

2002 普通高等学校春季招生考试 (北京卷理)

一、选择题

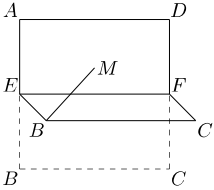
1. 不等式组 $\begin{cases} x^2 - 1 < 0, \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ 的解集为 ()
- (A) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (B) $\{x \mid 0 < x < 3\}$
(C) $\{x \mid 0 < x < 1\}$ (D) $\{x \mid -1 < x < 3\}$
2. 已知三条直线 m, n, l , 三个平面 α, β, γ , 下列四个命题中, 正确的是 ()
- (A) $\begin{cases} \alpha \perp \gamma, \\ \beta \perp \gamma, \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (B) $\begin{cases} m \parallel \beta, \\ l \perp m, \end{cases} \Rightarrow l \perp \beta$
(C) $\begin{cases} m \parallel \gamma, \\ n \parallel \gamma, \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$ (D) $\begin{cases} m \perp \gamma, \\ n \perp \gamma, \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$
3. 已知椭圆的焦点是 F_1, F_2 , P 是椭圆上的一个动点, 如果延长 F_1P 到 Q , 使得 $|PQ| = |PF_2|$, 那么动点 Q 的轨迹是. ()
- (A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线
4. 如果 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 那么复数 $(1+i)(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的辐角的主值是 ()
- (A) $\theta + \frac{9\pi}{4}$ (B) $\theta + \frac{\pi}{4}$ (C) $\theta - \frac{\pi}{4}$ (D) $\theta + \frac{7\pi}{4}$
5. 若角 α 满足条件 $\sin 2\alpha < 0, \cos \alpha - \sin \alpha < 0$, 则 α 在 ()
- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
6. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译, 导游, 导购, 保洁四项不同工作. 若其中甲、乙两名支援者都不能从事翻译工作, 则选派方案共有. ()
- (A) 280 种 (B) 240 种 (C) 180 种 (D) 96 种
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, BC = 1.5, \angle ABC = 120^\circ$, 若使三角形绕直线 BC 旋转一周, 则所形成的几何体的体积是 ()
- (A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) $\frac{5}{2}\pi$ (C) $\frac{7}{2}\pi$ (D) $\frac{9}{2}\pi$
8. 圆 $2x^2 + 2y^2 = 1$ 与直线 $x \sin \theta + y - 1 = 0$ ($\theta \in \mathbf{R}, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$) 的位置关系是 ()
- (A) 相交 (B) 相切 (C) 相离或相切 (D) 不能确定
9. 在极坐标系中, 如果一个圆的方程 $\rho = 4 \cos \theta + 6 \sin \theta$, 那么过圆心且与极轴平行的直线方程是 ()
- (A) $\rho \sin \theta = 3$ (B) $\rho \sin \theta = -3$ (C) $\rho \cos \theta = 2$ (D) $\rho \cos \theta = -2$
10. 对于二项式 $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ 的展开式 ($n \in \mathbf{N}^*$), 四位同学作出了四种判断:
- ① 存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中有常数项;
② 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中没有常数项;
③ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中没有 x 的一次项;

- ④ 存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中有 x 的一次项.
- 上述判断中正确的是 ()
- (A) ①与③ (B) ②与③ (C) ①与④ (D) ②与④

11. 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后 3 项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个数列有 ()
- (A) 13 项 (B) 12 项 (C) 11 项 (D) 10 项
12. 用一张钢板制作一个容积为 4m^3 的无盖长方体水箱. 可用的长方形钢板有四种不同的规格 (长 \times 宽的尺寸如各选项所示, 单位均为 m), 若既要够用, 又要所剩最少, 则应选钢板的规格是. ()
- (A) 2×5 (B) 2×5.5 (C) 2×6.1 (D) 3×5

二、填空题

13. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 则双曲线的焦点坐标是_____.
14. 如果 $\cos \theta = -\frac{12}{13}, \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 那么 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值等于_____.
15. 正方形 $ABCD$ 的边长是 2, E, F 分别是 AB 和 CD 的中点, 将正方形沿 EF 折成直二面角 (如图所示). M 为矩形 $AEFD$ 内一点, 如果 $\angle MBE = \angle MBC, MB$ 和平面 BCF 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 那么点 M 到直线 EF 的距离为_____.



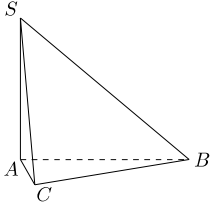
16. 对于任意两个复数 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ (x_1, y_1, x_2, y_2 为实数), 定义运算 \odot 为: $z_1 \odot z_2 = x_1x_2 + y_1y_2$. 设非零复数 w_1, w_2 在复平面内对应的点分别为 P_1, P_2 , 点 O 为坐标原点. 如果 $w_1 \odot w_2 = 0$, 那么在 $\triangle P_1OP_2$ 中, $\angle P_1OP_2$ 的大小为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A, B, C 成等差数列, 求 $\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) + \sqrt{3} \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$ 的值.

18. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.

19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 如图, $\angle SAB = \angle SAC = \angle ACB = 90^\circ, AC = 2, BC = \sqrt{13}, SB = \sqrt{29}$.
- (1) 证明: $SC \perp BC$;
(2) 求侧面 SBC 与底面 ABC 所成的二面角大小;
(3) 求异面直线 SC 与 AB 所成的角的大小 (用反三角函数表示).



20. 假设 A 型进口车关税税率在 2001 年是 100%, 在 2006 年是 25%, 2001 年 A 型进口车每辆价格为 64 万元 (其中含 32 万元关税税款).
- (1) 已知与 A 型车性能相近的 B 型国产车, 2001 年每辆价格为 46 万元, 若 A 型车的价格只受关税降低的影响, 为了保证 2006 年 B 型车的价格不高于 A 型车价格的 90%, B 型车价格要逐年降低, 问平均每年至少下降多少万元?
- (2) 某人在 2001 年将 33 万元存入银行, 假设银行扣利息税后的年利率为 1.8% (5 年内不变), 且每年按复利计算 (上一年的利息计入第二年的本金), 那么五年到期时这笔钱连本带息是否一定够买按 (1) 中所述降价后的 B 型车一辆?
21. 已知点的序列 $A_n(x_n, 0)$, $n \in \mathbf{N}$, 其中 $x_1 = 0$, $x_2 = a$ ($a < 0$), A_3 是线段 A_1A_2 的中点, A_4 是线段 A_2A_3 的中点, \dots , A_n 是线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点, \dots .
- (1) 写出 x_n 与 x_{n-1} , x_{n-2} 之间的关系式 ($n \geq 3$);
- (2) 设 $a_n = x_{n+1} - x_n$, 计算 a_1, a_2, a_3 , 由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并加以证明;
- (3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
22. 已知某椭圆的焦点是 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, 过点 F_2 , 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B , 且 $|F_1B| + |F_2B| = 10$. 椭圆上不同的两点 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ 满足条件: $|F_2A|$, $|F_2B|$, $|F_2C|$ 成等差数列.
- (1) 求该椭圆的方程;
- (2) 求弦 AC 中点的横坐标;
- (3) 设弦 AC 的垂直平分线的方程为 $y = kx + m$, 求 m 的取值范围.

2002 普通高等学校春季招生考试 (北京卷文)

