

12. 以平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点为顶点作三角形, 从中随机取出两个三角形, 则这两个三角形不共面的概率 p 为 ( )

(A) $\dfrac{367}{385}$　(B) $\dfrac{376}{385}$　(C) $\dfrac{192}{385}$　(D) $\dfrac{18}{385}$

二、填空题

13. 已知向量 $\vec{a}=(-2,2)$, $\vec{b}=(5,k)$. 若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ 不超过 5, 则 k 的取值范围是______.

14. $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5$ 的展开式中整理后的常数项为______.

15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和为 S_n, 若 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 成等差数列, 则 q 的值为______.

16. 某实验室需购某种化工原料 106 千克, 现在市场上该原料有两种包装, 一种是每袋 35 千克, 价格为 140 元; 另一种是每袋 24 千克, 价格为 120 元. 在满足需要的条件下, 最少要花费______元.

三、解答题

17. 已知向量 $\vec{a}=(x^2,x+1)$, $\vec{b}=(1-x,t)$, 若函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数, 求 t 的取值范围.

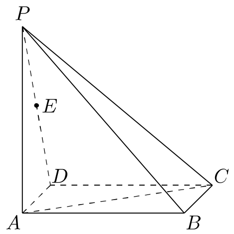
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, $\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, AC 边上的中线 $BD=\sqrt{5}$, 求 $\sin A$ 的值.

19. 某地最近出台一项机动车驾照考试规定: 每位考试者一年之内最多有 4 次参加考试的机会, 一旦某次考试通过, 使可领取驾照, 不再参加以后的考试, 否则就一直考到第 4 次为止. 如果李明决定参加驾照考试, 设他每次参加考试通过的概率依次为 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 求在一年内李明参加驾照考试次数 ξ 的分布列和 ξ 的期望, 并求李明在一年内领到驾照的概率.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, $PA=2$, E 为 PD 的中点.

(1) 求直线 AC 与 PB 所成角的余弦值;

(2) 在侧面 PAB 内找一点 N, 使 $NE\perp$ 面 PAC, 并求出 N 点到 AB 和 AP 的距离.



21. 设 A、B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点, 点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点, 线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C、D 两点.

(1) 确定 λ 的取值范围, 并求直线 AB 的方程;

(2) 试判断是否存在这样的 λ, 使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上? 并说明理由.

22. 已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$, 其中 n 为大于 2 的整数, $[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正, 且满足 $a_1=b\,(b>0)$, $a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$, $n=2,3,4,\cdots$.

(1) 证明: $a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$, $n=3,4,5,\cdots$;

(2) 猜测数列 $\{a_n\}$ 是否有极限? 如果有, 写出极限的值 (不必证明);

(3) 试确定一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 对任意 $b>0$, 都有 $a_n<\frac{1}{5}$.

2005 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

一、选择题

1. 设 P、Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q=\{a+b\mid a\in P,\ b\in Q\}$, 若 $P=\{0,\ 2,\ 5\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

(A) 9　(B) 8　(C) 7　(D) 6

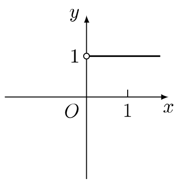
2. 对任意实数 a, b, c, 给出下列命题:
① "$a=b$"是"$ac=bc$"充要条件;
② "$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件;
③ "$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件;
④ "$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.
其中真命题的个数是 ( )

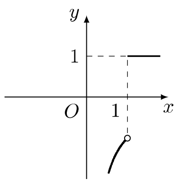
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

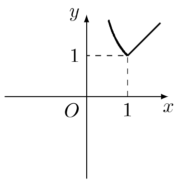
3. 已知向量 $\vec{a}=(-2,2)$, $\vec{b}=(5,k)$. 若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ 不超过 5, 则 k 的取值范围是 ( )

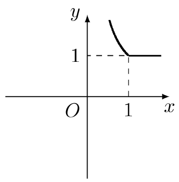
(A) $[-4,6]$　(B) $[-6,4]$　(C) $[-6,2]$　(D) $[-2,6]$

4. 函数 $y=\mathrm{e}^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致是 ( )

(A)


(B)


(C)


(D)


5. 木星的体积约是地球体积的 $240\sqrt{30}$ 倍, 则它的表面积约是地球表面积的 ( )

(A) 60 倍　(B) $60\sqrt{30}$ 倍　(C) 120 倍　(D) $120\sqrt{30}$ 倍

6. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1\ (mn\neq 0)$ 离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为 ( )

(A) $\dfrac{3}{16}$　(B) $\dfrac{3}{8}$　(C) $\dfrac{16}{3}$　(D) $\dfrac{8}{3}$

7. 在 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=x^2$, $y=\cos 2x$ 这四个函数中, 当 $0<x_1<x_2<1$ 时, 使 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

8. 已知 a、b、c 是直线, β 是平面, 给出下列命题:
① 若 $a\perp b$, $b\perp c$, 则 $a\parallel c$;
② 若 $a\parallel b$, $b\perp c$, 则 $a\perp c$;
③ 若 $a\parallel\beta$, $b\subset\beta$, 则 $a\parallel b$;
④ 若 a 与 b 异面, 且 $a\parallel\beta$, 则 $b\beta$ 相交;
⑤ 若 a 与 b 异面, 则至多有一条直线与 a, b 都垂直.
其中真命题的个数是 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

9. 把一同排 6 张座位编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的电影票全部分给 4 个人, 每人至少分 1 张, 至多分 2 张, 且这两张票具有连续的编号, 那么不同的分法种数是 ( )

(A) 168　(B) 96　(C) 72　(D) 144

10. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha\in$ ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$　(C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$　(D) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

11. 在函数 $y=x^3-8x$ 的图象上, 其切线的倾斜角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的点中, 坐标为整数的点的个数是 ( )

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

12. 某初级中学有学生 270 人, 其中一年级 108 人, 二、三年级各 81 人, 现要利用抽样方法抽取 10 人参加某项调查, 考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案, 使用简单随机抽样和分层抽样时, 将学生按一、二、三年级依次统一编号为 $1, 2, \cdots, 270$; 使用系统抽样时, 将学生统一随机编号 $1, 2, \cdots, 270$, 并将整个编号依次分为 10 段. 如果抽得号码有下列四种情况:
① 7, 34, 61, 88, 115, 142, 169, 196, 223, 250;
② 5, 9, 100, 107, 111, 121, 180, 195, 200, 265;
③ 11, 38, 65, 92, 119, 146, 173, 200, 227, 254;
④ 30, 57, 84, 111, 138, 165, 192, 219, 246, 270;
关于上述样本的下列结论中, 正确的是 ( )

(A) ②、③都不能为系统抽样　(B) ②、④都不能为分层抽样
(C) ①、④都可能为系统抽样　(D) ①、③都可能为分层抽样

二、填空题

13. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}\lg\sqrt{4-x}$ 的定义域是______.

14. $\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^4+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中整理后的常数项等于______.

15. 函数 $y=|\sin x|\cos x-1$ 的最小正周期与最大值的和为______.

16. 某实验室需购某种化工原料 106 千克, 现在市场上该原料有两种包装, 一种是每袋 35 千克, 价格为 140 元; 另一种是每袋 24 千克, 价格为 120 元. 在满足需要的条件下, 最少要花费______元.

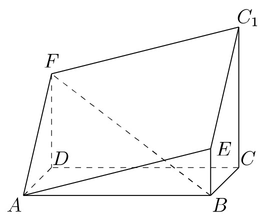
三、解答题

17. 已知向量 $\vec{a}=(x^2,x+1)$, $\vec{b}=(1-x,t)$, 若函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数, 求 t 的取值范围.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan B=\sqrt{3}$, $\cos C=\dfrac{1}{3}$, $AC=3\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=2n^2$, $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1=b_1$, $b_2(a_2-a_1)=b_1$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 如图所示的多面体是由底面为 $ABCD$ 的长方体被截面 AEC_1F 所截面而得到的, 其中 $AB=4$, $BC=2$, $CC_1=3$, $BE=1$.
(1) 求 BF 的长;
(2) 求点 C 到平面 AEC_1F 的距离.



21. 某会议室用 5 盏灯照明, 每盏灯各使用灯泡一只, 且型号相同. 假定每盏灯能否正常照明只与灯泡的寿命有关, 该型号的灯泡寿命为 1 年以上的概率为 p_1, 寿命为 2 年以上的概率为 p_2. 从使用之日起每满 1 年进行一次灯泡更换工作, 只更换已坏的灯泡, 平时不换.
(1) 在第一次灯泡更换工作中, 求不需要换灯泡的概率和更换 2 只灯泡的概率;
(2) 在第二次灯泡更换工作中, 对其中的某一盏灯来说, 求该盏灯需要更换灯泡的概率;
(3) 当 $p_1=0.8$, $p_2=0.3$ 时, 求在第二次灯泡更换工作, 至少需要更换 4 只灯泡的概率. (结果保留两个有效数字)

22. 设 A、B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点, 点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点, 线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C、D 两点.
(1) 确定 λ 的取值范围, 并求直线 AB 的方程;
(2) 试判断是否存在这样的 λ, 使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上? 并说明理由.

2005 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 复数 $z=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4$ 的值是 ( )

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) i

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是 ( )

(A) $(-\infty,0]$　(B) $[0,+\infty)$　(C) $(-\infty,0)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

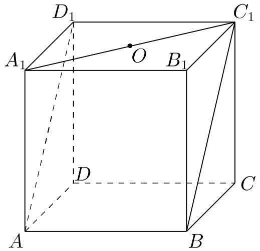
3. 已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列, 且 $a_1=3$, $a_2=5$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)=$ ( )

(A) 2　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

4. 已知点 $P(x,y)$ 在不等式组 $\begin{cases}x-2\leqslant 0,\\ y-1\leqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域上运动, 则 $z=x-y$ 的取值范围是 ( )

(A) $[-2,-1]$　(B) $[-2,1]$　(C) $[-1,2]$　(D) $[1,2]$

5. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, O 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 则 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 ( )



(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设 $f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=f_0'(x)$, $f_2(x)=f_1'(x)$, $\cdots$, $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $n\in\mathbf{N}$, 则 $f_{2005}(x)=$ ( )

(A) $\sin x$　(B) $-\sin x$　(C) $\cos x$　(D) $-\cos x$

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线与一条渐近线交于点 A, $\triangle OAF$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{2}$ (O 为原点), 则两条渐近线的夹角为( )

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 90°

8. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-1}{x+1}<0\right\}$, $B=\{x\mid |x-b|<a\}$, 若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件, 则 b 的取值范围是 ( )

(A) $-2\leqslant b<0$　(B) $0<b\leqslant 2$　(C) $-3<b<-1$　(D) $-1\leqslant b<2$

9. 4 位同学参加某种形式的竞赛, 竞赛规则规定: 每位同学必须从甲. 乙两道题中任选一题作答, 选甲题答对得 100 分, 答错得 -100 分; 选乙题答对得 90 分, 答错得 -90 分. 若 4 位同学的总分为 0, 则这 4 位同学不同得分情况的种数是 ( )

(A) 48　(B) 36　(C) 24　(D) 18

10. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积, $\lambda_1=\dfrac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABc}}$, $\lambda_2=\dfrac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}$, $\lambda_3=\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$, 定义 $f(P)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $f(Q)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$, 则 ( )

(A) 点 Q 在 $\triangle GAB$ 内　(B) 点 Q 在 $\triangle GBC$ 内

(C) 点 Q 在 $\triangle GCA$ 内　(D) 点 Q 与点 G 重合

二、填空题

11. 一工厂生产了某种产品 16800 件, 它们来自甲、乙、丙 3 条生产线, 为检查这批产品的质量, 决定采用分层抽样的方法进行抽样, 已知甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列, 则乙生产线生产了______件产品.

12. 在 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^6$ 的展开式中, x^2 项的系数是______. (用数字作答)

13. 已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 A、B 两点, 且 $|AB|=\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$______.

14. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4)=0$, 则 $f^{-1}(4)=$______.

15. 设函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成图形的面积称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的面积, 已知函数 $y=\sin nx$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{n}\right]$ 上的面积为 $\dfrac{2}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) $y=\sin 3x$ 在 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的面积为______;

(2) $y=\sin(3x-\pi)+1$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上的面积为______.

三、解答题

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A(\sin B+\cos B)-\sin C=0$, $\sin B+\cos 2C=0$, 求角 A、B、C 的大小.

17. 如图 1, 已知 $ABCD$ 是上、下底边长分别为 2 和 6, 高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形, 将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角, 如图 2.

(1) 证明: $AC\perp BO_1$;

(2) 求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小.

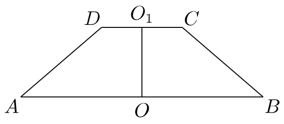


图 1

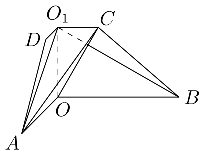


图 2

18. 某城市有甲、乙、丙 3 个旅游景点, 一位客人游览这三个景点的概率分别是 0.4, 0.5, 0.6, 且客人是否游览哪个景点互不影响, 设 ξ 表示客人离开该城市时游览的景点数与没有游览的景点数之差的绝对值.

(1) 求 ξ 的分布及数学期望;

(2) 记"函数 $f(x)=x^2-3\xi x+1$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增"为事件 A, 求事件 A 的概率.

19. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1、F_2, 离心率为 e. 直线 l: $y=ex+a$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B, M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点, P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点, 设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.
(1) 证明: $\lambda=1-e^2$;
(2) 确定 λ 的值, 使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形.

