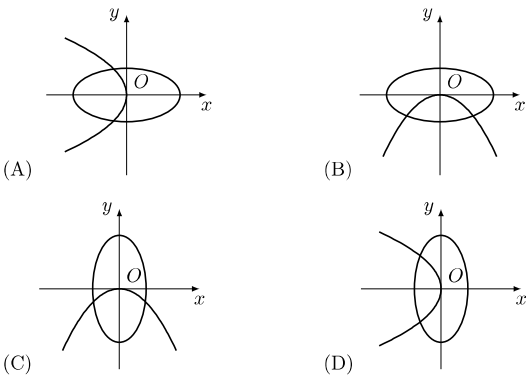


2003 普通高等学校春季招生考试 (北京卷理)

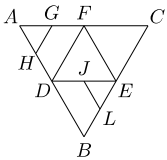
一、选择题

1. 若集合 $M = \{y \mid y = 2^{-x}\}$, $P = \{y \mid y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $M \cap P =$ ()
(A) $\{y \mid y > 1\}$ (B) $\{y \mid y \geq 1\}$ (C) $\{y \mid y > 0\}$ (D) $\{y \mid y \geq 0\}$
2. 若 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, 则方程 $f(4x) = x$ 的根是 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2
3. 设复数 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\arg \frac{z_1}{z_2} =$ ()
(A) $\frac{13}{12}\pi$ (B) $\frac{7}{12}\pi$ (C) $\frac{5}{12}\pi$ (D) $-\frac{5}{12}\pi$
4. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是 ()
(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$
5. 在同一坐标系中, 方程 $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ 与 $ax + by^2 = 0$ ($a > b > 0$) 的曲线大致是 ()



6. 若 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $A < B < C$ ($C \neq \frac{\pi}{2}$), 则下列结论中正确的是 ()
(A) $\sin A < \sin C$ (B) $\cos A < \cos C$
(C) $\tan A < \tan C$ (D) $\cot A < \cot C$
7. 椭圆 $\begin{cases} x = 4 + 5\cos\varphi, \\ y = 3\sin\varphi, \end{cases}$ (φ 为参数) 的焦点坐标为 ()
(A) $(0, 0), (0, -8)$ (B) $(0, 0), (-8, 0)$
(C) $(0, 0), (0, 8)$ (D) $(0, 0), (8, 0)$

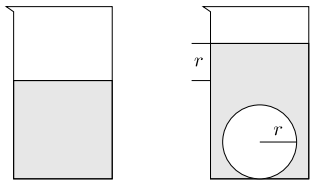
8. 如图, 在正三角形 ABC 中, D, E, F 分别为各边的中点, G, H, I, J 分别为 AF, AD, BE, DE 的中点. 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折成三棱锥以后, GH 与 IJ 所成角的度数为 ()



- (A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 0°
9. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中, 那么不同插法的种数为 ()
(A) 42 (B) 30 (C) 20 (D) 12
10. 已知直线 $ax + by + c = 0$ ($abc \neq 0$) 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则三条边长分别为 $|a|, |b|, |c|$ 的三角形 ()
(A) 是锐角三角形 (B) 是直角三角形
(C) 是钝角三角形 (D) 不存在
11. 若不等式 $|ax + 2| < 6$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则实数 a 等于 ()
(A) 8 (B) 2 (C) -4 (D) -8
12. 在直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle AOB$ 三边所在直线的方程分别为 $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 30$, 则 $\triangle AOB$ 内部和边上整点 (即横、纵坐标均为整数的点) 的总数是 ()
(A) 95 (B) 91 (C) 88 (D) 75

二、填空题

13. 如图, 一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水. 若放入一个半径为 r 的实心铁球, 水面高度恰好升高 r , 则 $\frac{R}{r} =$ _____.



14. 在某报《自测健康状况》的报道中, 自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表. 观察表中数据的特点, 用适当的数填入表中空白内.

年龄 (岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压 (水银柱/毫米)	110	115	120	125	130	135		145
舒张压 (水银柱/毫米)	70	73	75	78	80	83		88

15. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则 b^2 的值是_____.

16. 若存在常数 $p > 0$, 使得函数 $f(x)$ 满足 $f(px) = f\left(px - \frac{p}{2}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $f(x)$ 的一个正周期为_____.

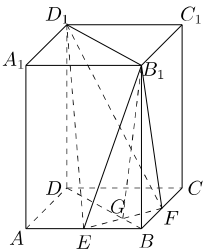
三、解答题

17. 解不等式: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) > \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 1$.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{6\cos^4x + 5\sin^2x - 4}{\cos 2x}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 判断它的奇偶性, 并求其值域.

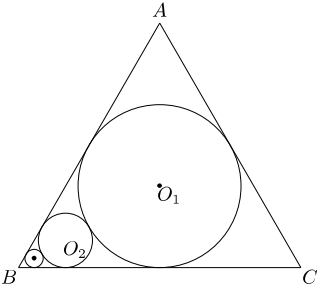
19. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为 $2\sqrt{2}$, 侧棱长为 4. E, F 分别为棱 AB, BC 的中点, $EF \cap BD = G$.

- (1) 求证: 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1B_1 ;
(2) 求点 D_1 到平面 B_1EF 的距离 d ;
(3) 求三棱锥 B_1-EFD_1 的体积 V .



20. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.
- (1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?
- (2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

21. 如图, 在边长为 l 的等边 $\triangle ABC$ 中, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, 圆 O_2 与圆 O_1 外切, 且与 AB, BC 相切, \cdots , 圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切, 且与 AB, BC 相切, 如此无限继续下去. 记圆 O_n 的面积为 a_n ($n \in \mathbf{N}$).
- (1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列;
- (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 的值.

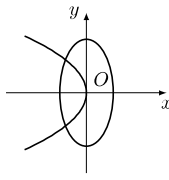
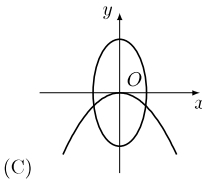
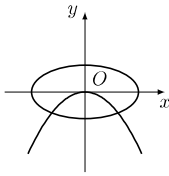
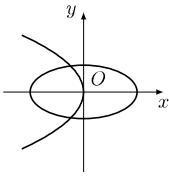


22. 已知动圆过定点 $P(1,0)$, 且与定直线 $l: x = -1$ 相切, 点 C 在 l 上.
- (1) 求动圆圆心的轨迹 M 的方程;
- (2) 设过点 P , 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与曲线 M 相交于 A, B 两点.
- ① 问: $\triangle ABC$ 能否为正三角形? 若能, 求点 C 的坐标; 若不能, 说明理由;
- ② 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, 求这种点 C 的纵坐标的取值范围.