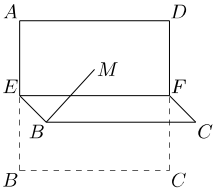
一、选择题

1. 不等式组 $\begin{cases} x^2 - 1 < 0, \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ 的解集为 ()
- (A) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (B) $\{x \mid 0 < x < 3\}$
(C) $\{x \mid 0 < x < 1\}$ (D) $\{x \mid -1 < x < 3\}$
2. 已知三条直线 m, n, l , 三个平面 α, β, γ , 下列四个命题中, 正确的是 ()
- (A) $\begin{cases} \alpha \perp \gamma, \\ \beta \perp \gamma, \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (B) $\begin{cases} m \parallel \beta, \\ l \perp m, \end{cases} \Rightarrow l \perp \beta$
(C) $\begin{cases} m \parallel \gamma, \\ n \parallel \gamma, \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$ (D) $\begin{cases} m \perp \gamma, \\ n \perp \gamma, \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$
3. 已知椭圆的焦点是 F_1, F_2 , P 是椭圆上的一个动点, 如果延长 F_1P 到 Q , 使得 $|PQ| = |PF_2|$, 那么动点 Q 的轨迹是. ()
- (A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线
4. 如果 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 那么复数 $(1+i)(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的辐角的主值是 ()
- (A) $\theta + \frac{9\pi}{4}$ (B) $\theta + \frac{\pi}{4}$ (C) $\theta - \frac{\pi}{4}$ (D) $\theta + \frac{7\pi}{4}$
5. 若角 α 满足条件 $\sin 2\alpha < 0, \cos \alpha - \sin \alpha < 0$, 则 α 在 ()
- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
6. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译, 导游, 导购, 保洁四项不同工作. 若其中甲、乙两名支援者都不能从事翻译工作, 则选派方案共有. ()
- (A) 280 种 (B) 240 种 (C) 180 种 (D) 96 种
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, BC = 1.5, \angle ABC = 120^\circ$, 若使三角形绕直线 BC 旋转一周, 则所形成的几何体的体积是 ()
- (A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) $\frac{5}{2}\pi$ (C) $\frac{7}{2}\pi$ (D) $\frac{9}{2}\pi$
8. 到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是 ()
- (A) $x - y = 0$ (B) $x + y = 0$ (C) $|x| - y = 0$ (D) $|x| - |y| = 0$
9. 函数 $y = 2^{\sin x}$ 的单调区间是 ()
- (A) $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$ (B) $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$
(C) $[2k\pi - \pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ (D) $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbf{Z})$
10. 在 $\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^6$ 的展开式中, x^3 的系数和常数项依次是 ()
- (A) 20, 20 (B) 15, 20 (C) 20, 15 (D) 15, 15

11. 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后 3 项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个数列有 ()
- (A) 13 项 (B) 12 项 (C) 11 项 (D) 10 项
12. 用一张钢板制作一个容积为 4m^3 的无盖长方体水箱. 可用的长方形钢板有四种不同的规格 (长 \times 宽的尺寸如各选项所示, 单位均为 m), 若既要够用, 又要所剩最少, 则应选钢板的规格是. ()
- (A) 2×5 (B) 2×5.5 (C) 2×6.1 (D) 3×5

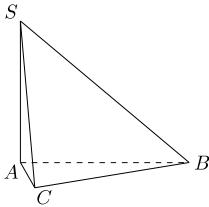
二、填空题

13. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 则双曲线的焦点坐标是_____.
14. 如果 $\cos \theta = -\frac{12}{13}, \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 那么 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值等于_____.
15. 正方形 $ABCD$ 的边长是 2, E, F 分别是 AB 和 CD 的中点, 将正方形沿 EF 折成直二面角 (如图所示). M 为矩形 $AEFD$ 内一点, 如果 $\angle MBE = \angle MBC$, MB 和平面 BCF 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 那么点 M 到直线 EF 的距离为_____.



18. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.

19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 如图, $\angle SAB = \angle SAC = \angle ACB = 90^\circ, AC = 2, BC = \sqrt{13}, SB = \sqrt{29}$.
- (1) 证明: $SC \perp BC$;
- (2) 求侧面 SBC 与底面 ABC 所成的二面角大小;
- (3) 求三棱锥的体积 V_{S-ABC} .

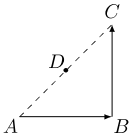


三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A, B, C 成等差数列, 求 $\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) + \sqrt{3}\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$ 的值.

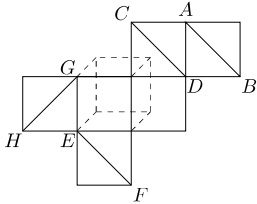
20. 假设 A 型进口车关税税率在 2001 年是 100%, 在 2006 年是 25%, 2001 年 A 型进口车每辆价格为 64 万元 (其中含 32 万元关税税款).
- (1) 已知与 A 型车性能相近的 B 型国产车, 2001 年每辆价格为 46 万元, 若 A 型车的价格只受关税降低的影响, 为了保证 2006 年 B 型车的价格不高于 A 型车价格的 90%, B 型车价格要逐年降低, 问平均每年至少下降多少万元?
- (2) 某人在 2001 年将 33 万元存入银行, 假设银行扣利息税后的年利率为 1.8% (5 年内不变), 且每年按复利计算 (上一年的利息计入第二年的本金), 那么五年到期时这笔钱连本带息是否一定够买按 (1) 中所述降价后的 B 型车一辆?
21. 已知某椭圆的焦点是 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, 过点 F_2 , 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B , 且 $|F_1B| + |F_2B| = 10$. 椭圆上不同的两点 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ 满足条件: $|F_2A|$, $|F_2B|$, $|F_2C|$ 成等差数列.
- (1) 求该椭圆的方程;
- (2) 求弦 AC 中点的横坐标.
22. 已知点的序列 $A_n(x_n, 0)$, $n \in \mathbf{N}$, 其中 $x_1 = 0$, $x_2 = a$ ($a < 0$), A_3 是线段 A_1A_2 的中点, A_4 是线段 A_2A_3 的中点, \dots , A_n 是线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点, \dots .
- (1) 写出 x_n 与 x_{n-1} , x_{n-2} 之间的关系式 ($n \geq 3$);
- (2) 设 $a_n = x_{n+1} - x_n$, 计算 a_1 , a_2 , a_3 , 由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并加以证明;
- (3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2002 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)



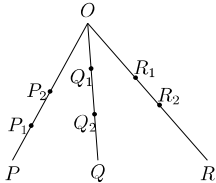
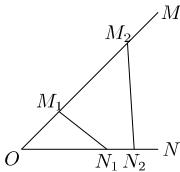
一、填空题

1. 函数 $y = \frac{1}{3-2x-x^2}$ 的定义域为_____.
2. 若椭圆的两个焦点坐标为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(5, 0)$, 长轴长为 10, 则椭圆的方程为_____.
3. 若全集 $I = \mathbf{R}$, $f(x)$ 、 $g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P = \{x \mid f(x) < 0\}$, $Q = \{x \mid g(x) \geq 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P 、 Q 表示为_____.
4. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数. 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_3(1+x)$, 则 $f(-2) =$ _____.
5. 若在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中, 第 4 项是常数项, 则 $n =$ _____.
6. 已知 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $f(\cos \alpha) + f(-\cos \alpha)$ 可化简为_____.
7. 六位身高全不相同的同学拍照留念, 摄影师要求前后两排各三人, 则后排每人均比前排同学高的概率是_____.
8. 设曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为 $F_1(x, y) = 0$ 和 $F_2(x, y) = 0$, 则点 $P(a, b) \notin C_1 \cap C_2$ 的一个充分条件为_____.
9. 若 $f(x) = 2\sin \omega x$ ($0 < \omega < 1$) 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值是 $\sqrt{2}$, 则 $\omega =$ _____.
10. 如图表示一个正方体表面的一种展开图, 图中的四条线段 AB 、 CD 、 EF 和 GH 在原正方体中相互异面的有_____对.



11. 如图所示, 客轮以速度 $2v$ 由 A 至 B 再到 C 匀速航行, 货轮从 AC 的中点 D 出发, 以速度 v 沿直线匀速航行, 将货物送达客轮. 已知 $AB \perp BC$, 且 $AB = BC = 50$ 海里. 若两船同时出发, 则两船相遇之处距 C 点_____海里. (结果精确到小数点后 1 位)

12. 如图, 若从点 O 所作的两条射线 OM 、 ON 上分别有点 M_1 、 M_2 与点 N_1 、 N_2 , 则三角形面积之比 $\frac{S_{\triangle OM_1N_1}}{S_{\triangle OM_2N_2}} = \frac{OM_1}{OM_2} \cdot \frac{ON_1}{ON_2}$. 若从点 O 所作的不在同一平面内的三条射线 OP 、 OQ 和 OR 上, 分别有点 P_1 、 P_2 , 点 Q_1 、 Q_2 和点 R_1 、 R_2 , 则类似的结论为_____.



二、选择题

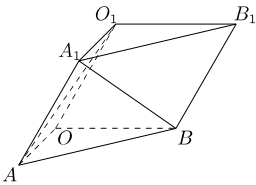
13. 若 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 为任意向量, $m \in \mathbf{R}$, 则下列等式不一定成立的是 ()
- (A) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (B) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- (C) $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$ (D) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $2\cos B \sin A = \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 ()
- (A) 等腰直角三角形 (B) 直角三角形
- (C) 等腰三角形 (D) 等边三角形
15. 设 $A > 0$, $a \neq 1$, 函数 $y = \log_a x$ 的反函数和 $y = \log_a \frac{1}{x}$ 的反函数的图象关于 ()
- (A) x 轴对称 (B) y 轴对称 (C) $y = x$ 对称 (D) 原点对称
16. 设 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和, 且 $S_5 < S_6$, $S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论错误的是 ()
- (A) $d < 0$ (B) $a_7 = 0$
- (C) $S_9 > S_5$ (D) S_6 和 S_7 均为 S_n 的最大值

三、解答题

17. 已知 z 、 ω 为复数, $(1+3i)z$ 为纯虚数, $\omega = \frac{z}{2+i}$, 且 $|\omega| = 5\sqrt{2}$, 求 ω .