20. 自然状态下的鱼类是一种可再生资源, 为持续利用这一资源, 需从宏观上考察其再生能力及捕捞强度对鱼群总量的影响. 用 x_n 表示某鱼群在第 n 年年初的总量, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $x_1>0$. 不考虑其它因素, 设在第 n 年内鱼群的繁殖量及捕捞量都与 x_n 成正比, 死亡量与 x_n^2 成正比, 这些比例系数依次为正常数 a, b, c.
(1) 求 x_{n+1} 与 x_n 的关系式;
(2) 猜测: 当且仅当 x_1, a, b, c 满足什么条件时, 每年年初鱼群的总量保持不变? (不要求证明)
(3) 设 $a=2$, $b=1$, 为保证对任意 $x_1\in(0,2)$, 都有 $x_n>0$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则捕捞强度 b 的最大允许值是多少? 证明你的结论.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+bx$, $a\neq 0$.
(1) 若 $b=2$, 且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间, 求 a 的取值范围;
(2) 设函数 $f(x)$ 的图象 C_1 与函数 $g(x)$ 图象 C_2 交于点 P、Q, 过线段 PQ 的中点作 x 轴的垂线分别交 C_1, C_2 于点 M、N, 证明 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

2005 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 设全集 $U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $A=\{-2,\ -1,\ 0\}$, $B=\{0,\ 1,\ 2\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$ ( )

(A) $\{0\}$　(B) $\{-2,\ -1\}$　(C) $\{1,\ 2\}$　(D) $\{0,\ 1,\ 2\}$

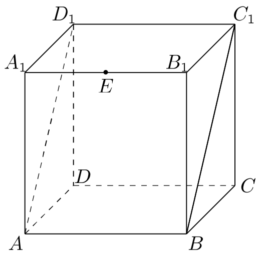
2. $\tan 600°$ 的值是 ( )

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{3}$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是 ( )

(A) $(-\infty,0]$　(B) $[0,+\infty)$　(C) $(-\infty,0)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

4. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E 是 A_1B_1 的中点, 则 E 到平面 ABC_1D_1 的距离为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $a_{20}=$ ( )

(A) 0　(B) $-\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-1}{x+1}<0\right\}$, $B=\{x\mid |x-1|<a\}$, 则"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分又不必要条件

7. 设直线的方程是 $Ax+By=0$, 从 1, 2, 3, 4, 5 这五个数中每次取两个不同的数作为 A、B 的值, 则所得不同直线的条数是 ( )

(A) 20　(B) 19　(C) 18　(D) 16

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线与一条渐近线交于点 A, $\triangle OAF$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{2}$ (O 为原点), 则两条渐近线的夹角为( )

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 90°

9. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的 ( )

(A) 外心　(B) 内心　(C) 重心　(D) 垂心

10. 某公司在甲、乙两地销售一种品牌车, 利润 (单位: 万元) 分别为 $L_1=5.06x-0.15x^2$ 和 $L_2=2x$, 其中 x 为销售量 (单位: 辆). 若该公司在这两地共销售 15 辆车, 则能获得的最大利润为 ( )

(A) 45.606　(B) 45.6　(C) 45.56　(D) 45.51

二、填空题

11. 设直线 $2x+3y+1=0$ 和圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相交于点 A、B, 则弦 AB 的垂直平分线方程是______.

12. 一工厂生产了某种产品 16800 件, 它们来自甲、乙、丙 3 条生产线, 为检查这批产品的质量, 决定采用分层抽样的方法进行抽样, 已知甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列, 则乙生产线生产了______件产品.

13. 在 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^6$ 的展开式中, x^2 项的系数是______. (用数字作答)

14. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4)=0$, 则 $f^{-1}(4)=$______.

15. 已知平面 α, β 和直线, 给出条件:
① $m\,/\!/\,\alpha$; ② $m\perp\alpha$; ③ $m\subset\alpha$; ④ $\alpha\perp\beta$; ⑤ $\alpha\,/\!/\,\beta$.
(1) 当满足条件______时, 有 $m\,/\!/\,\beta$;
(2) 当满足条件______时, 有 $m\perp\beta$. (填所选条件的序号)

三、解答题

16. 已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列, 且 $a_1=3$, $a_3=9$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: $\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}<1$.

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A(\sin B+\cos B)-\sin C=0$, $\sin B+\cos 2C=0$, 求角 A、B、C 的大小.

18. 如图 1, 已知 $ABCD$ 是上、下底边长分别为 2 和 6, 高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形, 将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角, 如图 2.
(1) 证明: $AC\perp BO_1$;
(2) 求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小.

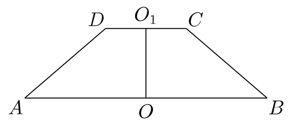


图 1

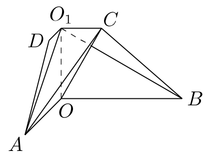


图 2

19. 设 $t \neq 0$, 点 $P(t,0)$ 是函数 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的图象的一个公共点, 两函数的图象在点 P 处有相同的切线.
(1) 用 t 表示 a, b, c;
(2) 若函数 $y=f(x)-g(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递减, 求 t 的取值范围.

20. 某单位组织 4 个部门的职工旅游, 规定每个部门只能在韶山、衡山、张家界 3 个景区中任选一个, 假设各部门选择每个景区是等可能的.
(1) 求 3 个景区都有部门选择的概率;
(2) 求恰有 2 个景区有部门选择的概率.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1、F_2, 离心率为 e. 直线 l: $y=ex+a$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B, M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点, P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点, 设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.
(1) 证明: $\lambda=1-e^2$;
(2) 若 $\lambda=\dfrac{3}{4}$, $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6; 写出椭圆 C 的方程;
(3) 确定 λ 的值, 使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形.

2005 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $C=\{2,\ 3,\ 4\}$, 则 $(A\cap B)\cup C=$ ( )

(A) $\{1,\ 2,\ 3\}$ (B) $\{1,\ 2,\ 4\}$ (C) $\{2,\ 3,\ 4\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

2. 函数 $y=x^{1-x}+3\ (x\in\mathbf{R})$ 的反函数的解析表达式为 ( )

(A) $y=\log_2\dfrac{2}{x-3}$ (B) $y=\log_2\dfrac{x-3}{2}$

(C) $y=\log_2\dfrac{3-x}{2}$ (D) $y=\log_2\dfrac{2}{3-x}$

3. 在各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1=3$, 前三项和为 21, 则 $a_3+a_4+a_5=$ ( )

(A) 33 (B) 72 (C) 84 (D) 189

4. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=2$, $AA_1=1$, 则点 A 到平面 A_1BC 的距离为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (D) $\sqrt{3}$

5. $\triangle ABC$ 中, $A=\dfrac{\pi}{3}$, $BC=3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 ( )

(A) $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$ (B) $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

(C) $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$ (D) $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

6. 抛物线 $y=4x^2$ 上的一点 M 到焦点的距离为 1, 则点 M 的纵坐标是 ( )

(A) $\dfrac{17}{16}$ (B) $\dfrac{15}{16}$ (C) $\dfrac{7}{8}$ (D) 0

7. 在一次歌手大奖赛上, 七位评委为歌手打出的分数如下: 9.4, 8.4, 9.4, 9.9, 9.6, 9.4, 9.7. 去掉一个最高分和一个最低分后, 所剩数据的平均值和方差分别为 ( )

(A) 9.4, 0.484 (B) 9.4, 0.016 (C) 9.5, 0.04 (D) 9.5, 0.016

8. 设 α, β, γ 为两两不重合的平面, l, m, n 为两两不重合的直线, 给出下列四个命题:

① 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

② 若 $m\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $\alpha\parallel\beta$, $l\subset\alpha$, 则 $l\parallel\beta$;

④ 若 $\alpha\cap\beta=l$, $\beta\cap\gamma=m$, $\gamma\cap\alpha=n$, $l\parallel\gamma$, 则 $m\parallel n$.

其中真命题的个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. 设 $k=1, 2, 3, 4, 5$, 则 $(x+2)^5$ 的展开式中 x^k 的系数不可能是 ( )

(A) 10 (B) 40 (C) 50 (D) 80

10. 若 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=$ ( )

(A) $-\dfrac{7}{9}$ (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{7}{9}$

11. 点 $P(-3,1)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左准线上. 过点 P 且方向为 $\boldsymbol{a}=(2,-5)$ 的光线, 经直线 $y=-2$ 反射后通过椭圆的左焦点, 则这个椭圆的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

12. 四棱锥的 8 条棱代表 8 种不同的化工产品, 有公共点的两条棱代表的化工产品放在同一仓库是危险的, 没有公共顶点的两条棱多代表的化工产品放在同一仓库是安全的, 现打算用编号为①、②、③、④的 4 个仓库存放这 8 种化工产品, 那么安全存放的不同方法种数为 ( )

(A) 96 (B) 48 (C) 24 (D) 0

二、填空题

13. 命题"若 $a>b$, 则 $2^a>2^b-1$"的否命题为______.

14. 曲线 $y=x^3+x+1$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程是______.

15. 函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x^2-3x)}$ 的定义域为______.

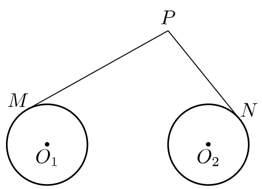
16. 若 $3^a=0.618$, $a\in[k,k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$, 则 $k=$______.

17. 已知 a, b 为常数, 若 $f(x)=x^2+4x+3$, $f(ax+b)=x^2+10x+24$, 则 $5a-b=$______.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, O 为中线 AM 上的一个动点, 若 $AM=2$, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值是______.

三、解答题

19. 如图, 圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1, $O_1O_2=4$, 过动点 P 分别作圆 O_1、圆 O_2 的切线 PM、PN (M、N 分别为切点), 使得 $PM=\sqrt{2}PN$. 试建立适当的坐标系, 并求动点 P 的轨迹方程.



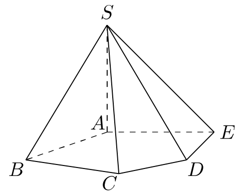
20. 甲、乙两人各射击一次, 击中目标的概率分别是 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{3}{4}$. 假设两人射击是否击中目标, 相互之间没有影响; 每次射击是否击中目标, 相互之间没有影响.

(1) 求甲射击 4 次, 至少 1 次未击中目标的概率;

(2) 求两人各射击 4 次, 甲恰好击中目标 2 次且乙恰好击中目标 3 次的概率;

(3) 假设某人连续 2 次未击中目标, 则停止射击. 问: 乙恰好射击 5 次后, 被中止射击的概率是多少?

21. 如图, 在五棱锥 $S-ABCDE$ 中, $SA\perp$ 底面 $ABCDE$, $SA=AB=AE=2$, $BC=DE=\sqrt{3}$, $\angle BAE=\angle BCD=\angle CDE=120^\circ$.
(1) 求异面直线 CD 与 SB 所成的角; (用反三角函数值表示)
(2) 证明: $BC\perp$ 平面 SAB;
(3) 用反三角函数值表示二面角 $B-SC-D$ 的大小. (本小问不必写出解答过程)



22. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=x^2|x-a|$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)=x$ 使成立的 x 的集合;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值.

23. 设数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n, 已知 $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=11$, 且 $(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B$, $n=1,2,3,\cdots$, 其中 A, B 为常数.
(1) 求 A 与 B 的值;
(2) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;
(3) 证明不等式 $\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_m a_n}>1$ 对任何正整数 m、n 都成立.

2005 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

一、选择题

1. 设集合 $I=\{x\,|\,|x|<3,\ x\in\mathbf{Z}\}$, $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 2\}$, 则 $A\cup(\complement_I B)=$ ( )

(A) $\{1\}$ (B) $\{1,\ 2\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{0,\ 1,\ 2\}$

2. 设复数: $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=x+2\mathrm{i}$ $(x\in\mathbf{R})$, 若 z_1z_2 为实数, 则 $x=$ ( )

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

3. "$a=b$"是"直线 $y=x+2$ 与圆 $(x-a)^2+(y+b)^2=2$ 相切"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

4. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^{12}$ 的展开式中, 含 x 的正整数次幂的项共有 ( )

(A) 4 项 (B) 3 项 (C) 2 项 (D) 1 项

5. 设函数 $f(x)=\sin 3x+|\sin 3x|$, 则 $f(x)$ 为 ( )

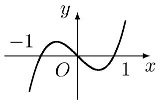
(A) 周期函数, 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{3}$ (B) 周期函数, 最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$

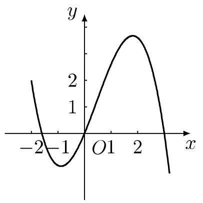
(C) 周期函数, 数小正周期为 2π (D) 非周期函数

6. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}(-2,-4)$, $|\vec{c}|=\sqrt{5}$, 若 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 ( )

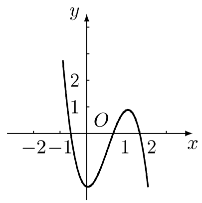
(A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 150°

7. 已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示 (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 下面四个图象中, $y=f(x)$ 的图象大致是 ( )

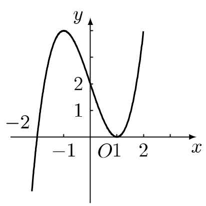




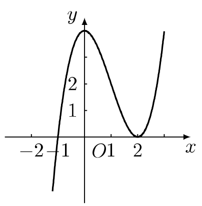
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{f(2-2x)}=$ ( )

(A) -1 (B) 1 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

9. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=3$, 沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B-AC-D$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为 ( )

(A) $\dfrac{125}{12}\pi$ (B) $\dfrac{125}{9}\pi$ (C) $\dfrac{125}{6}\pi$ (D) $\dfrac{125}{3}\pi$

10. 已知实数 a, b 满足等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^b$, 下列五个关系式:

① $0<b<a$; ② $a<b<0$; ③ $0<a<b$; ④ $b<a<0$; ⑤ $a=b$.

其中不可能成立的关系式有 ( )

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

11. 在 $\triangle OAB$ 中, O 为坐标原点, $A(1,\cos\theta)$, $B(\sin\theta,1)$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则 $\triangle OAB$ 的面积达到最大值时, $\theta=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

12. 将 $1, 2, \cdots, 9$ 这 9 个数平均分成三组, 则每组的三个数都成等差数列的概率为 ( )

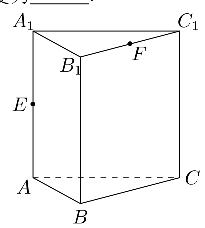
(A) $\dfrac{1}{56}$ (B) $\dfrac{1}{70}$ (C) $\dfrac{1}{336}$ (D) $\dfrac{1}{420}$

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+2a^2})$ 是奇函数, 则 $a=$______.

14. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant0,\\ x+2y-4>0,\\ 2y-3\leqslant0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是______.

