2006 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{4n+3}=$______.

2. 方程 $\log_3(2x-1)=1$ 的解 $x=$______.

3. 函数 $f(x)=3x+5$, $x\in[0,1]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

4. 不等式 $\dfrac{1-2x}{x+1}>0$ 的解集是______.

5. 已知圆 C: $(x+5)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 和直线 l: $3x+y+5=0$. 若圆 C 与直线 l 没有公共点, 则 r 的取值范围是______.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f(x)=x-x^4$, 则当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)=$______.

7. 电视台连续播放 6 个广告, 其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告, 要求首尾必须播放公益广告, 则共有种不同的播放方式______. (结果用数值表示)

8. 正四棱锥底面边长为 4, 侧棱长为 3, 则其体积为______.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=8$, $AC=5$, 三角形面积为 12, 则 $\cos 2C=$______.

10. 若向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角为 150°, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=4$, 则 $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=$______.

11. 已知直线 l 过点 $P(2,1)$, 且与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A、B 两点, O 为坐标原点, 则三角形 OAB 面积的最小值为______.

12. 同学们都知道, 在一次考试后, 如果按顺序去掉一些高分, 那么班级的平均分将降低; 反之, 如果按顺序去掉一些低分, 那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为: 若有限数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 则______. (结论用数学式子表示)

二、选择题

13. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $(1,0)$ (C) $(0,2)$ (D) $(2,0)$

14. 若 a、b、$c\in\mathbf{R}$, $a>b$, 则下列不等式成立的是 ( )

(A) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ (B) $a^2>b^2$

(C) $\dfrac{a}{c^2+1}>\dfrac{b}{c^2+1}$ (D) $a|c|>b|c|$

15. 若 $k\in\mathbf{R}$, 则"$k>3$"是"方程 $\dfrac{x^2}{k-3}-\dfrac{y^2}{k+3}=1$ 表示双曲线"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

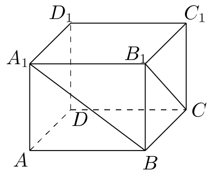
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

16. 若集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=x^{\frac{1}{3}},\ -1\leqslant x\leqslant 1\right\}$, $B=\left\{y\,\middle|\,y=2-\dfrac{1}{x},\ 0<x\leqslant 1\right\}$, 则 $A\cap B$ 等于 ( )

(A) $(-\infty,1]$ (B) $[-1,1]$ (C) $\varnothing$ (D) $\{1\}$

三、解答题

17. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DA=DC=4$, $DD_1=3$, 求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知复数 w 满足 $w-4=(3-2w)\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), $z=\dfrac{5}{w}+|w-2|$, 求一个以 z 为根的实系数一元二次方程.

19. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

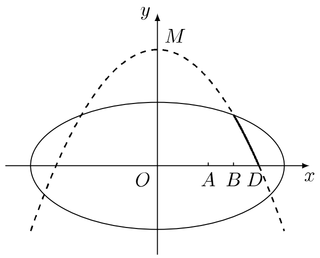
(1) 若 $\sin x=\dfrac{4}{5}$, 求函数 $f(x)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

20. 学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验. 设计方案如图: 航天器运行 (按顺时针方向) 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$, 变轨 (即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线) 后返回的轨迹是以 y 轴为对称轴、$M\left(0,\frac{64}{7}\right)$ 为顶点的抛物线的实线部分, 降落点为 $D(8,0)$. 观测点 $A(4,0)$、$B(6,0)$ 同时跟踪航天器.

(1) 求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程;

(2) 试问: 当航天器在 x 轴上方时, 观测点 AB 测得离航天器的距离分别为多少时, 应向航天器发出变轨指令?



21. 设函数 $f(x)=|x^2-4x-5|$.

(1) 在区间 $[-2,6]$ 上画出函数 $f(x)$ 的图象;

(2) 设集合 $A=\{x \mid f(x)\geqslant 5\}$, $B=(-\infty,-2]\cup[0,4]\cup[6,+\infty)$. 试判断集合 A 和 B 之间的关系, 并给出证明;

(3) 当 $k>2$ 时, 求证: 在区间 $[-1,5]$ 上, $y=kx+3k$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.

22. 已知数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{30}$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列; $a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{20}$ 是公差为 d 的等差数列; $a_{20}, a_{21}, \cdots, a_{30}$ 是公差为 d^2 的等差数列 $(d\neq 0)$.

(1) 若 $a_{20}=40$, 求 d;

(2) 试写出 a_{30} 关于 d 的关系式, 并求 a_{30} 的取值范围;

(3) 续写已知数列, 使得 $a_{30}, a_{31}, \cdots, a_{40}$ 是公差为 d^3 的等差数列, $\cdots$, 依次类推, 把已知数列推广为无穷数列. 提出同 (2) 类似的问题 ((2) 应当作为特例), 并进行研究, 你能得到什么样的结论?

2006 普通高等学校招生考试 (安徽卷理)

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ 等于 ( )

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$　(D) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x\mid |x-2|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=-x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 2\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

(A) $\mathbf{R}$　(B) $\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq 0\}$

(C) $\{0\}$　(D) $\varnothing$

3. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}$ 的右焦点重合, 则 p 的值为( )

(A) -2　(B) 2　(C) -4　(D) 4

4. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 已知命题 p: $a=b$; 命题 q: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$, 则 p 是 q 成立的 ( )

(A) 必要不充分条件　(B) 充分不必要条件

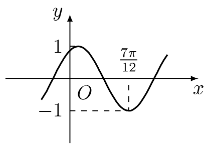
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 函数 $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$　(B) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$

(C) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0,\\ -\sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$　(D) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0,\\ -\sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$

6. 将函数 $y=\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的图象按向量 $\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 平移, 平移后的图象如图所示, 则平移后的图象所对应的函数解析式是 ( )



(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(D) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直, 则 l 的方程为( )

(A) $4x-y-3=0$　(B) $x+4y-5=0$

(C) $4x-y+3=0$　(D) $x+4y+3=0$

8. 设 $a>0$, 对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+a}{\sin x}\ (0<x<\pi)$, 下列结论正确的是 ( )

(A) 有最大值而无最小值　(B) 有最小值而无最大值

(C) 有最大值且有最小值　(D) 既无最大值又无最小值

9. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一球面上, 则此球的体积为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$　(B) $\dfrac{1}{3}\pi$　(C) $\dfrac{2}{3}\pi$　(D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

10. 如果实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ y+1\geqslant 0,\\ x+y+1\leqslant 0,\end{cases}$ 那么 $2x-y$ 的最大值为 ( )

(A) 2　(B) 1　(C) -2　(D) -3

11. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则 ( )

(A) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

(B) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

(C) $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

(D) $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

12. 在正方体上任选 3 个顶点连成三角形, 则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{7}$　(B) $\dfrac{2}{7}$　(C) $\dfrac{3}{7}$　(D) $\dfrac{4}{7}$

二、填空题

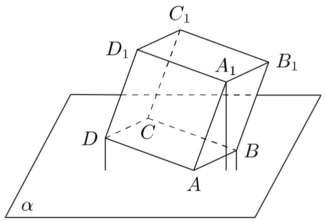
13. 设常数 $a>0$, $\left(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{3}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+a^2+\cdots+a^n)=$______.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, M 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}=$______. (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示)

15. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$, 若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$______.

16. 多面体上, 位于同一条棱两端的顶点称为相邻的. 如图, 正方体的一个顶点 A 在平面 α 内, 其余顶点在 α 的同侧, 正方体上与顶点 A 相邻的三个顶点到 α 的距离分别为 1, 2 和 4. P 是正方体的其余四个顶点中的一个, 则 P 到平面 α 的距离可能是: ① 3; ② 4; ③ 5; ④ 6; ⑤ 7.

以上结论正确的是______. (写出所有正确结论的编号)



三、解答题

17. 已知 $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$, $\tan\alpha+\cot\alpha=-\dfrac{10}{3}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

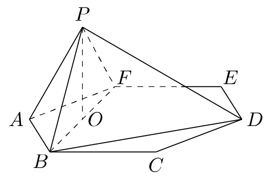
(2) 求 $\dfrac{5\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+11\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 的值.

18. 在添加剂的搭配适用中, 为了找到最佳的搭配方案, 需要对各种不同的搭配方式作比较, 在试制某种牙膏新品种时, 需要选用两种不同的添加剂. 现有芳香度分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六种添加剂可供选用. 根据实验设计学原理, 通常首先要随机选取两种不同的添加剂进行搭配实验. 用 ξ 表示所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和.

(1) 写出 ξ 的分布列; (以列表的形式给出结论, 不必写计算过程)

(2) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$. (要求写出计算过程或说明道理)

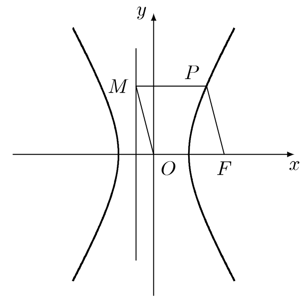
19. 如图, P 是边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 所在平面外一点, $PA=1$, P 在平面 ABC 内的射影为 BF 的中点 O.
(1) 证明: $PA \perp BF$;
(2) 求面 APB 与面 DPB 所成二面角的大小.



20. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 对任意实数 $a>0$ 和任意实数 x, 都有 $f(ax)=af(x)$.
(1) 证明 $f(0)=0$;
(2) 证明 $f(x)=\begin{cases} kx, & x \geqslant 0, \\ hx, & x<0, \end{cases}$ 其中 k 和 h 均为常数;
(3) 当 (2) 中的 $k>0$ 时, 设 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)\ (x>0)$, 讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值.

21. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_n=n^2a_n-n(n-1)$, $n=1$, 2, $\cdots$.
(1) 写出 S_n 与 S_{n-1} 的递推关系式 $(n \geqslant 2)$, 并求 S_n 关于 n 的表达式;
(2) 设 $f_n(x)=\dfrac{S_n}{n}x^{n+1}$, $b_n=f_n'(p)\ \ (p \in \mathbf{R})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, F 为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的右焦点, P 为双曲线 C 右支上一点, 且位于 x 轴上方, M 为左准线上一点, O 为坐标原点. 已知四边形 $OFPM$ 为平行四边形, $|PF|=\lambda|OF|$.
(1) 写出双曲线 C 的离心率 e 与 λ 的关系式;
(2) 当 $\lambda=1$ 时, 经过焦点 F 且平行于 OP 的直线交双曲线于 A、B 点, 若 $|AB|=12$, 求此时的双曲线方程.



2006 普通高等学校招生考试 (安徽卷文)

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, 集合 $S=\{1,\ 3,\ 5\}$, $T=\{3,6\}$, 则 $\complement_U(S\cup T)$ 等于 ( )

(A) $\varnothing$ (B) $\{2,\ 4,\ 7,\ 8\}$ (C) $\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$ (D) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

2. 不等式 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$ 的解集是 ( )

(A) $(-\infty,2)$ (B) $(2,+\infty)$
(C) $(0,2)$ (D) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

3. 函数 $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 ( )

(A) $y=1+\ln x$ $(x>0)$ (B) $y=1-\ln x$ $(x>0)$
(C) $y=-1-\ln x$ $(x>0)$ (D) $y=-1+\ln x$ $(x>0)$

4. "$x>3$"是"$x^2>4$"的 ( )

(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}$ 的右焦点重合, 则 p 的值为( )

(A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

6. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一球面上, 则此球的体积为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\dfrac{1}{3}\pi$ (C) $\dfrac{2}{3}\pi$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

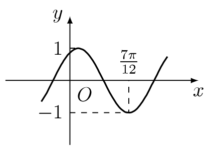
7. 直线 $x+y=1$ 与圆 $x^2+y^2-2ay=0$ $(a>0)$ 没有公共点, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(0,\sqrt{2}-1)$ (B) $(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$
(C) $(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ (D) $(0,\sqrt{2}+1)$

8. 对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{\sin x}$ $(0<x<\pi)$, 下列结论正确的是 ( )

(A) 有最大值而无最小值 (B) 有最小值而无最大值
(C) 有最大值且有最小值 (D) 既无最大值又无最小值

9. 将函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 的图象按向量 $\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 平移, 平移后的图象如图所示, 则平移后的图象所对应的函数解析式是 ( )



(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$
(C) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

10. 如果实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ y+1\geqslant 0,\\ x+y+1\leqslant 0,\end{cases}$ 那么 $2x-y$ 的最大值为 ( )

(A) 2 (B) 1 (C) -2 (D) -3

11. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则 ( )

(A) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形
(B) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形
(C) $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形
(D) $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

12. 在正方体上任选 3 个顶点连成三角形, 则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) $\dfrac{2}{7}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{4}{7}$

二、填空题

13. 设常数 $a>0$, $\left(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{3}{2}$, 则 $a=$______.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, M 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}=$______. (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示)

15. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$, 若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$______.

16. 平行四边形的一个顶点 A 在平面 α 内, 其余顶点在 α 的同侧, 已知其中两个顶点到 α 的距离分别为 1, 2, 那么剩下的一个顶点到平面 α 的距离可能是: ① 1; ② 2; ③ 3; ④ 4.
以上结论正确的是______. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

(1) 求 $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}$ 的值;

(2) 求 $\tan\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 在添加剂的搭配适用中, 为了找到最佳的搭配方案, 需要对各种不同的搭配方式作比较, 在试制某种牙膏新品种时, 需要选用两种不同的添加剂. 现有芳香度分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六种添加剂可供选用. 根据试验设计学原理, 通常首先要随机选取两种不同的添加剂进行搭配试验.

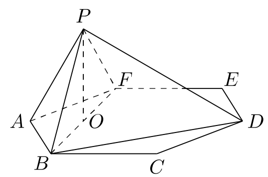
(1) 求所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和等于 4 的概率;

(2) 求所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和不小于 3 的概率.