18. 已知 F_1 、 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的焦点. 过 F_2 作垂直 x 轴的直线交双曲线于点 P , 且 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 求双曲线的渐近方程.

19. 如图, 三棱柱 $OAB-O_1A_1B_1$, 平面 $OBB_1O_1 \perp$ 平面 OAB , $\angle O_1OB = 60^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$, 且 $OB = OO_1 = 2$, $OA = \sqrt{3}$. 求:
- (1) 二面角 O_1-AB-O 的大小;
- (2) 异面直线 A_1B 与 AO_1 所成角的大小.
- (上述结果用反三角函数值表示)



20. 已知函数 $f(x) = a^x + \frac{x-2}{x+1}$ ($a > 1$).
- (1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数;
 - (2) 用反证法证明方程 $f(x) = 0$ 没有负数根.
21. 某公司全年的利润为 b 元, 其中一部分作为奖金发给 n 位职工, 奖金分配方案如下: 首先将职工按工作业绩 (工作业绩均不相同) 从大到小, 由 1 到 n 排序, 第 1 位职工得奖金 $\frac{b}{n}$ 元, 然后再将余额除以 n 发给第 2 位职工, 按此方法将奖金逐一发给每位职工, 并将最后剩余部分作为公司发展基金.
- (1) 设 a_k ($1 \leq k \leq n$) 为第 k 位职工所得奖金额, 试求 a_2, a_3 , 并用 k, n 和 b 表示 a (不必证明);
 - (2) 证明 $a_k > a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), 并解释此不等式关于分配原则的实际意义;
 - (3) 发展基金与 n 和 b 有关, 记为 $P_n(b)$, 对常数 b , 当 n 变化时, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(b)$.
22. 对于函数 $f(x)$, 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + (b-1)$ ($a \neq 0$).
- (1) 当 $a = 1, b = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的不动点;
 - (2) 若对任意实数 b , 函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点, 求 a 的取值范围;
 - (3) 在 (2) 的条件下, 若 $y = f(x)$ 图上 A, B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点, 且 A, B 两点关于直线 $y = kx + \frac{1}{2a^2 + 1}$ 对称, 求 b 的最小值.

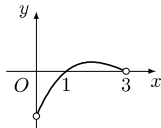
2002 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 80^\circ, \sin 80^\circ)$, $B(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$, 则 $|AB|$ 的值是 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1
3. 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上为减函数的是 ()
(A) $y = \cos^2 x$ (B) $y = 2|\sin x|$ (C) $y = (\frac{1}{3})^{\cos x}$ (D) $y = -\cot x$
4. 64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球, 记它们的体积之和为 $V_{\text{甲}}$, 表面积之和为 $S_{\text{甲}}$; 一个直径为 a 的球, 记其体积为 $V_{\text{乙}}$, 表面积为 $S_{\text{乙}}$, 则 ()
(A) $V_{\text{甲}} > V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$ (B) $V_{\text{甲}} < V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} < S_{\text{乙}}$
(C) $V_{\text{甲}} = V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$ (D) $V_{\text{甲}} = V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}}$
5. 已知某曲线的参数方程是 $\begin{cases} x = \sec \varphi, \\ y = \tan \varphi, \end{cases}$ (φ 为参数), 若以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 长度单位不变, 建立极坐标系, 则该曲线的极坐标方程是 ()
(A) $\rho = 1$ (B) $\rho \cos 2\theta = 1$ (C) $\rho^2 \sin 2\theta = 1$ (D) $\rho^2 \cos 2\theta = 1$
6. 给定四条曲线: ① $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$, ② $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, ③ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, ④ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 其中与直线 $x + y - \sqrt{5} = 0$ 仅有一个交点的曲线是 ()
(A) ①②③ (B) ②③④ (C) ①②④ (D) ①③④
7. 已知 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 且 $|z_1| = 1$. 若 $z_1 + z_2 = 2$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的最大值是 ()
(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
8. 若 $\frac{\cot \theta - 1}{2 \cot \theta + 1} = 1$, 则 $\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ 的值为 ()
(A) 3 (B) -3 (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$
9. 12 名学生分别到三个不同的路口进行车流量的调查, 若每个路口 4 人, 则不同的分配方案共有 ()
(A) $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种 (B) $3C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种 (C) $C_{12}^4 C_8^4 A_3^3$ 种 (D) $\frac{C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{A_3^3}$ 种
10. 设命题: “直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直”; 命题乙: “直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体”, 那么, 甲是乙的 ()

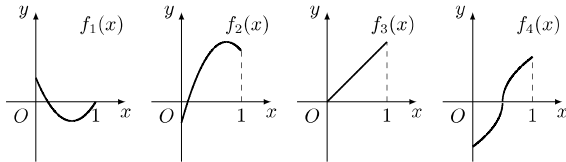
- (A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件
(C) 必要非充分条件 (D) 即非充分又非必要条件

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3, 3)$ 上的奇函数, 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 那么不等式 $f(x) \cos x < 0$ 的解集是 ()



- (A) $(-3, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, 1) \cup (\frac{\pi}{2}, 3)$ (B) $(-\frac{\pi}{2}, -1) \cup (0, 1) \cup (\frac{\pi}{2}, 3)$
(C) $(-3, -1) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$ (D) $(-3, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$

12. 如图所示, $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , 任意 $\lambda \in [0, 1]$, $f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ 恒成立”的只有 ()



- (A) $f_1(x), f_3(x)$ (B) $f_2(x)$ (C) $f_2(x), f_3(x)$ (D) $f_4(x)$

二、填空题

13. $\arcsin(-\frac{2}{5}), \arccos(-\frac{3}{4}), \arctan(-\frac{5}{4})$ 从小到大的顺序是_____.
14. 等差数列 $\{a_n\}$, 中, $a_1 = 2$, 公差不为零, 且 a_1, a_3, a_{11} 恰好是某等比数列的前三项, 那么该等比数列公比的值等于_____.
15. 关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断: ① 可能是 0° 的角; ② 可能是锐角; ③ 可能是直角; ④ 可能是直角; ⑤ 可能是 180° 的角. 其中正确的序号是_____. (注: 把你认为正确判断的序号都填上)
16. 已知 P 是直线 $3x + 4y + 8 = 0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8 = 0$ 的两条切线, A, B 是切点, C 是圆心, 那么四边形 $PACB$ 面积的最小值为_____.

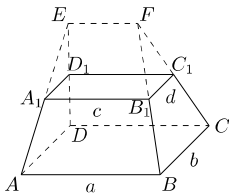
三、解答题

17. 解不等式 $|\sqrt{2x-1} - x| < 2$.

18. 如图, 在多面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面平行且均为矩形, 相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等, 侧棱延长后相交于 E, F 两点, 上、下底面矩形的长、宽分别为 c, d 与 a, b , 且 $a > c, b > d$, 两底面间的距离为 h .

- (1) 求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小;
(2) 证明: $EF \parallel ABCD$;
(3) 在估侧该多面体的体积时, 经常运用近似公式 $V_{\text{估}} = S_{\text{中截面}} \cdot h$ 来计算, 已知它的体积公式是 $V = \frac{h}{6}(S_{\text{上底面}} + 4S_{\text{中截面}} + S_{\text{下底面}})$, 试判断 $V_{\text{估}}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.

注: 与两个底面平行, 且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.



19. 数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定: $x_1 = a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), n \in \mathbf{N}$.

- (1) 证明: 对 $n \geq 2$, 总有 $x_n \geq \sqrt{a}$;
(2) 证明: 对 $n \geq 2$, 总有 $x_n \geq x_{n+1}$;
(3) 若数列 $\{a_n\}$ 的极限存在, 且大于零, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的值.

