

1983 普通高等学校招生考试 (全国卷理)

1. 两条异面直线, 指的是 ( )

- (A) 在空间内不相交的两条直线
- (B) 分别位于两个不同平面内的两条直线
- (C) 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线
- (D) 不在同一平面内的两条直线

2. 方程  $x^2 - y^2 = 0$  表示的图形是 ( )

- (A) 两条相交直线
- (B) 两条平行直线
- (C) 两条重合直线
- (D) 一个点

3. 三个数  $a, b, c$  不全为零的充要条件是 ( )

- (A)  $a, b, c$  都不是零
- (B)  $a, b, c$  中最多有一个是零
- (C)  $a, b, c$  中只有一个是
- (D)  $a, b, c$  中至少有一个不是零

4. 设  $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ , 则  $\arccos(\cos \alpha)$  的值是 ( )

- (A)  $\frac{4\pi}{3}$
- (B)  $-\frac{2\pi}{3}$
- (C)  $\frac{2\pi}{3}$
- (D)  $\frac{\pi}{3}$

5.  $0.3^2, \log_2 0.3, 2^{0.3}$  这三个数之间的大小顺序是 ( )

- (A)  $0.3^2 < 2^{0.3} < \log_2 0.3$
- (B)  $0.3^2 < \log_2 0.3 < 2^{0.3}$
- (C)  $\log_2 0.3 < 0.3^2 < 2^{0.3}$
- (D)  $\log_2 0.3 < 2^{0.3} < 0.3^2$

6. (1) 在同一平面直角坐标系内, 分别画出两个方程  $y = -\sqrt{x}, x = \sqrt{-y}$  的图形, 并写出它们交点的坐标.

(2) 在极坐标系内, 方程  $\rho = 5 \cos \theta$  表示什么曲线? 画出它的图形.

7. (1) 已知  $y = e^{-x} \sin 2x$ , 求微分  $dy$ .

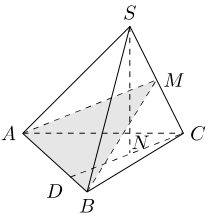
(2) 一个小组共有 10 名同学, 其中 4 名是女同学, 6 名是男同学. 要从小组内选出 3 名代表, 其中至少有 1 名女同学, 求一共有多少种选法.

8. 计算行列式 (要求结果最简): 
$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos(\alpha + \varphi) & \cos \alpha \\ \cos \beta & \sin(\beta - \varphi) & \sin \beta \\ \sin \varphi & \cos 2\varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

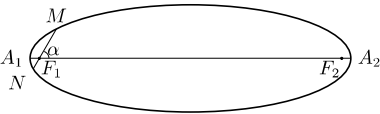
9. (1) 证明: 对于任意实数  $t$ , 复数  $z = \sqrt{|\cos t|} + \sqrt{|\sin t|}i$  的模  $r = |z|$  适合  $r \leq \sqrt[3]{2}$ .

(2) 当实数  $t$  取什么值时, 复数  $z = \sqrt{|\cos t|} + \sqrt{|\sin t|}i$  的幅角主值  $\theta$  适合  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ?

10. 如图, 在三棱锥  $S-ABC$  中,  $S$  在底面上的射影  $N$  位于底面的高  $CD$  上;  $M$  是侧棱  $SC$  上的一点, 使截面  $MAB$  与底面所成的角等于  $\angle NSC$ , 求证:  $SC$  垂直于截面  $MAB$ .



11. 如图, 已知椭圆长轴  $|A_1A_2| = 6$ , 焦距  $|F_1F_2| = 4\sqrt{2}$ , 过椭圆焦点  $F_1$  作一直线, 交椭圆于两点  $M, N$ . 设  $\angle F_2F_1M = \alpha$  ( $0 \leq \alpha < \pi$ ), 当  $\alpha$  取什么值时,  $|MN|$  等于椭圆短轴的长?



12. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = b$  ( $b \neq 0$ ), 它的前  $n$  项的和  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ( $n \geq 1$ ), 并且  $S_1, S_2, S_3, \dots$  是一个等比数列, 其公比为  $p$  ( $p \neq 0$  且  $|p| < 1$ ).

- (1) 证明:  $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  (即  $\{a_n\}$  从第二项起) 是一个等比数列;
- (2) 设  $W_n = a_1S_1 + a_2S_2 + a_3S_3 + \dots + a_nS_n$  ( $n \geq 1$ ), 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$  (用  $b, p$  表示).