19. 如图, P 是边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 所在平面外一点, $PA=1$, P 在平面 ABC 内的射影为 BF 的中点 O.

(1) 证明: $PA\perp BF$;

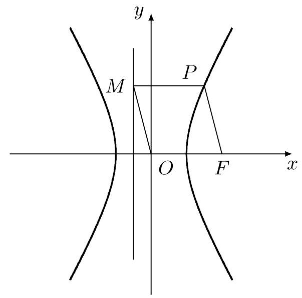
(2) 求面 APB 与面 DPB 所成二面角的大小.



20. 设函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx\ (x\in\mathbf{R})$, 已知 $g(x)=f(x)-f'(x)$ 是奇函数.
(1) 求 b、c 的值;
(2) 求 $g(x)$ 的单调区间与极值.

21. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和 S_n 满足条件 $\dfrac{S_{2n}}{S_n}=\dfrac{4n+2}{n+1}$, $n=1, 2, \cdots$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 $b_n=a_np^{a_n}\ (p>0)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, F 为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的右焦点, P 为双曲线 C 右支上一点, 且位于 x 轴上方, M 为左准线上一点, O 为坐标原点. 已知四边形 $OFPM$ 为平行四边形, $|PF|=\lambda|OF|$.
(1) 写出双曲线 C 的离心率 e 与 λ 的关系式;
(2) 当 $\lambda=1$ 时, 经过焦点 F 且平行于 OP 的直线交双曲线于 A、B 点, 若 $|AB|=12$, 求此时的双曲线方程.



2006 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 都是非零向量, 则"$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$"是"$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$"的( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 在 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字组成的没有重复数字的三位数中, 各位数字之和为奇数的共有 ( )

(A) 36 个 (B) 24 个 (C) 18 个 (D) 6 个

4. 平面 α 的斜线 AB 交 α 于点 B, 过定点 A 的动直线 l 与 AB 垂直, 且交 α 于点 C, 则动点 C 的轨迹是 ( )

(A) 一条直线 (B) 一个圆 (C) 一个椭圆 (D) 双曲线的一支

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1,\\ \log_a x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数, 那么 a 的取值范围是 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ (C) $\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)$ (D) $\left[\dfrac{1}{7},1\right)$

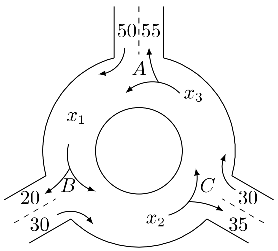
6. 在下列四个函数中, 满足性质: "对于区间 $(1,2)$ 上的任意 $x_1, x_2\ (x_1\neq x_2)$, $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_2-x_1|$ 恒成立"的只有 ( )

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (B) $f(x)=|x|$ (C) $f(x)=2^x$ (D) $f(x)=x^2$

7. 设 $f(n)=2+2^4+2^7+2^{10}+\cdots+2^{3n+10}\ (n\in\mathbf{N})$, 则 $f(n)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{2}{7}(8^n-1)$ (B) $\dfrac{2}{7}(8^{n+1}-1)$ (C) $\dfrac{2}{7}(8^{n+3}-1)$ (D) $\dfrac{2}{7}(8^{n+4}-1)$

8. 如图为某三岔路口交通环岛的简化模型, 在某高峰时段, 单位时间进出路口 A, B, C, 的机动车辆数如图所示, 图中 x_1, x_2, x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数 (假设: 单位时间内, 在上述路段中, 同一路段上驶入与驶出的车辆数相等), 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ( )



(A) $x_1>x_2>x_3$ (B) $x_1>x_3>x_2$ (C) $x_2>x_3>x_1$ (D) $x_3>x_2>x_1$

二、填空题

9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ 的值等于______.

10. 在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^2 的系数为______. (用数字作答)

11. 若三点 $A(2,2)$, $B(a,0)$, $C(0,b)\ (ab\neq 0)$ 共线, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值等于______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$, 则 $\angle B$ 的大小是______.

13. 已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 4,\\ y\geqslant x,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 点 O 为坐标原点, 那么 $|PO|$ 的最小值等于______, 最大值等于______.

14. 已知 A, B, C 三点在球心为 O, 半径为 R 的球面上, $AC\perp BC$, 且 $AB=R$, 那么 A, B 两点的球面距离为______, 球心到平面 ABC 的距离为______.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$.

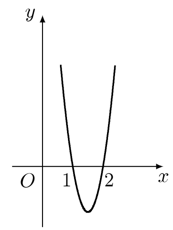
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 设 α 是第四象限的角, 且 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

16. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$, $(2,0)$, 如图所示, 求:

(1) x_0 的值;

(2) a, b, c 的值.

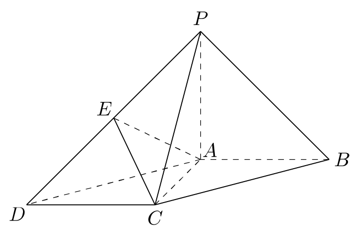


17. 如图, 在底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB\perp AC$, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA=AB$, 点 E 是 PD 的中点.

(1) 求证: $AC\perp PB$;

(2) 求证: $PB\,/\!/$ 平面 AEC;

(3) 求二面角 $E-AC-B$ 的大小.



18. 某公司招聘员工, 指定三门考试课程, 有两种考试方案.

方案一: 考试三门课程, 至少有两门及格为考试通过;

方案二: 在三门课程中, 随机选取两门, 这两门都及格为考试通过.

假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 a, b, c, 且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.

(1) 分别求该应聘者用方案一和方案二时考试通过的概率;

(2) 试比较该应聘者在上述两种方案下考试通过的概率的大小. (说明理由)

19. 已知点 $M(-2,0)$, $N(2,0)$, 动点 P 满足条件 $|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$. 记动点 P 的轨迹为 W.

(1) 求 W 的方程;

(2) 若 A, B 是 W 上的不同两点, O 是坐标原点, 求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值.

20. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 a_1, a_2 是正整数, 且 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$, $n=3, 4, 5, \cdots$, 则称 $\{a_n\}$ 为"绝对差数列".

(1) 举出一个前五项不为零的"绝对差数列"(只要求写出前十项);

(2) 若"绝对差数列"$\{a_n\}$ 中, $a_{20}=3$, $a_{21}=0$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 分别判断当 $n\to\infty$ 时, a_n 与 b_n 的极限是否存在, 如果存在, 求出其极限值;

(3) 证明: 任何"绝对差数列"中总含有无穷多个为零的项.

2006 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid 2x+1<3\}$, $B=\{x\mid -3<x<2\}$, 则 $A\cap B$ 等于 ( )

(A) $\{x\mid -3<x<1\}$ (B) $\{x\mid 1<x<2\}$

(C) $\{x\mid x>-3\}$ (D) $\{x\mid x<1\}$

2. 函数 $y=1+\cos x$ 的图象 ( )

(A) 关于 x 轴对称 (B) 关于 y 轴对称

(C) 关于原点对称 (D) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

3. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 都是非零向量, 则"$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$"是"$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$"的( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 在 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字组成的没有重复数字的三位数中, 各位数字之和为奇数的共有 ( )

(A) 36 个 (B) 24 个 (C) 18 个 (D) 6 个

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-4a, & x<1,\\ \log_a x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数, 那么 a 的取值范围是 ( )

(A) $(1,+\infty)$ (B) $(-\infty,3)$ (C) $\left[\dfrac{3}{5},3\right)$ (D) $(1,3)$

6. 如果 -1, a, b, c, -9 成等比数列, 那么 ( )

(A) $b=3$, $ac=9$ (B) $b=-3$, $ac=9$

(C) $b=3$, $ac=-9$ (D) $b=-3$, $ac=-9$

7. 设 A, B, C, D 是空间四个不同的点, 在下列命题中, 不正确的是 ( )

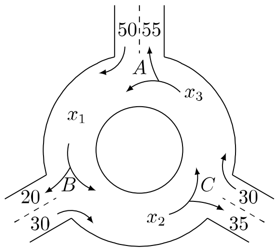
(A) 若 AC 与 BD 共面, 则 AD 与 BC 共面

(B) 若 AC 与 BD 是异面直线, 则 AD 与 BC 是异面直线

(C) 若 $AB=AC$, $DB=DC$ 则 $AD=BC$

(D) 若 $AB=AC$, $DB=DC$ 则 $AD\perp BC$

8. 如图为某三岔路口交通环岛的简化模型, 在某高峰时段, 单位时间进出路口 A, B, C, 的机动车辆数如图所示, 图中 x_1, x_2, x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overparen{AB}$, $\overparen{BC}$, $\overparen{CA}$ 的机动车辆数 (假设: 单位时间内, 在上述路段中, 同一路段上驶入与驶出的车辆数相等), 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ( )



(A) $x_1>x_2>x_3$ (B) $x_1>x_3>x_2$ (C) $x_2>x_3>x_1$ (D) $x_3>x_2>x_1$

二、填空题

9. 若三点 $A(2,2)$, $B(a,0)$, $C(0,4)$ 共线, 则 a 的值等于______.

10. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^3 的系数是______. (用数字作答)

11. 已知函数 $f(x)=a^x-4a+3$ 的反函数的图象经过点 $(-1,2)$, 那么 a 的值等于______.

12. 已知向量 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, 且 $\vec{a}\neq\pm\vec{b}$, 那么 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角的大小是______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c 若 $\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$, 则 $a:b:c=$______, $\angle B$ 的大小是______.

14. 已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 4,\\ y\geqslant x,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 点 O 为坐标原点, 那么 $|PO|$ 的最小值等于______, 最大值等于______.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos x}$.

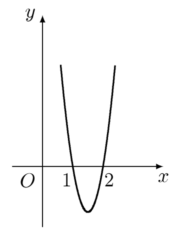
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 设 α 是第四象限的角, 且 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

16. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$, $(2,0)$, 如图所示, 求:

(1) x_0 的值;

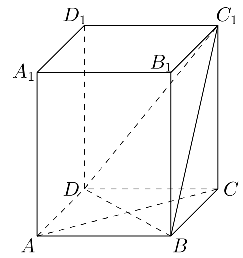
(2) a, b, c 的值.



17. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱.

(1) 求证: $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1;

(2) 若二面角 C_1-BD-C 的大小为 $60°$, 求异面直线 BC_1 与 AC 所成角的大小.



18. 某公司招聘员工, 指定三门考试课程, 有两种考试方案.
方案一: 考试三门课程, 至少有两门及格为考试通过;
方案二: 在三门课程中, 随机选取两门, 这两门都及格为考试通过.
假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 0.5, 0.6, 0.9, 且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.
(1) 该应聘者用方案一考试通过的概率;
(2) 该应聘者用方案二考试通过的概率.

19. 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在椭圆 C 上, 且 $PF_1\perp F_1F_2$, $|PF_1|=\dfrac{4}{3}$, $|PF_2|=\dfrac{14}{3}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 若直线 l 过圆 $x^2+y^2+4x-2y=0$ 的圆心 M, 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且 A、B 关于点 M 对称, 求直线 l 的方程.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 及公差 d 都为整数, 前 n 项和为 S_n.
(1) 若 $a_{11}=0$, $S_{14}=98$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $a_1\geqslant 6$, $a_{11}>0$, $S_{14}\geqslant 77$, 求所有可能的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2006 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A=\{2,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$, 则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ ( )

(A) $\{1,\ 6\}$ (B) $\{4,\ 5\}$ (C) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_4+a_6=12$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 S_9 的值为 ( )

(A) 48 (B) 54 (C) 60 (D) 66

3. 过坐标原点且与圆 $x^2+y^2-4x+2y+\dfrac{5}{2}=0$ 相切的直线的方程为 ( )

(A) $y=-3x$ 或 $y=\dfrac{1}{3}x$ (B) $y=3x$ 或 $y=-\dfrac{1}{3}x$

(C) $y=-3x$ 或 $y=-\dfrac{1}{3}x$ (D) $y=3x$ 或 $y=\dfrac{1}{3}x$

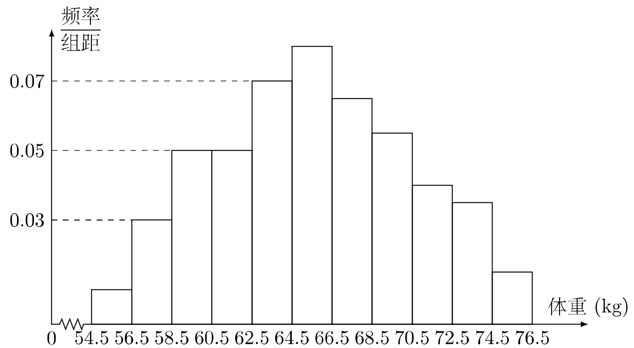
4. 对于任意的直线 l 与平面 α, 在平面 α 内必有直线 m, 使 m 与 l ( )

(A) 平行 (B) 相交 (C) 垂直 (D) 互为异面直线

5. 若 $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 64, 则展开式的常数项为 ( )

(A) -540 (B) -162 (C) 162 (D) 540

6. 为了了解某地区高三学生的身体发育情况, 抽查了该地区 100 名年龄为 17.5 岁 -18 岁的男生体重 (kg), 得到频率分布直方图如下:



根据上图可得这 100 名学生中体重在 $[56.5, 64.5)$ 的学生人数是 ( )

(A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 50

7. 与向量 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{7}{2}\right)$ 的夹角相等, 且模为 1 的向量是 ( )

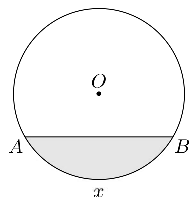
(A) $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ (B) $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

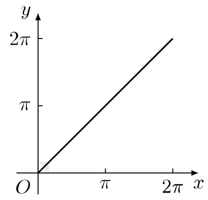
(C) $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ (D) $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

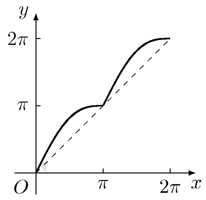
8. 将 5 名实习教师分配到高一年级的 3 个班实习, 每班至少 1 名, 最多 2 名, 则不同的分配方案有 ( )

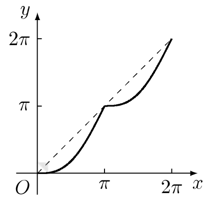
(A) 30 种 (B) 90 种 (C) 180 种 (D) 270 种

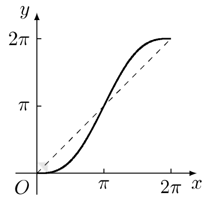
9. 如图所示, 单位圆中弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 x, $f(x)$ 表示弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍, 则函数 $y=f(x)$ 的图象是 ( )



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

10. 若 $a, b, c>0$ 且 $a(a+b+c)+bc=4-2\sqrt{3}$, 则 $2a+b+c$ 的最小值为( )

(A) $\sqrt{3}-1$ (B) $\sqrt{3}+1$ (C) $2\sqrt{3}+2$ (D) $2\sqrt{3}-2$

二、填空题

11. 复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}^3}$ 的值是______.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2n^2-n+1}=$______.