20. 在研究并行计算的基本算法时, 有以下简单模型问题: 用计算机求 n 个不同的数 v_1, v_2, \dots, v_n 的和 $\sum_{i=1}^n v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中, 每台机器存一个数. 计算开始后, 在一个单位时间内, 每台机器至多到一台其他机器中读数据, 并与自己原有数据相加得到新的数据, 各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间, 即可完成计算, 方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	$v_1 + v_2$				
2	v_2	1	$v_2 + v_1$				

(1) 当 $n = 4$ 时, 至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:
机器号初始时第一单位时间第二单位时间第三单位时间被读机号结果被读机号结果被读机号结果

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						



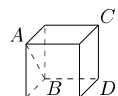

(2) 当 $n = 128$ 时, 要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^n v_i$, 至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

21. 已知 $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(b, c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.
(1) 写出 $\triangle OBC$ 的重心 G , 外心 F , 垂心 H 的坐标, 并证明 G, F, H 三点共线;
(2) 当直线 FH 与 OB 平行时, 求顶点 C 的轨迹.

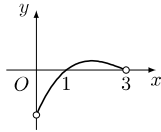
22. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.
(1) 求 $f(0)$, $f(1)$ 的值;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
(3) 若 $f(2) = 2$, $u_n = \frac{f(2^{-n})}{n}$ ($n \in \mathbf{N}$), 求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n .

2002 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

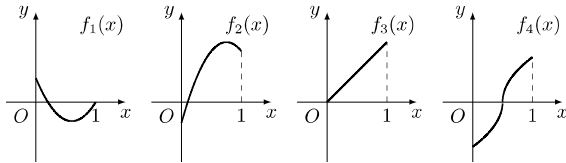
一、选择题

1. 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ()
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
2. 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 80^\circ, \sin 80^\circ)$, $B(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$, 则 $|AB|$ 的值是 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1
3. 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上为减函数的是 ()
(A) $y = \cos x$ (B) $y = 2|\sin x|$ (C) $y = \cos \frac{x}{2}$ (D) $y = -\cot x$
4. 在下列四个正方体中, 能得出 $AB \perp CD$ 的是 ()
- (A)  (B)  (C)  (D) 
5. 64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球, 记它们的体积之和为 $V_{\text{甲}}$, 表面积之和为 $S_{\text{甲}}$; 一个直径为 a 的球, 记其体积为 $V_{\text{乙}}$, 表面积为 $S_{\text{乙}}$, 则 ()
(A) $V_{\text{甲}} > V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$ (B) $V_{\text{甲}} < V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} < S_{\text{乙}}$
(C) $V_{\text{甲}} = V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$ (D) $V_{\text{甲}} = V_{\text{乙}}, S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}}$
6. 若直线 $l: y = kx - \sqrt{3}$ 与直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的交点位于第一象限, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ()
(A) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ (B) $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ (C) $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ (D) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$
7. $(1+i)^8$ 等于 ()
(A) 16i (B) -16i (C) -16 (D) 16
8. 若 $\frac{\cot \theta - 1}{2 \cot \theta + 1} = 1$, 则 $\cos 2\theta$ 的值为 ()
(A) $\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
9. 5 本不同的书, 全部分给四个学生, 每个学生至少 1 本, 则不同的分法的种数为 ()
(A) 480 (B) 240 (C) 120 (D) 96
10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{3m^2} + \frac{y^2}{5n^2} = 1$ 和双曲线 $\frac{x^2}{2m^2} - \frac{y^2}{3n^2} = 1$ 有公共的焦点, 那么双曲线的渐近线方程是 ()
(A) $x = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}y$ (B) $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}x$
(C) $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}y$ (D) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}x$

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, 3)$ 上的函数, $f(x)$ 的图象如图所示, 那么不等式 $f(x) \cos x < 0$ 的解集是 ()



- (A) $(0, 1) \cup (2, 3)$ (B) $(1, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 3)$
(C) $(0, 1) \cup (\frac{\pi}{2}, 3)$ (D) $(0, 1) \cup (1, 3)$
12. 如图所示, $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ 恒成立”的只有 ()



- (A) $f_1(x), f_3(x)$ (B) $f_2(x)$ (C) $f_2(x), f_3(x)$ (D) $f_4(x)$

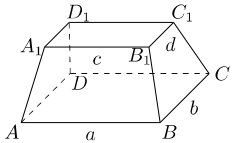
二、填空题

13. $\sin \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{6\pi}{5}, \tan \frac{7\pi}{5}$ 从小到大的顺序是_____.
14. 等差数列 $\{a_n\}$, 中, $a_1 = 2$, 公差不为零, 且 a_1, a_3, a_{11} 恰好是某等比数列的前三项, 那么该等比数列公比的值等于_____.
15. 关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断: ① 可能是 0° 的角; ② 可能是锐角; ③ 可能是直角; ④ 可能是直角; ⑤ 可能是 180° 的角. 其中正确的序号是_____. (注: 把你认为正确判断的序号都填上)
16. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 上的动点 Q 到直线 $3x + 4y + 8 = 0$ 距离的最小值为_____.

三、解答题

17. 解不等式 $\sqrt{2x-1} + 2 > x$.

18. 如图, 在多面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面平行且均为矩形, 相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等, 侧棱延长后相交与 E, F 两点, 上、下底面矩形的长、宽分别为 c, d 与 a, b , 且 $a > c, b > d$, 两底面间的距离为 h .
- (1) 求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的正切值;
- (2) 在估侧该多面体的体积时, 经常运用近似公式 $V_{\text{估}} = S_{\text{中截面}} \cdot h$ 来计算, 已知它的体积公式是 $V = \frac{h}{6}(S_{\text{上底面}} + 4S_{\text{中截面}} + S_{\text{下底面}})$, 试判断 $V_{\text{估}}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.
- 注: 与两个底面平行, 且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.



19. 数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定: $x_1 = a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), n \in \mathbb{N}$.
- (1) 证明: 对 $n \geq 2$, 总有 $x_n \geq \sqrt{a}$;
- (2) 证明: 对 $n \geq 2$, 总有 $x_n \geq x_{n+1}$.

20. 在研究并行计算的基本算法时, 有以下简单模型问题: 用计算机求 n 个不同的数 v_1, v_2, \dots, v_n 的和 $\sum_{i=1}^n v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中, 每台机器存一个数. 计算开始后, 在一个单位时间内, 每台机器至多到一台其他机器中读数据, 并与自己原有数据相加得到新的数据, 各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间, 即可完成计算, 方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	$v_1 + v_2$				
2	v_2	1	$v_2 + v_1$				

(1) 当 $n = 4$ 时, 至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:
机器号初始时第一单位时间第二单位时间第三单位时间被读机号结果被读机号结果被读机号结果

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

(2) 当 $n = 128$ 时, 要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^n v_i$, 至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

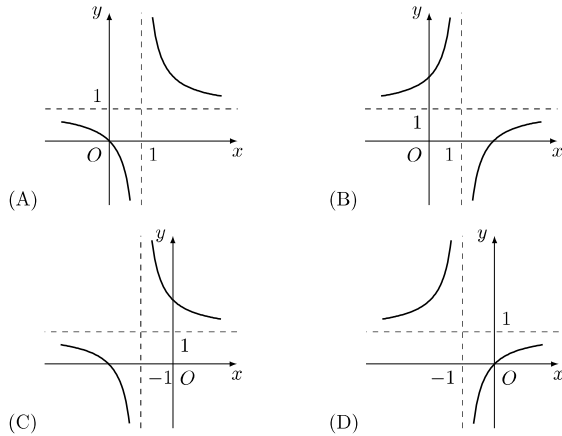
21. 已知 $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(b, c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.
(1) 写出 $\triangle OBC$ 的重心 G , 外心 F , 垂心 H 的坐标, 并证明 G, F, H 三点共线;
(2) 当直线 FH 与 OB 平行时, 求顶点 C 的轨迹.

22. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.
(1) 求 $f(0)$, $f(1)$ 的值;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
(3) 若 $f(2) = 2$, $u_n = f(2^n)$ ($n \in \mathbf{N}$), 求证 $u_{n+1} > u_n$ ($n \in \mathbf{N}$).