13. (1) 已知  $a, b$  为实数, 并且  $e < a < b$ , 其中  $e$  是自然对数的底数, 证明:  $a^b > b^a$ ;

(2) 如果正实数  $a, b$  满足  $a^b = b^a$ , 且  $a < 1$ , 证明:  $a = b$ .

1983 普通高等学校招生考试 (全国卷文)

1. 在直角坐标系内, 函数  $y = |x|$  的图象 ( )

- (A) 关于坐标轴、原点都不对称 (B) 关于原点对称  
(C) 关于  $x$  轴对称 (D) 关于  $y$  轴对称

2. 抛物线  $x^2 + y = 0$  的焦点位于 ( )

- (A)  $y$  轴的负半轴上 (B)  $y$  轴的正半轴上  
(C)  $x$  轴的负半轴上 (D)  $x$  轴的正半轴上

3. 两条异面直线, 指的是 ( )

- (A) 在空间内不相交的两条直线  
(B) 分别位于两个不同平面内的两条直线  
(C) 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线  
(D) 不在同一平面内的两条直线

4. 对任何  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$  的值等于 ( )

- (A)  $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$  (B)  $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$   
(C)  $-\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$  (D)  $-\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$

5.  $0.3^2$ ,  $\log_2 0.3$ ,  $2^{0.3}$  这三个数之间的大小顺序是 ( )

- (A)  $0.3^2 < 2^{0.3} < \log_2 0.3$  (B)  $0.3^2 < \log_2 0.3 < 2^{0.3}$   
(C)  $\log_2 0.3 < 0.3^2 < 2^{0.3}$  (D)  $\log_2 0.3 < 2^{0.3} < 0.3^2$

6. 在平面直角坐标系内, 表中的方程表示什么图形? 画出这些图形.

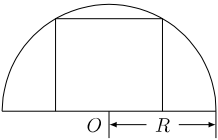
方程	$x^2 + y^2 = 2x$	$x^2 - y^2 = 0$
图形名称		
图形		

7. (1) 求函数  $y = \sqrt{x+5} \log_2(36-x^2)$  的定义域.

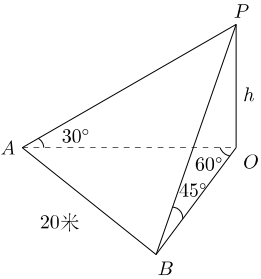
(2) 一个小组共有 10 名同学, 其中 4 名是女同学, 6 名是男同学. 要从小组内选出 3 名代表, 其中至少有 1 名女同学, 求一共有多少种选法.

8. 已知复数  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , 求证:  $z^3 + \frac{1}{z^3} = 2 \cos 3\alpha$ .

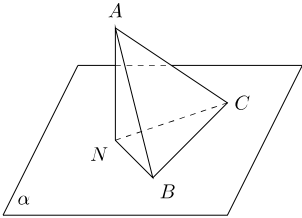
9. 在圆心为  $O$ 、半径为常数  $R$  的半圆板内画内接矩形 (如图), 当矩形的长和宽各取多少时, 矩形的面积最大? 求出这个最大面积.



10. 如图, 地平面上有一旗杆  $OP$ , 为了测得它的高度  $h$ , 在地面上选一基线  $AB$ ,  $AB = 20$  米, 在  $A$  点处测得  $P$  点的仰角  $\angle OAP = 30^\circ$ , 在  $B$  点处测得  $P$  点的仰角  $\angle OBP = 45^\circ$ , 又测得  $\angle AOB = 60^\circ$ , 求旗杆的高度  $h$  (结果可以保留根号).



11. 如图, 已知一块直角三角形板  $ABC$  的  $BC$  边在平面  $\alpha$  内,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $BC = 24$  cm,  $A$  点在平面  $\alpha$  内的射影为  $N$ ,  $AN = 9$  cm. 求以  $A$  为顶点的三棱锥  $A - NBC$  的体积 (结果可以保留根号).



12. 一个等比数列有三项, 如果把第二项加上 4, 那么所得的三项就成为等差数列; 如果再把这等差数列的第三项加上 32, 那么所得的三项又成等比数列, 求原来的等比数列.

13. 如图, 已知两条直线  $L_1: 2x - 3y + 2 = 0$ ,  $L_2: 3x - 2y + 3 = 0$ . 有一动圆 (圆心和半径都在变动) 与  $L_1$ ,  $L_2$  都相交, 并且  $L_1$ ,  $L_2$  被截在圆内的两条线段的长度分别是定值 26, 24. 求圆心  $M$  的轨迹方程, 并说出轨迹的名称.

