2000 普通高等学校春季招生考试 (京、皖理)

一、选择题

1. 复数 $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=1-\mathrm{i}$, 则 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内的对应点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 设全集 $I=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, 集合 $M=\{a,\ c,\ d\}$, $N=\{b,\ d,\ e\}$, 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是 ( )

(A) $\varnothing$ (B) $\{d\}$ (C) $\{a,\ c\}$ (D) $\{b,\ e\}$

3. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的两条渐近线互相垂直, 那么该双曲线的离心率是 ( )

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

4. 曲线 $xy=1$ 的参数方程是 ( )

(A) $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}},\\ y=t^{-\frac{1}{2}}.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x=\sin\alpha,\\ y=\csc\alpha.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sec\alpha.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x=\tan\alpha,\\ y=\cot\alpha.\end{cases}$

5. 一个圆锥的底面直径和高都同一个球的直径相等, 那么圆锥与球的体积之比是 ( )

(A) $1:3$ (B) $2:3$ (C) $1:2$ (D) $2:9$

6. 直线 $\theta=a$ 和直线 $\rho\sin(\theta-a)=1$ 的位置关系是

(A) 垂直 (B) 平行 (C) 相交但不垂直 (D) 重合

7. 函数 $y=\lg|x|$ ( )

(A) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增

(B) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减

(C) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

(D) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

8. 从单词"equation"选取 5 个不同的字母排成一排, 含有"qu"(其中"qu"相连且顺序不变) 的不同排列共有 ( )

(A) 120 个 (B) 480 个 (C) 720 个 (D) 840 个

9. 椭圆短轴长是 2, 长轴长是短轴的 2 倍, 则椭圆中心到其准线距离是 ( )

(A) $\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$ (B) $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

10. 函数 $y=\dfrac{1}{2+\sin x+\cos x}$ 的最大值是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$ (C) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. 设复数 $z_1=2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ $\left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在复平面上对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, 将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转 $\dfrac{3}{4}\pi$ 后得到向量 $\overrightarrow{OZ_2}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 $z_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, 则 $\tan\varphi=$ ( )

(A) $\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$ (B) $\dfrac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$ (C) $\dfrac{1}{2\tan\theta+1}$ (D) $\dfrac{1}{2\tan\theta-1}$

12. 设 α,β 是一个钝角三角形的两个锐角, 下列四个不等式中不正确的是 ( )

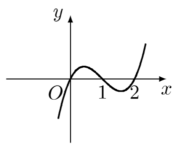
(A) $\tan\alpha\tan\beta<1$ (B) $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

(C) $\cos\alpha+\cos\beta>1$ (D) $\dfrac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)<\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$, 则有 ( )

(A) $a_1+a_{101}>0$ (B) $a_2+a_{100}<0$ (C) $a_3+a_{99}=0$ (D) $a_{51}=51$

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图, 则 ( )



(A) $b\in(-\infty,0)$ (B) $b\in(0,1)$ (C) $b\in(1,2)$ (D) $b\in(2,+\infty)$

二、填空题

15. 函数 $y=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是______.

16. 已知一体积为 72 的正四面体, 连结两个面的重心 E、F, 则线段 EF 的长是______.

17. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项是______.

18. 在空间, 下列命题正确的是______. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

① 如果两条直线 a、b 分别与直线 l 平行, 那么 $a\parallel b$;

② 如果两条直线 a 与平面 β 内的一条直线 b 平行, 那么 $a\parallel\beta$;

③ 如果直线 a 与平面 β 内的一条直线 b、c 都有垂直, 那么 $a\perp\beta$;

④ 如果平面 β 内的一条直线 a 垂直平面 γ, 那么 $\beta\perp\gamma$.

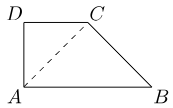
三、解答题

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 对边分别为 a、b、c, 证明: $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

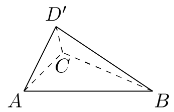
20. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle D=\angle BAD=90^\circ$, $AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=a$ (如图一). 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起, 使 D 到 D'. 记面 ACD' 为 α, 面 ABC 为 β, 面 BCD' 为 γ.

(1) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为直二面角 (如图二), 求二面角 $\beta-BC-\gamma$ 的大小;

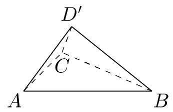
(2) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为 60° (如图三), 求三棱锥 $D'-ABC$ 的体积.



图一



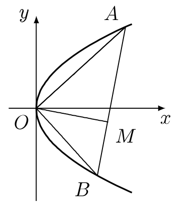
图二



图三

21. 设函数 $f(x)=|\lg x|$, 若 $0<a<b$, 且 $f(a)>f(b)$, 证明: $ab<1$.

22. 如图, 设点 A 和 B 为抛物线 $y^2=4px\ (p>0)$ 上原点以外的两个动点, 已知 $OA\perp OB$, $OM\perp AB$. 求点 M 的轨迹方程, 并说明它表示什么曲线.



23. 某地区上年度电价为 0.8 元/kW · h, 年用电量为 a kW · h 本年度计划将电价降到 0.55 元/kW · h 至 0.75 元/kW · h 之间, 而用户期望电价为 0.4 元/kW · h 经测算, 下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比 (比例系数为 k). 该地区电力的成本为 0.3 元/kW · h.

(1) 写出本年度电价下调后, 电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式;

(2) 设 $k=0.2a$, 当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%?