2002 普通高等学校招生考试 (大纲卷理)

一、选择题

- 圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心到直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$
- 复数 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ 的值是 ()
(A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1
- 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是 ()
(A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (D) $\{x \mid x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
- 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$
(C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$
- 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 ()
(A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $M \supseteq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
- 点 $P(1, 0)$ 到曲线 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t, \end{cases}$ (其中参数 $t \in \mathbf{R}$) 上的点的最短距离为 ()
(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
- 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是 ()
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$
- 正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 则这个棱柱侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是 ()
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°
- 函数 $y = x^2 + bx + c$, $x \in [0, +\infty)$ 是单调函数的充要条件是 ()
(A) $b \geq 0$ (B) $b \leq 0$ (C) $b > 0$ (D) $b < 0$
- 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图象是 ()



- 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 ()
(A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种
- 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》: “2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上年增长 7.3%”, 如果“十·五”期间 (2001 年 - 2005 年) 每年的国内生产总值都按此年增长率增长, 那么到“十·五”末我国国内年生产总值约为 ()
(A) 115000 亿元 (B) 120000 亿元 (C) 127000 亿元 (D) 135000 亿元

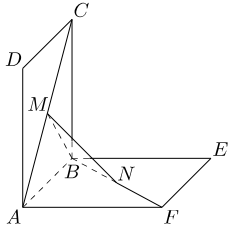
二、填空题

- 函数 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值这为 3, 则 $a =$ _____.
- 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 那么 $k =$ _____.
- $(x^2 + 1)(x - 2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是_____.
- 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{1}{4}\right) =$ _____.

三、解答题

- 已知 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\sin \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 的值.

- 如图, 正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ 的边长都是 1, 而且平面 $ABCD$ 、 $ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动, 点 N 在 BF 上移动, 若 $CM = BN = a$ ($0 < a < \sqrt{2}$).
(1) 求 MN 的长;
(2) a 为何值时, MN 的长最小;
(3) 当 MN 的长最小时, 求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.



- 设点 P 到点 $(-1, 0)$ 、 $(1, 0)$ 距离之差为 $2m$, 到 x 、 y 轴的距离之比为 2, 求 m 的取值范围.

20. 某城市 2001 年末汽车保有量为 30 万辆, 预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%, 并且每年新增汽车数量相同. 为保护城市环境, 要求该城市汽车保有量不超过 60 万辆, 那么每年新增汽车数量不应超过多少辆?

21. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^2 + |x - a| + 1, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 求 $f(x)$ 的最小值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = a_n^2 - na_n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$.

(1) 当 $a_1 = 2$ 时, 求 a_2, a_3, a_4 并由此猜测 a_n 的一个通项公式;

(2) 当 $a_1 \geq 3$ 时, 证明对所有的 $n \geq 1$, 有

$$\textcircled{1} a_n \geq n + 2;$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \frac{1}{1+a_3} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{1}{2}.$$

2002 普通高等学校招生考试 (大纲卷文)

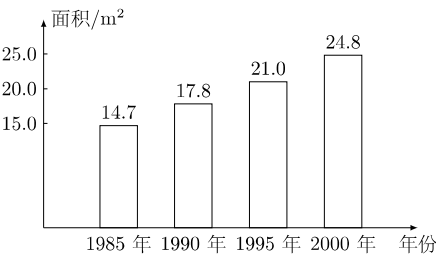
一、选择题

1. 直线 $(1+a)x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切, 则 a 的值为 ()
(A) ± 1 (B) ± 2 (C) 1 (D) -1
2. 复数 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ 的值是 ()
(A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1
3. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是 ()
(A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (D) $\{x \mid x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
4. 函数 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 3, 则 $a =$ ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$
5. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$
(C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$
6. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 ()
(A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $M \supseteq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
7. 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 那么 $k =$ ()
(A) -1 (B) 1 (C) $\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{5}$
8. 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是 ()
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$
9. 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则有 ()
(A) $\log_a(xy) < 0$ (B) $0 < \log_a(xy) < 1$
(C) $1 < \log_a(xy) < 2$ (D) $\log_a(xy) > 2$
10. 函数 $y = x^2 + bx + c$, $x \in [0, +\infty)$ 是单调函数的充要条件是 ()
(A) $b \geq 0$ (B) $b \leq 0$ (C) $b > 0$ (D) $b < 0$
11. 设 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 则二次曲线 $x^2 \cot \theta - y^2 \tan \theta = 1$ 的离心率的取值范围为 ()
(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ (D) $(\sqrt{2}, +\infty)$

12. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 ()
(A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种

二、填空题

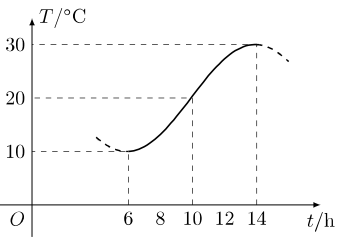
13. 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, 1985 年到 2000 年间, 我国农村人均居住面积如图所示, 其中, 从_____年_____年的五年间增长最快.



14. 函数 $y = \frac{2x}{1+x}$, $x \in (-1, +\infty)$ 图象与其反函数图象的交点为_____.
15. $(x^2+1)(x-2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是_____.
16. 对于顶点在原点的抛物线, 给出下列条件:
① 焦点在 y 轴上;
② 焦点在 x 轴上;
③ 抛物线上横坐标为 1 的点到焦点的距离等于 6;
④ 抛物线的通径的长为 5;
⑤ 由原点向过焦点的某条直线作垂线, 垂足坐标为 $(2, 1)$.
能使这抛物线方程为 $y^2 = 10x$ 的条件是_____. (要求填写合适条件的序号)

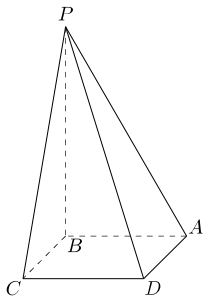
三、解答题

17. 如图, 某地一天从 6 时至 14 时的温度变化曲线近似满足函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$.
(1) 求这段时间的最大温差;
(2) 写出这段时间的函数解析式.



18. 甲、乙物体分别从相距 70 米的两处同时相向运动. 甲第 1 分钟走 2 米, 以后每分钟比前 1 分钟多走 1 米, 乙每分钟走 5 米.
(1) 甲、乙开始运动后几分钟相遇?
(2) 如果甲、乙到达对方起点后立即折返, 甲继续每分钟比前 1 分钟多走 1 米, 乙继续每分钟走 5 米, 那么开始运动几分钟后第二相遇?

19. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形, $PB \perp$ 平面 $ABCD$.
(1) 若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 60° , 求这个四棱锥的体积;
(2) 证明无论四棱锥的高怎样变化, 面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 90° .



20. 设函数 $f(x) = x^2 + |x - 2| - 1, x \in \mathbf{R}$.
- (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

21. 已知点 P 到两定点 $M(-1, 0)$ 、 $N(1, 0)$ 距离的比为 $\sqrt{2}$, 点 N 到直线 PM 的距离为 1, 求直线 PN 的方程.

22. (1) 给出两块相同的正三角形纸片 (如图 1, 图 2), 要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型, 另一块剪拼成一个正三棱柱模型, 使它们的全面积都与原三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 分别用虚线标示在图 1、图 2 中, 并作简要说明;
- (2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;
- (3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片 (如图 3), 要求剪拼成一个直三棱柱, 使它的全面积与给出的三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法, 用虚线标示在图 3 中, 并作简要说明.

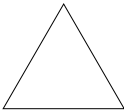


图 1

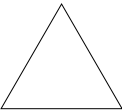


图 2

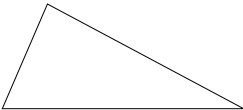


图 3

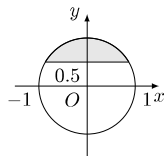
2002 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 若 $z \in \mathbf{C}$, $(3+z)\mathbf{i} = 1$ (\mathbf{i} 为虚数单位), 则 $z =$ _____.
2. 已知向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角为 120° , 且 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ _____.
3. 方程 $\log_3(1 - 2 \times 3^x) = 2x + 1$ 的解 $x =$ _____.
4. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$ cm, 体积为 4 cm^3 , 则它的侧面与底面所成的二面角的大小是_____.
5. 在二项式 $(1+3x)^n$ 和 $(2x+5)^n$ 的展开式中, 各项系数之和分别记为 a_n 、 b_n , n 是正整数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2b_n}{3a_n - 4b_n} =$ _____.
6. 已知圆 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 和圆外一点 $P(0, 2)$, 过点 P 作圆的切线, 则两条切线夹角的正切值是_____.
7. 在某次花样滑冰比赛中, 发生裁判受贿事件, 竞赛委员会决定将裁判由原来的 9 名增至 14 名, 但只任取其中 7 名裁判的评分作为有效分, 若 14 名裁判中有 2 人受贿, 则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是_____. (结果用数值表示)
8. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = 2t + 1, \end{cases}$ (t 为参数) 的焦点坐标是_____.
9. 若 A 、 B 两点的极坐标 $A(4, \frac{\pi}{3})$ 、 $B(6, 0)$, 则 AB 中点的极坐标是_____.
10. 设函数 $f(x) = \sin 2x$, 若 $f(x+t)$ 是偶函数, 则 t 的一个可能值是_____.
11. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且 $a_{n+1} = a_n^2$ (n 是正整数), 则数列的通项 $a_n =$ _____.
12. 已知函数 $y = f(x)$ (定义域为 D , 值域为 A) 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 有解 $x = a$, 且 $f(x) > x$ ($x \in D$) 的充要条件是 $y = f^{-1}(x)$ 满足_____.