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC=\sqrt{2}$, $BB_1=2$, $\angle ABC=90^\circ$, E、F 分别为 AA_1、C_1B_1 的中点, 沿棱柱的表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为______.



16. 以下同个关于圆锥曲线的命题中:

① 设 A、B 为两个定点, k 为非零常数, $\left|\overrightarrow{PA}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|=k$, 则动点 P 的轨迹为双曲线;

② 设定圆 C 上一定点 A 作圆的动点弦 AB, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, 则动点 P 的轨迹为椭圆;

③ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率;

④ 双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点.

其中真命题的序号为______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{ax+b}$ (a, b 为常数), 且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3$, $x_2=4$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $k>1$, 解关于 x 的不等式: $f(x)<\dfrac{(k+1)x-k}{2-x}$.

18. 已知向量 $\vec{a}=\left(2\cos\dfrac{x}{2},\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right),\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, 令 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$. 是否存在实数 $x\in[0,\pi]$, 使 $f(x)+f'(x)=0$ (其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)? 若存在, 则求出 x 的值; 若不存在, 则证明之.

19. A、B 两位同学各有五张卡片, 现以投掷均匀硬币的形式进行游戏, 当出现正面朝上时 A 赢得 B 一张卡片, 否则 B 赢得 A 一张卡片. 规定掷硬币的次数达 9 次时, 或在此前某人已赢得所有卡片时游戏终止. 设 ξ 表示游戏终止时掷硬币的次数.

(1) 求 ξ 的取值范围;

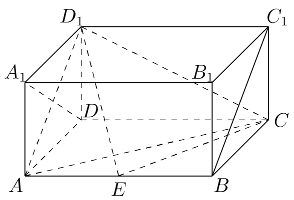
(2) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

20. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 中, $AD=AA_1=1$, $AB=2$, 点 E 在棱 AD 上移动.

(1) 证明: $D_1E\perp A_1D$;

(2) 当 E 为 AB 的中点时, 求点 E 到面 ACD_1 的距离;

(3) AE 等于何值时, 二面角 D_1-EC-D 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且满足: $a_0=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n(4-a_n)$, $n\in\mathbf{N}$.

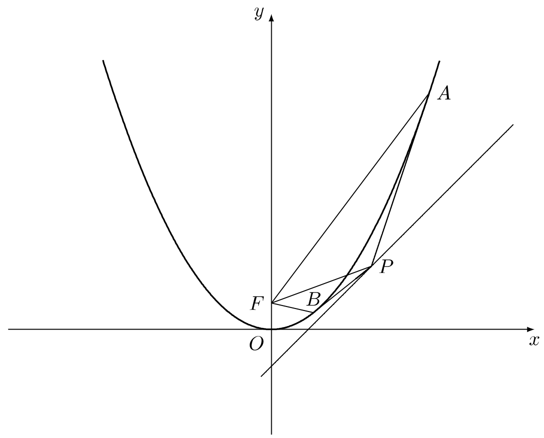
(1) 证明: $a_n<a_{n+1}<2$, $n\in\mathbf{N}$;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

22. 如图, 设抛物线 C: $y=x^2$ 的焦点为 F, 动点 P 在直线 l: $x-y-2=0$ 上运动, 过 P 作抛物线 C 的两条切线 PA、PB, 且与抛物线 C 分别相切于 A、B 两点.

(1) 求 $\triangle APB$ 的重心 G 的轨迹方程;

(2) 证明 $\angle PFA=\angle PFB$.



2005 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

一、选择题

1. 设集合 $I=\{x\mid |x|<3,\ x\in\mathbf{Z}\}$, $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 2\}$, 则 $A\cup(\complement_I B)=$ ( )

(A) $\{1\}$ (B) $\{1,\ 2\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{0,\ 1,\ 2\}$

2. 已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=3$, 则 $\cos\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{4}{5}$ (B) $-\dfrac{4}{5}$ (C) $\dfrac{4}{15}$ (D) $-\dfrac{3}{5}$

3. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^{12}$ 的展开式中, 含 x 的正整数次幂的项共有 ( )

(A) 4 项 (B) 3 项 (C) 2 项 (D) 1 项

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2(-x^2+4x-3)}$ 的定义域为 ( )

(A) $(1,2)\cup(2,3)$ (B) $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

(C) $(1,3)$ (D) $[1,3]$

5. 设函数 $f(x)=\sin 3x+|\sin 3x|$, 则 $f(x)$ 为 ( )

(A) 周期函数, 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{3}$ (B) 周期函数, 最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$

(C) 周期函数, 数小正周期为 2π (D) 非周期函数

6. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}(-2,-4)$, $|\vec{c}|=\sqrt{5}$, 若 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 ( )

(A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 150°

7. 将 9 个 (含甲、乙) 平均分成三组, 甲、乙分在同一组, 则不同分组方法的种数为 ( )

(A) 70 (B) 140 (C) 280 (D) 840

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 设命题 p: $\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$, 命题 q: $\triangle ABC$ 是等边三角形, 那么命题 p 是命题 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

9. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=3$, 沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B-AC-D$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为 ( )

(A) $\dfrac{125}{12}\pi$ (B) $\dfrac{125}{9}\pi$ (C) $\dfrac{125}{6}\pi$ (D) $\dfrac{125}{3}\pi$

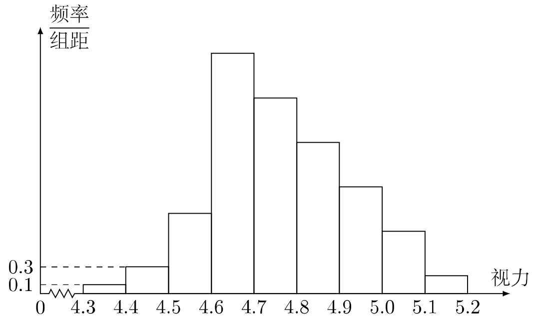
10. 已知实数 a, b 满足等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^b$, 下列五个关系式:
① $0<b<a$; ② $a<b<0$; ③ $0<a<b$; ④ $b<a<0$; ⑤ $a=b$.
其中不可能成立的关系式有 ( )

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

11. 在 $\triangle OAB$ 中, O 为坐标原点, $A(1,\cos\theta)$, $B(\sin\theta,1)$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则 $\triangle OAB$ 的面积达到最大值时, $\theta=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

12. 为了解某校高三学生的视力情况, 随机地抽查了该校 100 名高三学生的视力情况, 得到频率分布直方图. 由于不慎将部分数据丢失, 但知道前 4 组的频数成等比数列, 后 6 组的频数成等差数列, 设最大频率为 a, 视力在 4.6 到 5.0 之间的学生数为 b, 则 a, b 的值分别为 ( )



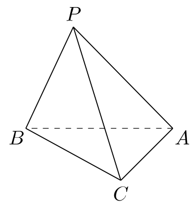
(A) 0.27, 78 (B) 0.27, 83 (C) 2.7, 78 (D) 2.7, 83

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+2a^2})$ 是奇函数, 则 $a=$______.

14. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\ x+2y-4>0,\\ 2y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是______.

15. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PB=PC=BC$, 且 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$, 则 PA 与底面 ABC 所成角为______.



16. 以下同个关于圆锥曲线的命题中:
① 设 A、B 为两个定点, k 为非零常数, $\left|\overrightarrow{PA}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|=k$, 则动点 P 的轨迹为双曲线;
② 设定圆 C 上一定点 A 作圆的动点弦 AB, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, 则动点 P 的轨迹为椭圆;
③ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率;
④ 双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点.
其中真命题的序号为______. (写出所有真命题的序号)

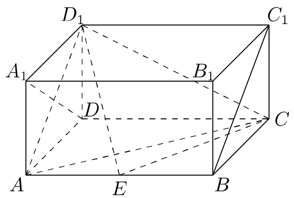
三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{ax+b}$ (a, b 为常数), 且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3$, $x_2=4$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 设 $k>1$, 解关于 x 的不等式: $f(x)<\dfrac{(k+1)x-k}{2-x}$.

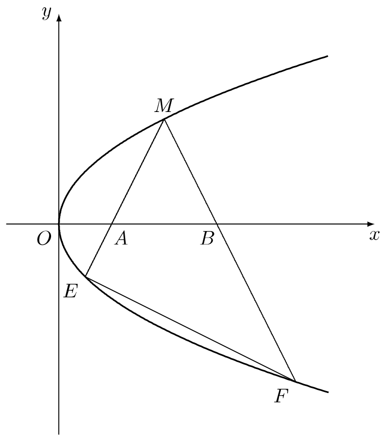
18. 已知向量 $\vec{a}=\left(2\cos\dfrac{x}{2},\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right),\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, 令 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$. 求函数 $f(x)$ 的最大值, 最小正周期, 并写出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调区间.

19. A、B 两位同学各有五张卡片, 现以投掷均匀硬币的形式进行游戏, 当出现正面朝上时 A 赢得 B 一张卡片, 否则 B 赢得 A 一张卡片, 如果某人已赢得所有卡片, 则游戏终止. 求掷硬币的次数不大于 7 次时游戏终止的概率.

20. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 中, $AD=AA_1=1$, $AB=2$, 点 E 在棱 AD 上移动.
(1) 证明: $D_1E \perp A_1D$;
(2) 当 E 为 AB 的中点时, 求点 E 到面 ACD_1 的距离;
(3) AE 等于何值时, 二面角 D_1-EC-D 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.



21. 如图, M 是抛物线上 $y^2=x$ 上的一点, 动弦 ME、MF 分别交 x 轴于 A、B 两点, 且 $MA=MB$.
(1) 若 M 为定点, 证明: 直线 EF 的斜率为定值;
(2) 若 M 为动点, 且 $\angle EMF=90^\circ$, 求 $\triangle EMF$ 的重心 G 的轨迹方程.



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n-S_{n-2}=3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n \geqslant 3)$, 且 $S_1=1$, $S_2=-\dfrac{3}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2005 普通高等学校招生考试 (辽宁卷)

一、选择题

1. 复数 $z=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}-1$ 在复平面内, z 所对应的点在 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的 ( )

(A) 充分而不必要的条件 (B) 必要而不充分的条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件

3. 设袋中有 80 个红球, 20 个白球, 若从袋中任取 10 个球, 则其中恰有 6 个红球的概率为 ( )

(A) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{4}\cdot\mathrm{C}_{10}^{6}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$ (B) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{6}\cdot\mathrm{C}_{10}^{4}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$ (C) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{4}\cdot\mathrm{C}_{20}^{6}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$ (D) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{6}\cdot\mathrm{C}_{20}^{4}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$

4. 已知 m、n 是两条不重合的直线, α、β、γ 是三个两两不重合的平面, 给出下列四个命题:

① 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

② 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\alpha$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ 若 m、n 是异面直线, $m\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\subset\beta$, $n\parallel\alpha$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

其中真命题是 ( )

(A) ①和② (B) ①和③ (C) ③和④ (D) ①和④

5. 函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (B) $y=-\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (D) $y=-\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

6. 若 $\log_{2a}\dfrac{1+a^2}{1+a}<0$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (B) $(1,+\infty)$ (C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ (D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

7. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$: $x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立, 则 ( )

(A) $-1<a<1$ (B) $0<a<2$ (C) $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ (D) $-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

8. 若钝角三角形三内角的度数成等差数列, 且最大边长与最小边长的比值为 m, 则 m 的范围是 ( )

(A) $(1,2)$ (B) $(2,+\infty)$ (C) $[3,+\infty)$ (D) $(3,+\infty)$

9. 若直线 $2x-y+c=0$ 按向量 $\vec{a}=(1,-1)$ 平移后与圆 $x^2+y^2=5$ 相切, 则 c 的值为 ( )

(A) 8 或 -2 (B) 6 或 -4 (C) 4 或 -6 (D) 2 或 -8

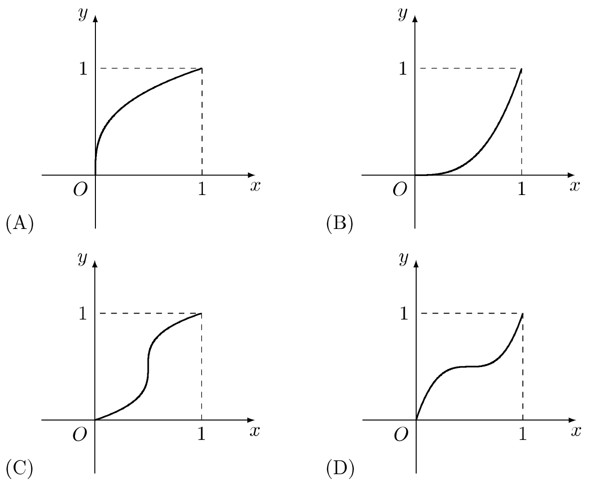
10. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 实数 $x_1\neq x_2$, $\lambda\neq-1$, $\alpha=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $\beta=\dfrac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$, 若 $|f(x_1)-f(x_2)|<|f(\alpha)-f(\beta)|$, 则 ( )

(A) $\lambda<0$ (B) $\lambda=0$ (C) $0<\lambda<1$ (D) $\lambda\geqslant1$

11. 已知双曲线的中心在原点, 离心率为 $\sqrt{3}$. 若它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则该双曲线与抛物线 $y^2=4x$ 的交点到原点的距离是 ( )

(A) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{21}$ (C) $18+12\sqrt{2}$ (D) 21

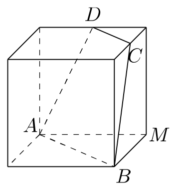
12. 一给定函数 $y=f(x)$ 的图象在下列图中, 并且对任意 $a_1\in(0,1)$, 由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则该函数的图象是 ( )



二、填空题

13. $\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 的展开式中常数项是______.

14. 如图, 正方体的棱长为 1, C、D 分别是两条棱的中点, A、B、M 是顶点, 那么点 M 到截面 $ABCD$ 的距离是______.



15. 用 1、2、3、4、5、6、7、8 组成没有重复数字的八位数, 要求 1 和 2 相邻, 3 与 4 相邻, 5 与 6 相邻, 而 7 与 8 不相邻, 这样的八位数共有______个. (用数字作答)

16. ω 是正实数, 设 $S_\omega=\{\theta\mid f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$ 是奇函数$\}$, 若对每个实数 a, $S_\omega\cap(a,a+1)$ 的元素不超过 2 个, 且有 a 使 $S_\omega\cap(a,a+1)$ 含 2 个元素, 则 ω 的取值范围是______.