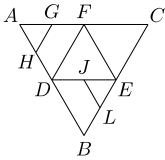
2003 普通高等学校春季招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ 且 $a > b, c > d$, 且下列结论中正确的是 ()
- (A) $a + c > b + d$ (B) $a - c > b - d$
- (C) $ac > bd$ (D) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$
2. 设 M 和 m 分别表示函数 $y = \frac{1}{3} \cos x - 1$ 的最大值和最小值, 则 $M + m$ 等于 ()
- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) -2
3. 若 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, 则方程 $f(4x) = x$ 的根是 ()
- (A) -2 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$
4. 若集合 $M = \{y \mid y = 2^{-x}\}$, $P = \{y \mid y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $M \cap P =$ ()
- (A) $\{y \mid y > 1\}$ (B) $\{y \mid y \geq 1\}$ (C) $\{y \mid y > 0\}$ (D) $\{y \mid y \geq 0\}$
5. 若 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $A < B < C$ ($C \neq \frac{\pi}{2}$), 则下列结论中正确的是 ()
- (A) $\tan A < \tan C$ (B) $\cot A < \cot C$
- (C) $\sin A < \sin C$ (D) $\cos A < \cos C$
6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$, 那么 a_3 等于 ()
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
7. 设复数 $z_1 = -1 + i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\arg \frac{z_1}{z_2} =$ ()
- (A) $-\frac{5}{12}\pi$ (B) $\frac{5}{12}\pi$ (C) $\frac{7}{12}\pi$ (D) $\frac{13}{12}\pi$
8. 函数 $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = x(2-x)$ 的递增区间依次是 ()
- (A) $(-\infty, 0], (-\infty, 1]$ (B) $(-\infty, 0], [1, +\infty)$
- (C) $[0, +\infty), (-\infty, 1]$ (D) $[0, +\infty), [1, +\infty)$
9. 在同一坐标系中, 方程 $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ 与 $ax + by^2 = 0$ ($a > b > 0$) 的曲线大致是 ()



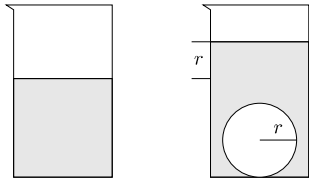
10. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中, 且两个新节目不相邻, 那么不同插法的种数为 ()
- (A) 6 (B) 12 (C) 15 (D) 30
11. 如图, 在正三角形 ABC 中, D, E, F 分别为各边的中点, G, H, I, J 分别为 AF, AD, BE, DE 的中点. 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折成三棱锥以后, GH 与 IJ 所成角的度数为 ()



- (A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 0°
12. 已知直线 $ax + by + c = 0$ ($abc \neq 0$) 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则三条边长分别为 $|a|, |b|, |c|$ 的三角形 ()
- (A) 是锐角三角形 (B) 是直角三角形
- (C) 是钝角三角形 (D) 不存在

二、填空题

13. 函数 $y = \sin 2x + 1$ 的最小正周期为_____.
14. 如图, 一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水. 若放入一个半径为 r 的实心铁球, 水面高度恰好升高 r , 则 $\frac{R}{r} =$ _____.



15. 在某报《自测健康状况》的报道中, 自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表. 观察表中数据的特点, 用适当的数填入表中空白内.

年龄 (岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压 (水银柱/毫米)	110	115	120	125	130	135		145
舒张压 (水银柱/毫米)	70	73	75	78	80	83		88

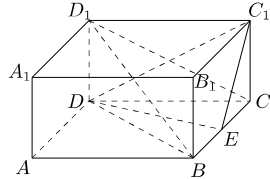
16. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则 b^2 的值是_____.

三、解答题

17. 解不等式: $\log_2(x^2 - x - 2) > \log_2(2x - 2)$.

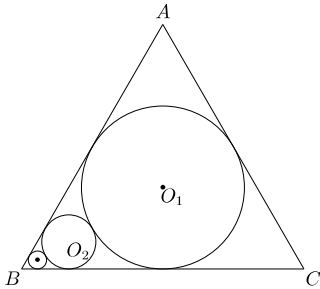
18. 已知函数 $f(x) = \frac{6\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1}{\cos 2x}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 判断它的奇偶性, 并求其值域.

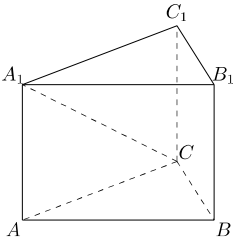
19. 如图, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱, 侧棱长为 1, 底面边长为 2, E 是棱 BC 的中点.
- (1) 求三棱锥 $D_1 - DBC$ 的体积;
- (2) 证明 $BD_1 \parallel$ 平面 C_1DE ;
- (3) 求面 C_1DE 与面 CDE 所成二面角的正切值.



20. 设 $A(-c,0), B(c,0)$ ($c > 0$) 为两定点, 动点 P 到 A 点的距离与到 B 点的距离的比为定值 a ($a > 0$), 求 P 点的轨迹.
21. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.
- (1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?
- (2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

22. 如图, 在边长为 l 的等边 $\triangle ABC$ 中, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, 圆 O_2 与圆 O_1 外切, 且与 AB, BC 相切, \cdots , 圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切, 且与 AB, BC 相切, 如此无限继续下去. 记圆 O_n 的面积为 a_n ($n \in \mathbf{N}$).
- (1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列;
- (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 的值.





2003 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + 1$, 则 $f^{-1}(3) =$ _____.
2. 直线 $y = 1$ 与直线 $y = \sqrt{3}x + 3$ 的夹角为_____.
3. 已知点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限, 则角 α 的终边在第_____象限.
4. 直线 $y = x - 1$ 被抛物线 $y^2 = 4x$ 截得线段的中点坐标是_____.
5. 已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.
6. 已知 z 为复数, 则 $z + \bar{z} > 2$ 的一个充要条件是 z 满足_____.
7. 若过两点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 2)$ 的直线 l 与圆 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$ 相切, 则 $a =$ _____.
8. 不等式 $(\lg 20)^{2 \cos x} > 1$ ($x \in (0, \pi)$) 的解为_____.
9. 8 名世界网球顶级选手在上海大师赛上分成两组, 每组各 4 人, 分别进行单循环赛, 每组决出前两名, 再由每组的第一名与另一组的第二名进行淘汰赛, 获胜者角逐冠、亚军, 败者角逐第三、四名, 则该大师赛共有_____场比赛.
10. 若正三棱锥底面边长为 4, 体积为 1, 则侧面和底面所成二面角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)
11. 若函数 $y = x^2 + (a+2)x + 3$, $x \in [a, b]$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $b =$ _____.
12. 设 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$, 利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法, 可求得 $f(-5) + f(-4) + \cdots + f(0) + \cdots + f(5) + f(6)$ 的值为_____.

二、选择题

13. 关于直线 a 、 b 、 l 以及平面 M 、 N , 下列命题中正确的是 ()
- (A) 若 $a \parallel M$, $b \parallel M$, 则 $a \parallel b$
- (B) 若 $a \parallel M$, $b \perp a$, 则 $b \perp M$
- (C) 若 $a \subset M$, $b \subset M$, 且 $l \perp a$, $l \perp b$, 则 $l \perp M$
- (D) 若 $a \perp M$, $a \parallel N$, 则 $M \perp N$
14. 复数 $z = \frac{m-2i}{1+2i}$ ($m \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位) 在复平面上对应的点不可能位于 ()
- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
15. 把曲线 $y \cos x + 2y - 1 = 0$ 先沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 再沿 y 轴向下平移一个单位, 得到的曲线方程是 ()
- (A) $(1-y) \sin x + 2y - 3 = 0$ (B) $(y-1) \sin x + 2y - 3 = 0$
- (C) $(y+1) \sin x + 2y + 1 = 0$ (D) $-(y+1) \sin x + 2y + 1 = 0$