二、选择题

13. 如图, 与复平面中的阴影部分 (含边界) 对应的复数集合是 ()



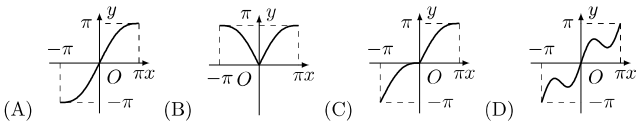
- (A) $\left\{z \mid |z| = 1, \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{6}, z \in \mathbf{C}\right\}$
- (B) $\left\{z \mid |z| \leq 1, \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{6}, z \in \mathbf{C}\right\}$

- (C) $\left\{z \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C}\right\}$
- (D) $\left\{z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C}\right\}$

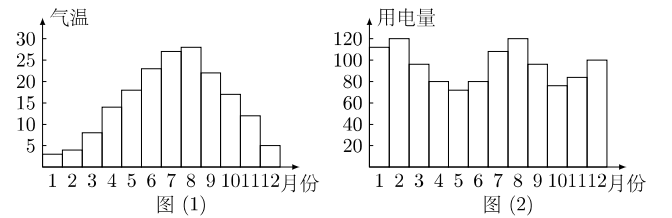
14. 已知直线 l 、 m , 平面 α 、 β , 且 $l \perp \alpha$, $m \subset \beta$, 给出下列四个命题.
① 若 $\alpha \parallel \beta$, $l \perp m$; ② $l \perp m$, $\alpha \parallel \beta$; ③ 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \parallel m$; ④ 若 $l \parallel m$, $\alpha \perp \beta$.
其中正确命题的个数是 ()

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

15. 函数 $y = x + \sin |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ 的大致图象是 ()



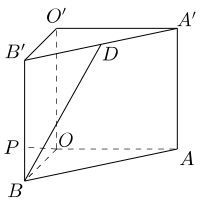
16. 一般地, 家庭用电量 (千瓦时) 与气温 ($^\circ\text{C}$) 有一定的关系. 图 (1) 表示某年 12 个月中每月的平均气温, 图 (2) 表示某家庭在这年 12 个月中每月的用电量, 根据这些信息, 以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中, 正确的是 ()



- (A) 气温最高时, 用电量最多
- (B) 气温最低时, 用电量最少
- (C) 当气温大于某一值时, 用电量随气温增高而增加
- (D) 当气温小于某一值时, 用电量随气温降低而增加

三、解答题

17. 如图, 在直三棱柱 $ABO - A'B'O'$ 中, $OO' = 4$, $OA = 4$, $OB = 3$, $\angle AOB = 90^\circ$, D 是线段 $A'B'$ 的中点, P 是侧棱 BB' 上的一点, 若 $OP \perp BD$, 求 OP 与底面 AOB 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知点 $A(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $B(\sqrt{3}, 0)$, 动点 C 到 A 、 B 两点的距离之差的绝对值为 2, 点 C 的轨迹与直线 $y = x - 2$ 交于 D 、 E 两点, 求线段 DE 的长.

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x \cdot \tan \theta - 1$, $x \in [-1, \sqrt{3}]$, 其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(1) 当 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的最大值与最小值.
(2) 求实数 θ 的取值范围, 使 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, \sqrt{3}]$ 上是单调函数.

20. 某商场在促销期间规定: 商场内所有商品按标价的 80% 出售, 同时, 当顾客在该商场内消费满一定金额后, 按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额的范围	[200, 400)	[400, 500)	[500, 700)	[700, 900)	...
获得奖券的金额	30	60	100	130	...

根据上述促销方法, 顾客在该商场购物可以获得双重优惠, 例如, 购买标价为 400 元的商品, 则消费金额为 320 元, 获得的优惠额为: $400 \times 0.2 + 30 = 110$ (元), 设购买商品得到的优惠率 = $\frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$. 试问:

- (1) 若购买一件标价为 1000 元的商品, 顾客得到的优惠率是多少?
- (2) 对于标价在 [500, 800] (元) 内的商品, 顾客购买标价为多少元的商品, 可得到不小于 $\frac{1}{3}$ 的优惠率?

21. 已知函数 $f(x) = a \times b^x$ 的图象过点 $A\left(4, \frac{1}{4}\right)$ 和 $B(5, 1)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 记 $a_n = \log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 解关于 n 的不等式 $a_n S_n \leq 0$;
- (3) 对于 (2) 中的 a_n 与 S_n , 整数 10^4 是否为数列 $\{a_n S_n\}$ 中的项? 若是, 则求出相应的项数; 若不是, 则说明理由.

22. 规定 $C_x^m = \frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, m 是正整数, 且 $C_x^0 = 1$, 这是组合数 C_n^m (n, m 是正整数, 且 $m \leq n$) 的一种推广.

- (1) 求 C_{-15}^5 的值.
- (2) 组合数的两个性质: ① $C_n^m = C_n^{n-m}$; ② $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ 是否都能推广到 C_x^m ($x \in \mathbf{R}$, m 是正整数) 的情形? 若能推广, 则写出推广的形式并给出证明; 若不能, 则说明理由;
- (3) 已知组合数 C_n^m 是正整数, 证明: 当 $x \in \mathbf{Z}$, m 是正整数时, $C_x^m \in \mathbf{Z}$.

2002 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

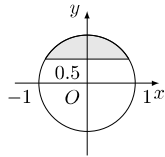
1. 若 $z \in \mathbf{C}$, $(3+z)\mathbf{i} = 1$ (\mathbf{i} 为虚数单位), 则 $z =$ _____.
2. 已知向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角为 120° , 且 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ _____.
3. 方程 $\log_3(1 - 2 \times 3^x) = 2x + 1$ 的解 $x =$ _____.
4. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$ cm, 体积为 4 cm^3 , 则它的侧面与底面所成的二面角的大小是_____.
5. 在二项式 $(1+3x)^n$ 和 $(2x+5)^n$ 的展开式中, 各项系数之和分别记为 a_n 、 b_n , n 是正整数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2b_n}{3a_n - 4b_n} =$ _____.
6. 已知圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 和圆外一点 $P(-2, 0)$, 过点 P 作圆的切线, 则两条切线夹角的正切值是_____.
7. 在某次花样滑冰比赛中, 发生裁判受贿事件, 竞赛委员会决定将裁判由原来的 9 名增至 14 名, 但只任取其中 7 名裁判的评分作为有效分, 若 14 名裁判中有 2 人受贿, 则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是_____. (结果用数值表示)
8. 抛物线 $(y-1)^2 = 4(x-1)$ 的焦点坐标是_____.
9. 某工程由下列工序组成, 则工程总时数为_____天.

工序	a	b	c	d	e	f
紧前工序	—	—	a, b	c	c	d, e
工时数 (天)	2	3	2	5	4	1

10. 设函数 $f(x) = \sin 2x$, 若 $f(x+t)$ 是偶函数, 则 t 的一个可能值是_____.
11. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且 $a_{n+1} = a_n^2$ (n 是正整数), 则数列的通项 $a_n =$ _____.
12. 已知函数 $y = f(x)$ (定义域为 D , 值域为 A) 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 有解 $x = a$, 且 $f(x) > x$ ($x \in D$) 的充要条件是 $y = f^{-1}(x)$ 满足_____.