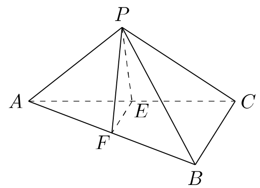
三、解答题

17. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, E、F 分别是 AC、AB 的中点, $\triangle ABC$, $\triangle PEF$ 都是正三角形, $PF\perp AB$.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 PAB;

(2) 求二面角 $P-AB-C$ 的平面角的余弦值;

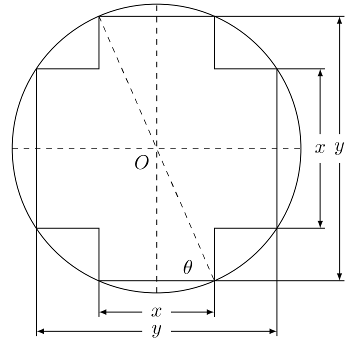
(3) 若点 P、A、B、C 在一个表面积为 12π 的球面上, 求 $\triangle ABC$ 的边长.



18. 如图, 在直径为 1 的圆 O 中, 作一关于圆心对称、邻边互相垂直的十字形, 其中 $y>x>0$.

(1) 将十字形的面积表示为 θ 的函数;

(2) θ 为何值时, 十字形的面积最大? 最大面积是多少?



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}\ (x\neq -1)$. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=f(a_n)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=|a_n-\sqrt{3}|$, $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 用数学归纳法证明: $b_n\leqslant\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$;

(2) 证明: $S_n<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

20. 某工厂生产甲、乙两种产品, 每种产品都是经过第一和第二工序加工而成, 两道工序的加工结果相互独立, 每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级. 对每种产品, 两道工序的加工结果都为 A 级时, 产品为一等品, 其余均为二等品.

(1) 已知甲、乙两种产品每一道工序的加工结果为 A 级的概率如表一所示, 分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_{甲}$、$P_{乙}$;

概率 工序 / 产品	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

表一

(2) 已知一件产品的利润如表二所示, 用 ξ、η 分别表示一件甲、乙产品的利润, 在 (1) 的条件下, 求 ξ、η 的分布列及 $E\xi$、E_η;

利润 等级 / 产品	一等	二等
甲	5 (万元)	2.5 (万元)
乙	2.5 (万元)	1.5 (万元)

表二

(3) 已知生产一件产品需用的工人数和资金额如表三所示. 该工厂有工人 40 名, 可用资. 金 60 万元. 设 x、y 分别表示生产甲、乙产品的数量, 在 (2) 的条件下, x、y 为何值时, $z=xE\xi+yE_\eta$ 最大? 最大值是多少?

用量 项目 / 产品	工人 (名)	资金 (万元)
甲	8	8
乙	2	10

表三

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$, Q 是椭圆外的动点, 满足 $\left|\overrightarrow{F_1Q}\right|=2a$. 点 P 是线段 F_1Q 与该椭圆的交点, 点 T 在线段 F_2Q 上, 并且满足 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$, $\left|\overrightarrow{TF_2}\right|\neq 0$.

(1) 设 x 为点 P 的横坐标, 证明: $\left|\overrightarrow{F_1P}\right|=a+\dfrac{c}{a}x$;

(2) 求点 T 的轨迹 C 的方程;

(3) 试问: 在点 T 的轨迹 C 上, 是否存在点 M, 使 $\triangle F_1MF_2$ 的面积 $S=b^2$. 若存在, 求 $\angle F_1MF_2$ 的正切值; 若不存在, 请说明理由.

22. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可导, 导函数 $f'(x)$ 是减函数, 且 $f'(x)>0$. 设 $x_0\in(0,+\infty)$, $y=kx+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程, 并设函数 $g(x)=kx+m$.

(1) 用 x_0、$f(x_0)$、$f'(x_0)$ 表示 m;

(2) 证明: 当 $x_0\in(0,+\infty)$, $g(x)\geqslant f(x)$;

(3) 若关于 x 的不等式 $x^2+1\geqslant ax+b\geqslant\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立, 其中 a、b 为实数, 求 b 的取值范围及 a 与 b 所满足的关系.

2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}^3}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}=$ ( )

(A) i (B) $-$i (C) $2\sqrt{2}-\mathrm{i}$ (D) $-2\sqrt{2}+\mathrm{i}$

2. 设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$, 则下面论断正确的是 ( )

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$ (B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$ (D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

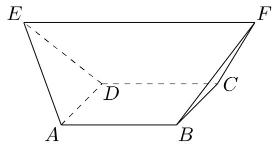
3. 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π, 则球的表面积为( )

(A) $8\sqrt{2}\pi$ (B) 8π (C) $4\sqrt{2}\pi$ (D) 4π

4. 已知直线 l 过点 $(-2,0)$, 当直线 l 与圆 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 有两个交点时, 其斜率 k 的取值范围是 ( )

(A) $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ (B) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ (C) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8}\right)$

5. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF\parallel AB$, $EF=2$, 则该多面体的体积为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

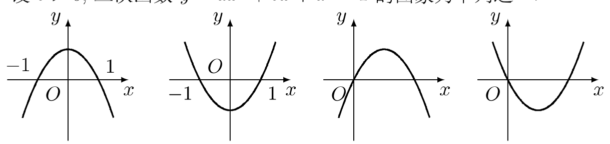
6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的一条准线与抛物线 $y^2=-6x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 ( )

(A) 2 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{3}$

8. 设 $b>0$, 二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-1$ 的图象为下列之一:



则 a 的值为 ( )

(A) 1 (B) -1 (C) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

9. 设 $0<a<1$, 函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$, 则使 $f(x)<0$ 的 x 取值范围是 ( )

(A) $f(x)$ (B) $(0,+\infty)$ (C) $(-\infty,\log_a 3)$ (D) $(\log_a 3,+\infty)$

10. 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases}y\geqslant x-1,\\ y\leqslant -3|x|+1\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) 2

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$, 给出以下四个论断: ① $\tan A\cdot\cot B=1$; ② $0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$; ③ $\sin^2 A+\cos^2 B=1$; ④ $\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$. 其中正确的是 ( )

(A) ①③ (B) ②④ (C) ①④ (D) ②③

12. 过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条, 其中异面直线有 ( )

(A) 18 对 (B) 24 对 (C) 30 对 (D) 36 对

二、填空题

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1}<2^{512}<10^m$, 则 $m=$______. ($\lg 2\approx 0.3010$)

14. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中, 常数项为______. (用数字作答)

15. $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O, 两条边上的高的交点为 H, $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, 则实数 $m=$______.

16. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F, 则:

① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形;

② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形;

③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形;

④ 平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.

以上结论正确的为______. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\sin(2\pi+\varphi)$ $(-\pi<\varphi<0)$, $y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ;

(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间;

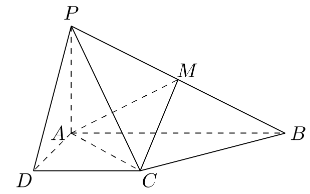
(3) 证明直线 $5x-2y+c=0$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象不相切.

18. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB\parallel DC$, $\angle DAB=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=DE=\dfrac{1}{2}AB=1$, M 是 PB 的中点.

(1) 证明: 面 $PAD\perp$ 面 PCD;

(2) 求 AC 与 PB 所成的角;

(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和 $S_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

(1) 求 q 的取值范围;

(2) 设 $b_n=a_{n+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 试比较 S_n 和 T_n 的大小.

20. 9 粒种子分种在 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5, 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种, 若一个坑里的种子都没发芽, 则这个坑需要补种, 假定每个坑至多补种一次, 每补种 1 个坑需 10 元, 用 ξ 表示补种费用, 写出 ξ 的分布列并求 ξ 的数学期望. (精确到 0.01)

21. 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}=(3,-1)$ 共线.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ (λ, $\mu\in\mathbf{R}$), 证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

22. (1) 设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)$ $(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的最小值;
(2) 设正数 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_{2^n} 满足 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$, 证明: $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n$.

2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$, 则下面论断正确的是 ( )

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　(B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　(D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

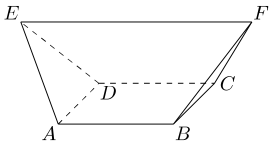
2. 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π, 则球的表面积为( )

(A) $8\sqrt{2}\pi$　(B) 8π　(C) $4\sqrt{2}\pi$　(D) 4π

3. 函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x-9$, 已知 $f(x)$ 在 $x=-3$ 时取得极值, 则 $a=$ ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

4. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF\parallel AB$, $EF=2$, 则该多面体的体积为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的一条准线与抛物线 $y^2=-6x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 ( )

(A) 2　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $4\sqrt{3}$

7. $y=\sqrt{2x-x^2}\ (1\leqslant x\leqslant 2)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$　(B) $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$

(C) $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$　(D) $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$

8. 设 $0<a<1$, 函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$, 则使 $f(x)<0$ 的 x 取值范围是 ( )

(A) $f(x)$　(B) $(0,+\infty)$　(C) $(-\infty,\log_a 3)$　(D) $(\log_a 3,+\infty)$

9. 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases} y\geqslant x-1,\\ y\leqslant -3|x|+1\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) 2

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$, 给出以下四个论断: ① $\tan A\cdot\cot B=1$; ② $0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$; ③ $\sin^2 A+\cos^2 B=1$; ④ $\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$. 其中正确的是 ( )

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①④　(D) ②③

11. 点 O 是三角形 ABC 所在平面内的一点, 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ( )

(A) 三个内角的角平分线的交点　(B) 三条边的垂直平分线的交点

(C) 三条中线的交点　(D) 三条高的交点

12. 设直线 l 过点 $(-2,0)$, 且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 则 l 的斜率是 ( )

(A) ±1　(B) $\pm\dfrac{1}{2}$　(C) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\pm\sqrt{3}$

二、填空题

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1}<2^{512}<10^m$, 则 $m=$______. $(\lg 2\approx 0.3010)$

14. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中, 常数项为______. (用数字作答)

15. 从 6 名男生和 4 名女生中, 选出 3 名代表, 要求至少包含 1 名女生, 则不同的选法有______种.

16. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F, 则:

① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形;

② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形;

③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形;

④ 平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.

以上结论正确的为______. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\sin(2\pi+\varphi)\ (-\pi<\varphi<0)$, $y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ;

(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间;

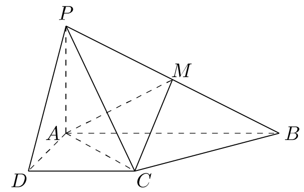
(3) 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象.

18. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB\parallel DC$, $\angle DAB=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=DE=\dfrac{1}{2}AB=1$, M 是 PB 的中点.

(1) 证明: 面 $PAD\perp$ 面 PCD;

(2) 求 AC 与 PB 所成的角;

(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a, 且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为 $(1,3)$.

(1) 若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.

20. 9 粒种子分种在甲、乙、丙 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5. 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种; 若一个坑内的种子都没发芽, 则这个坑需要补种.
(1) 求甲坑不需要补种的概率;
(2) 求 3 个坑中恰有 1 个坑不需要补种的概率;
(3) 求有坑需要补种的概率. (精确到 0.001)

21. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n, 且 $2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项;
(2) 求 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}=(3,-1)$ 共线.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ (λ, $\mu\in\mathbf{R}$), 证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点. 那么, 正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 ( )

(A) 三角形 (B) 四边形 (C) 五边形 (D) 六边形

3. 函数 $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ $(x\leqslant 0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant -1)$ (B) $y=-\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant -1)$

(C) $y=\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant 0)$ (D) $y=-\sqrt{(x+1)^3}$ $(x\geqslant 0)$

4. 已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数, 则 ( )

(A) $0<\omega\leqslant 1$ (B) $-1\leqslant\omega<0$ (C) $\omega\geqslant 1$ (D) $\omega\leqslant -1$

5. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$, 若 $\frac{a+bi}{c+di}$ 为实数, 则 ( )

(A) $bc+ad\neq 0$ (B) $bc-ad\neq 0$

(C) $bc-ad=0$ (D) $bc+ad=0$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1、F_2, 点 M 在双曲线上且 $MF_1\perp x$ 轴, 则 F_1 到直线 F_2M 的距离为 ( )

(A) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ (B) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

7. 锐角三角形的内角 A、B 满足 $\tan A-\frac{1}{\sin 2A}=\tan B$, 则有 ( )

(A) $\sin 2A-\cos B=0$ (B) $\sin 2A+\cos B=0$

(C) $\sin 2A-\sin B=0$ (D) $\sin 2A+\sin B=0$

8. 已知点 $A(\sqrt{3},1)$, $B(0,0)$, $C(\sqrt{3},0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E, 那么有 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 ( )

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

9. 已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$, $N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$, 则 $M\cap N$ 为 ( )

(A) $\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

(B) $\{x\mid -4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

(C) $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

(D) $\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

10. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$ (即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同, 且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位). 设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ( )

(A) $(-2,4)$ (B) $(-30,25)$ (C) $(10,-5)$ (D) $(5,-10)$

11. 如果 a_1, a_2, $\cdots$, a_8 为各项都大于零的等差数列, 公差 $d\neq 0$, 则 ( )

(A) $a_1a_8>a_4a_5$ (B) $a_1a_8<a_4a_5$

(C) $a_1+a_8>a_4+a_5$ (D) $a_1a_8=a_4a_5$

12. 将半径都为 1 的 4 个铅球完全装入形状为正四面体的容器里, 这个正四面体的高最小值为 ( )

(A) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ (B) $2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (C) $4+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

二、填空题

13. 圆心为 $(1,2)$ 且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为______.

14. 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$______.

15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有______个.

16. 下面是关于三棱锥的四个命题:

① 底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥;

② 底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥;

③ 底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥;

④ 侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中, 真命题的编号是______. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$, 求使 $f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$ 的 x 的取值范围.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, $\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列. 又 $b_n=\frac{1}{a_{2^n}}$, $n=1,2,3,\cdots$.