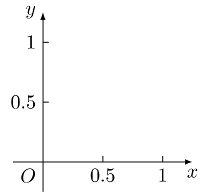
注: 收益 = 实际用电量 × (实际电价 − 成本价)

24. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right), \\ f_2(x), & x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right], \end{cases}$ 其中 $f_1(x)=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$, $f_2(x)=-2x+2$.

(1) 在下面坐标系上画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 设 $y=f_2(x)\ \left(x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\right)$ 的反函数为 $y=g(x)$, $a_1=1$, $a_2=g(a_1)$, $\cdots$, $a_n=g(a_{n-1})$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(3) 若 $x_0\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$, $x_1=f(x_0)$, $f(x_1)=x_0$, 求 x_0.



2000 普通高等学校春季招生考试 (京、皖文)

一、选择题

1. 复数 $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=1-\mathrm{i}$, 则 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内的对应点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 设全集 $I=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, 集合 $M=\{a,\ c,\ d\}$, $N=\{b,\ d,\ e\}$, 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是 ( )

(A) $\varnothing$ (B) $\{d\}$ (C) $\{a,\ c\}$ (D) $\{b,\ e\}$

3. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的两条渐近线互相垂直, 那么该双曲线的离心率是 ( )

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

4. 下列方程关于 $x=y$ 对称的是

(A) $x^2-x+y^2=1$ (B) $x^2y+xy^2=1$

(C) $x-y=1$ (D) $x^2-y^2=1$

5. 一个圆锥的底面直径和高都同一个球的直径相等, 那么圆锥与球的体积之比是 ( )

(A) $1:3$ (B) $2:3$ (C) $1:2$ (D) $2:9$

6. 直线 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+y=3$ 和直线 $x+(\sqrt{2}-\sqrt{3})y=2$ 的位置关系是 ( )

(A) 相交但不垂直 (B) 垂直 (C) 平行 (D) 重合

7. 函数 $y=\lg|x|$ ( )

(A) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增

(B) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减

(C) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

(D) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

8. 从单词"equation"选取 5 个不同的字母排成一排, 含有"qu"(其中"qu"相连且顺序不变) 的不同排列共有 ( )

(A) 120 个 (B) 480 个 (C) 720 个 (D) 840 个

9. 椭圆短轴长是 2, 长轴长是短轴的 2 倍, 则椭圆中心到其准线距离是 ( )

(A) $\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$ (B) $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

10. 函数 $y=\sin x+\cos x+2$ 的最小值是 ( )

(A) $2-\sqrt{2}$ (B) $2+\sqrt{2}$ (C) 0 (D) 1

11. 设复数 $z_1=-1-\mathrm{i}$ 在复平面上对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, 将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转 $\dfrac{5}{6}\pi$ 后得到向量 $\overrightarrow{OZ_2}$, 令 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 z_2 的辐角主值为 θ, 则 $\tan\theta=$ ( )

(A) $2-\sqrt{3}$ (B) $-2+\sqrt{3}$ (C) $2+\sqrt{3}$ (D) $-2-\sqrt{3}$

12. 设 α,β 是一个钝角三角形的两个锐角, 下列四个不等式中不正确的是 ( )

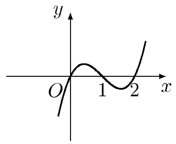
(A) $\tan\alpha\tan\beta<1$ (B) $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

(C) $\cos\alpha+\cos\beta>1$ (D) $\dfrac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)<\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$, 则有 ( )

(A) $a_1+a_{101}>0$ (B) $a_2+a_{100}<0$ (C) $a_3+a_{99}=0$ (D) $a_{51}=51$

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图, 则 ( )



(A) $b\in(-\infty,0)$ (B) $b\in(0,1)$ (C) $b\in(1,2)$ (D) $b\in(2,+\infty)$

二、填空题

15. 函数 $y=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是______.

16. 已知一体积为 72 的正四面体, 连结两个面的重心 E、F, 则线段 EF 的长是______.

17. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项是______.

18. 在空间, 下列命题正确的是______. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

① 如果两条直线 a、b 分别与直线 l 平行, 那么 $a\parallel b$;

② 如果两条直线 a 与平面 β 内的一条直线 b 平行, 那么 $a\parallel\beta$;

③ 如果直线 a 与平面 β 内的一条直线 b、c 都有垂直, 那么 $a\perp\beta$;

④ 如果平面 β 内的一条直线 a 垂直平面 γ, 那么 $\beta\perp\gamma$.

三、解答题

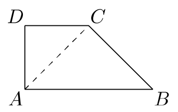
19. 已知二次函数 $f(x)=(\lg a)x^2+2x+4\lg a$ 的最大值为 3, 求 a 的值.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 对边分别为 a、b、c, 证明: $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

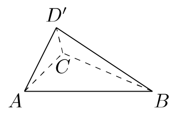
21. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle D=\angle BAD=90^\circ$, $AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=a$ (如图一). 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起, 使 D 到 D'. 记面 ACD' 为 α, 面 ABC 为 β, 面 BCD' 为 γ.

(1) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为直二面角 (如图二), 求二面角 $\beta-BC-\gamma$ 的大小;

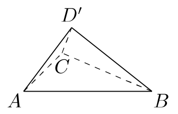
(2) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为 60° (如图三), 求三棱锥 $D'-ABC$ 的体积.