二、选择题

13. 如图, 与复平面中的阴影部分 (含边界) 对应的复数集合是 ()

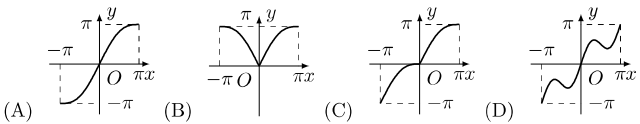


- (A) $\left\{z \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C}\right\}$ (B) $\left\{z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C}\right\}$
- (C) $\left\{z \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C}\right\}$ (D) $\left\{z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C}\right\}$

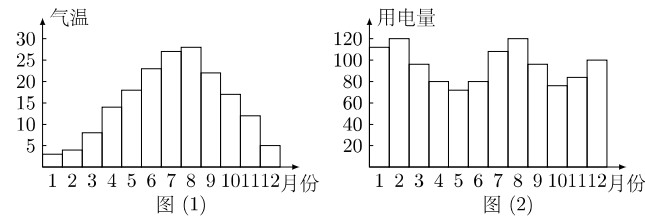
14. 已知直线 l, m , 平面 α, β , 且 $l \perp \alpha, m \subset \beta$, 给出下列四个命题.
① 若 $\alpha \parallel \beta, l \perp m$; ② $l \perp m, \alpha \parallel \beta$; ③ 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \parallel m$; ④ 若 $l \parallel m$, $\alpha \perp \beta$.
其中正确命题的个数是 ()

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

15. 函数 $y = x + \sin |x|, x \in [-\pi, \pi]$ 的大致图象是 ()



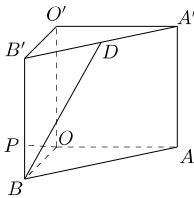
16. 一般地, 家庭用电量 (千瓦时) 与气温 ($^\circ\text{C}$) 有一定的关系. 图 (1) 表示某年 12 个月中每月的平均气温, 图 (2) 表示某家庭在这年 12 个月中每月的用电量, 根据这些信息, 以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中, 正确的是 ()



- (A) 气温最高时, 用电量最多
(B) 气温最低时, 用电量最少
(C) 当气温大于某一值时, 用电量随气温增高而增加
(D) 当气温小于某一值时, 用电量随气温降低而增加

三、解答题

17. 如图, 在直三棱柱 $ABO - A'B'O'$ 中, $OO' = 4, OA = 4, OB = 3, \angle AOB = 90^\circ$, D 是线段 $A'B'$ 的中点, P 是侧棱 BB' 上的一点, 若 $OP \perp BD$, 求 OP 与底面 AOB 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知点 $A(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $B(\sqrt{3}, 0)$, 动点 C 到 A, B 两点的距离之差的绝对值为 2, 点 C 的轨迹与直线 $y = x - 2$ 交于 D, E 两点, 求线段 DE 的长.

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 2, x \in [-5, 5]$.
(1) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值与最小值.
(2) 求实数 a 的取值范围, 使 $y = f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调函数.

20. 某商场在促销期间规定: 商场内所有商品按标价的 80% 出售, 同时, 当顾客在该商场内消费满一定金额后, 按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额的范围	[200, 400)	[400, 500)	[500, 700)	[700, 900)	...
获得奖券的金额	30	60	100	130	...

根据上述促销方法, 顾客在该商场购物可以获得双重优惠, 例如, 购买标价为 400 元的商品, 则消费金额为 320 元, 获得的优惠额为: $400 \times 0.2 + 30 = 110$ (元), 设购买商品得到的优惠率 = $\frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$. 试问:

- (1) 若购买一件标价为 1000 元的商品, 顾客得到的优惠率是多少?
- (2) 对于标价在 [500, 800] (元) 内的商品, 顾客购买标价为多少元的商品, 可得到不小于 $\frac{1}{3}$ 的优惠率?

21. 已知函数 $f(x) = a \times b^x$ 的图象过点 $A\left(4, \frac{1}{4}\right)$ 和 $B(5, 1)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 记 $a_n = \log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 解关于 n 的不等式 $a_n S_n \leq 0$;
- (3) 对于 (2) 中的 a_n 与 S_n , 整数 96 是否为数列 $\{a_n S_n\}$ 中的项? 若是, 则求出相应的项数; 若不是, 则说明理由.

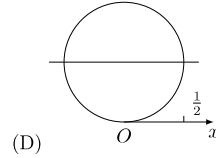
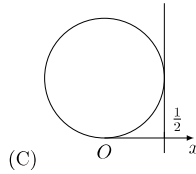
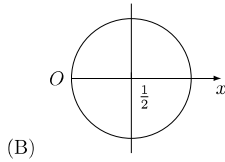
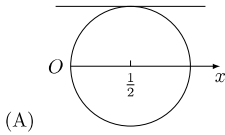
22. 规定 $C_x^m = \frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, m 是正整数, 且 $C_x^0 = 1$, 这是组合数 C_n^m (n, m 是正整数, 且 $m \leq n$) 的一种推广.

- (1) 求 C_{-15}^3 的值.
- (2) 设 $x > 0$, 当 x 为何值时, $\frac{C_x^3}{(C_x^1)^2}$ 取得最小值?
- (3) 组合数的两个性质: ① $C_n^m = C_n^{n-m}$; ② $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ 是否都能推广到 C_x^m ($x \in \mathbf{R}$, m 是正整数) 的情形? 若能推广, 则写出推广的形式并给出证明; 若不能, 则说明理由.

2002 普通高等学校招生考试 (苏豫粤)

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$ 的最小正周期是 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π
2. 圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心到直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$
3. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是 ()
(A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (D) $\{x \mid x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
4. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$
(C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$
5. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 ()
(A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $M \supseteq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
6. 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是 ()
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$
7. 函数 $f(x) = x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是 ()
(A) $ab=0$ (B) $a+b=0$ (C) $a=b$ (D) $a^2+b^2=0$
8. 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则有 ()
(A) $\log_a(xy) < 0$ (B) $0 < \log_a(xy) < 1$
(C) $1 < \log_a(xy) < 2$ (D) $\log_a(xy) > 2$
9. 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ ()
(A) 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递增 (B) 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递减
(C) 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增 (D) 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减
10. 极坐标方程 $\rho = \cos \theta$ 与 $\rho \cos \theta = \frac{1}{2}$ 的图形是 ()



11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 ()
(A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种
12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》: “2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上年增长 7.3%”, 如果“十·五”期间 (2001 年 - 2005 年) 每年的国内生产总值都按此年增长率增长, 那么到“十·五”末我国国内年生产总值约为 ()
(A) 115000 亿元 (B) 120000 亿元 (C) 127000 亿元 (D) 135000 亿元

二、填空题

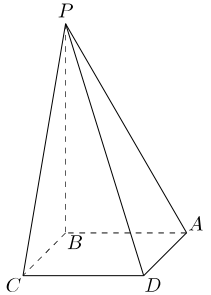
13. 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 那么 $k =$ _____.
14. $(x^2 + 1)(x - 2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是_____.
15. 已知 $\sin \alpha = \cos 2\alpha$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\tan \alpha =$ _____.
16. 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{1}{4}\right) =$ _____.

三、解答题

17. 已知复数 $z = 1 + i$, 求实数 a, b 使 $az + 2b\bar{z} = (a + 2z)^2$.

18. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 + a_4 = b_3$, $b_2 b_4 = a_3$, 分别求出 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的前 10 项的和 S_{10} 及 T_{10} .

19. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形, $PB \perp$ 平面 $ABCD$.
(1) 若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 60° , 求这个四棱锥的体积;
(2) 证明无论四棱锥的高怎样变化, 面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 90° .



20. 设 A, B 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 上的两点, 点 $N(1, 2)$ 是线段 AB 的中点.
- (1) 求直线 AB 的方程;
 - (2) 如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C, D 两点, 那么 A, B, C, D 四点是否共圆? 为什么?

21. (1) 给出两块相同的正三角形纸片 (如图 1, 图 2), 要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型, 另一块剪拼成一个正三棱柱模型, 使它们的全面积都与原三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 分别用虚线标示在图 1、图 2 中, 并作简要说明;
- (2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;
- (3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片 (如图 3), 要求剪拼成一个直三棱柱, 使它的全面积与给出的三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法, 用虚线标示在图 3 中, 并作简要说明.

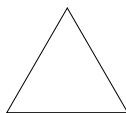


图 1

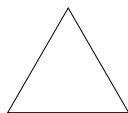


图 2

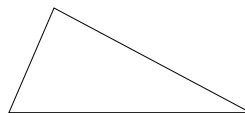


图 3

22. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - bx^2$.
- (1) 当 $b > 0$ 时, 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \leq 1$, 证明: $a \leq 2\sqrt{b}$;
 - (2) 当 $b > 1$ 时, 证明: 对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件是 $b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$;
 - (3) 当 $0 < b \leq 1$ 时, 讨论: 对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件.