(1) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 如果无穷等比数列 $\{b_n\}$ 各项的和 $S=\frac{1}{3}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d.

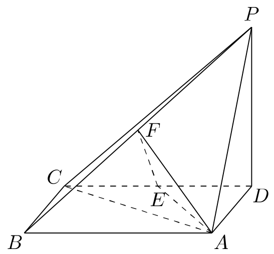
注: 无穷数列各项的和即当 $n\to\infty$ 时数列前 n 项和的极限.

19. 甲、乙两队进行一场排球比赛. 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设各局比赛相互间没有影响. 令 ξ 为本场比赛的局数, 求 ξ 的概率分布和数学期望. (精确到 0.0001)

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E、F 分别为 CD、PB 的中点.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 PAB;

(2) 设 $AB=\sqrt{2}BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. P、Q、M、N 四点都在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线, 且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

22. 已知 $a\geqslant 0$, 函数 $f(x)=(x^2-2ax)\mathrm{e}^x$.

(1) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最小值? 证明你的结论;

(2) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.

2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

一、选择题

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是 ( )
(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点. 那么, 正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 ( )
(A) 三角形 (B) 四边形 (C) 五边形 (D) 六边形

3. 函数 $y=x^2-1\ (x\leqslant 0)$ 的反函数是 ( )
(A) $y=\sqrt{x+1}\ (x\geqslant -1)$ (B) $y=-\sqrt{x+1}\ (x\geqslant -1)$
(C) $y=\sqrt{x+1}\ (x\geqslant 0)$ (D) $y=-\sqrt{x+1}\ (x\geqslant 0)$

4. 已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数, 则 ( )
(A) $0<\omega\leqslant 1$ (B) $-1\leqslant\omega<0$ (C) $\omega\geqslant 1$ (D) $\omega\leqslant -1$

5. 抛物线 $x^2=4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4, 则点 A 与抛物线焦点的距离为 ( )
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

6. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是 ( )
(A) $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ (B) $y=\pm\dfrac{4}{9}x$ (C) $y=\pm\dfrac{3}{2}x$ (D) $\sqrt{3}$

7. 如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 ( )
(A) $a_1+a_8<a_4+a_5$ (B) $a_1+a_8=a_4+a_5$
(C) $a_1+a_8>a_4+a_5$ (D) $a_1a_8=a_4a_5$

8. $(x-\sqrt{2}y)^{10}$ 的展开式中 x^6y^4 项的系数是 ( )
(A) 840 (B) -840 (C) 210 (D) -210

9. 已知点 $A(\sqrt{3},1)$, $B(0,0)$, $C(\sqrt{3},0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E, 那么有 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 ( )
(A) 2 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) -3 (D) $-\dfrac{1}{3}$

10. 已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$, $N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$, 则 $M\cap N$ 为 ( )
(A) $\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$
(B) $\{x\mid -4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$
(C) $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$
(D) $\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

11. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$ (即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同, 且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位). 设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ( )
(A) $(-2,4)$ (B) $(-30,25)$ (C) $(10,-5)$ (D) $(5,-10)$

12. $\triangle ABC$ 的顶点 B 在平面 α 内, A、C 在 α 的同一侧, AB、BC 与 α 所成的角分别是 30° 和 45°. 若 $AB=3$, $BC=4\sqrt{2}$, $AC=5$, 则 AC 与 α 所成的角为 ( )
(A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 15°

二、填空题

13. 在 $\dfrac{8}{3}$ 和 $\dfrac{27}{2}$ 之间插入三个数, 使这五个数成等比数列, 则插入的三个数的乘积为______.

14. 圆心为 $(1,2)$ 且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为______.

15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有______个.

16. 下面是关于三棱锥的四个命题:
① 底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥;
② 底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥;
③ 底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥;
④ 侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.
其中, 真命题的编号是______. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 已知 α 为第二象限的角, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, β 为第一象限的角, $\cos\beta=\dfrac{5}{13}$, 求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值.

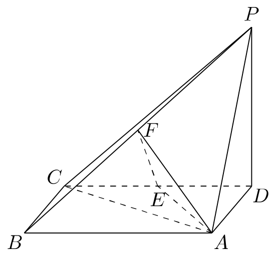
18. 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束, 设各局比赛相互间没有影响, 求:
(1) 前三局比赛甲队领先的概率;
(2) 本场比赛乙队以 3 : 2 取胜的概率. (精确到 0.001)

19. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, $\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列. 又 $b_n=\dfrac{1}{a_{2^n}}$, $n=1,2,3,\cdots$.
(1) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;
(2) 如果数列 $\{b_n\}$ 前 3 项的和等于 $\dfrac{7}{24}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E、F 分别为 CD、PB 的中点.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 PAB;

(2) 设 $AB=\sqrt{2}BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. 设 a 为实数, 函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 a 在什么范围内取值时, 曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点.

22. P、Q、M、N 四点都在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线, 且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

一、选择题

1. 已知 α 为第三象限角, 则 $\dfrac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ( )

(A) 第一或第二象限 (B) 第二或第三象限

(C) 第一或第三象限 (D) 第二或第四象限

2. 已知过点 $A(-2,m)$ 和 $B(m,4)$ 的直线与直线 $2x+y-1=0$ 平行, 则 m 的值为 ( )

(A) 0 (B) -8 (C) 2 (D) 10

3. 在 $(x-1)(x+1)^8$ 的展开式中 x^5 的系数是 ( )

(A) -14 (B) 14 (C) -28 (D) 28

4. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V, P、Q 分别是侧棱 AA_1、CC_1 上的点, 且 $PA=QC_1$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为 ( )

(A) $\dfrac{1}{6}V$ (B) $\dfrac{1}{4}V$ (C) $\dfrac{1}{3}V$ (D) $\dfrac{1}{2}V$

5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

6. 若 $a=\dfrac{\ln 2}{2}$, $b=\dfrac{\ln 3}{3}$, $c=\dfrac{\ln 5}{5}$, 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $b<a<c$

7. 设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, 且 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$, 则 ( )

(A) $0\leqslant x\leqslant\pi$ (B) $\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{4}$

(C) $\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$

8. $\dfrac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$ ( )

(A) $\tan\alpha$ (B) $\tan 2\alpha$ (C) 1 (D) $\dfrac{1}{2}$

9. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1、F_2, 点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$, 则点 M 到 x 轴的距离为 ( )

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{5}{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2, 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P, 若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}-1$

11. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有 ( )

(A) 3 个 (B) 4 个 (C) 6 个 (D) 7 个

12. 计算机中常用十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 $0\sim9$ 和字母 $A\sim F$ 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十六进制	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	8	9	10	11	12	13	14	15

例如, 用十六进制表示: $E+D=1B$, 则 $A\times B=$ ( )

(A) $6E$ (B) 72 (C) $5F$ (D) $B0$

二、填空题

13. 已知复数 $z_0=3+2\mathrm{i}$, 复数 z 满足 $z\cdot z_0=3z+z_0$, 则复数 $z=$______.

14. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$, $\overrightarrow{OB}=(4,5)$, $\overrightarrow{OC}=(-k,10)$, 且 A、B、C 三点共线, 则 $k=$______.

15. 设 l 为平面上过点 $(0,1)$ 的直线, l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 0, $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, 用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离, 则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=$______.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=3$, $AC=4$, P 是 AB 上的点, 则点 P 到 AC、BC 的距离乘积的最大值是______.

三、解答题

17. 设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响. 已知在某一小时内, 甲、乙都需要照顾的概率为 0.05, 甲、丙都需要照顾的概率为 0.1, 乙、丙都需要照顾的概率为 0.125,

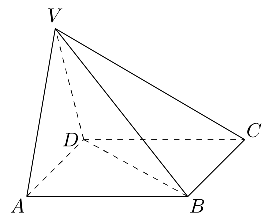
(1) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是多少;

(2) 计算这个小时内至少有一台需要照顾的概率.

18. 如图, 在四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 VAD 是正三角形, 平面 $VAD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明: $AB\perp$ 平面 VAD;

(2) 求面 VAD 与面 VDB 所成的二面角的大小.



19. $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 a, b, c 成等比数列, $\cos B=\dfrac{3}{4}$.

(1) 求 $\cot A+\cot C$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$, 求 $a+c$ 的值.

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等差中项. 已知数列 a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, $\cdots$, a_{k_n}, $\cdots$ 成等比数列, 求数列 $\{k_n\}$ 的通项 k_n.

21. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点在抛物线 $y = 2x^2$ 上, l 是 AB 的垂直平分线.
(1) 当且仅当 $x_1 + x_2$ 取何值时, 直线 l 经过抛物线的焦点 F? 证明你的结论;
(2) 当直线 l 的斜率为 2 时, 求 l 在 y 轴上截距的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;
(2) 设 $a \geqslant 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$. 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

2005 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 文)

一、选择题

1. 已知 α 为第三象限角, 则 $\dfrac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ( )

(A) 第一或第二象限 (B) 第二或第三象限

(C) 第一或第三象限 (D) 第二或第四象限

2. 已知过点 $A(-2,m)$ 和 $B(m,4)$ 的直线与直线 $2x+y-1=0$ 平行, 则 m 的值为 ( )

(A) 0 (B) -8 (C) 2 (D) 10

3. 在 $(x-1)(x+1)^8$ 的展开式中 x^5 的系数是 ( )

(A) -14 (B) 14 (C) -28 (D) 28

4. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V, P、Q 分别是侧棱 AA_1、CC_1 上的点, 且 $PA=QC_1$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为 ( )

(A) $\dfrac{1}{6}V$ (B) $\dfrac{1}{4}V$ (C) $\dfrac{1}{3}V$ (D) $\dfrac{1}{2}V$

5. 设 $3^x=\dfrac{1}{7}$, 则 ( )

(A) $-2<x<-1$ (B) $-3<x<-2$

(C) $-1<x<0$ (D) $0<x<1$

6. 若 $a=\dfrac{\ln 2}{2}$, $b=\dfrac{\ln 3}{3}$, $c=\dfrac{\ln 5}{5}$, 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $b<a<c$

7. 设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, 且 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$, 则 ( )

(A) $0\leqslant x\leqslant \pi$ (B) $\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \dfrac{7\pi}{4}$

(C) $\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \dfrac{5\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{3\pi}{2}$

8. $\dfrac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$ ( )

(A) $\tan\alpha$ (B) $\tan 2\alpha$ (C) 1 (D) $\dfrac{1}{2}$

9. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1、F_2, 点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$, 则点 M 到 x 轴的距离为 ( )

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{5}{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2, 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P, 若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}-1$

11. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有 ( )

(A) 3 个 (B) 4 个 (C) 6 个 (D) 7 个

12. 计算机中常用十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 $0\sim 9$ 和字母 $A\sim F$ 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十六进制	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	8	9	10	11	12	13	14	15

例如, 用十六进制表示: $E+D=1B$, 则 $A\times B=$ ( )

(A) $6E$ (B) 72 (C) $5F$ (D) $B0$

二、填空题

13. 经问卷调查, 某班学生对摄影分别执"喜欢"、"不喜欢"和"一般"三种态度, 其中执"一般"态度的比"不喜欢"态度的多 12 人, 按分层抽样方法从全班选出部分学生座谈摄影, 如果选出的 5 位"喜欢"摄影的同学、1 位"不喜欢"摄影的同学和 3 位执"一般"态度的同学, 那么全班学生中"喜欢"摄影的比全班人数的一半还多______人.

14. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$, $\overrightarrow{OB}=(4,5)$, $\overrightarrow{OC}=(-k,10)$, 且 A、B、C 三点共线, 则 $k=$______.

15. 曲线 $y=2x-x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为______.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=3$, $AC=4$, P 是 AB 上的点, 则点 P 到 AC、BC 的距离乘积的最大值是______.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sin^2x+\sin 2x$, $x\in[0,2\pi]$. 求使 $f(x)$ 为正值的 x 的集合.

18. 设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响. 已知在某一小时内, 甲、乙都需要照顾的概率为 0.05, 甲、丙都需要照顾的概率为 0.1, 乙、丙都需要照顾的概率为 0.125,

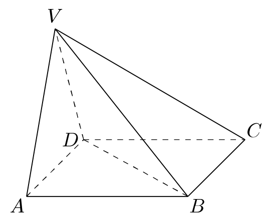
(1) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是多少;

(2) 计算这个小时内至少有一台需要照顾的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 VAD 是正三角形, 平面 $VAD\perp$ 底面 $ABCD$.

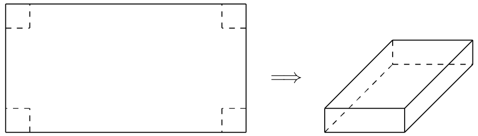
(1) 证明: $AB\perp$ 平面 VAD;

(2) 求面 VAD 与面 VDB 所成的二面角的大小.



20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等差中项. 已知数列 a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, $\cdots$, a_{k_n}, $\cdots$ 成等比数列, 求数列 $\{k_n\}$ 的通项 k_n.

21. 用长为 90 cm, 宽为 48 cm 的长方形铁皮做一个无盖的容器, 先在四角分别截去一个小正方形, 然后把四边翻转 90° 角, 再焊接而成 (如图), 问该容器的高为多少时, 容器的容积最大? 最大容积是多少?



22. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点在抛物线 $y = 2x^2$ 上, l 是 AB 的垂直平分线.
(1) 当且仅当 $x_1 + x_2$ 取何值时, 直线 l 经过抛物线的焦点 F? 证明你的结论;
(2) 当 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ 时, 求直线 l 的方程.