图一



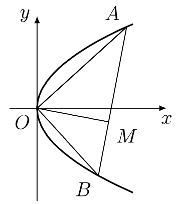
图二



图三

22. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差和等比数列 $\{b_n\}$ 的公比相等，且都等于 d $(d>0,\ d\neq 1)$，若 $a_1=b_1$, $a_3=3b_3$, $a_5=5b_5$，求 a_n, b_n.

23. 如图，设点 A 和 B 为抛物线 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上原点以外的两个动点，已知 $OA\perp OB$, $OM\perp AB$. 求点 M 的轨迹方程，并说明它表示什么曲线.



24. 某地区上年度电价为 0.8 元/kW · h，年用电量为 a kW · h 本年度计划将电价降到 0.55 元/kW · h 至 0.75 元/kW · h 之间，而用户期望电价为 0.4 元/kW · h 经测算，下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比 (比例系数为 k). 该地区电力的成本为 0.3 元/kW · h.

(1) 写出本年度电价下调后，电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式;

(2) 设 $k=0.2a$，当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%?

注: 收益 = 实际用电量 × (实际电价 − 成本价)

2000 普通高等学校招生考试 (广东卷)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 那么 A 的真子集的个数是 ( )

(A) 15 (B) 16 (C) 3 (D) 4

2. 在复平面内, 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ (D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$, 那么下列命题成立的是 ( )

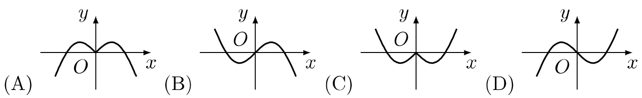
(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 ( )



6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
$\cdots$	$\cdots$

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于 ( )

(A) $800-900$ 元 (B) $900-1200$ 元

(C) $1200-1500$ 元 (D) $1500-2800$ 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R<P<Q$ (B) $P<Q<R$ (C) $Q<P<R$ (D) $P<R<Q$

8. 以极坐标系中的点 $(1,1)$ 为圆心, 1 为半径的圆的方程是 ( )

(A) $\rho=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (B) $\rho=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(C) $\rho=2\cos(\theta-1)$ (D) $\rho=2\sin(\theta-1)$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 ( )

(A) $\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\dfrac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\dfrac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\dfrac{1+4\pi}{2\pi}$

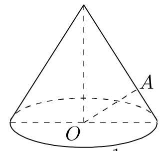
10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ( )

(A) $y=\sqrt{3}x$ (B) $y=-\sqrt{3}x$ (C) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于 ( )

(A) $2a$ (B) $\dfrac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\dfrac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角的余弦值为 ( )



(A) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

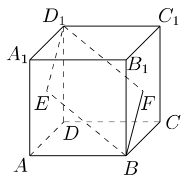
二、填空题

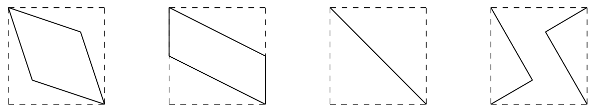
13. 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名参加比赛, 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置, 那么不同的出场安排共有______种 (用数字作答).

14. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-n{a_n}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$______.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是______. (要求: 把可能的图序号都填上)





① ② ③ ④

三、解答题

17. 已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;

(2) 该函数的图象可由 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

18. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, $T_n=na_1+(n-1)a_2\cdots+2a_{n-1}+a_n$, 已知 $T_1=1$, $T_2=4$.

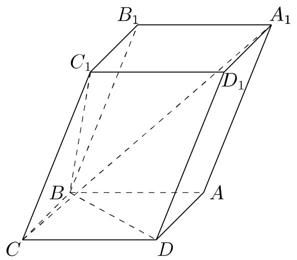
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比;

(2) 求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式.

19. 如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

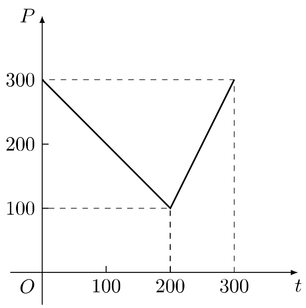
(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.

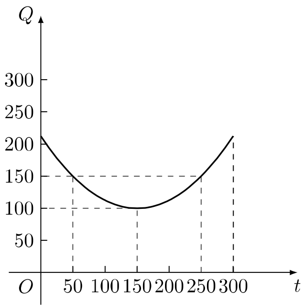
(1) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$ 和图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?

注: 市场售价各种植成本的单位: 元$/10^2$kg, 时间单位: 天.

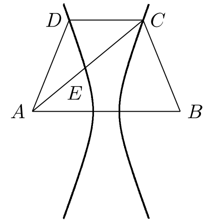


图一



图二

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 普通高等学校招生考试 (旧课程卷理)

一、选择题

1. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$, 映射 $f: A \to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射成集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2. 在复平面内, 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时钟方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ (D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha > \sin\beta$, 那么下列命题成立的是 ( )

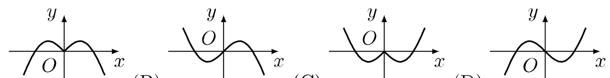
(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$

(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$

(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$

(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$

5. 函数 $y = -x\cos x$ 的部分图象是 ( )



(A) (B) (C) (D)

6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
$\cdots$	$\cdots$

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于 ( )

(A) $800-900$ 元 (B) $900-1200$ 元

(C) $1200-1500$ 元 (D) $1500-2800$ 元

7. 若 $a > b > 1$, $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R < P < Q$ (B) $P < Q < R$ (C) $Q < P < R$ (D) $P < R < Q$