16. 关于函数 $f(x) = (\sin x)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} + \frac{1}{2}$, 有下面四个结论:
- ① $f(x)$ 是奇函数;
- ② 当 $x > 2003$ 时, $f(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立;
- ③ $f(x)$ 的最大值是 $\frac{3}{2}$;
- ④ $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$.
- 其中正确结论的个数为 ()
- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

三、解答题

17. 解不等式组:
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ \frac{x+3}{x-1} > 2. \end{cases}$$
18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, ($A > 0$, $\omega > 0$, $x \in \mathbf{R}$) 在一个周期内的图象如图所示, 求直线 $y = \sqrt{3}$ 与函数 $f(x)$ 图象的所有交点的坐标.
-
19. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 在某个空间直角坐标系中, $\overrightarrow{AB} = \left\{ \frac{m}{2}, -\frac{\sqrt{3}m}{2}, 0 \right\}$, $\overrightarrow{AC} = \{m, 0, 0\}$, $\overrightarrow{AA_1} = \{0, 0, n\}$, 其中 $m, n > 0$.
- (1) 证明: 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是正三棱柱;
- (2) 若 $m = \sqrt{2}n$, 求直线 CA_1 与平面 A_1ABB_1 所成角的大小.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5}$, $g(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.
- (1) 证明 $f(x)$ 是奇函数, 并求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 分别计算 $f(4) - 5f(2)g(2)$ 和 $f(9) - 5f(3)g(3)$ 的值, 由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.
21. 设 F_1 、 F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的左、右两个焦点.
- (1) 若椭圆 C 上的点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 到 F_1 、 F_2 两点的距离之和等于 4, 写出椭圆 C 的方程;
- (2) 设 K 是 (1) 中所得椭圆上的动点, 求线段 F_1K 的中点的轨迹方程;
- (3) 已知椭圆具有性质: 若 M 、 N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点, 点 P 是椭圆上任意一点, 当直线 PM 、 PN 的斜率都存在, 并记为 k_{PM} 、 k_{PN} 时, 那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值. 试对双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 写出具有类似特性的性质, 并加以证明.
22. 在一次人才招聘会上, 有 A 、 B 两家公司分别开出了它们的工资标准: A 公司允诺第一个月工资为 1500 元, 以后每月工资比上一年月工资增加 230 元; B 公司允诺第一年月工资数为 2000 元, 以后每月工资在上一年的月工资基础上递增 5%, 设某人年初被 A 、 B 两家公司同时录取. 试问:
- (1) 若该人分别在 A 公司或 B 公司连续工作 n 年, 则他在第 n 年的月工资收入分别是多少?
- (2) 该人打算连续在一家公司工作 10 年, 仅从工资收入总量较多作为应聘的标准 (不记其它因素), 该人应该选择哪家公司, 为什么?
- (3) 在 A 公司工作比在 B 公司工作的月工资收入最多可以多多少元? (精确到 1 元), 并说明理由.

2003 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

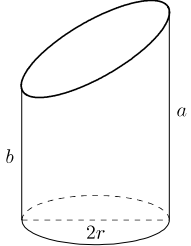
一、选择题

1. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x \mid \log_2 x > 0\}$, $A \cap B$ 等于 ()
(A) $\{x \mid x > 1\}$ (B) $\{x \mid x > 0\}$
(C) $\{x \mid x < -1\}$ (D) $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
2. 设 $y_1 = 4^{0.9}$, $y_2 = 8^{0.44}$, $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$, 则 ()
(A) $y_3 > y_1 > y_2$ (B) $y_2 > y_1 > y_3$ (C) $y_1 > y_2 > y_3$ (D) $y_1 > y_3 > y_2$
3. “ $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $\alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$ ”的 ()
(A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件
4. 已知 α, β 是平面, m, n 是直线. 下列命题中不正确的是 ()
(A) 若 $m \parallel n, m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$ (B) 若 $m \parallel \alpha, \alpha \cap \beta = n$, 则 $m \parallel n$
(C) 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ (D) 若 $m \perp \alpha, m \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
5. 极坐标方程 $\rho^2 \cos 2\theta - 2\rho \cos \theta = 1$ 表示的曲线是 ()
(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 双曲线
6. 若 $z \in \mathbf{C}$ 且 $|z + 2 - 2i| = 1$, 则 $|z - 2 - 2i|$ 的最小值是 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
7. 如果圆台的母线与底面成 60° 角, 那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为 ()
(A) 2π (B) $\frac{3}{2}\pi$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (D) $\frac{1}{2}\pi$
8. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种, 分别种在不同土质的三块土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法共有 ()
(A) 24 种 (B) 18 种 (C) 12 种 (D) 6 种
9. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{3^{-n} + 2^{-n} + (-1)^n(3^{-n} - 2^{-n})}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 等于 ()
(A) $\frac{11}{24}$ (B) $\frac{17}{24}$ (C) $\frac{19}{24}$ (D) $\frac{25}{24}$
10. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人. 全班 k 名同学都有选举权和被选举权, 他们的编号分别为 $1, 2, \dots, k$, 规定: 同意按“1”, 不同意 (含弃权) 按“0”, 令 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号同学同意第 } j \text{ 号同学当选,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号同学不同意第 } j \text{ 号同学当选,} \end{cases}$ 其中 $i = 1, 2, \dots, k$, 且 $j = 1, 2, \dots, k$, 则同时同意第 1, 2 号同学当选的人数为 ()
(A) $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2k}$
(B) $a_{11} + a_{21} + \dots + a_{1k} + a_{12} + a_{22} + \dots + a_{k2}$

- (C) $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + \dots + a_{k1}a_{k2}$
(D) $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{1k}a_{2k}$

二、填空题

11. 函数 $f(x) = \lg(1 + x^2)$, $g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1, \\ 0, & |x| \leq 1, \\ -x + 2, & x > 1, \end{cases}$ $h(x) = \tan 2x$ 中, _____ 是偶函数.
12. 以双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 右顶点为顶点, 左焦点为焦点的抛物线的方程是_____.
13. 如图, 已知底面半径为 r 的圆柱被一个平面所截, 剩下部分母线长的最大值为 a , 最小值为 b , 那么圆柱被截后剩下部分的体积是_____.



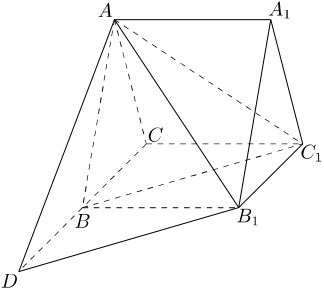
14. 将长度为 1 的铁丝分成两段, 分别围成一个正方形和一个圆形, 要使正方形与圆的面积之和最小, 正方形的周长应为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2 \sin x \cos x - \sin^4 x$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

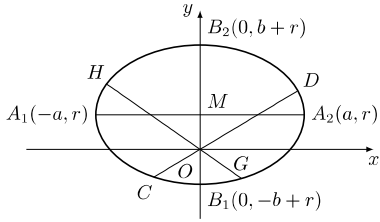
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 12$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $b_n = a_n x^n$ ($x \in \mathbf{R}$). 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

17. 如图, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面边长的 3, 侧棱 $AA_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, D 是 CB 延长线上一点, 且 $BD = BC$.
(1) 求证: 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 AB_1D ;
(2) 求二面角 $B_1 - AD - B$ 的大小;
(3) 求三棱锥 $C_1 - ABB_1$ 的体积.