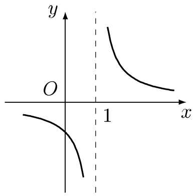
2005 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

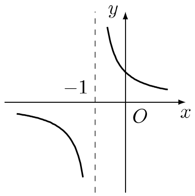
1. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=$ ( )

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) 1 (D) -1

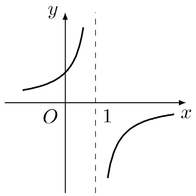
2. 函数 $y=\dfrac{1-x}{x}$ $(x\neq 0)$ 的反函数图象大致是 ( )



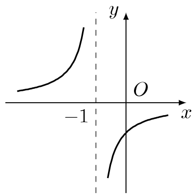
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 已知函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$, 则下列判断正确的是 ( )

(A) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(B) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(C) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(D) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

4. 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1,1]$ 上单调递减的是 ( )

(A) $f(x)=\sin x$ (B) $f(x)=-|x+1|$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ (D) $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

5. 如果 $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中 $\dfrac{1}{x^3}$ 的系数是 ( )

(A) 7 (B) -7 (C) 21 (D) -21

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^2), & -1<x<0,\\ \mathrm{e}^{x-1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(1)+f(a)=2$, 则 a 的所有可能值为 ( )

(A) 1 (B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-5\vec{a}+6\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=7\vec{a}-2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 ( )

(A) A、B、D (B) A、B、C (C) B、C、D (D) A、C、D

8. 设地球的半径为 R, 若甲地位于北纬 45° 东经 120°, 乙地位于南纬 75° 东经 120°, 则甲、乙两地的球面距离为 ( )

(A) $\sqrt{3}R$ (B) $\dfrac{\pi}{6}R$ (C) $\dfrac{5\pi}{6}R$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}R$

9. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 ( )

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{1}{12}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{11}{12}$

10. 设集合 A、B 是全集 U 的两个子集, 则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. $0<a<1$, 下列不等式一定成立的是 ( )

(A) $|\log_{(1+a)}(1-a)|+|\log_{(1-a)}(1+a)|>2$

(B) $|\log_{(1+a)}(1-a)|<|\log_{(1-a)}(1+a)|$

(C) $|\log_{(1+a)}(1-a)+\log_{(1-a)}(1+a)|<|\log_{(1+a)}(1-a)|+|\log_{(1-a)}(1+a)|$

(D) $|\log_{(1+a)}(1-a)-\log_{(1-a)}(1+a)|<|\log_{(1+a)}(1-a)|-|\log_{(1-a)}(1+a)|$

12. 设直线 l: $2x+y+2=0$ 关于原点对称的直线为 l', 若 l' 与椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的交点为 A、B, 点 P 为椭圆上的动点, 则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$ 的点 P 的个数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{C}_n^{n-2}}{(n+1)^2}=$______.

14. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线 l 与两条渐近线交于 P、Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e=$______.

15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\ 3x+2y\leqslant 12,\\ 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0\leqslant y\leqslant 4,\end{cases}$ 则使得目标函数 $z=6x+5y$ 的最大的点 (x,y) 是______.

16. 已知 m、n 是不同的直线, α、β 是不重合的平面, 给出下列命题:

① 若 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $m\parallel n$;

② 若 $m,n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ m,n 是两条异面直线, 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\alpha$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

上面的命题中, 真命题的序号是______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知向量 $\vec{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\vec{n}=\left(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta\right)$, $\theta\in(\pi,2\pi)$, 且 $|\vec{m}+\vec{n}|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$, 求 $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值.

18. 袋中装有黑球和白球共 7 个, 从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\dfrac{1}{7}$, 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球, 甲先取, 乙后取, 然后甲再取 $\cdots$, 取后不放回, 直到两人中有一人取到白球时既终止. 每个球在每一次被取出的机会是等可能的, 用 ξ 表示取球终止所需要的取球次数.

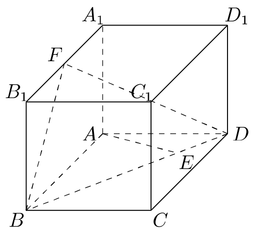
(1) 求袋中所有的白球的个数;

(2) 求随机变量 ξ 的概率分布;

(3) 求甲取到白球的概率.

19. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$ 的一个极值点, 其中 $m, n\in\mathbf{R}$, $m<0$.
(1) 求 m 与 n 的关系式;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 当 $x\in[-1,1]$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图象上任意一点的切线斜率恒大于 $3m$, 求 m 的取值范围.

20. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2$, $AA_1=1$, 直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $30°$, AE 垂直 BD 于 E, F 为 A_1B_1 的中点.
(1) 求异面直线 AE 与 BF 所成的角;
(2) 求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成的二面角 (锐角) 的大小;
(3) 求点 A 到平面 BDF 的距离.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=5$, 前 n 项和为 S_n, 且 $S_{n+1}=S_n+n+5$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列;
(2) 令 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 求函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$ 并比较 $2f'(1)$ 与 $23n^2-13n$ 的大小.

22. 已知动圆过定点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$, 且与直线 $x=-\frac{p}{2}$ 相切, 其中 $p>0$.
(1) 求动圆圆心 C 的轨迹的方程;
(2) 设 A、B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β, 当 α, β 变化且 $\alpha+\beta$ 为定值 θ $(0<\theta<\pi)$ 时, 证明直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

2005 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

一、选择题

1. $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$, 公差 $d=3$ 的等差数列, 如果 $a_n=2005$, 则序号 n 等于 ( )

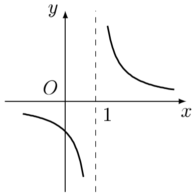
(A) 667 (B) 668 (C) 669 (D) 670

2. 下列大小关系正确的是 ( )

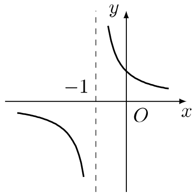
(A) $0.4^3<3^{0.4}<\log_4 0.3$ (B) $0.4^3<\log_4 0.3<3^{0.4}$

(C) $\log_4 0.3<0.4^3<3^{0.4}$ (D) $\log_4 0.3<3^{0.4}<0.4^3$

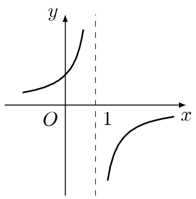
3. 函数 $y=\dfrac{1-x}{x}$ $(x\neq 0)$ 的反函数图象大致是 ( )



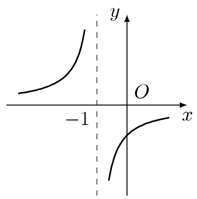
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 已知函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$, 则下列判断正确的是 ( )

(A) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(B) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(C) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(D) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

5. 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1,1]$ 上单调递减的是 ( )

(A) $f(x)=\sin x$ (B) $f(x)=-|x+1|$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ (D) $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

6. 如果 $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中 $\dfrac{1}{x^3}$ 的系数是 ( )

(A) 7 (B) -7 (C) 21 (D) -21

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^2), & -1<x<0,\\ \mathrm{e}^{x-1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(1)+f(a)=2$, 则 a 的所有可能值为 ( )

(A) 1 (B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-5\vec{a}+6\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=7\vec{a}-2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 ( )

(A) A、B、D (B) A、B、C (C) B、C、D (D) A、C、D

9. 设地球的半径为 R, 若甲地位于北纬 $45°$ 东经 $120°$, 乙地位于南纬 $75°$ 东经 $120°$, 则甲、乙两地的球面距离为 ( )

(A) $\sqrt{3}R$ (B) $\dfrac{\pi}{6}R$ (C) $\dfrac{5\pi}{6}R$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}R$

10. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 ( )

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{1}{12}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{11}{12}$

11. 设集合 A、B 是全集 U 的两个子集, 则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

12. 设直线 l: $2x+y+2=0$ 关于原点对称的直线为 l', 若 l' 与椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的交点为 A、B, 点 P 为椭圆上的动点, 则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$ 的点 P 的个数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

13. 某学校共有教师 490 人, 其中不到 40 岁的有 350 人, 40 岁及以上的有 140 人, 为了解普通话在该校教师中的推广普及情况, 用分层抽样的方法, 从全体教师中抽取一个容量为 70 人的样本进行普通话水平测试, 其中在不到 40 岁的教师中应抽取的人数是______.

14. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线 l 与两条渐近线交于 P、Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e=$______.

15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\ 3x+2y\leqslant 12,\\ 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0\leqslant y\leqslant 4,\end{cases}$ 则使得目标函数 $z=6x+5y$ 的最大的点 (x,y) 是______.

16. 已知 m、n 是不同的直线, α、β 是不重合的平面, 给出下列命题:

① 若 $m\parallel\alpha$, 则 m 平行于平面 α 内的任一条直线;

② 若 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $m\parallel n$;

③ 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ 若 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, 则 $m\parallel\beta$.

上面的命题中, 真命题的序号是______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知向量 $\vec{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\vec{n}=\left(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta\right)$, $\theta\in(\pi,2\pi)$, 且 $|\vec{m}+\vec{n}|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$, 求 $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值.

18. 袋中装有黑球和白球共 7 个, 从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\dfrac{1}{7}$, 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球, 甲先取, 乙后取, 然后甲再取 $\cdots$, 取后不放回, 直到两人中有一人取到白球时既终止, 每个球在每一次被取出的机会是等可能的.

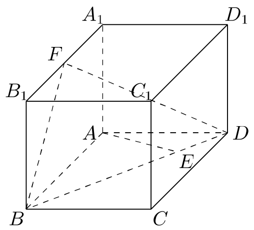
(1) 求袋中原有的白球的个数;

(2) 求取球 2 次终止的概率;

(3) 求甲取到白球的概率.

19. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$ 的一个极值点, 其中 $m, n\in\mathbf{R}$, $m<0$.
(1) 求 m 与 n 的关系式;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

20. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2$, $AA_1=1$, 直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $30°$, AE 垂直 BD 于 E, F 为 A_1B_1 的中点.
(1) 求异面直线 AE 与 BF 所成的角;
(2) 求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成的二面角 (锐角) 的大小;
(3) 求点 A 到平面 BDF 的距离.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=5$, 前 n 项和为 S_n, 且 $S_{n+1}=S_n+n+5$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列;
(2) 令 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 求函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$.

22. 已知动圆过定点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$, 且与直线 $x=-\frac{p}{2}$ 相切, 其中 $p>0$.
(1) 求动圆圆心 C 的轨迹的方程;
(2) 设 A、B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β, 当 α,β 变化且 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, 证明直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

2005 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是______.

3. 直角坐标平面 xOy 中, 若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, 则点 P 的轨迹方程是______.

4. 在 $(x-a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数是 15, 则实数 $a=$______.

5. 若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 3x$, 它的一个焦点是 $\left(\sqrt{10},0\right)$, 则双曲线的方程是______.

6. 将参数方程 $\begin{cases}x=1+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数) 化为普通方程, 所得方程是______.

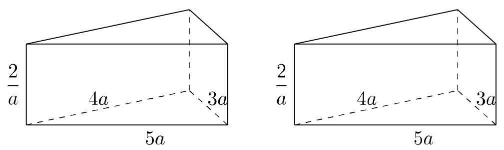
7. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n-1}}=$______.

8. 某班有 50 名学生, 其中 15 人选修 A 课程, 另外 35 人选修 B 课程. 从班级中任选两名学生, 他们是选修不同课程的学生的概率是______. (结果用分数表示)

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A=120^\circ$, $AB=5$, $BC=7$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=$______.

10. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是______.

11. 有两个相同的直三棱柱, 高为 $\dfrac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为 $3a$, $4a$, $5a$ $(a>0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则 a 的取值范围是______.



12. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列, 每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in}, 记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1$, 2, 3, $\cdots$, $n!$. 例如: 用 1, 2, 3 可得数阵如图, 由于此数阵中每一列各数之和都是 12, 所以, $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$, 那么, 在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$______.

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

二、选择题

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$, 则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 ( )

(A) 单调递减无最小值 (B) 单调递减有最小值

(C) 单调递增无最大值 (D) 单调递增有最大值

14. 已知集合 $M=\{x\mid|x-1|\leqslant2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $P=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{5}{x+1}\geqslant1,\ x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap P$ 等于 ( )

(A) $\{x\mid 0<x\leqslant3,\ x\in\mathbf{Z}\}$ (B) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant3,\ x\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant0,\ x\in\mathbf{Z}\}$ (D) $\{x\mid -1\leqslant x<0,\ x\in\mathbf{Z}\}$

15. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A、B 两点, 它们的横坐标之和等于 5, 则这样的直线 ( )

(A) 有且仅有一条 (B) 有且仅有两条

(C) 有无穷多条 (D) 不存在

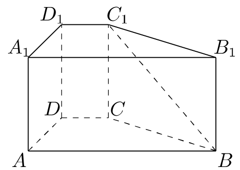
16. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是 ( )

(A) $b<0$ 且 $c>0$ (B) $b>0$ 且 $c<0$

(C) $b<0$ 且 $c=0$ (D) $b\geqslant0$ 且 $c=0$

三、解答题

17. 如图, 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle A$ 是直角, $AB\parallel CD$, $AB=4$, $AD=2$, $DC=1$, 求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)

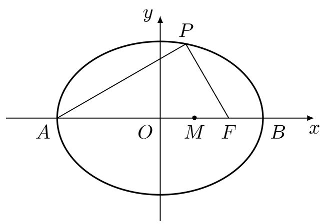


18. 证明: 在复数范围内, 方程 $|z|^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}-(1+\mathrm{i})z=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 无解.

19. 如图, 点 A、B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点, 点 F 是椭圆的右焦点, 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方, $PA\perp PF$.

(1) 求点 P 的坐标;

(2) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$, 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.



20. 假设某市 2004 年新建住房面积 400 万平方米, 其中有 250 万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,
(1) 该市历年所建中低价层的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4750 万平方米?
(2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

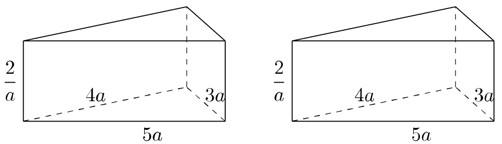
21. 对定义域是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数
$$h(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g, \\ f(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g, \\ g(x), & \text{当 } x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g. \end{cases}$$
(1) 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;
(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的值域;
(3) 若 $g(x)=f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.

22. 在直角坐标平面中, 已知点 $P_1(1,2)$, $P_2(2,2^2)$, $P_3(3,2^3)$, $\cdots$, $P_n(n,2^n)$, 其中 n 是正整数, 对平面上任一点 A_0, 记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点, A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点, $\cdots$, A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.
(1) 求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标;
(2) 当点 A_0 在曲线 C 上移动时, 点 A_2 的轨迹是函数 $y=f(x)$ 的图象, 其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数, 且当 $x\in(0,3]$ 时, $f(x)=\lg x$. 求以曲线 C 为图象的函数在 $(1,4]$ 上的解析式;
(3) 对任意偶数 n, 用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标.