8. 以极坐标系中的点 $(1,1)$ 为圆心, 1 为半径的圆的方程是 ( )

(A) $\rho = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\rho = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\rho = 2\cos(\theta - 1)$ (D) $\rho = 2\sin(\theta - 1)$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 ( )

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

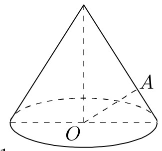
10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ( )

(A) $y = \sqrt{3}x$ (B) $y = -\sqrt{3}x$ (C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于 ( )

(A) $2a$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\frac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 ( )



(A) $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\arccos\frac{1}{2}$ (C) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

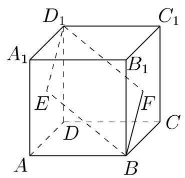
二、填空题

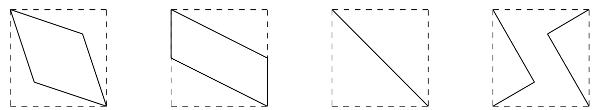
13. 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名参加比赛, 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置, 那么不同的出场安排共有______种 (用数字作答).

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - n{a_n}^2 + a_{n+1}a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n =$______.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是______. (要求: 把可能的图序号都填上)





① ② ③ ④

三、解答题

17. 已知函数 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;

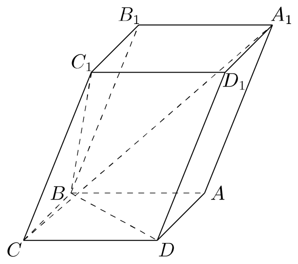
(2) 该函数的图象可由 $y = \sin x$ $(x \in \mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

18. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7 = 7$, $S_{15} = 75$, T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n.

19. 如图, 已知平行六面体 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

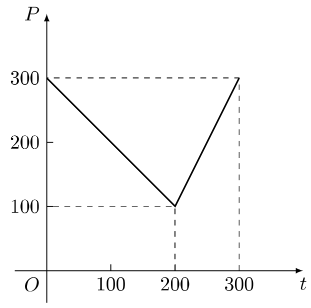
(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.

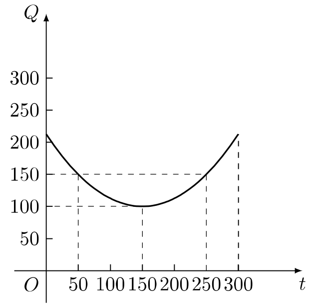
(1) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$ 和图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?

注: 市场售价各种植成本的单位: 元/10^2kg, 时间单位: 天.

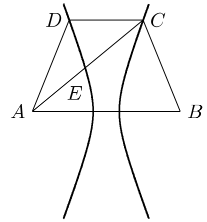


图一



图二

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 普通高等学校招生考试 (旧课程卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$, 则 $A\cup B$ 中的元素个数是 ( )

(A) 11 (B) 10 (C) 16 (D) 15

2. 在复平面内, 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ (D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$, 那么下列命题成立的是 ( )

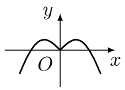
(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

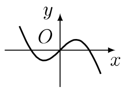
(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

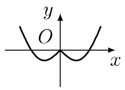
(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

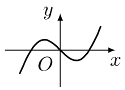
(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 ( )

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6.《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
$\cdots$	$\cdots$

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于 ( )

(A) 800 – 900 元 (B) 900 – 1200 元

(C) 1200 – 1500 元 (D) 1500 – 2800 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R<P<Q$ (B) $P<Q<R$ (C) $Q<P<R$ (D) $P<R<Q$

8. 已知两条直线 l_1: $y=x$, l_2: $ax-y=0$, 其中 a 为实数. 当这两条直线的夹角在 $\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right)$ 内变动时, a 的取值范围是 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

(C) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup(1,\sqrt{3})$ (D) $(1,\sqrt{3})$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 ( )

(A) $\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\dfrac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\dfrac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\dfrac{1+4\pi}{2\pi}$

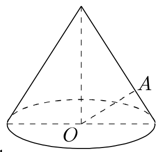
10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ( )

(A) $y=\sqrt{3}x$ (B) $y=-\sqrt{3}x$ (C) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于 ( )

(A) $2a$ (B) $\dfrac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\dfrac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 ( )



(A) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\arccos\dfrac{1}{2}$ (C) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

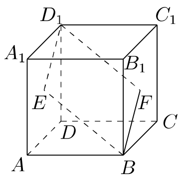
二、填空题

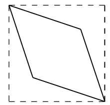
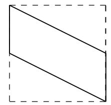
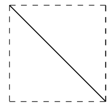
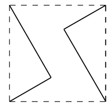
13. 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名参加比赛, 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置, 那么不同的出场安排共有______种 (用数字作答).

14. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n{}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$______.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是______. (要求: 把可能的图序号都填上)




①

②

③

④

三、解答题

17. 已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$, $x\in\mathbf{R}$.

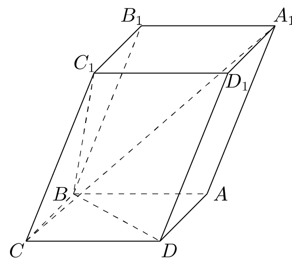
(1) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;

(2) 该函数的图象可由 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

18. 如图, 已知平行六面体 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



19. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

20. (1) 已知数列 $\{c_n\}$, 其中 $c_n=2^n+3^n$, 且数列 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为等比数列, 求常数 p;

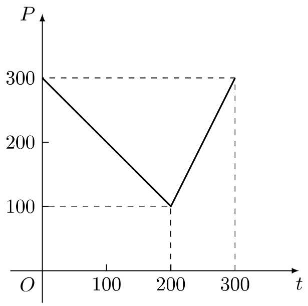
(2) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列, $c_n=a_n+b_n$, 证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列.

21. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.

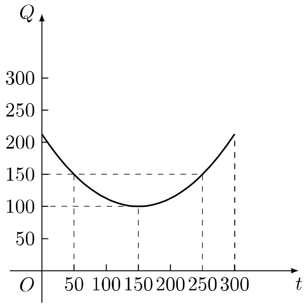
(1) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$ 和图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?

注: 市场售价各种植成本的单位: 元$/10^2$kg, 时间单位: 天.

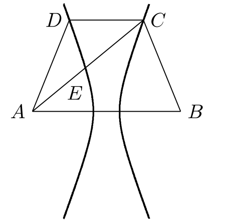


图一



图二

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$、$\overrightarrow{OB}=(3,m)$, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则 $m=$______.

2. 函数 $y=\log_2\dfrac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为______.

3. 圆锥曲线 $\begin{cases}x=4\sec\theta+1,\\ y=3\tan\theta,\end{cases}$ 的焦点坐标是______.

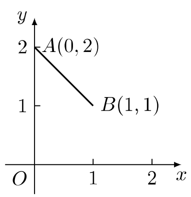
4. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n=$______.

5. 已知 $f(x)=2^x+b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y=f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $Q(5,2)$, 则 $b=$______.

6. 根据上海市人大十一届三次会议上的市政府工作报告, 1999 年上海市完成 GDP (GDP 是指国内生产总值) 4035 亿元, 2000 年上海市 GDP 预期增长 9%, 市委、市府提出本市常住人口每年的自然增长率将控制在 0.08%, 若 GDP 与人口均按这样的速度增长, 则要使本市年人均 GDP 达到或超过 1999 年的 2 倍, 至少需______年.
按: 1999 年本市常住人口总数约 1300 万.

7. 命题 A: 底面为正三角形, 且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥, 命题 A 的等价题 B 可以是: 底面为正三角形, 且____________的三棱锥是正三棱锥.

8. 设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0,1]$ 上的图象为如图所示的线段 AB, 则在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=$______.



9. 在二项式 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, 系数最小的项的系数为______. (结果用数值表示)

10. 有红、黄、蓝三种颜色的旗帜各 3 面, 在每种颜色的 3 面旗帜上分别标上号码 1、2 和 3, 现任取出 3 面, 它们的颜色与号码均不相同的概率是______.

11. 在极坐标系中, 若过点 $(3,0)$ 且与极轴垂直的直线交曲线 $\rho=4\cos\theta$ 于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10}=0$, 则有等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$ $(n<19,\ n\in\mathbf{N}^*)$ 成立, 类比上述性质, 相应地: 在等此数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9=1$, 则有等式______________________成立.

二、选择题

13. 复数 $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ (i 是虚数单位) 的三角形式是 ( )

(A) $3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right]$ (B) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

(C) $3\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$ (D) $3\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$

14. 设有不同的直线 a、b 和不同的平面 α、β、γ, 给出下列三个命题:
① 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\alpha$, 则 $a\parallel b$; ② 若 $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha//\beta$. 其中正确的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

15. 若集合 $S=\{y\mid y=3^x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{y\mid y=x^2-1,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T$ 是 ( )

(A) S (B) T (C) $\varnothing$ (D) 有限集

16. 下列命题中正确的命题是 ( )

(A) 若点 $P(a,2a)$ $(a\neq 0)$ 为角 α 终边上一点, 则 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(B) 同时满足 $\sin a=\dfrac{1}{2}$, $\cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 a 有且只有一个

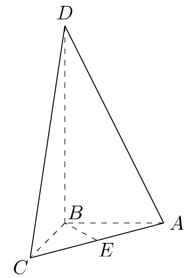
(C) 当 $|a|<1$ 时, $\tan(\arcsin a)$ 的值恒正

(D) 三角方程 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 的解集为 $\{x\mid x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

三、解答题

17. 已知椭圆 C 的焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$ 和 $F_2(2\sqrt{2},0)$, 长轴长为 6, 设直 $y=x+2$ 交椭圆 C 于 A、B 两点, 求线段 AB 的中点坐标.

18. 如图所示四面体 $ABCD$ 中, AB、BC、BD 两两互相垂直, 且 $AB=BC=2$, E 是 AC 中点, 异面直线 AD 与 BE 所成的角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$, $x\in[1,+\infty)$.
(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(x)>0$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

20. 根据指令 (r,θ) $(r \geqslant 0,\ -180^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ)$, 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地旋转角度 θ (θ 为正时, 按逆时针方向旋转 θ, θ 为负时, 按顺时针方向旋转 $-\theta$), 再朝其面对的方向沿直线行走距离 r.
(1) 现机器人在直角坐标系的坐标原点, 且面对 x 轴正方向, 试给机器人下一个指令, 使其移动到点 $(4,4)$;
(2) 机器人在完成该指令后, 发现在点 $(17,0)$ 处有一小球正向坐标原点作匀速直线滚动, 已知小球滚动的速度为机器人直线行走速度的 2 倍, 若忽略机器人原地旋转所需的时间, 问机器人最快可在何处截住小球? 并给出机器人截住小球所需的指令. (结果精确到小数点后两位)