2002 普通高等学校招生考试 (新课标理)

一、选择题

1. 曲线 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数) 上的点到两坐标轴的距离之和的最大值是 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$
2. 复数 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ 的值是 ()
(A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1
3. 已知 m, n 为异面直线, $m \subset$ 平面 α , $n \subset$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = l$, 则 l ()
(A) 与 m, n 都相交 (B) 与 m, n 中至少一条相交
(C) 与 m, n 都不相交 (D) 至多与 m, n 中的一条相交
4. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是 ()
(A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (D) $\{x \mid x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
5. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$
(C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$
6. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 ()
(A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $M \supseteq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
7. 正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 则这个棱柱侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是 ()
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°
8. 函数 $y = x^2 + bx + c$, $x \in [0, +\infty)$ 是单调函数的充要条件是 ()
(A) $b \geq 0$ (B) $b \leq 0$ (C) $b > 0$ (D) $b < 0$
9. 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则有 ()
(A) $\log_a(xy) < 0$ (B) $0 < \log_a(xy) < 1$
(C) $1 < \log_a(xy) < 2$ (D) $\log_a(xy) > 2$
10. 平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知两点 $A(3, 1)$ 、 $B(-1, 3)$, 若点 C 满足 $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha + \beta = 1$, 则点 C 的轨迹方程为 ()
(A) $3x + 2y - 11 = 0$ (B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$
(C) $2x - y = 0$ (D) $x + 2y - 5 = 0$

11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 ()
(A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种
12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》: “2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上年增长 7.3%”, 如果“十·五”期间 (2001 年 - 2005 年) 每年的国内生产总值都按此年增长率增长, 那么到“十·五”末我国国内年生产总值约为 ()
(A) 115000 亿元 (B) 120000 亿元 (C) 127000 亿元 (D) 135000 亿元

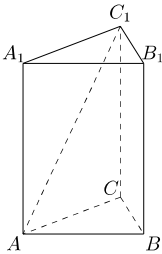
二、填空题

13. 函数 $y = \frac{2x}{1+x}$, $x \in (-1, +\infty)$ 图象与其反函数图象的交点为_____.
14. 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 那么 $k =$ _____.
15. 直线 $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ 与曲线 $y = (\sqrt{2})^x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积等于_____.
16. 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{1}{4}\right) =$ _____.

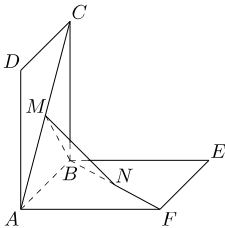
三、解答题

17. 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$, 求 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 【甲】如图, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a , 侧棱长为 $\sqrt{2}a$.
(1) 建立适当的坐标系, 并写出点 A, B, A_1, C_1 的坐标;
(2) 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.



- 【乙】如图, 正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ 的边长都是 1, 而且平面 $ABCD$ 、 $ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动, 点 N 在 BF 上移动, 若 $CM = BN = a$ ($0 < a < \sqrt{2}$).
- (1) 求 MN 的长;
(2) a 为何值时, MN 的长最小;
(3) 当 MN 的长最小时, 求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.



19. 某单位 6 个员工借助互联网开展工作, 每个员工上网的概率都是 0.5 (相互独立).
- (1) 求至少 3 人同时上网的概率;
(2) 至少几人同时上网的概率小于 0.3?

20. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{1-ax}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. 设 $0 < x_1 < \frac{2}{a}$, 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l .
- (1) 求 l 的方程;
- (2) 设 l 与 x 轴交点为 $(x_2, 0)$. 证明:
- ① $0 < x_2 \leq \frac{1}{a}$;
- ② 若 $x_1 < \frac{1}{a}$, 则 $x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$.
21. 已知两点 $M(-1, 0), N(1, 0)$, 且点 P 使 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列.
- (1) 点 P 的轨迹是什么曲线?
- (2) 若点 P 坐标为 (x_0, y_0) , 记 θ 为 \overrightarrow{PM} 与 \overrightarrow{PN} 的夹角, 求 $\tan \theta$.
22. 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列, 满足 $a_1 = 0, a_2 = 3, a_{n+1}a_n = (a_{n-1} + 2)(a_{n-2} + 2), n = 3, 4, 5, \dots$.
- (1) 求 a_3 ;
- (2) 证明 $a_n = a_{n-2} + 2, n = 3, 4, 5, \dots$;
- (3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 S_n .

2002 普通高等学校招生考试 (新课标文)

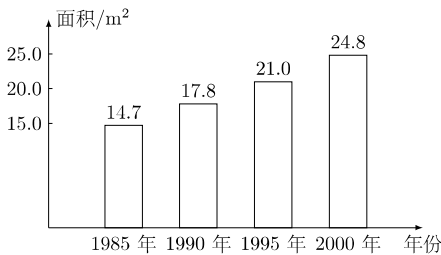
一、选择题

1. 直线 $(1+a)x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切, 则 a 的值为 ()
(A) ± 1 (B) ± 2 (C) 1 (D) -1
2. 已知 m, n 为异面直线, $m \subset$ 平面 α , $n \subset$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = l$, 则 l ()
(A) 与 m, n 都相交 (B) 与 m, n 中至少一条相交
(C) 与 m, n 都不相交 (D) 至多与 m, n 中的一条相交
3. 函数 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 3, 则 $a =$ ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$
4. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是 ()
(A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ (D) $\{x \mid x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
5. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$
(C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$
6. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 ()
(A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $M \supseteq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
7. 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 那么 $k =$ ()
(A) -1 (B) 1 (C) $\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{5}$
8. 正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 则这个棱柱侧面面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是 ()
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°
9. 函数 $y = x^2 + bx + c$, $x \in [0, +\infty)$ 是单调函数的充要条件是 ()
(A) $b \geq 0$ (B) $b \leq 0$ (C) $b > 0$ (D) $b < 0$
10. 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则有 ()
(A) $\log_a(xy) < 0$ (B) $0 < \log_a(xy) < 1$
(C) $1 < \log_a(xy) < 2$ (D) $\log_a(xy) > 2$
11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 ()
(A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种

12. 平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知两点 $A(3, 1)$ 、 $B(-1, 3)$, 若点 C 满足 $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha + \beta = 1$, 则点 C 的轨迹方程为 ()
(A) $3x + 2y - 11 = 0$ (B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$
(C) $2x - y = 0$ (D) $x + 2y - 5 = 0$

二、填空题

13. 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, 1985 年到 2000 年间, 我国农村人均居住面积如图所示, 其中, 从_____年_____年的五年间增长最快.



14. 已知 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\cot \alpha =$ _____.
15. 甲、乙两种冬小麦试验品种连续 5 年的平均单位面积产量如下 (单位: t/km²):

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

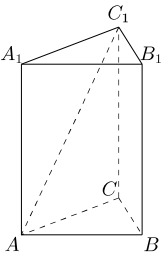
- 其中产量比较稳定的小麦品种是_____.
16. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 下列函数
① $y = -|f(x)|$; ② $y = xf(x^2)$; ③ $y = -f(-x)$; ④ $y = f(x) - f(-x)$.
其中必为奇函数的有_____. (要求填写正确答案的序号)

三、解答题

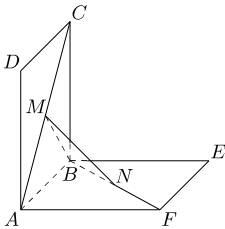
17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_6 - a_4 = 24$, $a_3 a_5 = 64$, 求 $\{a_n\}$ 前 8 项的和 S_8 .

18. 已知 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\sin \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 的值.

19. 【甲】如图, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a , 侧棱长为 $\sqrt{2}a$.
(1) 建立适当的坐标系, 并写出点 A, B, A_1, C_1 的坐标;
(2) 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.



- 【乙】如图, 正方形 $ABCD, ABEF$ 的边长都是 1, 而且平面 $ABCD, ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动, 点 N 在 BF 上移动, 若 $CM = BN = a$ ($0 < a < \sqrt{2}$).
(1) 求 MN 的长;
(2) a 为何值时, MN 的长最小;
(3) 当 MN 的长最小时, 求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.



20. 某单位 6 个员工借助互联网开展工作, 每个员工上网的概率都是 0.5 (相互独立).
(1) 求至少 3 人同时上网的概率;
(2) 至少几人同时上网的概率小于 0.3?
21. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x^3 - a, x \in (0, +\infty)$. 设 $x_1 > 0$, 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l .
(1) 求 l 的方程;
(2) 设 l 与 x 轴交点为 $(x_2, 0)$. 证明:
① $x_2 \geq a^{\frac{1}{3}}$;
② 若 $x_2 > a^{\frac{1}{3}}$, 则 $a^{\frac{1}{3}} < x_2 < x_1$.
22. 已知两点 $M(-1, 0), N(1, 0)$, 且点 P 使 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列.
(1) 点 P 的轨迹是什么曲线?
(2) 若点 P 坐标为 (x_0, y_0) , 记 θ 为 \overrightarrow{PM} 与 \overrightarrow{PN} 的夹角, 求 $\tan \theta$.