2005 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.
2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是______.
3. 若 x,y 满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 3,\\ y\leqslant 2x,\end{cases}$ 则 $z=3x+4y$ 的最大值是______.
4. 直角坐标平面 xOy 中, 若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, 则点 P 的轨迹方程是______.
5. 函数 $y=\cos 2x+\sin x\cos x$ 的最小正周期 $T=$______.
6. 若 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$______.
7. 若椭圆长轴长与短轴长之比为 2, 它的一个焦点是 $\left(2\sqrt{15},0\right)$, 则椭圆的标准方程是______.
8. 某班有 50 名学生, 其中 15 人选修 A 课程, 另外 35 人选修 B 课程. 从班级中任选两名学生, 他们是选修不同课程的学生的概率是______. (结果用分数表示)
9. 直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是______.
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A=120^\circ$, $AB=5$, $BC=7$, 则 $AC=$______.
11. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是______.
12. 有两个相同的直三棱柱, 高为 $\dfrac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为 $3a$, $4a$, $5a$ $(a>0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则 a 的取值范围是______.



二、选择题

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$, 则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 ( )

(A) 单调递减无最小值　(B) 单调递减有最小值

(C) 单调递增无最大值　(D) 单调递增有最大值

14. 已知集合 $M=\{x\mid |x-1|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $P=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{5}{x+1}\geqslant 1,\ x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap P$ 等于 ( )

(A) $\{x\mid 0<x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{Z}\}$　(B) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0,\ x\in\mathbf{Z}\}$　(D) $\{x\mid -1\leqslant x<0,\ x\in\mathbf{Z}\}$

15. 条件甲: "$a>1$"是条件乙: "$a>\sqrt{a}$"的 ( )

(A) 既不充分也不必要条件　(B) 充要条件

(C) 充分不必要条件　(D) 必要不充分条件

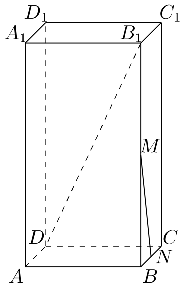
16. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列, 每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in}, 记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1,2,3,\cdots,n!$. 例如: 用 1, 2, 3 可得数阵如图, 由于此数阵中每一列各数之和都是 12, 所以, $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times 12-3\times 12=-24$, 那么, 在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$ ( )

$$\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\\2&1&3\\2&3&1\\3&1&2\\3&2&1\end{matrix}$$

(A) -3600　(B) 1800　(C) -1080　(D) -720

三、解答题

17. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M、N 分别是 BB_1 和 BC 的中点, $AB=4$, $AD=2$, B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 60°, 求异面直线 B_1D 与 MN 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 在复数范围内解方程 $|z|^2+(z+\overline{z})\mathrm{i}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$. (i 为虚数单位)

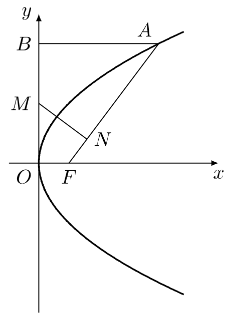
19. 已知函数 $f(x)=kx+b$ 的图象与 x, y 轴分别相交于点 A、B, $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$ 分别是与 x, y 轴正半轴同方向的单位向量), 函数 $g(x)=x^2-x-6$.

(1) 求 k, b 的值;

(2) 当 x 满足 $f(x)>g(x)$ 时, 求函数 $\dfrac{g(x)+1}{f(x)}$ 的最小值.

20. 假设某市 2004 年新建住房面积 400 万平方米, 其中有 250 万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,
(1) 该市历年所建中低价层的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4750 万平方米?
(2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

21. 已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, A 是抛物线上横坐标为 4、且位于 x 轴上方的点, A 到抛物线准线的距离等于 5. 过 A 作 AB 垂直于 y 轴, 垂足为 B, OB 的中点为 M.
(1) 求抛物线方程;
(2) 过 M 作 $MN\perp FA$, 垂足为 N, 求点 N 的坐标;
(3) 以 M 为圆心, MB 为半径作圆 M, 当 $K(m,0)$ 是 x 轴上一动点时, 讨论直线 AK 与圆 M 的位置关系.



22. 对定义域是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数 $h(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g, \\ f(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g, \\ g(x), & \text{当 } x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g. \end{cases}$
(1) 若函数 $f(x)=-2x+3$, $x\geqslant 1$ $g(x)=x-2$, $x\in\mathbf{R}$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;
(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的最大值;
(3) 若 $g(x)=f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.

2005 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid |4x-1|\geqslant 9,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x}{x+3}\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $(-3,-2]$ (B) $(-3,-2]\cup\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$

(C) $(-\infty,-3]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ (D) $(-\infty,-3)\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

2. 若复数 $\dfrac{a+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ ($a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位位) 是纯虚数, 则实数 a 的值为 ( )

(A) -2 (B) 4 (C) -6 (D) 6

3. 给出下列三个命题:

① 若 $a\geqslant b>-1$, 则 $\dfrac{a}{1+a}\geqslant\dfrac{b}{1+b}$;

② 若正整数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$, 则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\dfrac{n}{2}$;

③ 设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 O_1: $x^2+y^2=9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1. 当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 设 α,β,γ 为平面, m,n,l 为直线, 则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件是 ( )

(A) $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,m\perp l$ (B) $\alpha\cap\gamma=m,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

(C) $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,m\perp\alpha$ (D) $n\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp\alpha$

5. 设双曲线以椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 长轴的两个端点为焦点, 其准线过椭圆的焦点, 则双曲线的渐近线的斜率为 ( )

(A) ± 2 (B) $\pm\dfrac{4}{3}$ (C) $\pm\dfrac{1}{2}$ (D) $\pm\dfrac{3}{4}$

6. 从集合 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11\}$ 中任选两个元素作为椭圆方程 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ 中的 m 和 n, 则能组成落在矩形区域 $B=\{(x,y)\mid |x|<11$ 且 $|y|<9\}$ 内的椭圆个数为 ( )

(A) 43 (B) 72 (C) 86 (D) 90

7. 某人射击一次击中的概率为 0.6, 经过 3 次射击, 此人至少有两次击中目标的概率为 ( )

(A) $\dfrac{81}{125}$ (B) $\dfrac{54}{125}$ (C) $\dfrac{36}{125}$ (D) $\dfrac{27}{125}$

8. 要得到函数 $y=\sqrt{2}\cos x$ 的图象, 只需将函数 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图象上所有的点的 ( )

(A) 横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

(B) 横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

(C) 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

(D) 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

9. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ $(a>1)$ 的反函数, 则使 $f^{-1}(x)>1$ 成立的 x 的取值范围为 ( )

(A) $\left(\dfrac{a^2-1}{2a},+\infty\right)$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{a^2-1}{2a}\right)$

(C) $\left(\dfrac{a^2-1}{2a},a\right)$ (D) $[a,+\infty)$

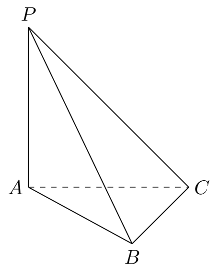
10. 若函数 $f(x)=\log_a(x^3-ax)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 内单调递增, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{1}{4},1\right)$ (B) $\left[\dfrac{3}{4},1\right)$ (C) $\left(\dfrac{9}{4},+\infty\right)$ (D) $\left(1,\dfrac{9}{4}\right)$

二、填空题

11. 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2 6+\mathrm{C}_n^3 6^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n 6^{n-1}=$______.

12. 如图, $PA\perp$ 平面 ABC, $\angle ACB=90^\circ$ 且 $PA=AC=BC=a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于______.



13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $S_{100}=$______.

14. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$, 则 $\overrightarrow{OC}=$______.

15. 某公司有 5 万元资金用于投资开发项目, 如果成功, 一年后可获利 12%, 一旦失败, 一年后将丧失全部资金的 50%, 下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果:

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是______(元).

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=$______.

三、解答题

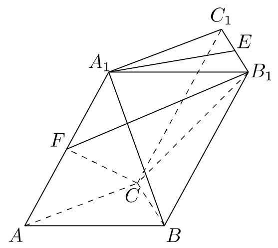
17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c, 设 a, b, c 满足条件 $b^2+c^2-bc=a^2$ 和 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$, 求 $\angle A$ 和 $\tan B$ 的值.

18. 已知 $u_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ a>0,\ b>0)$.

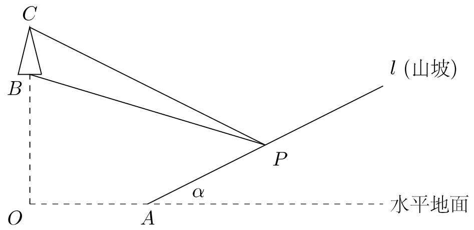
(1) 当 $a=b$ 时, 求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$.

19. 如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB=\angle A_1AC$, $AB=AC$, $A_1A=A_1B=a$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 $120°$, E、F 分别是棱 B_1C_1, A_1A 的中点.
(1) 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;
(2) 证明 A_1E // 平面 B_1FC;
(3) 求经过 A_1, A, B, C 四点的球的体积.



20. 某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔, 如图所示, 塔高 $BC=80$ (米), 塔所在的山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米), 图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α, $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. 试问此人距水平地面多高时, 观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大? (不计此人的身高)



21. 抛物线 C 的方程为 $y=ax^2$ $(a<0)$, 过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0\neq 0)$ 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点 (P, A, B 三点互不相同), 且满足 $k_2+\lambda k_1=0$ $(\lambda\neq 0,\ \lambda\neq -1)$.
(1) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;
(2) 设直线 AB 上一点 M, 满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$, 证明线段 PM 的中点在 y 轴上;
(3) 当 $\lambda=1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1,-1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

22. 设函数 $f(x)=x\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$.
(1) 证明 $f(x+2k\pi)-f(x)=2k\pi\sin x$, 其中 k 为整数;
(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 证明 $[f(x_0)]^2=\dfrac{{x_0}^4}{1+{x_0}^2}$;
(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的全部极值点按从小到大的顺序排列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$, 证明 $\dfrac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\pi$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

2005 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x<3$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是 ( )

(A) 16 (B) 8 (C) 7 (D) 4

2. 已知 $\log_{\frac{1}{2}}b<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}c$, 则 ( )

(A) $2^b>2^a>2^c$ (B) $2^a>2^b>2^c$ (C) $2^c>2^b>2^a$ (D) $2^c>2^a>2^b$

3. 某人射击一次击中的概率为 0.6, 经过 3 次射击, 此人至少有两次击中目标的概率为 ( )

(A) $\dfrac{81}{125}$ (B) $\dfrac{54}{125}$ (C) $\dfrac{36}{125}$ (D) $\dfrac{27}{125}$

4. 将直线 $2x-y+\lambda=0$ 沿 x 轴向左平移 1 个单位, 所得直线与圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 相切, 则实数 λ 的值为

(A) -3 或 7 (B) -2 或 8 (C) 0 或 10 (D) 1 或 11

5. 设 α, β, γ 为平面, m, n, l 为直线, 则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件是 ( )

(A) $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $m\perp l$ (B) $\alpha\cap\gamma=m$, $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$

(C) $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, $m\perp\alpha$ (D) $n\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\perp\alpha$

6. 设双曲线以椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 长轴的两个端点为焦点, 其准线过椭圆的焦点, 则双曲线的渐近线的斜率为 ( )

(A) ±2 (B) $\pm\dfrac{4}{3}$ (C) $\pm\dfrac{1}{2}$ (D) $\pm\dfrac{3}{4}$

7. 给出下列三个命题:

① 若 $a\geqslant b>-1$, 则 $\dfrac{a}{1+a}\geqslant\dfrac{b}{1+b}$;

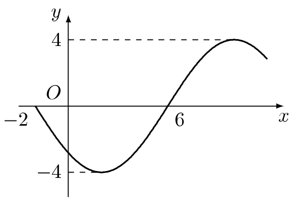
② 若正整数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$, 则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\dfrac{n}{2}$;

③ 设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 O_1: $x^2+y^2=9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1. 当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2},\ x\in\mathbf{R}\right)$ 的部分图象如图所示, 则函数表达式为 ( )



(A) $y=-4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (B) $y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(C) $y=-4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (D) $y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

9. 若函数 $f(x)=\log_a(2x^2+x)$ $(a>0,\ a\neq1)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内恒有 $f(x)>0$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 ( )

(A) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right)$ (B) $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

(C) $(0,+\infty)$ (D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 6 为周期的函数, $f(x)$ 在 $(0,3)$ 内单调递增, 且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, 则下面正确的结论是 ( )

(A) $f(1.5)<f(3.5)<f(6.5)$ (B) $f(3.5)<f(1.5)<f(6.5)$

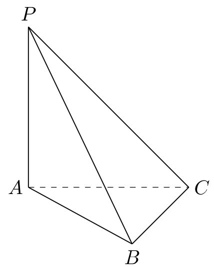
(C) $f(6.5)<f(3.5)<f(1.5)$ (D) $f(3.5)<f(6.5)<f(1.5)$

二、填空题

11. 二项式 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中常数项为______. (用数字作答)

12. 已知 $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边作平行四边形, 则此平行四边形的两条对角线中较短的一条的长度为______.

13. 如图, $PA\perp$ 平面 ABC, $\angle ACB=90^\circ$ 且 $PA=AC=BC=a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于______.

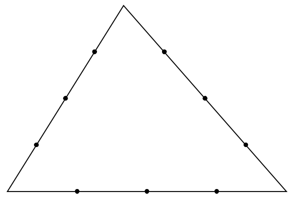


14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $S_{10}=$______.

15. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$, 则 $\overrightarrow{OC}=$______.

16. 设函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, 则函数 $g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为______.