21. 在 xOy 平面上有一点列 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $\cdots$, $P_n(a_n,b_n)$, $\cdots$, 对每个自然数 n, 点 P_n 位于函数 $y=2000\cdot\left(\dfrac{a}{10}\right)^2$ $(0<a<10)$ 的图象上, 且点 P_n, 点 $(n,0)$ 与点 $(n+1,0)$ 构成一个以 P_n 为顶点的等腰三角形.
(1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式;
(2) 若对每个自然数 n, 以 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 为边长能构成一个三角形, 求 a 取值范围;
(3) 设 $B_n=b_1b_2\cdots b_n$ $(n\in\mathbf{N})$, 若 a 取 (2) 中确定的范围内的最小整数, 求数列 $\{B_n\}$ 的最大项的项数.

22. 已知复数 $z_0=1-m\mathrm{i}$ $(m>0)$, $z=x+y\mathrm{i}$ 和 $\omega=x'+y'\mathrm{i}$, 其中 x, y, x', y' 均为实数, i 为虚数单位, 且对于任意复数 z, 有 $\omega=\overline{z_0}\cdot\overline{z}$, $|\omega|=2|z|$.
(1) 试求 m 的值, 并分别写出 x' 和 y' 用 x、y 表示的关系式;
(2) 将 (x,y) 作为点 P 的坐标, (x',y') 作为点 Q 的坐标, 上述关系可以看作是坐标平面上点的一个变换: 它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q, 当点 P 在直线 $y=x+1$ 上移动时, 试求点 P 经该变换后得到的点 Q 的轨迹方程;
(3) 是否存在这样的直线: 它上面的任一点经上述变换后得到的点仍在该直线上? 若存在, 试求出所有这些直线; 若不存在, 则说明理由.

2000 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$、$\overrightarrow{OB}=(3,m)$, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则 $m=$______.

2. 函数 $y=\log_2\dfrac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为______.

3. 圆锥曲线 $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标是______.

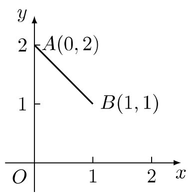
4. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n=$______.

5. 已知 $f(x)=2^x+b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y=f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $Q(5,2)$, 则 $b=$______.

6. 根据上海市人大十一届三次会议上的市政府工作报告, 1999 年上海市完成 GDP (GDP 是指国内生产总值) 4035 亿元, 2000 年上海市 GDP 预期增长 9%, 市委、市府提出本市常住人口每年的自然增长率将控制在 0.08%, 若 GDP 与人口均按这样的速度增长, 则要使本市年人均 GDP 达到或超过 1999 年的 2 倍, 至少需______年.
按: 1999 年本市常住人口总数约 1300 万.

7. 命题 A: 底面为正三角形, 且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥, 命题 A 的等价题 B 可以是: 底面为正三角形, 且____________的三棱锥是正三棱锥.

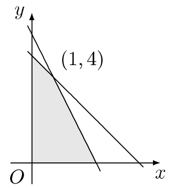
8. 设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0,1]$ 上的图象为如图所示的线段 AB, 则在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=$______.



9. 在二项式 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, 系数最小的项的系数为______. (结果用数值表示)

10. 有红、黄、蓝三种颜色的旗帜各 3 面, 在每种颜色的 3 面旗帜上分别标上号码 1、2 和 3, 现任取出 3 面, 它们的颜色与号码均不相同的概率是______.

11. 图中阴影部分的点满足不等式组 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\ 2x+y\leqslant 6,\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 在这些点中, 使目标函数 $k=6x+8y$ 取得最大值的点的坐标是______.



12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10}=0$, 则有等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$ $(n<19,\ n\in\mathbf{N}^*)$ 成立, 类比上述性质, 相应地: 在等此数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9=1$, 则有等式______________________成立.

二、选择题

13. 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left(\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 是 ( )
(A) 增函数　(B) 减函数　(C) 偶函数　(D) 奇函数

14. 设有不同的直线 a、b 和不同的平面 α、β、γ, 给出下列三个命题:
① 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\alpha$, 则 $a\parallel b$; ② 若 $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha//\beta$. 其中正确的个数是 ( )
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

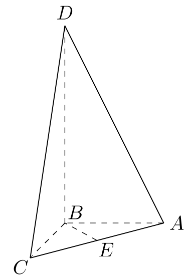
15. 若集合 $S=\{y\mid y=3^x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{y\mid y=x^2-1,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T$ 是 ( )
(A) S　(B) T　(C) $\varnothing$　(D) 有限集

16. 下列命题中正确的命题是 ( )
(A) 若点 $P(a,2a)$ $(a\neq 0)$ 为角 α 终边上一点, 则 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
(B) 同时满足 $\sin a=\dfrac{1}{2}$, $\cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 a 有且只有一个
(C) 当 $|a|<1$ 时, $\tan(\arcsin a)$ 的值恒正
(D) 三角方程 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 的解集为 $\{x\mid x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

三、解答题

17. 已知椭圆 C 的焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$ 和 $F_2(2\sqrt{2},0)$, 长轴长为 6, 设直 $y=x+2$ 交椭圆 C 于 A、B 两点, 求线段 AB 的中点坐标.