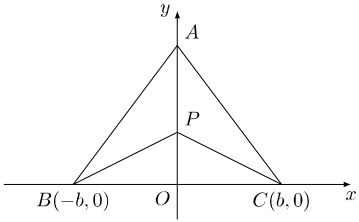
18. 如图, 椭圆的长轴 A_1A_2 与 x 轴平行, 短轴 B_1B_2 在 y 轴上, 中心为 $M(0, r)$ ($b > r > 0$).

- (1) 写出椭圆的方程, 求椭圆的焦点坐标及离心率;
(2) 直线 $y = k_1x$ 交椭圆于两点 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ ($y_2 > 0$); 直线 $y = k_2x$ 交椭圆于两点 $G(x_3, y_3), H(x_4, y_4)$ ($y_4 > 0$). 求证: $\frac{k_1x_1x_2}{x_1+x_2} = \frac{k_2x_3x_4}{x_3+x_4}$;
(3) 对于 (2) 中的 C, D, G, H , 设 CH 交 x 轴于点 P, GD 交 x 轴于点 Q . 求证: $|OP| = |OQ|$. (证明过程不考虑 CH 或 GD 垂直于 x 轴的情形)



19. 有三个新兴城镇, 分别位于 A, B, C 三点处, 且 $AB = AC = a, BC = 2b$. 今计划合建一个中心医院, 为同时方便三镇, 准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处. (建立坐标系如图)

- (1) 若希望点 P 到三镇距离的平方和为最小, 点 P 应位于何处?
(2) 若希望点 P 到三镇的最远距离为最小, 点 P 应位于何处?



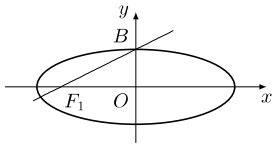
20. 设 $y = f(x)$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的函数, 且满足条件:

- ① $f(-1) = f(1) = 0$;
② 对任意的 $u, v \in [-1, 1]$, 都有 $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$.
(1) 证明: 对任意的 $x \in [-1, 1], x - 1 \leq f(x) \leq 1 - x$;
(2) 证明: 对任意的 $u, v \in [-1, 1], |f(u) - f(v)| \leq 1$;
(3) 在区间 $[-1, 1]$ 上是否存在满足题设条件的奇函数 $y = f(x)$, 且使得 $\begin{cases} |f(u) - f(v)| < |u - v|, & u, v \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ |f(u) - f(v)| = |u - v|, & u, v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$ 若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.

2003 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x \mid \log_2 x > 0\}$, $A \cap B$ 等于 ()
(A) $\{x \mid x > 1\}$ (B) $\{x \mid x > 0\}$
(C) $\{x \mid x < -1\}$ (D) $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
2. 设 $y_1 = 4^{0.9}$, $y_2 = 8^{0.44}$, $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$, 则 ()
(A) $y_3 > y_1 > y_2$ (B) $y_2 > y_1 > y_3$ (C) $y_1 > y_2 > y_3$ (D) $y_1 > y_3 > y_2$
3. “ $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $\alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$ ”的 ()
(A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件
4. 已知 α, β 是平面, m, n 是直线. 下列命题中不正确的是 ()
(A) 若 $m \parallel n$, $m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$ (B) 若 $m \parallel \alpha$, $\alpha \cap \beta = n$, 则 $m \parallel n$
(C) 若 $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ (D) 若 $m \perp \alpha$, $m \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
5. 如图, 直线 $l: x - 2y + 2 = 0$ 过椭圆的左焦点 F_1 和一个顶点 B , 该椭圆的离心率是 ()



- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
6. 若 $z \in \mathbf{C}$ 且 $|z + 2 - 2i| = 1$, 则 $|z - 2 - 2i|$ 的最小值是 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
7. 如果圆台的母线与底面成 60° 角, 那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为 ()
(A) 2π (B) $\frac{3}{2}\pi$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (D) $\frac{1}{2}\pi$
8. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{3^{-n} + (-1)^n 3^{-n}}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 等于 ()
(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{2}$
9. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种, 分别种在不同土质的三块土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法共有 ()
(A) 24 种 (B) 18 种 (C) 12 种 (D) 6 种

10. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人. 全班 k 名同学都有选举权和被选举权, 他们的编号分别为 $1, 2, \dots, k$, 规定: 同意按“1”, 不同意 (含弃权) 按“0”, 令 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号同学同意第 } j \text{ 号同学当选,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号同学不同意第 } j \text{ 号同学当选,} \end{cases}$ 其中 $i = 1, 2, \dots, k$, 且 $j = 1, 2, \dots, k$, 则同时同意第 1, 2 号同学当选的人数为 ()
(A) $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2k}$
(B) $a_{11} + a_{21} + \dots + a_{1k} + a_{12} + a_{22} + \dots + a_{k2}$
(C) $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + \dots + a_{k1}a_{k2}$
(D) $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{1k}a_{2k}$

二、填空题

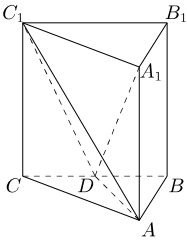
11. 已知某球体的体积与其表面积的数值相等, 则此球体的半径为_____.
12. 函数 $f(x) = \lg(1 + x^2)$, $g(x) = 2 - |x|$, $h(x) = \tan 2x$ 中, _____是偶函数.
13. 以双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 右顶点为顶点, 左焦点为焦点的抛物线的方程是_____.
14. 将长度为 1 的铁丝分成两段, 分别围成一个正方形和一个圆形, 要使正方形与圆的面积之和最小, 正方形的周长应为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2 \sin x \cos x - \sin^4 x$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

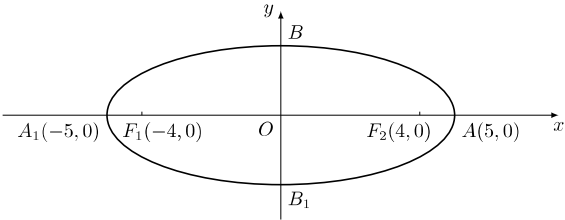
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 12$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $b_n = a_n \cdot 3^n$. 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

17. 如图, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 是 BC 的中点, $AB = a$.
(1) 求证: 直线 $A_1D \perp B_1C_1$;
(2) 求点 D 到平面 ACC_1 的距离;
(3) 判断 A_1B 与平面 ADC 的位置关系, 并证明你的结论.



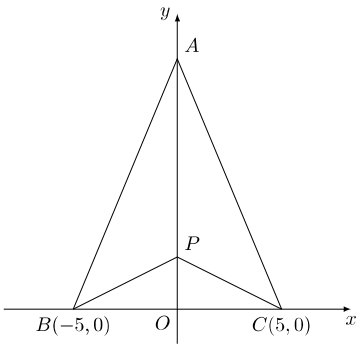
18. 如图, A_1, A_2 为椭圆的两个顶点, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点.

- (1) 写出椭圆的方程及准线方程;
(2) 过线段 OA 上异于 O, A 的任一点 K 作 OA 的垂线, 交椭圆于 P, P_1 两点, 直线 A_1P 与 AP_1 交于点 M . 求证: 点 M 在双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 上.



