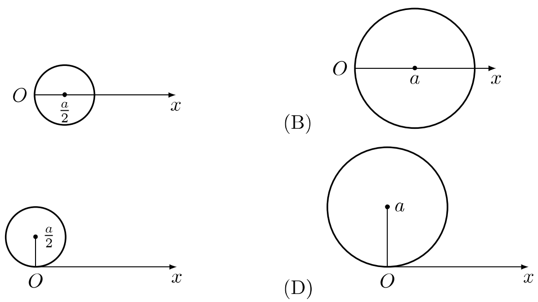
1985 普通高等学校招生考试 (全国卷理)

1. 如果正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a, 那么四面体 $A'-ABD$ 的体积是 ( )
(A) $\dfrac{a^3}{2}$ (B) $\dfrac{a^3}{3}$ (C) $\dfrac{a^3}{4}$ (D) $\dfrac{a^3}{6}$

2. $\tan x=1$ 是 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ 的 ( )
(A) 必要条件 (B) 充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要的条件

3. 在下面给出的函数中, 哪一个函数既是区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数又是以 π 为周期的偶函数 ( )
(A) $y=x^2\ (x\in\mathbf{R})$ (B) $y=|\sin x|\ (x\in\mathbf{R})$
(C) $y=\cos 2x\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}\ (x\in\mathbf{R})$

4. 极坐标方程 $\rho=a\sin\theta\ (a>0)$ 的图象是 ( )



5. 用 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字, 可以组成比 20000 大, 并且百位数不是数字 3 的没有重复数字的五位数, 共有 ( )
(A) 96 个 (B) 78 个 (C) 72 个 (D) 64 个

6. 求方程 $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ 解集.

7. 设 $|a|\leqslant 1$, 求 $\arccos a+\arccos(-a)$ 的值.

8. 求曲线 $y^2=-16x+64$ 的焦点.

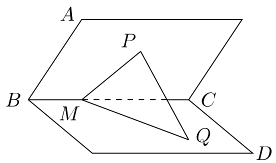
9. 设 $(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 求 $a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ 的值.

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 求函数 $f(x^2)$ 的定义域.

11. 解方程: $\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{0.25}(2x+1)$.

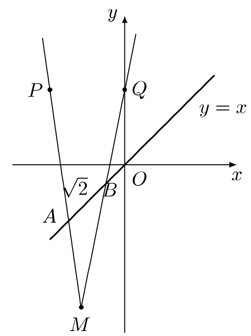
12. 解不等式: $\sqrt{2x+5}>x+1$.

13. 如图, 设平面 AC 和 BD 相交于 BC, 它们所成的一个二面角为 $45°$, P 为平面 AC 内的一点, Q 为面 BD 内的一点. 已知直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影, 并且 M 在 BC 上. 又设 PQ 与平面 BD 所成的角为 β, $\angle CMQ=\theta\ (0°<\theta<90°)$, 线段 PM 的长为 a, 求线段 PQ 的长.



14. 设 O 为复平面的原点, Z_1 和 Z_2 为复平面内的两动点, 并且满足:
(1) Z_1 和 Z_2 所对应的复数的辐角分别为定值 θ 和 $-\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$;
(2) $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为定值 S, 求 $\triangle OZ_1Z_2$ 的重心 Z 所对应的复数的模的最小值.

15. 已知两点 $P(-2,2)$, $Q(0,2)$ 以及一条直线: L: $y=x$, 设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在直线 L 上移动, 如图, 求直线 PA 和 QB 的交点 M 的轨迹方程. (要求把结果写成普通方程)



16. 设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}\ (n=1,2\cdots)$.
(1) 证明: 不等式 $\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$ 对所有的正整数 n 都成立;
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}\ (n=1,2\cdots)$, 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}$.

17. 设 a, b 是两个实数, $A=\{(x,y)\mid x=n,\ y=na+b,\ n\text{ 是整数}\}$, $B=\{(x,y)\mid x=m,\ y=3m^2+15,\ m\text{ 是整数}\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内的点集合, 讨论是否存在 a 和 b 使得
(1) $A\cap B\neq\varnothing$ ($\varnothing$ 表示空集),
(2) $(a,b)\in C$
同时成立.

18. 已知曲线 $y=x^3-6x^2+11x-6$. 在它对应于 $x\in[0,2]$ 的弧段上求一点 P, 使得曲线在该点的切线在 y 轴上的截距为最小, 并求出这个最小值.

1985 普通高等学校招生考试 (全国卷文)

1. 如果正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a, 那么四面体 $A'-ABD$ 的体积是 ( )

   (A) $\dfrac{a^3}{2}$ (B) $\dfrac{a^3}{3}$ (C) $\dfrac{a^3}{4}$ (D) $\dfrac{a^3}{6}$

2. $\tan x=1$ 是 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ 的 ( )

   (A) 必要条件 (B) 充分条件

   (C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要的条件

3. 设集合 $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 9\}$, $Z=\{3,\ 7,\ 8\}$, 那么集合 $(X\cap Y)\cup Z$ 是 ( )

   (A) $\{0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 8\}$ (B) $\{3,\ 7,\ 8\}$

   (C) $\{1,\ 3,\ 7,\ 8\}$ (D) $\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

4. 在下面给出的函数中, 哪一个函数既是区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数又是以 π 为周期的偶函数 ( )

   (A) $y=x^2\ (x\in\mathbf{R})$ (B) $y=|\sin x|\ (x\in\mathbf{R})$

   (C) $y=\cos 2x\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}\ (x\in\mathbf{R})$

5. 用 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字, 可以组成比 20000 大, 并且百位数不是数字 3 的没有重复数字的五位数, 共有 ( )

   (A) 96 个 (B) 78 个 (C) 72 个 (D) 64 个

6. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域.

7. 求圆锥曲线 $3x^2-y^2+6x+2y-1=0$ 的离心率.

8. 求函数 $y=-x^2+4x-2$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值和最小值.

9. 设 $(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 求 $a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ 的值.

10. 设 i 是虚数单位, 求 $(1+\mathrm{i})^6$ 的值.

11. 设 $S_1=1^2$, $S_2=1^2+2^2+1^2$, $S_3=1^2+2^2+3^2+2^2+1^2$, $\cdots$, $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$, $\cdots$.
    用数学归纳法证明: 公式 $S_n=\dfrac{n(2n^2+1)}{3}$ 对所有的正整数 n 都成立.

12. 证明三角恒等式: $2\sin^4x+\dfrac{3}{4}\sin^2 2x+5\cos^4x-\cos 3x\cos x=2(1+\cos^2x)$.

13. 解方程: $\lg(3-x)-\lg(3+x)=\lg(1-x)-\lg(2x+1)$.

14. 解不等式: $\sqrt{2x+5}>x+1$.

15. 已知三棱锥 $V-ABC$ 的三个侧面与底面所成的二面角都是 β, 它的高是 h. 求这个所棱锥底面的内切圆半径.

16. 已知圆 C: $x^2+y^2+4x-12y+39=0$ 和直线 L: $3x-4y+5=0$. 求圆 C 关于直线 L 的对称的圆的方程.

17. 设首项为 1, 公比为 $q\ (q>0)$ 的等比数列的前 n 项之和为 S_n. 又设 $T_n=\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$, $n=1,2,\cdots$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.