18. 如图所示四面体 $ABCD$ 中, AB、BC、BD 两两互相垂直, 且 $AB=BC=2$, E 是 AC 中点, 异面直线 AD 与 BE 所成的角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$, $x\in[1,+\infty)$.
(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(x)>0$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

20. 根据指令 (r,θ) $(r \geqslant 0,\ -180^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ)$, 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地旋转角度 θ (θ 为正时, 按逆时针方向旋转 θ, θ 为负时, 按顺时针方向旋转 $-\theta$), 再朝其面对的方向沿直线行走距离 r.
(1) 现机器人在直角坐标系的坐标原点, 且面对 x 轴正方向, 试给机器人下一个指令, 使其移动到点 $(4,4)$;
(2) 机器人在完成该指令后, 发现在点 $(17,0)$ 处有一小球正向坐标原点作匀速直线滚动, 已知小球滚动的速度为机器人直线行走速度的 2 倍, 若忽略机器人原地旋转所需的时间, 问机器人最快可在何处截住小球? 并给出机器人截住小球所需的指令. (结果精确到小数点后两位)

21. 在 xOy 平面上有一点列 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $\cdots$, $P_n(a_n,b_n)$, $\cdots$, 对每个自然数 n, 点 P_n 位于函数 $y = 2000\cdot\left(\dfrac{a}{10}\right)^2$ $(0<a<10)$ 的图象上, 且点 P_n, 点 $(n,0)$ 与点 $(n+1,0)$ 构成一个以 P_n 为顶点的等腰三角形.
(1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式;
(2) 若对每个自然数 n, 以 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 为边长能构成一个三角形, 求 a 取值范围;
(3) 设 $c_n = \lg(b_n)$ $(n \in \mathbf{N})$, 若 a 取 (2) 中确定的范围内的最小整数, 问数列 $\{c_n\}$ 前多少项的和最大? 试说明理由.

22. 已知复数 $z_0 = 1 - m\mathrm{i}$ $(m>0)$, $z = x + y\mathrm{i}$ 和 $\omega = x' + y'\mathrm{i}$, 其中 x, y, x', y' 均为实数, i 为虚数单位, 且对于任意复数 z, 有 $\omega = \overline{z_0}\cdot\overline{z}$, $|\omega| = 2|z|$.
(1) 试求 m 的值, 并分别写出 x' 和 y' 用 x、y 表示的关系式;
(2) 将 (x,y) 作为点 P 的坐标, (x',y') 作为点 Q 的坐标, 上述关系可以看作是坐标平面上点的一个变换: 它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q, 已知点 P 经该变换后得到的点 Q 的坐标为 $(\sqrt{3},2)$, 试求点 P 的坐标;
(3) 若直线 $y = kx$ 上的任一点经上述变换后得到的点仍在该直线上, 试求 k 的值.

2000 普通高等学校招生考试 (新课程卷理)

一、选择题

1. 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$, 映射 $f: A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$, 则在映射 f 下, 象 $(2,1)$ 的原象是 ( )

   (A) $(3,1)$ (B) $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ (D) $(1,3)$

2. 在复平面内, 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时钟方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 ( )

   (A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ (D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

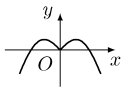
3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 ( )

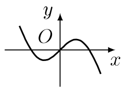
   (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

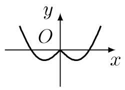
4. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量, 且相互不共线, 则① $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=0$; ② $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; ③ $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直; ④ $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$ 中, 是真命题的有 ( )

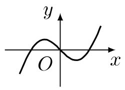
   (A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ②④

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 ( )

   (A) 

   (B) 

   (C) 

   (D) 

6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
$\cdots$	$\cdots$

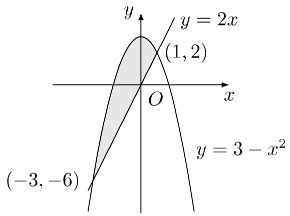
   某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于 ( )

   (A) $800-900$ 元 (B) $900-1200$ 元
   (C) $1200-1500$ 元 (D) $1500-2800$ 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

   (A) $R<P<Q$ (B) $P<Q<R$ (C) $Q<P<R$ (D) $P<R<Q$

8. 图中阴影部分的面积是 ( )



   (A) $2\sqrt{3}$ (B) $9-2\sqrt{3}$ (C) $\frac{32}{3}$ (D) $\frac{35}{3}$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 ( )

   (A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

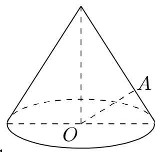
10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ( )

   (A) $y=\sqrt{3}x$ (B) $y=-\sqrt{3}x$ (C) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于 ( )

   (A) $2a$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\frac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 ( )



   (A) $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\arccos\frac{1}{2}$ (C) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

二、填空题

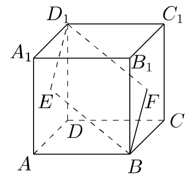
13. 某厂生产电子元件, 其产品的次品率为 5%, 现从一批产品中任意地连续取出 2 件, 其中次品 ξ 的概率分布是:

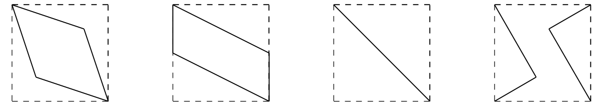
ξ	0	1	2
p			

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n{}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$______.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是______. (要求: 把可能的图序号都填上)



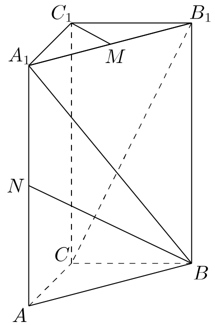


① ② ③ ④

三、解答题

17. 甲、乙二人参加普法知识竞答, 共有 10 个不同的题目, 其中选择题 6 个, 判断题 4 个甲、乙二人依次各抽一题.
   (1) 甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少?
   (2) 甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少?