13. 已知 $\alpha,\ \beta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$, $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$, $\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{12}{13}$, 则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$______.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3\ (n\geqslant 1)$, 则该数列的通项 $a_n=$______.

15. 设 $a>0$, $a\neq 1$, 函数 $f(x)=a^{\lg(x^2-2x+3)}$ 有最大值, 则不等式 $\log_a(x^2-5x+7)>0$ 的解集为______.

16. 已知变量 x, y 满足约束条件 $1\leqslant x+y\leqslant 4$, $-2\leqslant x-y\leqslant 2$. 若目标函数 $z=ax+y$ (其中 $a>0$) 仅在点 $(3,1)$ 处取得最大值, 则 a 的取值范围为______.

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x+a$ (其中 $\omega>0$, $a\in\mathbf{R}$), 且 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的第一个最高点的横坐标为 $\dfrac{\pi}{6}$.

(1) 求 ω 的值;

(2) 如果 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$, 求 a 的值.

18. 某大厦的一部电梯从底层出发后只能在第 18、19、20 层可以停靠. 若该电梯在底层载有 5 位乘客, 且每位乘客在这三层的每一层下电梯的概率均为 $\dfrac{1}{3}$, 用 ξ 表示这 5 位乘客在第 20 层下电梯的人数, 求:

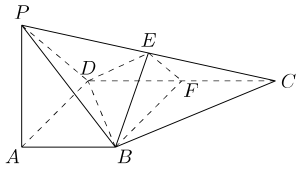
(1) 随机变量 ξ 的分布列;

(2) 随机变量 ξ 的期望.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $\angle DAB$ 为直角, $AB\,/\!/\,CD$, $AD=CD=2AB$, E、F 分别为 PC、CD 的中点.

(1) 试证: $CD\perp$ 平面 BEF;

(2) 设 $PA=k\cdot AB$, 且二面角 $E-BD-C$ 的平面角大于 30°, 求 k 的取值范围.



20. 已知函数 $f(x)=(x^2+bx+c)\mathrm{e}^x$, 其中 b, $c\in\mathbf{R}$ 为常数.

(1) 若 $b^2>4(a-1)$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b^2\leqslant 4(c-1)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-c}{x}=4$, 试证: $-6\leqslant b\leqslant 2$.

21. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.

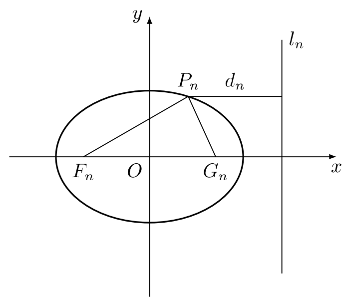
(1) 若 $f(2)=3$, 求 $f(1)$; 又若 $f(0)=a$, 求 $f(a)$;

(2) 设有且仅有一个实数 x_0, 使得 $f(x_0)=x_0$, 求函数 $f(x)$ 的解析表达式.

22. 已知一列椭圆 C_n: $x^2+\dfrac{y^2}{b_n^2}=1$, $0<b_n<1$, $n=1,2,\cdots$. 若椭圆 C_n 上有一点 P_n, 使 P_n 到右准线 l_n 的距离 d_n 是 $|P_nF_n|$ 与 $|P_nG_n|$ 的等差中项, 其中 F_n、G_n 分别是 C_n 的左、右焦点.

(1) 试证: $b_n\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(n\geqslant 1)$;

(2) 取 $b_n=\dfrac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$, 并用 S_n 表示 $\triangle P_nF_nG_n$ 的面积, 试证: $S_1<S_2$ 且 $S_n>S_{n+1}$ $(n\geqslant 3)$.



2006 普通高等学校招生考试 (重庆卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A=\{2,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$, 则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ ( )
   (A) $\{1,\ 6\}$ (B) $\{4,\ 5\}$ (C) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n>0$ 且 $a_3a_7=64$, 则 a_5 的值为 ( )
   (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

3. 以点 $(2,-1)$ 为圆心且与直线 $3x-4y+5=0$ 相切的圆的方程为 ( )
   (A) $(x-2)^2+(y+1)^2=3$ (B) $(x+2)^2+(y-1)^2=3$
   (C) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ (D) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

4. 若 P 是平面 α 外一点, 则下列命题正确的是 ( )
   (A) 过 P 只能作一条直线与平面 α 相交
   (B) 过 P 可作无数条直线与平面 α 垂直
   (C) 过 P 只能作一条直线与平面 α 平行
   (D) 过 P 可作无数条直线与平面 α 平行

5. $(2x-3)^5$ 的展开式中 x^2 项的系数为 ( )
   (A) -2160 (B) -1080 (C) 1080 (D) 2160

6. 设函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 且 $y=f(2x-1)$ 的图象过点 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 则 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必过点 ( )
   (A) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ (B) $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ (C) $(1,0)$ (D) $(0,1)$

7. 某地区有 300 家商店, 其中大型商店有 30 家, 中型商店有 75 家, 小型商店有 195 家. 为了掌握各商店的营业情况, 要从中抽取一个容量为 20 的样本. 若采用分层抽样的方法, 抽取的中型商店数是 ( )
   (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 13

8. 已知三点 $A(2,3)$, $B(-1,-1)$, $C(6,k)$, 其中 k 为常数. 若 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 ( )
   (A) $\arccos(-\dfrac{24}{25})$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\arccos\dfrac{24}{25}$
   (C) $\arccos\dfrac{24}{25}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{24}{25}$

9. 高三 (一) 班需要安排毕业晚会的 4 个音乐节目, 2 个舞蹈节目和 1 个曲艺节目的演出顺序, 要求两个舞蹈节目不连排, 则不同排法的种数是 ( )
   (A) 1800 (B) 3600 (C) 4320 (D) 5040

10. 若 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=-\dfrac{1}{2}$, 则 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值等于 ( )
   (A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. 设 $A(x_1,y_1)$, $B\left(4,\dfrac{9}{5}\right)$, $C(x_2,y_2)$ 是右焦点为 F 的椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上三个不同的点, 则"$|AF|$, $|BF|$, $|CF|$ 成等差数列"是"$x_1+x_2=8$"的 ( )
   (A) 充要条件 (B) 必要而不充分条件
   (C) 充分而不必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

12. 若 $a,b,c>0$ 且 $a^2+2ab+2ac+4bc=12$, 则 $a+b+c$ 的最小值是 ( )
   (A) $2\sqrt{3}$ (B) 3 (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 则 $\tan\alpha=$______.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2$ $(n\geqslant 1)$, 则该数列的通项 $a_n=$______.

15. 设 $a>0$, $a\neq 1$, 函数 $f(x)=\log_a(x^2-2x+3)$ 有最小值, 则不等式 $\log_a(x-1)>0$ 的解集为______.

16. 已知变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-3\leqslant 0,\\ x+3y-3\geqslant 0,\\ y-1\leqslant 0,\end{cases}$ 若目标函数 $z=ax+y$ (其中 $a>0$) 仅在点 $(3,0)$ 处取得最大值, 则 a 的取值范围为______.

三、解答题

17. 甲、乙、丙三人在同一办公室工作, 办公室里只有一部电话机, 设经该机打进的电话是打给甲、乙、丙的概率依次为 $\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{2}$. 若在一段时间内打进三个电话, 且各个电话相互独立. 求:
   (1) 这三个电话是打给同一个人的概率;
   (2) 这三个电话中恰有两个是打给甲的概率.

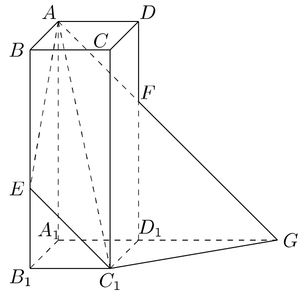
18. 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x+a$ (其中 $\omega>0$, $a\in\mathbf{R}$), 且 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的第一个最高点的横坐标为 $\dfrac{\pi}{6}$.
   (1) 求 ω 的值;
   (2) 如果 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$, 求 a 的值.

19. 设函数 $f(x)=x^3-3ax^2+3bx$ 的图象与直线 $12x+y-1=0$ 相切于点 $(1,-11)$.
   (1) 求 a,b 的值;
   (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

20. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1$, $BB_1=\sqrt{3}+1$, E 为 BB_1 上使 $B_1E=1$ 的点, 平面 AEC_1 交 DD_1 于 F, 交 A_1D_1 的延长线于 G. 求:

(1) 异面直线 AD 与 C_1G 所成角的大小;

(2) 二面角 $A-C_1G-A_1$ 的正切值.



21. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是奇函数.

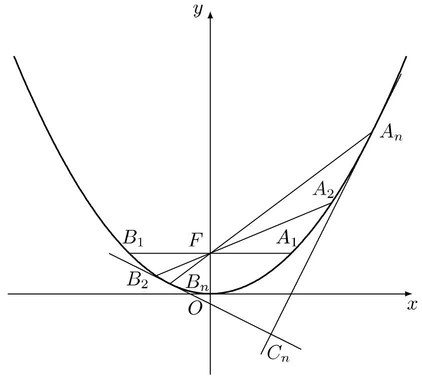
(1) 求 a, b 的值;

(2) 若对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

22. 如图, 对每个正整数 n, $A_n(x_n,y_n)$ 是抛物线 $x^2=4y$ 上的点, 过焦点 F 的直线 FA_n 交抛物线于另一点 $B_n(s_n,t_n)$.

(1) 试证: $x_ns_n=-4\ (n\geqslant 1)$;

(2) 取 $x_n=2^n$, 并记 C_n 为抛物线上分别以 A_n 与 B_n 为切点的两条切线的交点. 试证: $|FC_1|+|FC_2|+\cdots+|FC_n|=2^n-2^{-n+1}+1$.



2006 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

一、选择题

1. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$, 则复数 $(a+bi)(c+di)$ 为实数的充要条件是 ( )

(A) $ad-bc=0$ (B) $ac-bd=0$ (C) $ac+bd=0$ (D) $ad+bc=0$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_2+a_3=13$, 则 $a_4+a_5+a_6$ 等于 ( )

(A) 40 (B) 42 (C) 43 (D) 45

3. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) 7 (C) $-\dfrac{1}{7}$ (D) -7

4. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 且 $A=\{x\mid |x-1|>2\}$, $B=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于 ( )

(A) $[-1,4)$ (B) $(2,3)$ (C) $(2,3]$ (D) $(-1,4)$

5. 已知正方体外接球的体积是 $\dfrac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于 ( )

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

6. 在一个口袋中装有 5 个白球和 3 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 从中摸出 3 个球, 至少摸到 2 个黑球的概率等于 ( )

(A) $\dfrac{2}{7}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{9}{28}$

7. 对于平面 α 和共面的直线 m、n, 下列命题中真命题是 ( )

(A) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$

(B) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(D) 若 m、n 与 α 所成的角相等, 则 $m\parallel n$

8. 函数 $y=\log_2\dfrac{x}{x-1}$ $(x>1)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$ $(x>0)$ (B) $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$ $(x<0)$

(C) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x}$ $(x>0)$ (D) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x}$ $(x<0)$

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2, 则 ω 的最小值等于 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是 ( )

(A) $(1,2]$ (B) $(1,2)$ (C) $[2,+\infty)$ (D) $(2,+\infty)$

11. 已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC=30^\circ$. 设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (m、$n\in\mathbf{R}$), 则 $\dfrac{m}{n}$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) 3 (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

12. 对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 定义它们之间的一种"距离": $\|AB\|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$. 给出下列三个命题:

① 若点 C 在线段 AB 上, 则 $\|AC\|+\|CB\|=\|AB\|$;

② 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C=90^\circ$, 则 $\|AC\|^2+\|CB\|^2=\|AB\|^2$;

③ 在 $\triangle ABC$ 中, $\|AC\|+\|CB\|>\|AB\|$.

其中真命题的个数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

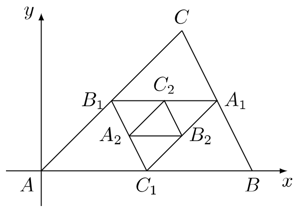
二、填空题

13. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 x^4 的系数是______. (用数字作答)

14. 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切, 则 $a=$______.

15. 一个均匀小正方体的六个面中, 三个面上标以数 0, 两个面上标以数 1, 一个面上标以数 2. 将这个小正方体抛掷 2 次, 则向上的数之积的数学期望是______.

16. 如图, 连结 $\triangle ABC$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_1B_1C_1$, 又连结 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_2B_2C_2$, 如此无限继续下去, 得到一系列三角形: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\cdots$, 这一系列三角形趋向于一个点 M. 已知 $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$, 则点 M 的坐标是______.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间;

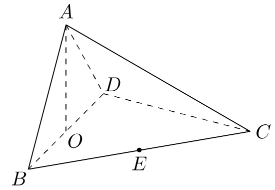
(2) 函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin 2x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的变换得到?