19. 有三个新兴城镇, 分别位于 A, B, C 三点处, 且 $AB = AC = 13$ km, $BC = 10$ km. 今计划合建一个中心医院, 为同时方便三镇, 准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处. (建立坐标系如图)

- (1) 若希望点 P 到三镇距离的平方和为最小, 点 P 应位于何处?
(2) 若希望点 P 到三镇的最远距离为最小, 点 P 应位于何处?



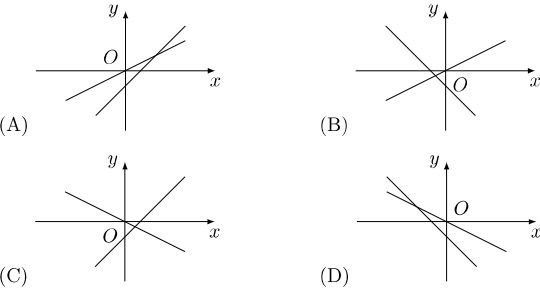
20. 设 $y = f(x)$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的函数, 且满足条件:

- ① $f(-1) = f(1) = 0$;
② 对任意的 $u, v \in [-1, 1]$, 都有 $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$.
(1) 证明: 对任意的 $x \in [-1, 1]$, $x - 1 \leq f(x) \leq 1 - x$;
(2) 判断函数 $g(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-1, 0), \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \end{cases}$ 是否满足题设条件;
(3) 在区间 $[-1, 1]$ 上是否存在满足题设条件的函数 $y = f(x)$, 且使得对任意的 $u, v \in [-1, 1]$, 都有 $|f(u) - f(v)| = u - v$, 若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.

2003 普通高等学校招生考试 (广东卷)

一、选择题

1. 在同一坐标系中, 表示直线 $y = ax$ 与 $y = x + a$ 正确的是 ()



2. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()

- (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

3. 圆锥曲线 $\rho = \frac{8 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ 的准线方程是 ()

- (A) $\rho \cos \theta = -2$ (B) $\rho \cos \theta = 2$ (C) $\rho \sin \theta = -2$ (D) $\rho \sin \theta = 2$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()

- (A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51

5. 双曲线虚轴的一个端点为 M , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\angle F_1 M F_2 = 120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

7. 函数 $y = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$ 的最大值为 ()

- (A) $1 + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

8. 已知圆 $C: (x - a)^2 + (y - 2)^2 = 4$ ($a > 0$) 及直线 $l: x - y + 3 = 0$, 当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, a 的值等于 ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$

9. 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 ()

- (A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{3}{2}\pi R^2$

10. 函数 $f(x) = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()

- (A) $-\arcsin x, x \in [-1, 1]$ (B) $-\pi - \arcsin x, x \in [-1, 1]$
(C) $\pi + \arcsin x, x \in [-1, 1]$ (D) $-\pi - \arcsin x, x \in [-1, 1]$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()

- (A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

- (A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

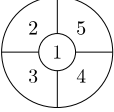
二、填空题

13. 不等式 $\sqrt{4x - x^2} < x$ 的解集是_____.

14. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

15. 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.” 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A - BCD$ 的三个侧面 ABC, ACD, ADB 两两互相垂直, 则_____.”

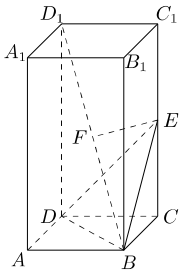
16. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____ (以数字作答)



三、解答题

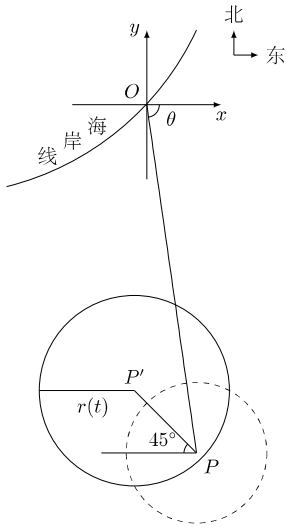
17. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

- (1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;
(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.

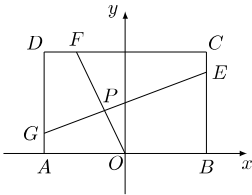


18. 已知复数 z 的辐角为 60° , 且 $|z - 1|$ 是 $|z|$ 和 $|z - 2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

20. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ ($\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



21. 已知常数 $a > 0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 4a$, O 为 AB 的中点, 点 E 、 F 、 G 分别在 BC 、 CD 、 DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



22. 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

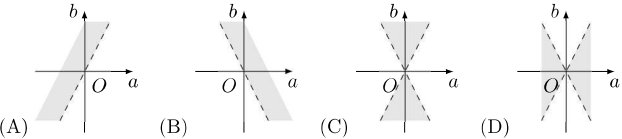
(1) 证明对任意 $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$;

(2) 假设对任意 $n \geq 1$ 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

2003 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、选择题

1. 如果函数 $y = ax^2 + bx + a$ 的图象与 x 轴有两个交点, 则点 (a, b) 在 aOb 平面上的区域 (不包含边界) 为 ()



2. 抛物线 $y = ax^2$ 的准线方程是 $y = 2$, 则 a 的值为 ()

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) 8 (D) -8

3. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()

- (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

5. O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的

- (A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

6. 函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()

- (A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$
(C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$

7. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ()

- (A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$

8. 设 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ()

- (A) $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0, \left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0, \left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

9. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()

- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ()

- (A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD , DA 和 AB 上的点 P_2 , P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()

- (A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

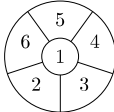
- (A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)



16. 对于四面体 $ABCD$, 给出下列四个命题: ① 若 $AB = AC$, $BD = CD$, 则 $BC \perp AD$; ② 若 $AB = CD$, $AC = BD$, 则 $BC \perp AD$; ③ 若 $AB \perp AC$, $BD \perp CD$, 则 $BC \perp AD$; ④ 若 $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, 则 $BC \perp AD$. 其中真命题的序号是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

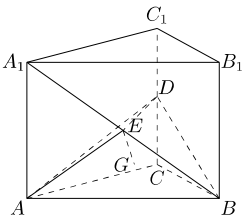
17. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.

- (1) 求恰有一件不合格的概率;
(2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

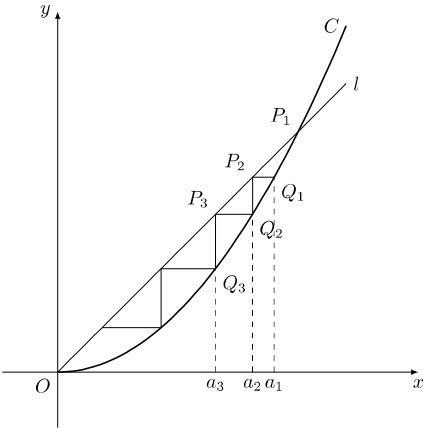
18. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 侧棱 $AA_1 = 2$, D, E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G .

- (1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)
(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.



20. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda \vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P , 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E 、 F , 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E 、 F 的坐标; 若不存在, 说明理由.
21. 已知 $a > 0$, n 为正整数.
- (1) 设 $y = (x - a)^n$, 证明: $y' = n(x - a)^{n-1}$;
- (2) 设 $f_n(x) = x^n - (x - a)^n$, 对任意 $n \geq a$, 证明: $f'_{n+1}(n + 1) > (n + 1)f'_n(n)$.
22. 设 $a > 0$, 如图, 已知直线 $l: y = ax$ 及曲线 $C: y = x^2$, C 上的点 Q_1 的横坐标为 a_1 ($0 < a_1 < a$). 从 C 上的点 Q_n ($n \geq 1$) 作直线平行于 x 轴, 交直线 l 于点 P_{n+1} , 再从点 P_{n+1} 作直线平行于 y 轴, 交曲线 C 于点 Q_{n+1} . Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的横坐标构成数列 $\{a_n\}$.
- (1) 试求 a_{n+1} 与 a_n 的关系, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 当 $a = 1$, $a_1 \leq \frac{1}{2}$ 时, 证明: $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \frac{1}{32}$;
- (3) 当 $a = 1$ 时, 证明: $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \frac{1}{3}$.



2003 普通高等学校招生考试 (辽宁卷)

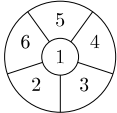
一、选择题

1. 与曲线 $y = \frac{1}{x-1}$ 关于原点对称的曲线为 ()
(A) $y = \frac{1}{1+x}$ (B) $y = -\frac{1}{1+x}$ (C) $y = \frac{1}{1-x}$ (D) $y = -\frac{1}{1-x}$
2. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
3. $\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2} =$ ()
(A) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (B) $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 P 在对角线 AC 上 (不包括端点 A, C), 则 $\overrightarrow{AP} =$ ()
(A) $\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, $\lambda \in (0, 1)$ (B) $\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$, $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(C) $\lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$, $\lambda \in (0, 1)$ (D) $\lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$, $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()
(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51
7. 函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()
(A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$
(C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$
8. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ()
(A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$
9. 设 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ()
(A) $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0, \left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0, \left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ()
(A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$
11. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD, DA 和 AB 上的点 P_2, P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$
12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

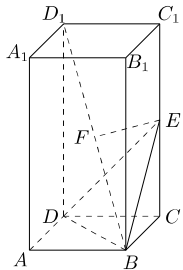
二、填空题

13. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.
15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)
16. 对于四面体 $ABCD$, 给出下列四个命题: ① 若 $AB = AC$, $BD = CD$, 则 $BC \perp AD$; ② 若 $AB = CD$, $AC = BD$, 则 $BC \perp AD$; ③ 若 $AB \perp AC$, $BD \perp CD$, 则 $BC \perp AD$; ④ 若 $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, 则 $BC \perp AD$. 其中真命题的序号是_____. (写出所有真命题的序号)



三、解答题

17. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.
- (1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;
- (2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



18. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

19. 设 $a > 0$, 求函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x + a)$, $x \in (0, +\infty)$ 的单调区间.

20. A 、 B 两个代表队进行乒乓球对抗赛, 每队三名队员, A 队队员是 A_1, A_2, A_3 , B 队队员是 B_1, B_2, B_3 , 按以往多次比赛的统计, 对阵队员之间胜负概率如下:

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场, 每场胜队得 1 分, 负队得 0 分, 设 A 队、 B 队最后所得总分分别为 ξ 、 η .
(1) 求 ξ 、 η 的概率分布;
(2) 求 $E\xi, E\eta$.

21. 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
(1) 证明对任意 $n \geq 1, a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$;
(2) 假设对任意 $n \geq 1$ 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

22. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a), \vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda \vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P , 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E 、 F , 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E 、 F 的坐标; 若不存在, 说明理由.

2003 普通高等学校招生考试 (全国卷理)

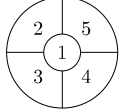
一、选择题

1. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
2. 圆锥曲线 $\rho = \frac{8 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ 的准线方程是 ()
(A) $\rho \cos \theta = -2$ (B) $\rho \cos \theta = 2$ (C) $\rho \sin \theta = 2$ (D) $\rho \sin \theta = -2$
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
4. 函数 $y = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$ 的最大值为 ()
(A) $1 + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
5. 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$ ($a > 0$) 及直线 $l: x - y + 3 = 0$, 当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, a 的值等于 ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$
6. 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 ()
(A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{3}{2}\pi R^2$
7. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()
(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$
8. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M 、 N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$. 则此双曲线的方程是 ()
(A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$
9. 函数 $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()
(A) $-\arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (B) $-\pi - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$
(C) $\pi + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (D) $\pi - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$
10. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角). 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_n^2}{n(C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + \cdots + C_n^1)} =$ ()
(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6
12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
14. 使 $\log_2(-x) < x + 1$ 成立的 x 的取值范围是_____.
15. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____. (以数字作答)

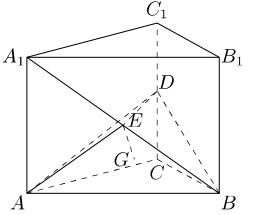


16. 下列 5 个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M 、 N 、 P 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____. (写出所有符合要求的图形序号)
- ① ② ③ ④ ⑤

三、解答题

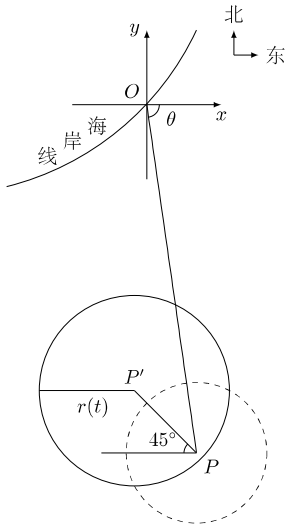
17. 已知复数 z 的辐角为 60° , 且 $|z - 1|$ 是 $|z|$ 和 $|z - 2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC' - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 侧棱 $AA_1 = 2$, D 、 E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G .
- (1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)
- (2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.

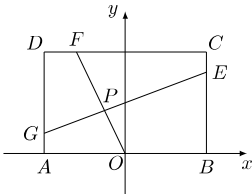


19. 已知 $c > 0$, 设 P : 函数 $y = c^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减; Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 \mathbf{R} . 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

20. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ ($\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



21. 已知常数 $a > 0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 4a$, O 为 AB 的中点, 点 E 、 F 、 G 分别在 BC 、 CD 、 DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



22. 【甲】设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t \text{ 且 } s, t \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 6$, $a_4 = 9$, $a_5 = 10$, $a_6 = 12, \dots$. 将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下的三角形数表:

		3		
	5		6	
9	10		12	
—	—	—	—	—
			

- (1) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;
(2) 求 a_{100} .

【乙】设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t \text{ 且 } r, s, t \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 已知 $b_k = 1160$, 求 k .