17. 在三角形的每条边上各取三个分点 (如图). 以这 9 个分点为顶点可画出若干个三角形, 若从中任意抽取一个三角形, 则其三个顶点分别落在原三角形的三条不同边上的概率为______. (用数字作答)



三、解答题

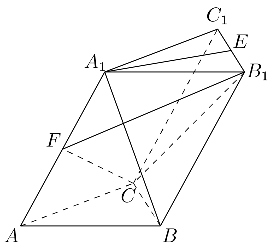
18. 已知 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos2\alpha=\dfrac{7}{25}$, 求 $\sin\alpha$ 及 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

19. 若公比为 c 的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ 且满足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ $(n=3,\ 4,\ \cdots)$.

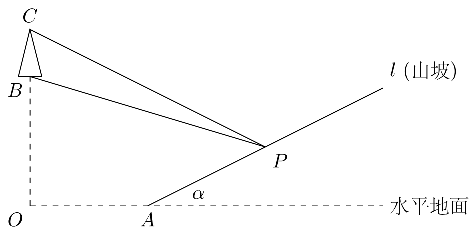
(1) 求 c 的值;

(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB=\angle A_1AC$, $AB=AC$, $A_1A=A_1B=a$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 $120°$, E、F 分别是棱 B_1C_1, A_1A 的中点.
(1) 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;
(2) 证明 $A_1E\mathbin{/\!/}$ 平面 B_1FC;
(3) 求经过 A_1, A, B, C 四点的球的体积.



21. 某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔, 如图所示, 塔高 $BC=80$ (米), 塔所在的山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米), 图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α, $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. 试问此人距水平地面多高时, 观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大? (不计此人的身高)



22. 已知 $m\in\mathbf{R}$, 设 P: x_1 和 x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两个实根, 不等式 $|m^2-5m-3|\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意实数 $a\in[-1,1]$ 恒成立; Q: 函数 $f(x)=x^3+mx^2+\left(m+\dfrac{4}{3}\right)x+6$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有极值. 求使 P 正确且 Q 正确的 m 的取值范围.

23. 抛物线 C 的方程为 $y=ax^2\ (a<0)$, 过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)\ (x_0\neq0)$ 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点 (P, A, B 三点互不相同), 且满足 $k_2+\lambda k_1=0\ (\lambda\neq0,\ \lambda\neq-1)$.
(1) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;
(2) 设直线 AB 上一点 M, 满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$, 证明线段 PM 的中点在 y 轴上;
(3) 当 $\lambda=1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1,-1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

2005 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=$ ( )

(A) 2 (B) 4 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 0

2. 点 $(1,-1)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}|x-1|-2, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{4}{13}$ (C) $-\dfrac{9}{5}$ (D) $\dfrac{25}{41}$

4. 在复平面内, 复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2$ 对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

5. 在 $(1-x)^5+(1-x)^6+(1-x)^7+(1-x)^8$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数是 ( )

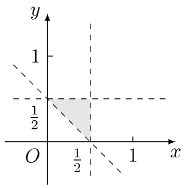
(A) 74 (B) 121 (C) -74 (D) -121

6. 设 α、β 为两个不同的平面, l、m 为两条不同的直线, 且 $l\subset\alpha$, $m\subset\beta$, 有如下的两个命题: ① 若 $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$; ② 若 $l\perp m$, 则 $\alpha\perp\beta$. 那么( )

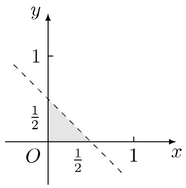
(A) ①是真命题, ②是假命题 (B) ①是假命题, ②是真命题

(C) ①②都是真命题 (D) ①②都是假命题

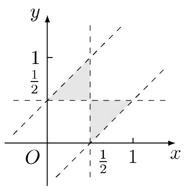
7. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x,\ y,\ 1-x-y$ 是三角形的三边长$\}$, 则 A 所表示的平面区域 (不含边界的阴影部分) 是 ( )



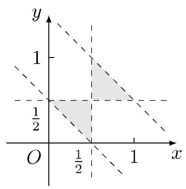
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 已知 $k<-4$, 则函数 $y=\cos 2x+k(\cos x-1)$ 的最小值是 ( )

(A) 1 (B) -1 (C) $2k+1$ (D) $-2k+1$

9. 设 $f(n)=2n+1$ $(n\in\mathbf{N})$, $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Q=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, 记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$, $\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$, 则 $\left(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q}\right)\cup\left(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P}\right)=$ ( )

(A) $\{0,\ 3\}$ (B) $\{1,\ 2\}$ (C) $\{3,\ 4,\ 5\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 6,\ 7\}$

10. 已知向量 $\vec{a}\neq\vec{e}$, $|\vec{e}|=1$, 对任意 $t\in\mathbf{R}$, 恒有 $|\vec{a}-t\vec{e}|\geqslant|\vec{a}-\vec{e}|$, 则

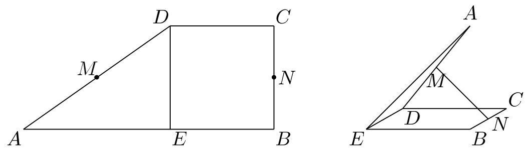
(A) $\vec{a}\perp\vec{e}$ (B) $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{e})$

(C) $\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$ (D) $(\vec{a}+\vec{e})\perp(\vec{a}-\vec{e})$

二、填空题

11. 函数 $y=\dfrac{x}{x+2}$ $(x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq-2)$ 的反函数是______.

12. 设 M、N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点, $DE\perp AB$ 于 E (如图). 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使二面角 $A-DE-B$ 为 45°, 此时点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影恰为点 B, 则 M、N 的连线与 AE 所成角的大小等于______.



13. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M、N 两点, 以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点, 则双曲线的离心率等于______.

14. 从集合 $\{O,\ P,\ Q,\ R,\ S\}$ 与 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 中各任取 2 个元素排成一排 (字母和数字均不能重复). 每排中字母 O, Q 和数字 0 至多只能出现一个的不同排法种数是______. (用数字作答).

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{25\pi}{6}\right)$ 的值;

(2) 设 $\alpha\in(0,\pi)$, $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\sin\alpha$ 的值.

16. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 且 $f(x)=x^2+2x$.

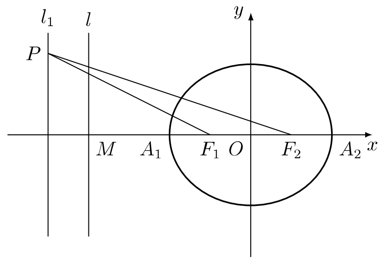
(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式;

(2) 解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$.

17. 如图, 已知椭圆的中心在坐标原点, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 长轴 A_1A_2 的长为 4, 左准线 l 与 x 轴的交点为 M, $|MA_1|:|A_1F_1|=2:1$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若直线 l_1: $x=m$ $(|m|>1)$, P 为 l_1 上的动点, 使 $\angle F_1PF_2$ 最大的点 P 记为 Q, 求点 Q 的坐标. (用 m 表示)

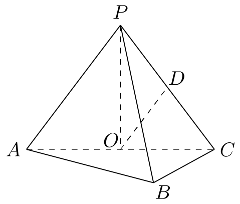


18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB\perp BC$, $AB=BC=kPA$, 点 O、D 分别是 AC、PC 的中点, $OP\perp$ 底面 ABC.

(1) 求证: $OD\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 PAB;

(2) 当 $k=\frac{1}{2}$ 时, 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的大小;

(3) 当 k 取何值时, O 在平面 PBC 内的射影恰好为 $\triangle PBC$ 的重心?



19. 袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球, 从 A 中摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{3}$, 从 B 中摸出一个红球的概率为 p.

(1) 从 A 中有放回地摸球, 每次摸出一个, 有 3 次摸到红球即停止.

① 求恰好摸 5 次停止的概率;

② 记 5 次之内 (含 5 次) 摸到红球的次数为 ξ, 求随机变量 ξ 的分布率及数学期望 $E\xi$;

(2) 若 A、B 两个袋子中的球数之比为 $1:2$, 将 A、B 中的球装在一起后, 从中摸出一个红球的概率是 $\frac{2}{5}$, 求 p 的值.

20. 设点 $A_n(x_n,0)$, $P_n(x_n,2^{n-1})$ 和抛物线 C_n: $y=x^2+a_nx+b_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 $a_n=-2-4n-\frac{1}{2^{n-1}}$, x_n 由以下方法得到:

$x_1=1$, 点 $P_2(x_2,2)$ 在抛物线 $C_1: y=x^2+a_1x+b_1$ 上, 点 $A_1(x_1,0)$ 到 P_2 的距离是 A_1 到 C_1 上点的最短距离, $\cdots$, 点 $P_{n+1}(x_{n+1},2^n)$ 在抛物线 $C_n: y=x^2+a_nx+b_n$ 上, 点 $A_n(x_n,0)$ 到 P_{n+1} 的距离是 A_n 到 C_n 上点的最短距离.

(1) 求 x_2 及 C_1 的方程.

(2) 证明 $\{x_n\}$ 是等差数列.

2005 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

一、选择题

1. 函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

2. 设全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Q=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, 则 $P\cap(\complement_U Q)=$ ( )

(A) $\{1,\ 2\}$ (B) $\{3,\ 4,\ 5\}$

(C) $\{1,\ 2,\ 6,\ 7\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

3. 点 $(1,-1)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

4. 设 $f(x)=|x-1|-|x|$, 则 $f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

5. 在 $(1-x)^5-(1-x)^6$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数是 ( )

(A) -5 (B) 5 (C) -10 (D) 10

6. 从存放号码分别为 $1,\ 2,\ \cdots,\ 10$ 的卡片的盒子中, 有放回地取 100 次, 每次取一张卡片并记下号码, 统计结果如下:

卡片号码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
取到的次数	13	8	5	7	6	13	18	10	11	9

则取到号码为奇数的频率是 ( )

(A) 0.53 (B) 0.5 (C) 0.47 (D) 0.37

7. 设 α、β 为两个不同的平面, l、m 为两条不同的直线, 且 $l\subset\alpha$, $m\subset\beta$, 有如下的两个命题: ① 若 $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$; ② 若 $l\perp m$, 则 $\alpha\perp\beta$. 那么( )

(A) ①是真命题, ②是假命题 (B) ①是假命题, ②是真命题

(C) ①②都是真命题 (D) ①②都是假命题

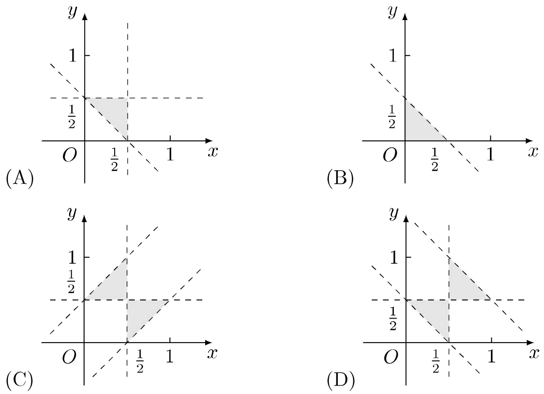
8. 已知向量 $\vec{a}=(x-5,3)$, $\vec{b}=(2,x)$, 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 则由 x 的值构成的集合是 ( )

(A) $\{2,3\}$ (B) $\{-1,6\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{6\}$

9. 函数 $y=ax^2+1$ 的图象与直线 $y=x$ 相切, 则 $a=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{8}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

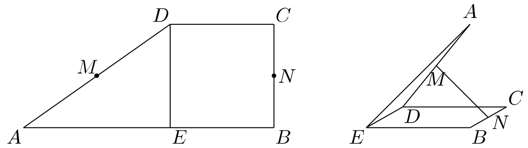
10. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x,\ y,\ 1-x-y$ 是三角形的三边长$\}$, 则 A 所表示的平面区域 (不含边界的阴影部分) 是 ( )



二、填空题

11. 函数 $y=\dfrac{x}{x+2}$ $(x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq-2)$ 的反函数是______.

12. 设 M、N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点, $DE\perp AB$ 于 E (如图). 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使二面角 $A-DE-B$ 为 45°, 此时点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影恰为点 B, 则 M、N 的连线与 AE 所成角的大小等于______.



13. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M、N 两点, 以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点, 则双曲线的离心率等于______.

14. 从集合 $\{P,\ Q,\ R,\ S\}$ 与 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 中各任限 2 个元素排成一排 (字母和数字均不能重复). 每排中字母 Q 和数字 0 至多只能出现一个的不同排法种数是______. (用数字作答).

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值;

(2) 设 $\alpha\in(0,\pi)$, $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\sin\alpha$ 的值.

16. 已知实数 a,b,c 成等差数列, $a+1,b+1,c+4$ 成等比数列, 且 $a+b+c=15$, 求 $a,\ b,\ c$.

17. 袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球, 从 A 中摸出一个红球的概率是 $\dfrac{1}{3}$, 从 B 中摸出一个红球的概率为 p.

(1) 从 A 中有放回地摸球, 每次摸出一个, 共摸 5 次.

① 恰好有 3 次摸到红球的概率;

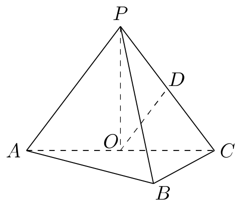
② 第一次、第三次、第五次摸到红球的概率;

(2) 若 A、B 两个袋子中的球数之比为 $1:2$, 将 A、B 中的球装在一起后, 从中摸出一个红球的概率是 $\dfrac{2}{5}$, 求 p 的值.

18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB\perp BC$, $AB=BC=\frac{1}{2}PA$, 点 O、D 分别是 AC、PC 的中点, $OP\perp$ 底面 ABC.

(1) 求证: $OD\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 PAB;

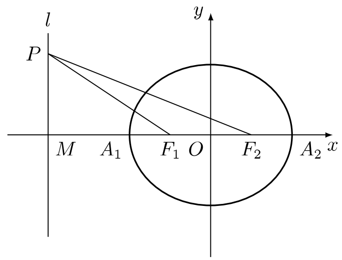
(2) 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的大小.



19. 如图, 已知椭圆的中心在坐标原点, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 长轴 A_1A_2 的长为 4, 左准线 l 与 x 轴的交点为 M, $|MA_1|:|A_1F_1|=2:1$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若点 P 为 l 上的动点, 求 $\angle F_1PF_2$ 的最大值.



20. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 且 $f(x)=x^2+2x$.

(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式;

(2) 解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$;

(3) 若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数, 求实数 λ 的取值范围.