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, O、E 分别是 BD、BC 的中点, $CA=CB=CD=BD=2$, $AB=AD=\sqrt{2}$.

(1) 求证: $AO\perp$ 平面 BCD;

(2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;

(3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.



19. 统计表明, 某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y (升) 关于行驶速度 x (千米/小时) 的函数解析式可以表示为: $y=\dfrac{1}{128000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8$ $(0<x\leqslant 120)$. 已知甲、乙两地相距 100 千米.

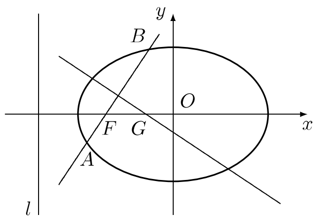
(1) 当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地要耗油多少升?

(2) 当汽车以多大的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地耗油最少? 最少为多少升?

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F, O 为坐标原点.

(1) 求过点 O、F, 并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程;

(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 G, 求点 G 横坐标的取值范围.



21. 已知函数 $f(x)=-x^2+8x$, $g(x)=6\ln x+m$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值 $h(t)$;

(2) 是否存在实数 m, 使得 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且只有三个不同的交点? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}4^{b_3-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 证明: $\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2006 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

一、选择题

1. 已知两条直线 $y=ax-2$ 和 $y=(a+2)x+1$ 互相垂直, 则 a 等于 ( )

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_2+a_3=13$, 则 $a_4+a_5+a_6$ 等于 ( )

(A) 40 (B) 42 (C) 43 (D) 45

3. "$\tan\alpha=1$"是"$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) 7 (C) $-\dfrac{1}{7}$ (D) -7

5. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 且 $A=\{x\mid|x-1|>2\}$, $B=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于 ( )

(A) $[-1,4)$ (B) $(2,3)$ (C) $(2,3]$ (D) $(-1,4)$

6. 函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ $(x\neq-1)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\dfrac{x}{1-x}$ $(x\neq1)$ (B) $y=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq1)$

(C) $y=\dfrac{x-1}{x}$ $(x\neq0)$ (D) $y=\dfrac{1-x}{x}$ $(x\neq0)$

7. 已知正方体外接球的体积是 $\dfrac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于 ( )

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

8. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 3 人, 分别从事三项不同的工作, 若这 3 人中至少有 1 名女生, 则选派方案共有 ( )

(A) 108 种 (B) 186 种 (C) 216 种 (D) 270 种

9. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $120°$, $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$, 则 $\left|\vec{b}\right|$ 等于 ( )

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 1

10. 对于平面 α 和共面的直线 m、n, 下列命题中真命题是 ( )

(A) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$

(B) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(D) 若 m、n 与 α 所成的角相等, 则 $m\parallel n$

11. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 若过点 F 且倾斜角为 $60°$ 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是 ( )

(A) $(1,2]$ (B) $(1,2)$ (C) $[2,+\infty)$ (D) $(2,+\infty)$

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)=\lg x$. 设 $a=f\left(\dfrac{6}{5}\right)$, $b=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $c=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$, 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $b<a<c$ (C) $c<b<a$ (D) $c<a<b$

二、填空题

13. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 x^4 的系数是______. (用数字作答)

14. 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切, 则 $a=$______.

15. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}y\leqslant1,\\ y\geqslant|x-1|,\end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值是______.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2, 则 ω 的最小值等于______.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间;

(2) 函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin2x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的变换得到?

18. 每次抛掷一枚骰子 (六个面上分别标以数 1, 2, 3, 4, 5, 6).

(1) 连续抛掷 2 次, 求向上的数不同的概率;

(2) 连续抛掷 2 次, 求向上的数之和为 6 的概率;

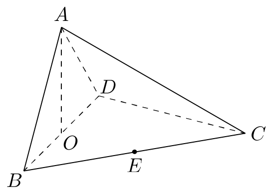
(3) 连续抛掷 5 次, 求向上的数为奇数恰好出现 3 次的概率.

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, O、E 分别是 BD、BC 的中点, $CA=CB=CD=BD=2$, $AB=AD=\sqrt{2}$.

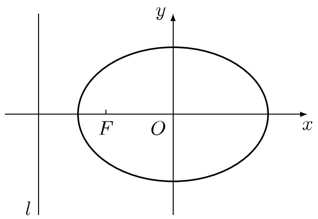
(1) 求证: $AO\perp$ 平面 BCD;

(2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;

(3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F, O 为坐标原点.
(1) 求过点 O、F, 并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程;
(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 并且线段 AB 的中点在直线 $x+y=0$ 上, 求直线 AB 的方程.



21. 已知 $f(x)$ 是二次函数, 不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,5)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值是 12.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 是否存在自然数 m, 使得方程 $f(x)+\dfrac{37}{x}=0$ 在区间 $(m,m+1)$ 内有且只有两个不等的实数根? 若存在, 求出所有 m 的值; 若不存在, 说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明: $\{b_n\}$ 是等差数列.

2006 普通高等学校招生考试 (广东卷)

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是 ( )

(A) $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ (B) $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ (C) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ (D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$

2. 若复数 z 满足方程 $z^2+2=0$, 则 $z^3=$ ( )

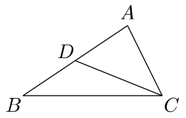
(A) $\pm 2\sqrt{2}$ (B) $-2\sqrt{2}$ (C) $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$ (D) $\pm 2\sqrt{2}\mathrm{i}$

3. 下列函数中, 在其定义域内既是奇函数又是减函数的是 ( )

(A) $y=-x^3$, $x\in\mathbf{R}$ (B) $y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$

(C) $y=x$, $x\in\mathbf{R}$ (D) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $x\in\mathbf{R}$

4. 如图所示, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点, 则向量 $\overrightarrow{CD}=$ ( )



(A) $-\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (B) $-\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

(C) $\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (D) $\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

5. 给出以下四个命题:

① 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的一个平面和这个平面相交, 那么这条直线和交线平行;

② 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面;

③ 如果两条直线都平行于一个平面, 那么这两条直线互相平行;

④ 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

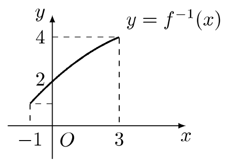
其中真命题的个数是 ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

6. 已知某共有 10 项, 其奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差为 ( )

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

7. 函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于点 $P(0,2)$ (如图所示), 则方程 $f(x)=0$ 在 $[1,4]$ 上的根是 $x=$ ( )



(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

8. 已知双曲线 $3x^2-y^2=9$, 则双曲线右支上的点 P 到右焦点的距离与点 P 到右准线的距离之比等于 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (C) 2 (D) 4

9. 在约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant s,\\ y+2x\leqslant 4\end{cases}$ 下, 当 $3\leqslant s\leqslant 5$ 时, 目标函数 $z=3x+2y$ 的最大值的变化范围是 ( )

(A) $[6,15]$ (B) $[7,15]$ (C) $[6,8]$ (D) $[7,8]$

10. 对于任意的两个实数对 (a,b) 和 (c,d), 规定: $(a,b)=(c,d)$, 当且仅当 $a=c$, $b=d$; 运算"$\otimes$"为: $(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$; 运算"$\oplus$"为: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$. 设 p, $q\in\mathbf{R}$, 若 $(1,2)\otimes(p,q)=(5,0)$, 则 $(1,2)\oplus(p,q)=$ ( )

(A) $(4,0)$ (B) $(2,0)$ (C) $(0,2)$ (D) $(0,-4)$

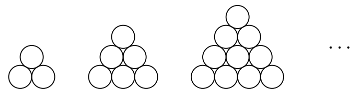
二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{2+x}\right)=$______.

12. 棱长为 3 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为______.

13. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^{11}$ 的展开式中, x^5 的系数为______.

14. 在德国不莱梅举行的第 48 届世乒赛期间, 某商店橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆"正三棱锥"形的展品, 其中第 1 堆只有 1 层, 就一个球; 第 2, 3, 4, $\cdots$ 堆最底层 (第一层) 分别按图示方式固定摆放, 从第二层开始, 每层的小球自然垒放在下一层之上, 第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球, 以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数, 则 $f(3)=$______; $f(n)=$______. (答案用 n 表示)



三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的的最大值和最小值;

(3) 若 $f(\alpha)=\dfrac{3}{4}$, 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

16. 某运动员射击一次所得环数 X 的分布列如下:

X	$0\sim 6$	7	8	9	10
P	0	0.2	0.3	0.3	0.2

(1) 求该运动员两次都命中 7 环的概率;

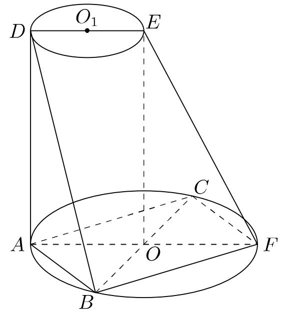
(2) 求 ξ 的分布列;

(3) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

17. 如图所示, AF, DE 分别是 $\odot O$, $\odot O_1$ 的直径, AD 与两圆所在的平面均垂直, $AD=8$, BC 是 $\odot O$ 的直径, $AB=AC=6$, $OE\parallel AD$.

(1) 求二面角 $B-AD-F$ 的大小;

(2) 求直线 BD 与 EF 所成的角.



18. 设函数 $f(x)=-x^3+3x+2$ 分别在 x_1, x_2 处取得极小值、极大值, xOy 平面上点 A, B 的坐标分别为 $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, 该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4$, 点 Q 是点 P 关于直线 $y=2(x-4)$ 的对称点, 求:
(1) 求点 A, B 的坐标;
(2) 动点 Q 的轨迹方程.

19. 已知公比为 q $(0<q<1)$ 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各项的和为 9, 无穷等比数列 $\{a_n^2\}$ 各项的和为 $\dfrac{81}{5}$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公比 q;
(2) 对给定的 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$, 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k, 公差为 $2a_k-1$ 的等差数列, 求 $T^{(2)}$ 的前 10 项之和;
(3) 设 b_i 为数列 $T^{(i)}$ 的第 i 项, $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 求 S_n, 并求正整数 m $(m>1)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^m}$ 存在且不等于零.

20. A 是由定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: ① 对任意的 $x\in[1,2]$, 都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$; ② 存在常数 L $(0<L<1)$, 使得对任意的 x_1, $x_2\in[1,2]$, 都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$.
(1) 设 $\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x\in[2,4]$, 证明: $\varphi(x)\in A$;
(2) 设 $\varphi(x)\in A$, 如果存在 $x_0\in(1,2)$, 使得 $x_0=\varphi(2x_0)$, 那么这样的 x_0 是唯一的;
(3) 设 $\varphi(x)\in A$, 任取 $x_1\in(1,2)$, 令 $x_{n-1}=\varphi(2x_n)$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, 证明: 给定正整数 k, 对任意的正整数 p, 成立不等式 $|x_{k+p}-x_k|\leqslant\dfrac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$.

2006 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

1. 已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$, $\vec{b}$ 是不平行于 x 轴的单位向量, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$, 则 $\vec{b}=$ ( )

(A) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ (D) $(1,0)$

2. 若互不相等的实数 a,b,c 成等差数列, c,a,b 成等比数列, 且 $a+3b+c=10$, 则 $a=$ ( )

(A) 4 (B) 2 (C) -2 (D) -4

3. $\triangle ABC$ 的内角 A 满足 $\sin 2A=\dfrac{2}{3}$, 则 $\sin A+\cos A=$ ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) $-\dfrac{5}{3}$

4. 设 $f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$, 则 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域为 ( )

(A) $(-4,0)\cup(0,4)$ (B) $(-4,-1)\cup(1,4)$
(C) $(-2,-1)\cup(1,2)$ (D) $(-4,-2)\cup(2,4)$

5. 在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$ 的展开式中, x 的幂的指数是整数的项共有 ( )

(A) 3 项 (B) 4 项 (C) 5 项 (D) 9 项

6. 关于直线 m,n 与平面 α,β, 有以下四个命题:
① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp n$;
③ 若 $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\perp n$;
④ 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\parallel n$.
其中真命题的序号是 ( )

(A) ①② (B) ③④ (C) ①④ (D) ②③

7. 设过点 $P(x,y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A, B 两点, 点 Q 与点 P 关于 y 轴对称, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$, 则点 P 的轨迹方程是 ( )

(A) $3x^2+\dfrac{3}{2}y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ (B) $3x^2-\dfrac{3}{2}y^2=1\ (x>0,\ y>0)$

(C) $\dfrac{3}{2}x^2-3y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ (D) $\dfrac{3}{2}x^2+3y^2=1\ (x>0,\ y>0)$

8. 有限集合 S 中元素的个数记作 $\mathrm{card}(S)$, 设 A, B 都为有限集合, 给出下列命题:
① $A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$;
② $A\subseteq B$ 的必要条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$;
③ $A\nsubseteq B$ 的充分条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$;
④ $A=B$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.
其中真命题的序号是 ( )

(A) ③④ (B) ①② (C) ①④ (D) ②③

9. 已知平面区域 D 由以 $A(1,3)$, $B(5,2)$, $C(3,1)$ 为顶点的三角形内部和边界组成. 若在区域 D 上有无穷多个点 (x,y) 可使目标函数 $z=x+my$ 取得最小值, 则 $m=$ ( )

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 4

10. 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$, 给出下列四个命题:
① 存在实数 k, 使得方程恰有 2 个不同的实根;
② 存在实数 k, 使得方程恰有 4 个不同的实根;
③ 存在实数 k, 使得方程恰有 5 个不同的实根;
④ 存在实数 k, 使得方程恰有 8 个不同的实根.
其中假命题的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题

11. 设 x、y 为实数, 且 $\dfrac{x}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{y}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{5}{1-3\mathrm{i}}$, 则 $x+y=$______.