2003 普通高等学校招生考试 (全国卷文)

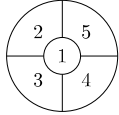
一、选择题

- 直线 $y = 2x$ 关于 x 轴对称的直线方程为 ()
(A) $y = -\frac{1}{2}x$ (B) $y = \frac{1}{2}x$ (C) $y = -2x$ (D) $y = 2x$
- 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
- 抛物线 $y = ax^2$ 的准线方程是 $y = 2$, 则 a 的值为 ()
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) 8 (D) -8
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()
(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51
- 双曲线虚轴的一个端点为 M , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\angle F_1 M F_2 = 120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()
(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- 已知 $f(x^5) = \lg x$, 则 $f(2) =$ ()
(A) $\lg 2$ (B) $\lg 32$ (C) $\lg \frac{1}{32}$ (D) $\frac{1}{5} \lg 2$
- 函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 则 $\varphi =$ ()
(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π
- 已知点 $(a, 2)$ ($a > 0$) 到直线 $l: x - y + 3 = 0$ 的距离为 1, 则 $a =$ ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$
- 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 它的内接圆柱的底面半径为 $\frac{3}{4}R$, 该圆柱的全面积为 ()
(A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{5}{2}\pi R^2$
- 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角). 若 P_1 与 P_4 重合, 则 $\tan \theta =$ ()
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

- 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

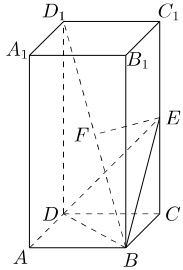
二、填空题

- 不等式 $\sqrt{4x - x^2} < x$ 的解集是_____.
- $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
- 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.” 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A - BCD$ 的三个侧面 ABC, ACD, ADB 两两互相垂直, 则_____.”
- 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____. (以数字作答)



三、解答题

- 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.
(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;
(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.

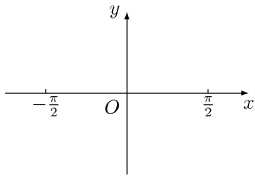


- 已知复数 z 的辐角为 60° , 且 $|z - 1|$ 是 $|z|$ 和 $|z - 2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

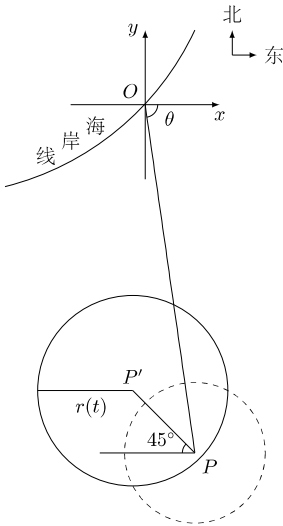
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$).
(1) 求 a_2, a_3 ;
(2) 证明: $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

20. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$.

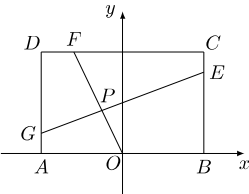
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;
(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.



21. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ ($\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



22. 已知常数 $a > 0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 4a$, O 为 AB 的中点, 点 E 、 F 、 G 分别在 BC 、 CD 、 DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



2003 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 函数 $y = \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T =$ _____.
2. 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x + \alpha) = 1$ 的解, 其中 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则 $\alpha =$ _____.
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 3, a_6 = -2$, 则 $a_4 + a_5 + \cdots + a_{10} =$ _____.
4. 在极坐标系中, 定点 $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, 点 B 在直线 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 0$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的极坐标是_____.
5. 在正四棱锥 $P - ABCD$ 中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 60° , 则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)
6. 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$, 则 $\angle ABC =$ _____. (结果用反三角函数值表示)
8. 若首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1 , 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1, q) =$ _____.
9. 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为_____. (结果用分数表示)
10. 方程 $x^3 + \lg x = 18$ 的根 $x \approx$ _____. (结果精确到 0.1)
11. 已知点 $A\left(0, \frac{2}{n}\right), B\left(0, -\frac{2}{n}\right), C\left(4 + \frac{2}{n}, 0\right)$, 其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.
12. 给出问题: F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于 9, 求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由 $||PF_1| - |PF_2|| = 8$, 即 $|9 - |PF_2|| = 8$, 得 $|PF_2| = 1$ 或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内_____.

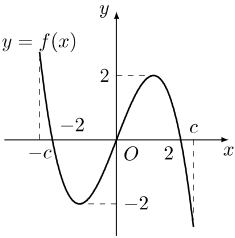
二、选择题

13. 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0, \pi)$ 上单调递增的是 ()
- (A) $y = \tan |x|$ (B) $y = \cos(-x)$
- (C) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $y = \left|\cot \frac{x}{2}\right|$
14. 在下列条件中, 可判断平面 α 与 β 平行的是 ()
- (A) α, β 都垂直于平面 γ
- (B) α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等
- (C) l, m 是 α 内两条直线, 且 $l \parallel \beta, m \parallel \beta$
- (D) l, m 是两条异面直线, 且 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$

15. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”是“ $M = N$ ”的 ()

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
- (C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

16. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示: 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 ()

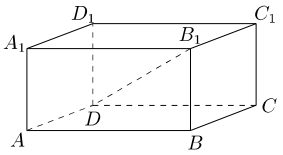


- (A) 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称
- (B) 若 $a = -1, -2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根
- (C) 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有两个实根
- (D) 若 $a \geq 1, b < 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实根

三、解答题

17. 已知复数 $z_1 = \cos \theta - i, z_2 = \sin \theta + i$, 求 $|z_1 \cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18. 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A \perp$ 平面 $ABCD, AB = 4, AD = 2$. 若 $B_1D \perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 30° , 求平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积.

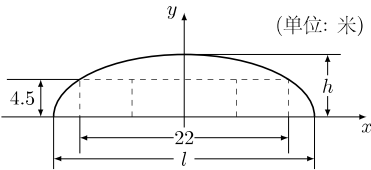


19. 已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1 , 公比为 q 的等比数列.
- (1) 求和: $a_1C_2^0 - a_2C_2^1 + a_3C_2^2, a_1C_3^0 - a_2C_3^1 + a_3C_3^2 - a_4C_3^3$;
- (2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论, 并加以证明.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.

- (1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 是多少?
(2) 若最大拱高 h 不小于 6 米, 则应如何设计拱高 h 和拱宽 l , 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小?

注: 半个椭圆的面积公式为 $S = \frac{\pi}{4}lh$, 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以 O 为原点的直角坐标系中, 点 $A(4, -3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB| = 2|OA|$, 且点 B 的纵坐标大于零.

- (1) 求向量 \overrightarrow{AB} 的坐标;
(2) 求圆 $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;
(3) 是否存在实数 a , 使抛物线 $y = ax^2 - 1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求 a 的取值范围.

22. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+T) = Tf(x)$ 成立.

- (1) 函数 $f(x) = x$ 是否属于集合 M ? 说明理由;
(2) 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象与 $y = x$ 的图象有公共点, 证明: $f(x) = a^x \in M$;
(3) 若函数 $f(x) = \sin kx \in M$, 求实数 k 的取值范围.

2003 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 函数 $y = \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T =$ _____.
2. 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x + \alpha) = 1$ 的解, 其中 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则 $\alpha =$ _____.
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 3, a_6 = -2$, 则 $a_4 + a_5 + \cdots + a_{10} =$ _____.
4. 已知定点 $A(0, 1)$, 点 B 在直线 $x + y = 0$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的坐标是_____.
5. 在正四棱锥 $P - ABCD$ 中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 60° , 则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)
6. 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$, 则 $\angle ABC =$ _____. (结果用反三角函数值表示)
8. 若首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1 , 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1, q) =$ _____.
9. 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为_____. (结果用分数表示)
10. 方程 $x^3 + \lg x = 18$ 的根 $x \approx$ _____. (结果精确到 0.1)

11. 已知点 $A\left(0, \frac{2}{n}\right), B\left(0, -\frac{2}{n}\right), C\left(4 + \frac{2}{n}, 0\right)$, 其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

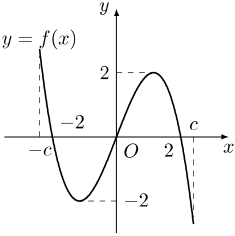
12. 给出问题: F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于 9, 求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由 $||PF_1| - |PF_2|| = 8$, 即 $|9 - |PF_2|| = 8$, 得 $|PF_2| = 1$ 或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内_____.