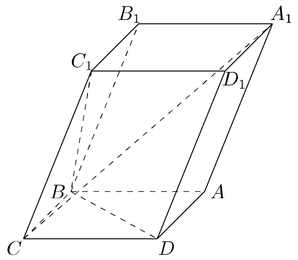
18.【甲】如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 底面 $\triangle ABC$ 中, $CA=CB=1$, $\angle BCA=90^\circ$, 棱 $AA_1=2$, M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点.
   (1) 求 $\overrightarrow{BN}$ 的长;
   (2) 求 $\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle$ 的值;
   (3) 求证 $A_1B\perp C_1M$.



【乙】如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



19. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7=7$, $S_{15}=75$, T_n 为数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n.

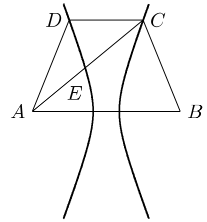
20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 用总长 14.8 m 的钢条制成一个长方体容器的框架, 如果所制做容器的底面的一边比另一边长 0.5 m, 那么高为多少时容器的容积最大? 并求出它的最大容积.

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 普通高等学校招生考试 (新课程卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$, 则 $A\cup B$ 中的元素个数是 ( )

(A) 11　(B) 10　(C) 16　(D) 15

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量, 且相互不共线, 则① $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=0$; ② $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; ③ $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直; ④ $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$ 中, 是真命题的有 ( )

(A) ①②　(B) ②③　(C) ③④　(D) ②④

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$　(B) $3\sqrt{2}$　(C) 6　(D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$, 那么下列命题成立的是 ( )

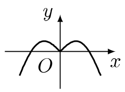
(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

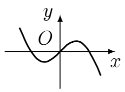
(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

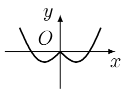
(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

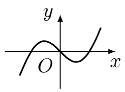
(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 ( )

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
$\cdots$	$\cdots$

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于 ( )

(A) $800-900$ 元　(B) $900-1200$ 元

(C) $1200-1500$ 元　(D) $1500-2800$ 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R<P<Q$　(B) $P<Q<R$　(C) $Q<P<R$　(D) $P<R<Q$

8. 已知两条直线 l_1: $y=x$, l_2: $ax-y=0$, 其中 a 为实数. 当这两条直线的夹角在 $\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right)$ 内变动时, a 的取值范围是 ( )

(A) $(0,1)$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

(C) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup(1,\sqrt{3})$　(D) $(1,\sqrt{3})$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 ( )

(A) $\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$　(B) $\dfrac{1+4\pi}{4\pi}$　(C) $\dfrac{1+2\pi}{\pi}$　(D) $\dfrac{1+4\pi}{2\pi}$

10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ( )

(A) $y=\sqrt{3}x$　(B) $y=-\sqrt{3}x$　(C) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　(D) $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于 ( )

(A) $2a$　(B) $\dfrac{1}{2a}$　(C) $4a$　(D) $\dfrac{4}{a}$

12. 二项式 $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}x\right)^{50}$ 的展开式中系数为有理数的项共有 ( )

(A) 6 项　(B) 7 项　(C) 8 项　(D) 9 项

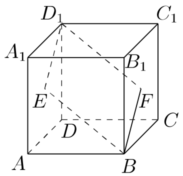
二、填空题

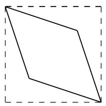
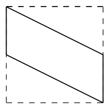
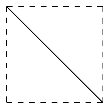
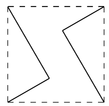
13. 从含有 500 个个体的总体中一次性地抽取 25 个个体, 假定其中每个个体被抽到的概率相等, 那么总体中的每个个体被抽取的概率等于______.

14. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n{}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$______.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是______. (要求: 把可能的图序号都填上)




①

②

③

④

三、解答题

17. 甲、乙二人参加普法知识竞答, 共有 10 个不同的题目, 其中选择题 6 个, 判断题 4 个甲、乙二人依次各抽一题.

(1) 甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少?

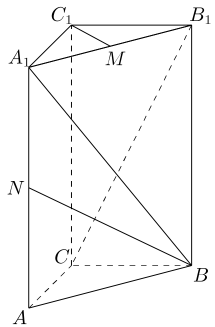
(2) 甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少?

18.【甲】如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 底面 $\triangle ABC$ 中, $CA=CB=1$, $\angle BCA=90^\circ$, 棱 $AA_1=2$, M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点.

(1) 求 $\overrightarrow{BN}$ 的长;

(2) 求 $\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle$ 的值;

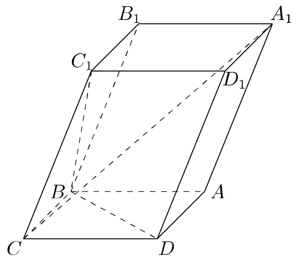
(3) 求证 $A_1B\perp C_1M$.



【乙】如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



19. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7=7$, $S_{15}=75$, T_n 为数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n.

20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 用总长 14.8 m 的钢条制成一个长方体容器的框架, 如果所制做容器的底面的一边比另一边长 0.5 m, 那么高为多少时容器的容积最大? 并求出它的最大容积.

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.