12. 接种某疫苗后, 出现发热反应的概率为 0.80, 现有 5 人接种该疫苗, 至少有 3 人出现发热反应的概率为______. (精确到 0.01)

13. 已知直线 $5x+12y+a=0$ 与圆 $x^2-2x+y^2=0$ 相切, 则 a 的值为______.

14. 某工程队有 6 项工程需要先后单独完成, 其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行, 工程丙必须在工程乙完成后才能进行, 又工程丁必须在工程丙完成后立即进行. 那么安排这 6 项工程的不同排法种数是______. (用数字作答)

15. 将杨辉三角中的每一个数 C_n^r 都换成分数 $\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^r}$, 就得到一个如下图所示的分数三角形, 成为莱布尼茨三角形, 从莱布尼茨三角形可看出 $\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^r}+\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^x}=\dfrac{1}{n\mathrm{C}_{n-1}^r}$, 其中 $x=$______, 令 $a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{60}+\cdots+\dfrac{1}{n\mathrm{C}_{n-1}^2}+\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______.

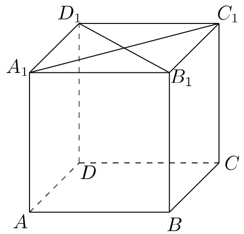
$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{7}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{140}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{7}$$
$$\cdots\cdots$$

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, 其中向量 $\vec{a}=(\sin x,-\cos x)$, $\vec{b}=(\sin x,-3\cos x)$, $\vec{c}=(-\cos x,\sin x)$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期;
(2) 将函数 $f(x)$ 的图像按向量 $\vec{d}$ 平移, 使平移后得到的图像关于坐标原点成中心对称, 求长度最小的 $\vec{d}$.

17. 已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象经过坐标原点, 其导函数为 $f'(x)=6x-2$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 点 (n,S_n) $(n\in\mathbf{N}^*)$ 均在函数 $y=f(x)$ 的图象上.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=\dfrac{3}{a_na_{n+1}}$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求使得 $T_n<\dfrac{m}{20}$ 对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 m.

18. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧棱 CC_1 上的一点, $CP=m$.
(1) 试确定 m, 使直线 AP 与平面 BDD_1B_1 所成角的正切值为 $3\sqrt{2}$;
(2) 在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 Q, 使得对任意的 m, D_1Q 在平面 APD_1 上的射影垂直于 AP, 并证明你的结论.



19. 在某校举行的数学竞赛中, 全体参赛学生的竞赛成绩近似服从正态分布 $N(70,100)$. 已知成绩在 90 分以上 (含 90 分) 的学生有 12 名.
(1) 试问此次参赛学生总数约为多少人?
(2) 若该校计划奖励竞赛成绩排在前 50 名的学生, 试问设奖的分数线约为多少分?

可供查阅的 (部分) 标准正态分布表 $\Phi(x_0)=P(x<x_0)$

x_0	0	1	2	3	4
1.2	0.8849	0.8869	0.888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
x_0	5	6	7	8	9
1.2	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.9	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

20. 设 A、B 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ 的左、右顶点, 椭圆长半轴的长等于焦距, 且 $x=4$ 为它的右准线.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设 P 为右准线上不同于点 $(4,0)$ 的任意一点, 若直线 AP, BP 分别与椭圆相交于异于 A, B 的点 M、N, 证明点 B 在以 MN 为直径的圆内.

21. 设 $x=3$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^{3-x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的一个极值点.
(1) 求 a 与 b 的关系式 (用 a 表示 b), 并求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 设 $a>0$, $g(x)=\left(a^2+\dfrac{25}{4}\right)\mathrm{e}^x$. 若存在 ξ_1, $\xi_2\in[0,4]$ 使得 $|f(\xi_1)-g(\xi_2)|<1$ 成立, 求 a 的取值范围.

2006 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

一、选择题

1. 集合 $P=\{x\mid x^2-16<0\}$, $Q=\{x\mid x=2n,\ n\in\mathbf{Z}\}$, 则 $P\cap Q=$ ( )

(A) $\{-2,\ 2\}$ (B) $\{-2,\ 2,\ -4,\ 4\}$

(C) $\{-2,\ 0,\ 2\}$ (D) $\{-2,\ 2,\ 0,\ -4,\ 4\}$

2. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 若 $\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $\vec{a}-2\vec{b}$ 互相垂直, 则 $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) 4 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 2

3. 已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\alpha\in(0,\pi)$, 则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) $-\dfrac{5}{3}$

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{10}=3$, 则 $a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9=$ ( )

(A) 81 (B) $27\sqrt[9]{27}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 243

5. 甲: A_1、A_2 是互斥事件; 乙: A_1、A_2 是对立事件. 那么 ( )

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

6. 关于直线 m, n 与平面 α, β, 有以下四个命题:

① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\parallel n$;

② 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp n$;

③ 若 $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\perp n$;

④ 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\parallel n$.

其中真命题的序号是 ( )

(A) ①② (B) ③④ (C) ①④ (D) ②③

7. 设 $f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$, 则 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域为 ( )

(A) $(-4,0)\cup(0,4)$ (B) $(-4,-1)\cup(1,4)$

(C) $(-2,-1)\cup(1,2)$ (D) $(-4,-2)\cup(2,4)$

8. 在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$ 的展开式中, x 的幂的指数是整数的项共有 ( )

(A) 3 项 (B) 4 项 (C) 5 项 (D) 9 项

9. 设过点 $P(x,y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A, B 两点, 点 Q 与点 P 关于 y 轴对称, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$, 则点 P 的轨迹方程是 ( )

(A) $3x^2+\dfrac{3}{2}y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ (B) $3x^2-\dfrac{3}{2}y^2=1\ (x>0,\ y>0)$

(C) $\dfrac{3}{2}x^2-3y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ (D) $\dfrac{3}{2}x^2+3y^2=1\ (x>0,\ y>0)$

10. 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$, 给出下列四个命题:

① 存在实数 k, 使得方程恰有 2 个不同的实根;

② 存在实数 k, 使得方程恰有 4 个不同的实根;

③ 存在实数 k, 使得方程恰有 5 个不同的实根;

④ 存在实数 k, 使得方程恰有 8 个不同的实根.

其中假命题的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $b=4$, $A=30^\circ$, 则 $\sin B=$______.

12. 接种某疫苗后, 出现发热反应的概率为 0.80, 现有 5 人接种该疫苗, 至少有 3 人出现发热反应的概率为______. (精确到 0.01)

13. 若直线 $y=kx+2$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是______.

14. 安排 5 名歌手的演出顺序时, 要求某名歌手不第一个出场, 另一名歌手不最后一个出场, 不同排法的总数是______. (用数字作答)

15. 半径为 r 的圆的面积 $S(r)=\pi r^2$, 周长 $C(r)=2\pi r$, 若将 r 看作 $(0,+\infty)$ 上的变量, 则 $(\pi r^2)'=2\pi r$ ①, ①式可以用语言叙述为: 圆的面积函数的导数等于圆的周长函数. 对于半径为 R 的球, 若将 R 看作 $(0,+\infty)$ 上的变量, 请你写出类似于①的式子: ________________②, ②式可以用语言叙述为: ________________________________.

三、解答题

16. 设向量 $\vec{a}=(\sin x,\cos x)$, $\vec{b}=(\cos x,\cos x)$, $x\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值与最小正周期;

(2) 求使不等式 $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$ 成立的 x 的取值集.

17. 某单位最近组织了一次健身活动, 活动分为登山组和游泳组, 且每个职工至多参加了其中一组. 在参加活动的职工中, 青年人占 42.5%, 中年人占 47.5%, 老年人占 10%. 登山组的职工占参加活动总人数的 $\dfrac{1}{4}$, 且该组中, 青年人占 50%, 中年人占 40%, 老年人占 10%. 为了了解各组不同年龄层次的职工对本次活动的满意程度, 现用分层抽样的方法从参加活动的全体职工中抽取一个容量为 200 的样本. 试确定:

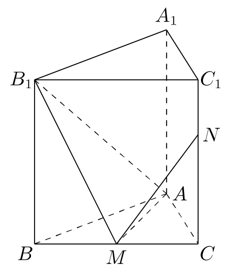
(1) 游泳组中, 青年人、中年人、老年人分别所占的比例;

(2) 游泳组中, 青年人、中年人、老年人分别应抽取的人数.

18. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长和底面边长均为 1, M 是底面 BC 边上的中点, N 是侧棱 CC_1 上的点, 且 $CN=2C_1N$.

(1) 求二面角 B_1-AM-N 的平面角的余弦值;

(2) 求点 B_1 到平面 AMN 的距离.



19. 设函数 $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$ 在 $x=1$ 处取得极值 -2, 试用 c 表示 a 和 b, 并求 $f(x)$ 的单调区间.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 点 $\left(n, \dfrac{S_n}{n}\right)$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 均在函数 $y=3x-2$ 的图像上.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=\dfrac{3}{a_n a_{n+1}}$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求使得 $T_n<\dfrac{m}{20}$ 对所有 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 m.

21. 设 A、B 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ 的左、右顶点, 椭圆长半轴的长等于焦距, 且 $x=4$ 为它的右准线.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设 P 为右准线上不同于点 $(4,0)$ 的任意一点, 若直线 AP, BP 分别与椭圆相交于异于 A, B 的点 M、N, 证明点 B 在以 MN 为直径的圆内.

2006 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域是 ( )

(A) $(3,+\infty)$ (B) $[3,+\infty)$ (C) $(4,+\infty)$ (D) $[4,+\infty)$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=\dfrac{1}{3}$, 且对任意正整数 m,n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

3. 过平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有 ( )

(A) 4 条 (B) 6 条 (C) 8 条 (D) 12 条

4. "$a=1$"是"函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $|\vec{a}|=2\left|\vec{b}\right|\neq 0$, 且关于 x 的方程 $x^2+|\vec{a}|x+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 有实根, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的取值范围是 ( )

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ (C) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ (D) $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$

6. 某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目, 且在同一个城市投资的项目不超过 2 个, 则该外商不同的投资方案有 ( )

(A) 16 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 60 种

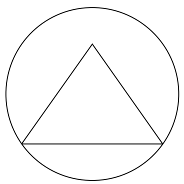
7. 过双曲线 $M: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l, 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B,C, 且 $|AB|=|BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 ( )

(A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

8. 设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$, 集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$, $P=\{x\mid f'(x)>0\}$, 若 $M\subsetneqq P$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

9. 棱长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面如图, 则图中三角形 (正四面体的截面) 的面积是 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 l: $ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

二、填空题

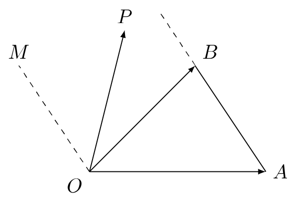
11. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 -80, 则实数 a 的值是______.

12. 已知 $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x-y+1\leqslant 0, \\ 2x-y-2\leqslant 0, \end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最小值是______.

13. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积是______.

14. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(ab\neq 0)$ 是偶函数, 则有序实数对 (a,b) 可以是______. (写出你认为正确的一组数字即可)

15. 如图, $OM\parallel AB$, 点 P 在由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 则 x 的取值范围是______; 当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是______.

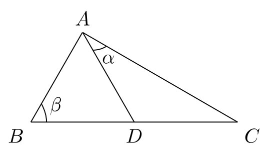


三、解答题

16. 如图, D 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, $AB=AD$, 记 $\angle CAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$.

(1) 证明: $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$;

(2) 若 $AC=\sqrt{3}DC$, 求 β 的值.



17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

(1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;

(2) 平均有多少家煤矿必须整改;

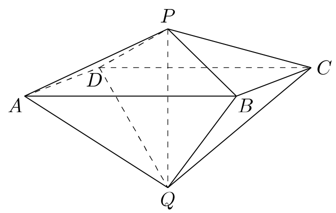
(3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高分别为 1 和 2, $AB=4$.

(1) 证明: $PQ\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 AQ 与 PB 所成的角;

(3) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=x-\sin x$, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $0<a_1<1$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 证明:
(1) $0<a_{n+1}<a_n<1$;
(2) $a_{n+1}<\frac{1}{6}{a_n}^3$.

20. 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 (含污物体的清洁度定义为: $1-\dfrac{\text{污物质量}}{\text{物体质量 (含污物)}}$) 为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a $(1\leqslant a\leqslant 3)$. 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\dfrac{x+0.8}{x+1}$ $(x>a-1)$, 用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\dfrac{y+ac}{y+a}$, 其中 c $(0.8<c<0.99)$ 是该物体初次清洗后的清洁度.
(1) 分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;
(2) 若采用方案乙, 当 a 为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最少? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

21. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 抛物线 C_2: $(y-m)^2=2px$ $(p>0)$, 且 C_1、C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.
(1) 当 $AB\perp x$ 轴时, 求 m、p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;
(2) 是否存在 m、p 的值, 使抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上? 若存在, 求出符合条件的 m、p 的值; 若不存在, 请说明理由.