二、选择题

13. 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0, \pi)$ 上单调递增的是 ()
- (A) $y = \tan |x|$ (B) $y = \cos(-x)$
- (C) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $y = \left|\cot \frac{x}{2}\right|$
14. 在下列条件中, 可判断平面 α 与 β 平行的是 ()
- (A) α, β 都垂直于平面 γ
- (B) α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等
- (C) l, m 是 α 内两条直线, 且 $l \parallel \beta, m \parallel \beta$
- (D) l, m 是两条异面直线, 且 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$

15. 在 $P(1, 1), Q(1, 2), M(2, 3)$ 和 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 四点中, 函数 $y = a^x$ 的图象与其反函数的图象的公共点只可能是点 ()
- (A) P (B) Q (C) M (D) N

16. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示: 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 ()

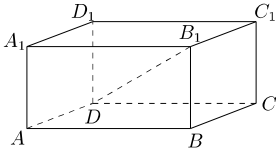


- (A) 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称
- (B) 若 $a = -1, -2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根
- (C) 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有两个实根
- (D) 若 $a \geq 1, b < 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实根

三、解答题

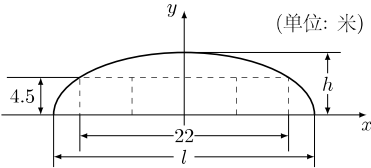
17. 已知复数 $z_1 = \cos \theta - i, z_2 = \sin \theta + i$, 求 $|z_1 \cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18. 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A \perp$ 平面 $ABCD, AB = 4, AD = 2$. 若 $B_1D \perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 30° , 求平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



19. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 \frac{1+x}{1-x}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并讨论它的奇偶性和单调性.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.
- (1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 是多少?
- (2) 若最大拱高 h 不小于 6 米, 则应如何设计拱高 h 和拱宽 l , 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小?
- 注: 半个椭圆的面积公式为 $S = \frac{\pi}{4}lh$, 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以 O 为原点的直角坐标系中, 点 $A(4, -3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB| = 2|OA|$, 且点 B 的纵坐标大于零.
- (1) 求向量 \overrightarrow{AB} 的坐标;
- (2) 求圆 $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;
- (3) 是否存在实数 a , 使抛物线 $y = ax^2 - 1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求 a 的取值范围.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1 , 公比为 q 的等比数列.
- (1) 求和: $a_1C_2^0 - a_2C_2^1 + a_3C_2^2, a_1C_3^0 - a_2C_3^1 + a_3C_3^2 - a_4C_3^3$;
- (2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论, 并加以证明;
- (3) 设 $q \neq 1, S_n$ 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求: $S_1C_n^0 - S_2C_n^1 + S_3C_n^2 - S_4C_n^3 + \cdots + (-1)^n S_{n+1}C_n^n$.

2003 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

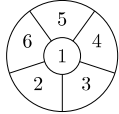
一、选择题

1. $\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2} =$ ()
(A) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (B) $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
4. O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的
(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心
5. 函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()
(A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$
(C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$
6. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ()
(A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$
7. 设 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $[0, \frac{\pi}{4}]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ()
(A) $[0, \frac{1}{a}]$ (B) $[0, \frac{1}{2a}]$ (C) $[0, \frac{b}{2a}]$ (D) $[0, \frac{b-1}{2a}]$
8. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()
(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$
9. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$. 则此双曲线的方程是 ()
(A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

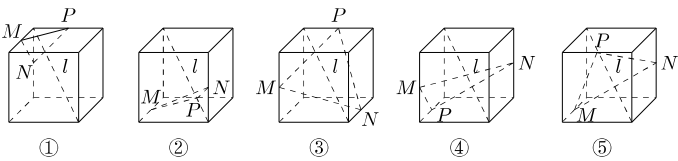
10. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD , DA 和 AB 上的点 P_2 , P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
(A) $(\frac{1}{3}, 1)$ (B) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (C) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ (D) $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_n^2}{n(C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + \cdots + C_n^1)} =$ ()
(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6
12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $(x^2 - \frac{1}{2x})^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.
15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)

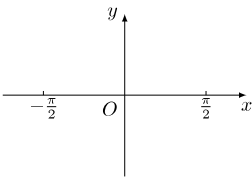


16. 下列 5 个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M, N, P 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____. (写出所有符合要求的图形序号)

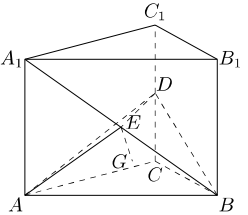


三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;
(2) 在给定的直角坐标系中, 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象.



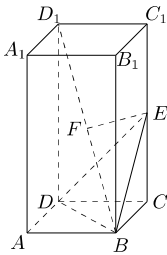
18. 如图, 在直三棱柱 $ABC' - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 侧棱 $AA_1 = 2$, D, E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G .
(1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)
(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.



19. 设 $a > 0$, 求函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x + a)$, $x \in (0, +\infty)$ 的单调区间.

20. A 、 B 两个代表队进行乒乓球对抗赛, 每队三名队员, A 队队员是 A_1, A_2, A_3 , B 队队员是 B_1, B_2, B_3 , 按以往多次比赛的统计, 对阵队员之间胜负概率如下:
- | 对阵队员 | A 队队员胜的概率 | A 队队员负的概率 |
|---------------|---------------|---------------|
| A_1 对 B_1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| A_2 对 B_2 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| A_3 对 B_3 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
21. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda \vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P , 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E 、 F , 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E 、 F 的坐标; 若不存在, 说明理由.
22. 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
(1) 证明对任意 $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$;
(2) 假设对任意 $n \geq 1$ 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

现按表中对阵方式出场, 每场胜队得 1 分, 负队得 0 分, 设 A 队、 B 队最后所得总分分别为 ξ 、 η .
(1) 求 ξ 、 η 的概率分布;
(2) 求 $E\xi$, $E\eta$.



2003 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

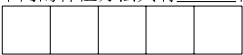
一、选择题

1. 不等式 $\sqrt{4x-x^2} < x$ 的解集是 ()
(A) $(0, 2)$ (B) $(2, +\infty)$
(C) $(2, 4)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
3. $\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2} =$ ()
(A) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (B) $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
5. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()
(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51
6. 双曲线虚轴的一个端点为 M , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()
(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
8. O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()
(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心
9. 函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()
(A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$
(C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$

10. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ()
(A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$
11. 设 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ()
(A) $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0, \left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0, \left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$
12. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$
13. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

14. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
15. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.
16. 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.” 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC, ACD, ADB 两两互相垂直, 则_____.”
17. 将 3 种作物种植在如图 5 块试验田里, 每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物, 不同的种植方法共有_____种. (以数字作答)



三、解答题

18. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.
- (1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;
(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.

21. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.

- (1) 求恰有一件不合格的概率;
- (2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

22. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

23. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda \vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P , 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E 、 F , 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E 、 F 的坐标; 若不存在, 说明理由.