2006 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x}$ 的定义域是 ( )

(A) $(0,1]$ (B) $(0,+\infty)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

2. 已知向量 $\vec{a}=(2,t)$, $\vec{b}=(1,2)$, 若 $t=t_1$ 时, $\vec{a}\parallel\vec{b}$; $t=t_2$ 时, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 则 ( )

(A) $t_1=-4, t_2=-1$ (B) $t_1=-4, t_2=1$

(C) $t_1=4, t_2=-1$ (D) $t_1=4, t_2=1$

3. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 80, 则实数 a 的值是 ( )

(A) -2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[3]{4}$ (D) 2

4. 过半径为 2 的球 O 表面上一点 A 作球 O 的截面, 若 OA 与该截面所成的角是 $60°$, 则该截面的面积是 ( )

(A) π (B) 2π (C) 3π (D) $2\sqrt{3}\pi$

5. "$a=1$"是"函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 在数字 1, 2, 3 与符号 $+$, $-$ 五个元素的所有全排列中, 任意两个数字都不相邻的全排列个数是 ( )

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24

7. 圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点到直线 $x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离的差是 ( )

(A) 36 (B) 18 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$

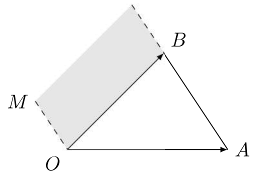
8. 设点 P 是函数 $f(x)=\sin\omega x$ 的图象 C 的一个对称中心, 若点 P 到图象 C 的对称轴上的距离的最小值是 $\dfrac{\pi}{4}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是 ( )

(A) 2π (B) π (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

9. 过双曲线 M: $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l, 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B, C, 且 $|AB|=|BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$

10. 如图, $OM\parallel AB$, 点 P 由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内 (不含边界), 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 则实数对 (x,y) 可以是 ( )



(A) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ (B) $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ (C) $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

二、填空题

11. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$______.

12. 某高校有甲、乙两个数学建模兴趣班. 其中甲班 40 人, 乙班 50 人. 现分析两个班的一次考试成绩, 算得甲班的平均成绩是 90 分, 乙班的平均成绩是 81 分, 则该校数学建模兴趣班的平均成绩是______分.

13. 已知 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x-y+1\leqslant 0,\\ 2x-y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最小值是______.

14. 过三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 ABB_1A_1 平行的直线共有______条.

15. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数, 则 $a=$______.

三、解答题

16. 已知 $\sqrt{3}\sin\theta-\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)}{\cos(\pi+\theta)}\cdot\cos\theta=1$, $\theta\in(0,\pi)$, 求 θ 的值.

17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

(1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;

(2) 某煤矿不被关闭的概率;

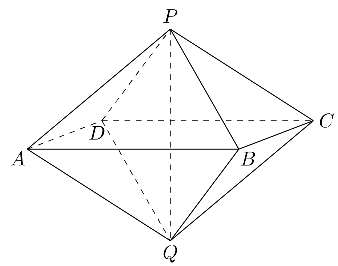
(3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高都是 2, $AB=4$.

(1) 证明: $PQ\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 AQ 与 PB 所成的角;

(3) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1-\dfrac{3}{a}$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若曲线 $y=f(x)$ 上两点 A、B 处的切线都与 y 轴垂直, 且线段 AB 与 x 轴有公共点, 求实数 a 的取值范围.

20. 在 m $(m\geqslant 2)$ 个不同数的排列 $P_1P_2\cdots P_m$ 中, 若 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$ 时 $P_i>P_j$ (即前面某数大于后面某数), 则称 P_i 与 P_j 构成一个逆序. 一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数. 记排列 $(n+1)n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 a_n, 如排列 21 的逆序数 $a_1=1$, 排列 321 的逆序数 $a_2=3$, 排列 4321 的逆序数 $a_3=6$.
(1) 求 a_4、a_5, 并写出 a_n 的表达式;
(2) 令 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明: $2n<b_1+b_2+\cdots b_n<2n+3$, $n=1,2,\cdots$.

21. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 抛物线 C_2: $(y-m)^2=2px$ $(p>0)$, 且 C_1、C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.
(1) 当 $AB\perp x$ 轴时, 求 m、p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;
(2) 若 $p=\dfrac{4}{3}$ 且抛物线 C_2 的焦点在直线 AB 上, 求 m 的值及直线 AB 的方程.

2006 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、选择题

1. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\sin x-|a|$, $x \in \mathbf{R}$ 为奇函数, 则 $a=$ ( )

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) ± 1

2. 圆 $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=1$ 的切线方程中有一个是 ( )

(A) $x-y=0$ (B) $x+y=0$ (C) $x=0$ (D) $y=0$

3. 某人 5 次上班途中所花的时间 (单位: 分钟) 分别为 x, y, 10, 11, 9. 已知这组数据的平均数为 10, 方差为 2, 则 $|x-y|$ 的值为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 为了得到函数 $y=2\sin\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象, 只需把函数 $y=2\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象上所有的点 ( )

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)

(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

5. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{3x}\right)^{10}$ 的展开式中含 x 的正整数指数幂的项数是 ( )

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

6. 已知两点 $M(-2,0)$, $N(2,0)$, 点 P 为坐标平面内的动点, 满足 $\left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MP}\right|+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=0$, 则动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程为 ( )

(A) $y^2=8x$ (B) $y^2=-8x$ (C) $y^2=4x$ (D) $y^2=-4x$

7. 若 A、B、C 为三个集合, $A\cup B=B\cap C$, 则一定有 ( )

(A) $A\subseteq C$ (B) $C\subseteq A$ (C) $A\neq C$ (D) $A\neq\varnothing$

8. 设 a、b、c 是互不相等的正数, 则下列不等式中不恒成立的是 ( )

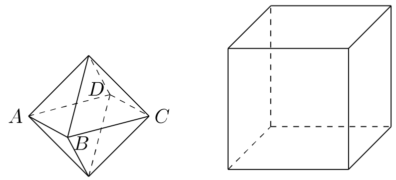
(A) $|a-b|\leqslant|a-c|+|b-c|$

(B) $a^2+\dfrac{1}{a^2}\geqslant a+\dfrac{1}{a}$

(C) $|a-b|+\dfrac{1}{a-b}\geqslant 2$

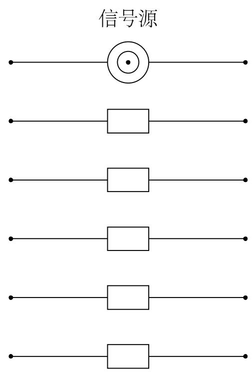
(D) $\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1}\leqslant\sqrt{a+2}-\sqrt{a}$

9. 两个相同的正四棱锥组成如图所示的几何体, 可放入棱长为 1 的正方体内, 使正四棱锥的底面 $ABCD$ 与正方体的某一个平面平行, 且各顶点均在正方体的面上, 则这样的几何体体积的可能值有 ( )



(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 无穷多个

10. 图中有一个信号源和五个接收器. 接收器与信号源在同一个串联线路中时, 就能接收到信号, 否则就不能接收到信号. 若将图中左端的六个接线点随机地平均分成三组, 将右端的六个接线点也随机地平均分成三组, 再把所有六组中每组的两个接线点用导线连接, 则这五个接收器能同时接收到信号的概率是 ( )



(A) $\dfrac{4}{45}$ (B) $\dfrac{1}{36}$ (C) $\dfrac{4}{15}$ (D) $\dfrac{8}{15}$

二、填空题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=12$, $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, 则 $AC=$______.

12. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y\leqslant 2,\\ x-y\geqslant -1,\\ x+y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为______.

13. 今有 2 个红球, 3 个黄球, 4 个白球, 同色球不加以区分, 将这 9 个球排成一列有种不同的方法______. (用数字作答)

14. $\cot 20^\circ\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ\tan 70^\circ-2\cos 40^\circ=$______.

15. 对正整数 n, 设曲线 $y=x^n(1-x)$ 在 $x=2$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标为 a_n, 则数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$ 的前 n 项和的公式是______.

16. 不等式 $\log_2\left(x+\dfrac{1}{x}+6\right)\leqslant 3$ 的解集为______.

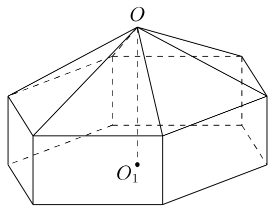
三、解答题

17. 已知三点 $P(5,2)$、$F_1(-6,0)$、$F_2(6,0)$.

(1) 求以 F_1、F_2 为焦点且过点 P 的椭圆的标准方程;

(2) 设点 P、F_1、F_2 关于直线 $y=x$ 的对称点分别为 P'、$F_1{}'$、$F_2{}'$, 求以 $F_1{}'$、$F_2{}'$ 为焦点且过点 P' 的双曲线的标准方程.

18. 请您设计一个帐篷. 它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱, 上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥 (如图所示). 试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时, 帐篷的体积最大?



19. 在正三角形 ABC 中, E、F、P 分别是 AB、AC、BC 边上的点, 满足 $AE:EB=CF:FA=CP:PB=1:2$ (如图 1). 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折起到 $\triangle A_1EF$ 的位置, 使二面角 A_1-EF-B 成直二面角, 连接 A_1B、A_1P (如图 2).
(1) 求证: $A_1E\perp$ 平面 BEP;
(2) 求直线 A_1E 与平面 A_1BP 所成角的大小;
(3) 求二面角 $B-A_1P-F$ 的大小. (用反三角函数表示)

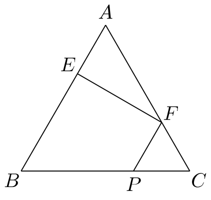


图 1

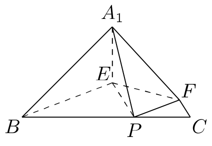


图 2

20. 设 a 为实数, 设函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.
(1) 设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, 求 t 的取值范围, 并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$;
(2) 求 $g(a)$;
(3) 试求满足 $g(a)=g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a.

21. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足: $b_n=a_n-a_{n+2}$, $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 证明: $\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是 $\{c_n\}$ 为等差数列且 $b_n\leqslant b_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$.

2006 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{x}{(x-1)^3}\geqslant 0\right\}$, $N=\{y\mid y=3x^2+1,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N$ 等于 ( )

(A) $\varnothing$　(B) $\{x\mid x\geqslant 1\}$

(C) $\{x\mid x>1\}$　(D) $\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

2. 已知复数 z 满足 $(\sqrt{3}+3\mathrm{i})z=3\mathrm{i}$, 则 z 等于 ( )

(A) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(D) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

3. 若 $a>0$, $b>0$, 则不等式 $-b<\dfrac{1}{x}<a$ 等价于 ( )

(A) $-\dfrac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\dfrac{1}{a}$　(B) $-\dfrac{1}{a}<x<\dfrac{1}{b}$

(C) $x<-\dfrac{1}{a}$ 或 $x>\dfrac{1}{b}$　(D) $x<-\dfrac{1}{b}$ 或 $x>\dfrac{1}{a}$

4. 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A 为抛物线上的一点, 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=-4$, 则点 A 的坐标为 ( )

(A) $(2,\pm2\sqrt{2})$　(B) $(1,\pm2)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,2\sqrt{2})$

5. 对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$, 则必有 ( )

(A) $f(0)+f(2)<2f(1)$　(B) $f(0)+f(2)\leqslant 2f(1)$

(C) $f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$　(D) $f(0)+f(2)>2f(1)$

6. 若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 成立, 则 a 的最小值为 ( )

(A) 0　(B) -2　(C) $-\dfrac{5}{2}$　(D) -3

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$, 且 A、B、C 三点共线 (该直线不过点 O), 则 S_{200} 等于 ( )

(A) 100　(B) 101　(C) 200　(D) 201

8. 在 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中, 含 x 的奇次幂的项之和为 S, 当 $x=\sqrt{2}$ 时, S 等于 ( )

(A) 2^{3008}　(B) -2^{3008}　(C) 2^{3009}　(D) -2^{3009}

9. P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点, M、N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点, 则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为 ( )

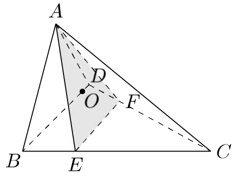
(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

10. 将 7 个人 (含甲、乙) 分成三个组, 一组 3 人, 另两组各 2 人, 不同的分组数为 a, 甲、乙分在同一组的概率为 p, 则 a、p 的值分别为 ( )

(A) $a=105,\ p=\dfrac{5}{21}$　(B) $a=105,\ p=\dfrac{4}{21}$

(C) $a=210,\ p=\dfrac{5}{21}$　(D) $a=210,\ p=\dfrac{4}{21}$

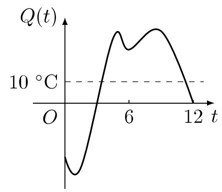
11. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 AEF 经过四面体的内切球 (与四个面都相切的球) 球心 O, 且与 BC、DC 分别截于 E、F. 如果截面将四面体分为体积相等的两部分, 设四棱锥 $A-BEFD$ 与三棱锥 $A-EFC$ 的表面积分别为 S_1、S_2, 则必有 ( )

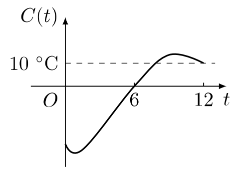


(A) $S_1<S_2$　(B) $S_1>S_2$

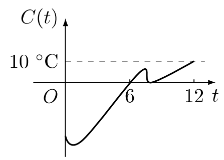
(C) $S_1=S_2$　(D) S_1、S_2 的大小不能确定

12. 某地一年内的气温 $Q(t)$ (单位: °C) 与时间 t (月份) 之间的关系如图所示, 已知该年的平均气温为 10 °C. 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 的平均气温, $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的是 ( )

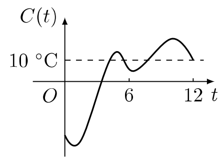




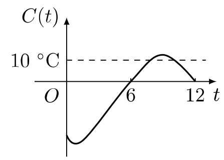
(A)



(B)



(C)



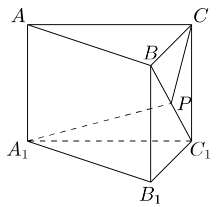
(D)

二、填空题

13. 数列 $\left\{\dfrac{1}{4n^2-1}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

14. 设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(n)+6]=27$, 则 $f(m+n)=$______.

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面为直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=6$, $BC=CC_1=\sqrt{2}$, P 是 BC_1 上一动点, 则 $CP+PA_1$ 的最小值为______.



16. 已知圆 M: $(x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$, 直线 l: $y=kx$, 下面四个命题:

① 对任意实数 k 和 θ, 直线 l 和圆 M 相切;

② 对任意实数 k 和 θ, 直线 l 和圆 M 有公共点;

③ 对任意实数 θ, 必存在实数 k, 使得直线 l 和圆 M 相切;

④ 对任意实数 k, 必存在实数 θ, 使得直线 l 和圆 M 相切.

其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值.

(1) 求 a、b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间;

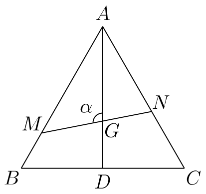
(2) 若对 $x\in[-1,2]$, 不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

18. 某商场举行抽奖促销互动, 抽奖规则是: 从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球, 记下颜色后放回, 摸出一个红球可获得奖金 10 元; 摸出两个红球可获得奖金 50 元. 现有甲、乙两位顾客, 规定: 甲摸一次, 乙摸两次. 令 ξ 表示甲、乙两人摸球后获得的奖金总额. 求:

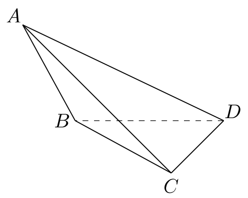
(1) ξ 的分布列;

(2) ξ 的的数学期望.

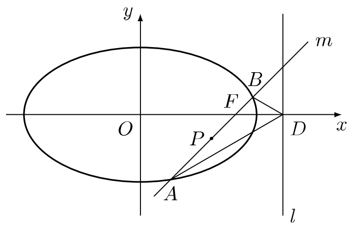
19. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, M、N 分别是边 AB、AC 上的点, 线段 MN 经过 $\triangle ABC$ 的中心 G. 设 $\angle MGA=\alpha$ $\left(\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}\right)$.
(1) 试将 $\triangle AGM$、$\triangle AGN$ 的面积 (分别记为 S_1 与 S_2) 表示为 α 的函数;
(2) 求 $y=\frac{1}{{S_1}^2}+\frac{1}{{S_2}^2}$ 的最大值与最小值.



20. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 侧面 ABD、ACD 是全等的直角三角形, AD 是公共的斜边, 且 $AD=\sqrt{3}$, $BD=CD=1$, 另一个侧面 ABC 是正三角形.
(1) 求证: $AD\perp BC$;
(2) 求二面角 $B-AC-D$ 的大小;
(3) 在直线 AC 上是否存在一点 E, 使 ED 与面 BCD 成 30° 角? 若存在, 确定 E 的位置; 若不存在, 说明理由.



21. 如图, 椭圆 Q: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$, 过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动, 并且交椭圆于 A、B 两点, P 为线段 AB 的中点.
(1) 求点 P 的轨迹 H 的方程;
(2) 在 Q 的方程中, 令 $a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$, $b^2=\sin\theta$ $\left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 确定 θ 的值, 使原点距椭圆的右准线 l 最远, 此时, 设 l 与 x 轴交点为 D, 当直线 m 绕点 F 转动到什么位置时, 三角形 ABD 的面积最大?



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=\frac{3}{2}$, 且 $a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$ $(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: 对一切正整数 n, 不等式 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n<2\cdot n!$ 恒成立.

2006 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\mid x(x-1)\geqslant 0\}$, $Q=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{x-1}>0\right\}$, 则 $P\cap Q$ 等于　　( )

(A) $\varnothing$　　(B) $\{x\mid x\geqslant 1\}$

(C) $\{x\mid x>1\}$　　(D) $\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

2. 函数 $y=4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ 的最小正周期为　　( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

3. 在各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+1}-a_n^2+a_{n-1}=0$ $(n\geqslant 2)$, 则 $S_{2n-1}-4n=$　　( )

(A) -2　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

4. 下列四个条件中, p 是 q 的必要不充分条件的是　　( )

(A) p: $a>b$, q: $a^2>b^2$

(B) p: $a>b$, q: $2^a>2^b$

(C) p: $ax^2+by^2=c$ 为双曲线, q: $ab<0$

(D) $p: ax^2+bx+c>0$, q: $\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{b}{x}+a>0$

5. 对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$, 则必有　　( )

(A) $f(0)+f(2)<2f(1)$　　(B) $f(0)+f(2)\leqslant 2f(1)$

(C) $f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$　　(D) $f(0)+f(2)>2f(1)$

6. 若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 成立, 则 a 的最小值为 ( )

(A) 0　　(B) -2　　(C) $-\dfrac{5}{2}$　　(D) -3

7. 在 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 若常数项为 60, 则 n 等于　　( )

(A) 3　　(B) 6　　(C) 9　　(D) 12

8. 袋中有 40 个小球, 其中红色球 16 个、蓝色球 12 个、白色球 8 个、黄色球 4 个, 从中随机抽取 10 个球作成一个样本, 则这个样本恰好是按分层抽样方法得到的概率为　　( )

(A) $\dfrac{C_4^1C_8^2C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$　　(B) $\dfrac{C_4^2C_8^1C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

(C) $\dfrac{C_4^2C_8^3C_{12}^1C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$　　(D) $\dfrac{C_4^1C_8^3C_{12}^4C_{16}^2}{C_{40}^{10}}$

9. 如果四棱锥的四条侧棱都相等, 就称它为"等腰四棱锥", 四条侧棱称为它的腰. 以下 4 个命题中, 假命题的是　　( )

(A) 等腰四棱锥的腰与底面所成的角都相等

(B) 等腰四棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等或互补

(C) 等腰四棱锥的底面四边形必存在外接圆

(D) 等腰四棱锥的各顶点必在同一球面上

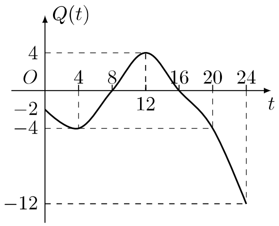
10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$, 且 A、B、C 三点共线 (该直线不过点 O), 则 S_{200} 等于　　( )

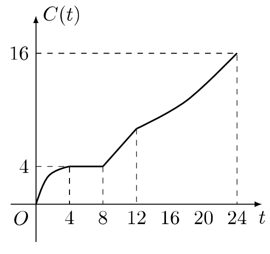
(A) 100　　(B) 101　　(C) 200　　(D) 201

11. P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点, M N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点, 则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为　　( )

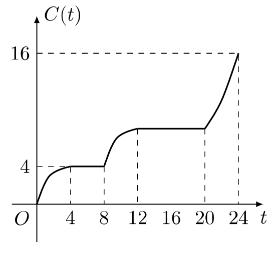
(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

12. 某地一天内的气温 $Q(t)$ (单位: °C) 与时刻 t (单位: 时) 之间的关系如图所示, 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 内的温差 (即时间段 $[0,t]$ 内的最高气温与最低气温的差). $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的图象大致是　　( )

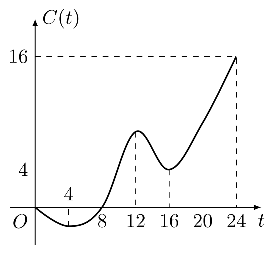




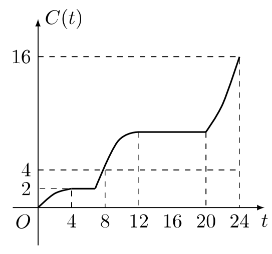
(A)



(B)



(C)



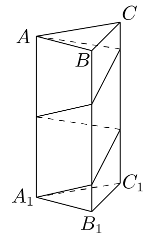
(D)

二、填空题

13. 已知向量 $\vec{a}=(1,\sin\theta)$, $\vec{b}=(1,\cos\theta)$, 则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 的最大值为______.

14. 设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(n)+6]=27$, 则 $f(m+n)=$______.

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1, 高为 8, 一质点自 A 点出发, 沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线长为______.



16. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0$ 且 $a\neq b)$ 的两个焦点, P 为双曲线右支上异于顶点的任意一点, 点 O 为坐标原点. 下面四个命题:

① $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=a$ 上;

② $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=b$ 上;

③ $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 OP 上;

④ $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆必通过点 $(a,0)$.

其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值.

(1) 求 a、b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对 $x\in[-1,2]$, 不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

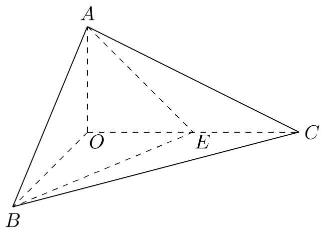
18. 某商场举行抽奖促销互动, 抽奖规则是: 从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球, 记下颜色后放回, 摸出一个红球可获得二等奖; 摸出两个红球可获得一等奖. 现有甲、乙两位顾客, 规定: 甲摸一次, 乙摸两次. 求:

(1) 甲、乙两人都没有中奖的概率;

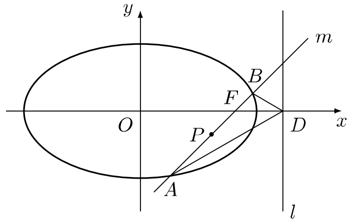
(2) 甲、两人中至少有一人获二等奖的概率.

19. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 已知 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
(1) 求 $\tan^2\dfrac{B+C}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}$ 的值;
(2) 若 $a=2$, $S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$, 求 b 的值.

20. 如图, 已知三棱锥 $O-ABC$ 的侧棱 OA、OB、OC 两两垂直, 且 $OA=1$, $OB=OC=2$, E 是 OC 的中点.
(1) 求 O 点到面 ABC 的距离;
(2) 求异面直线 BE 与 AC 所成的角;
(3) 求二面角 $E-AB-C$ 的大小.



21. 如图, 椭圆 Q: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$, 过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动, 并且交椭圆于 A、B 两点, P 为线段 AB 的中点.
(1) 求点 P 的轨迹 H 的方程;
(2) 在 Q 的方程中, 令 $a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$, $b^2=\sin\theta$ $\left(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$, 设轨迹 H 的最高点和最低点分别为 M 和 N. 当 θ 为何值时, $\triangle MNF$ 为一个正三角形?



22. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=3$, 且 $\dfrac{2a_{n+1}-a_n}{2a_n-a_{n+1}}=a_na_{n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, $T_n=\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}$, 求 S_n+T_n, 并确定最小正整数 n, 使 S_n+T_n 为整数.

2006 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,\ 2\}$, 则满足 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 8

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的任意函数, 则下列叙述正确的是 ( )
(A) $f(x)f(-x)$ 是奇函数 (B) $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数
(C) $f(x)-f(-x)$ 是偶函数 (D) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数

3. 给出下列四个命题:
① 垂直于同一直线的两条直线互相平行;
② 垂直于同一平面的两个平面互相平行;
③ 若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行;
④ 若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线.
其中假命题的个数是 ( )
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 ( )
(A) $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\ x+y\leqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\ x+y\geqslant 3,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

5. 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算, A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若对任意 $a,\ b\in A$, 有 $a\oplus b\in A$, 则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法 (除数不等于零) 四则运算都封闭的是 ( )
(A) 自然数集 (B) 整数集 (C) 有理数集 (D) 无理数集

6. $\triangle ABC$ 的三内角 A,B,C, 所对边的长分别为 a,b,c, 设向量 $\vec{p}=(a+c,b)$、$\vec{q}=(b-a,c-a)$. 若 $\vec{p}\parallel\vec{q}$, 则角 C 的大小为 ( )
(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}$

7. 与方程 $y=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1\ (x\geqslant 0)$ 的曲线关于直线 $y=x$ 对称的曲线方程为 ( )
(A) $y=\ln(1+\sqrt{x})$ (B) $y=\ln(1-\sqrt{x})$
(C) $y=-\ln(1+\sqrt{x})$ (D) $y=-\ln(1-\sqrt{x})$

8. 曲线 $\dfrac{x^2}{10-m}+\dfrac{y^2}{6-m}=1\ (m<6)$ 与曲线 $\dfrac{x^2}{5-n}+\dfrac{y^2}{9-n}=1\ (5<n<9)$ 的 ( )
(A) 焦距相等 (B) 离心率相等 (C) 焦点相同 (D) 准线相同

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 前 n 项和为 S_n, 若数列 $\{a_n+1\}$ 也是等比数列, 则 S_n 等于 ( )
(A) $2^{n+1}-2$ (B) $3n$ (C) $2n$ (D) 3^n-1

10. 直线 $y=2k$ 与曲线 $9k^2x^2+y^2=18k^2|x|$ ($k\in\mathbf{R}$, 且 $k\neq 0$) 的公共点的个数为 ( )
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{2}|\sin x-\cos x|$, 则 $f(x)$ 的值域是( )
(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ (C) $\left[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (D) $\left[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. 设 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, 点 P 是线段 AB 上的一个动点, $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$, 则实数 λ 的取值范围是 ( )
(A) $\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$ (B) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$
(C) $\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

13. 设 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ 则 $g\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$______.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{6}{7}\right)+\left(\dfrac{4}{5^2}-\dfrac{6}{7^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{4}{5^n}-\dfrac{6}{7^n}\right)}{\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{4}{5}\right)+\left(\dfrac{5}{6^2}-\dfrac{4}{5^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{5}{6^n}-\dfrac{4}{5^n}\right)}=$______.

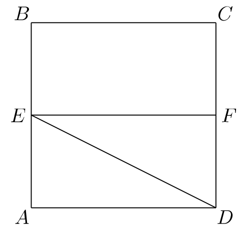
15. 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员排成 1、2、3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排列方法有______种. (以数作答)

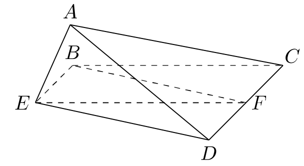
16. 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为 α, 则 $\cos\alpha=$______.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$, $x\in\mathbf{R}$. 求:
(1) 函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合;
(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

18. 已知正方形 $ABCD$, E、F 分别是边 AB、CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 如图所示, 记二面角 $A-DE-C$ 的大小为 θ $(0<\theta<\pi)$.
(1) 证明: $BF\parallel$ 平面 ADE;
(2) 若 $\triangle ACD$ 为正三角形, 试判断点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 是否在直线 EF 上, 证明你的结论, 并求角 θ 的余弦值.





19. 现有甲、乙两个项目, 对甲项目每投资十万元, 一年后利润是 1.2 万元、1.18 万元、1.17 万元的概率分别为 $\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$; 已知乙项目的利润与产品价格的调整有关, 在每次调整中, 价格下降的概率都是 p $(0<p<1)$, 设乙项目产品价格在一年内进行 2 次独立的调整, 记乙项目产品价格在一年内的下降次数为 ξ, 对乙项目每投资十万元, ξ 取 0、1、2 时, 一年后相应利润是 1.3 万元、1.25 万元、0.2 万元. 随机变量 ξ_1、ξ_2 分别表示对甲、乙两项目各投资十万元一年后的利润.
(1) 求 ξ_1、ξ_2 的概率分布和数学期望 $E\xi_1$、$E\xi_2$;
(2) 当 $E\xi_1<E\xi_2$ 时, 求 p 的取值范围.

20. 已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ (x_1, $x_2 \neq 0$) 是抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上的两个动点, O 是坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 满足 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0$.
(1) 证明线段 AB 是圆 C 的直径;
(2) 当圆 C 的圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 p 的值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 a, b, c 是以 d 为公差的等差数列, 且 $a>0$, $d>0$. 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点. 在 $\left[1-\dfrac{2b}{a},0\right]$ 上, $f'(x)$ 在 x_1 处取得最大值, 在 x_2 处取得最小值. 将 $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f'(x_1))$, $(x_2,f'(x_2))$ 依次记为 A, B, C.
(1) 求 x_0;
(2) 若 $\triangle ABC$ 有一边平行于 x 轴, 且面积为 $2+\sqrt{3}$, 求 a, d 的值.

22. 已知 $f_0(x)=x^n$, $f_k(x)=\dfrac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(1)}$, 其中 $k \leqslant n$ (n, $k \in \mathbf{N}_+$), 设 $F(x)=\mathrm{C}_n^0 f_0(x^2)+\mathrm{C}_n^1 f_1(x^2)+\cdots+\mathrm{C}_n^n f_n(x^2)$, $x \in [-1,1]$.
(1) 写出 $f_k(1)$;
(2) 证明: 对任意的 x_1, $x_2 \in [-1,1]$, 恒有 $|F(x_1)-F(x_2)| \leqslant 2^{n-1}(n+2)-n-1$.

2006 普通高等学校招生考试 (辽宁卷文)

一、选择题

1. 函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

2. 设集合 $A=\{1,2\}$, 则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )

(A) 1　(B) 3　(C) 4　(D) 8

3. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的任意函数, 则下列叙述正确的是 ( )

(A) $f(x)f(-x)$ 是奇函数　(B) $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

(C) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数　(D) $f(x)-f(-x)$ 是偶函数

4. $\mathrm{C}_6^1+\mathrm{C}_6^2+\mathrm{C}_6^3+\mathrm{C}_6^4+\mathrm{C}_6^5$ 的值为 ( )

(A) 61　(B) 62　(C) 63　(D) 64

5. 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两个根可分别作为 ( )

(A) 一个椭圆和一双曲线的离心率　(B) 两抛物线的离心率

(C) 一个椭圆和一抛物线的离心率　(D) 两椭圆的离心率

6. 给出下列四个命题:

① 垂直于同一直线的两条直线互相平行;

② 垂直于同一平面的两个平面互相平行;

③ 若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行;

④ 若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

7. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 ( )

(A) $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$　(C) $\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\ x+y\leqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\ x+y\geqslant 3,\\ 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

8. 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算, A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若对任意 a, $b\in A$, 有 $a\oplus b\in A$, 则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法 (除数不等于零) 四则运算都封闭的是 ( )

(A) 自然数集　(B) 整数集　(C) 有理数集　(D) 无理数集

9. $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C, 所对边的长分别为 a, b, c, 设向量 $\vec{p}=(a+c,b)$、$\vec{q}=(b-a,c-a)$. 若 $\vec{p}\parallel\vec{q}$, 则角 C 的大小为 ( )

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) $\frac{2\pi}{3}$

10. 已知等腰 $\triangle ABC$ 的腰为底的 2 倍, 则顶角 A 的正切值是 ( )

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\frac{\sqrt{15}}{8}$　(D) $\frac{\sqrt{15}}{7}$

11. 与方程 $y=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1$ $(x\geqslant 0)$ 的曲线关于直线 $y=x$ 对称的曲线方程为 ( )

(A) $y=\ln(1+\sqrt{x})$　(B) $y=\ln(1-\sqrt{x})$

(C) $y=-\ln(1+\sqrt{x})$　(D) $y=-\ln(1-\sqrt{x})$

12. 曲线 $\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{6-m}=1$ $(m<6)$ 与曲线 $\frac{x^2}{5-n}+\frac{y^2}{9-n}=1$ $(5<n<9)$ 的 ( )

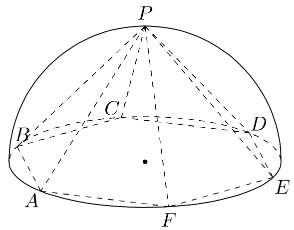
(A) 离心率相等　(B) 焦距相等　(C) 焦点相同　(D) 准线相同

二、填空题

13. 方程 $\log_2(x-1)=2-\log_2(x+1)$ 的解为______.

14. 设 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ 则 $g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$______.

15. 如图, 半径为 2 的半球内有一内接正六棱锥 $P-ABCDEF$, 则此正六棱锥的侧面积是______.



16. 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员排成 1、2、3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排列方法有______种. (以数作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$, $x\in\mathbf{R}$. 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合;

(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

18. 甲、乙两班各派 2 名同学参加年级数学竞赛, 参赛同学成绩及格的概率都为 0.6, 且参赛同学的成绩相互之间没有影响. 求:

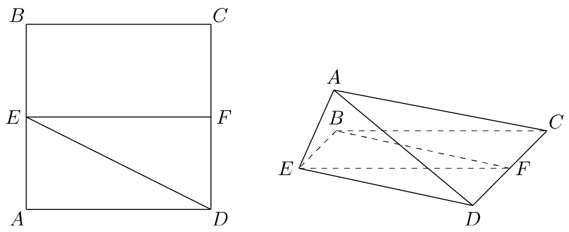
(1) 甲、乙两班参赛同学中各有 1 名同学成绩及格的概率;

(2) 甲、乙两班参赛同学中至少有 1 名同学成绩及格的概率.

19. 已知正方形 $ABCD$, E、F 分别是边 AB、CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 如图所示, 记二面角 $A-DE-C$ 的大小为 θ $(0<\theta<\pi)$.

(1) 证明: $BF\parallel$ 平面 ADE;

(2) 若 $\triangle ACD$ 为正三角形, 试判断点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 是否在直线 EF 上, 证明你的结论, 并求角 θ 的余弦值.



20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=pn^2-2n+q$ $(p,\ q\in\mathbf{R})$, $n\in\mathbf{N}_+$.
(1) 求 q 的值;
(2) 若 a_1 与 a_5 的等差中项为 18, b_n 满足 $a_n=2\log_2 b_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+(a+d)x^2+(a+2d)x+d$, $g(x)=ax^2+2(a+2d)x+a+4d$, 其中 $a>0$, $d>0$, 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, x_1 为 $g(x)$ 的极值点, $g(x_2)=g(x_3)=0$, 并且 $x_2<x_3$. 将点 $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,g(x_1))$, $(x_2,0)$, $(x_3,0)$ 依次记为 A, B, C, D.
(1) 求 x_0 的值;
(2) 若四边形 $APCD$ 为梯形且面积为 1, 求 a, d 的值.

22. 已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ $(x_1,\ x_2\neq 0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上的两个动点, O 是坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 满足 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0$.
(1) 证明线段 AB 是圆 C 的直径;
(2) 当圆 C 的圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 p 的值.

2006 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid x^2-x<0\}$, $N=\{x\mid |x|<2\}$, 则 ( )

(A) $M\cap N=\varnothing$ (B) $M\cap N=M$ (C) $M\cup N=M$ (D) $M\cup N=\mathbf{R}$

2. 已知函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 ( )

(A) $f(2x)=\mathrm{e}^{2x}\ (x\in\mathbf{R})$ (B) $f(2x)=\ln 2\cdot\ln x\ (x>0)$

(C) $f(2x)=2\mathrm{e}^x\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $f(2x)=\ln x+\ln 2\ (x>0)$

3. 双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{4}$ (B) -4 (C) 4 (D) $\dfrac{1}{4}$

4. 如果复数 $(m^2+\mathrm{i})(1+m\mathrm{i})$ 是实数, 则实数 $m=$ ( )

(A) 1 (B) -1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $-\sqrt{2}$

5. 函数 $f(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 ( )

(A) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (B) $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k\pi-\dfrac{3\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (D) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

6. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

7. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ( )

(A) 16π (B) 20π (C) 24π (D) 32π

8. 抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 ( )

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{7}{5}$ (C) $\dfrac{8}{5}$ (D) 3

9. 设平面向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\mathbf{0}$. 如果向量 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ 满足 $|\boldsymbol{b}_i|=2|\boldsymbol{a}_i|$, 且 $\boldsymbol{a}_i$ 顺时针旋转 30° 后与 $\boldsymbol{b}_i$ 同向, 其中 $i=1, 2, 3$, 则 ( )

(A) $-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$ (B) $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

(C) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$ (D) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

10. 设 a_n 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1+a_2+a_3=15$, $a_1a_2a_3=80$, 则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$ ( )

(A) 120 (B) 105 (C) 90 (D) 75

11. 用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ( )

(A) $8\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$ (B) $6\sqrt{10}\ \mathrm{cm}^2$ (C) $3\sqrt{55}\ \mathrm{cm}^2$ (D) $20\ \mathrm{cm}^2$

12. 设集合 $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. 选择 I 的两个非空子集 A 和 B, 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 ( )

(A) 50 种 (B) 49 种 (C) 48 种 (D) 47 种

二、填空题

13. 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于______.

14. 设 $z=2y-x$, 式中变量 x, y 满足下列条件: $\begin{cases}2x-y\geqslant -1,\\ 3x+2y\leqslant 23,\\ y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 z 的最大值为______.

15. 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有______种. (用数字作答)

16. 函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)$ $(0<\varphi<\pi)$. 若 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数, 则 $\varphi=$______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C, 求当 A 为何值时, $\cos A+2\cos\dfrac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.

18. A, B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A, 另 2 只服用 B, 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

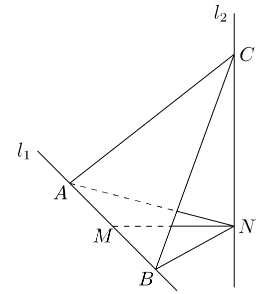
(1) 求一个试验组为甲类组的概率;

(2) 观察 3 个试验组, 用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, l_1, l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A, B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM=MB=MN$.

(1) 证明: $AC\perp NB$;

(2) 若 $\angle ACB=60^\circ$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一个以 $F_1(0,-\sqrt{3})$ 和 $F_2(0,\sqrt{3})$ 为焦点, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆, 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C, 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x, y 轴的交点分别为 A, B, 且向量 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 求:
(1) 点 M 的轨迹方程;
(2) $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ 的最小值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{e}^{-ax}$.
(1) 设 $a>0$, 讨论 $y=f(x)$ 的单调性;
(2) 若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$, 求 a 的取值范围.

22. 设数列 a_n 的前 n 项的和 $S_n=\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{1}{3}\times 2^{n+1}+\dfrac{2}{3}$, $n=1,2,3,\cdots$.
(1) 求首项 a_1 与通项 a_n;
(2) 设 $T_n=\dfrac{2^n}{S_n}$, $n=1,2,3,\cdots$, 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\dfrac{3}{2}$.

2006 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=4$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 ( )
(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

2. 设集合 $M=\{x\mid x^2-x<0\}$, $N=\{x\mid |x|<2\}$, 则 ( )
(A) $M\cap N=\varnothing$　(B) $M\cap N=M$　(C) $M\cup N=M$　(D) $M\cup N=\mathbf{R}$

3. 已知函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 ( )
(A) $f(2x)=\mathrm{e}^{2x}$ $(x\in\mathbf{R})$　(B) $f(2x)=\ln 2\cdot\ln x$ $(x>0)$
(C) $f(2x)=2\mathrm{e}^x$ $(x\in\mathbf{R})$　(D) $f(2x)=\ln x+\ln 2$ $(x>0)$

4. 双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m=$ ( )
(A) $-\frac{1}{4}$　(B) -4　(C) 4　(D) $\frac{1}{4}$

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_7=35$, 则 $a_4=$ ( )
(A) 8　(B) 7　(C) 6　(D) 5

6. 函数 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 ( )
(A) $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　(B) $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$
(C) $\left(k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　(D) $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

7. 从圆 $x^2-2x+y^2-2y+1=0$ 外一点 $P(3,2)$ 向这个圆作两条切线, 则两切线夹角的余弦值为 ( )
(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{3}{5}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 0

8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B=$ ( )
(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{3}{4}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

9. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ( )
(A) 16π　(B) 20π　(C) 24π　(D) 32π

10. 在 $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ 的展开式中, x^4 的系数为 ( )
(A) -120　(B) 120　(C) -15　(D) 15

11. 抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 ( )
(A) $\frac{4}{3}$　(B) $\frac{7}{5}$　(C) $\frac{8}{5}$　(D) 3

12. 用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ( )
(A) $8\sqrt{5}$ cm^2　(B) $6\sqrt{10}$ cm^2　(C) $3\sqrt{55}$ cm^2　(D) 20 cm^2

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a=$______.

14. 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于______.

15. 设 $z=2y-x$, 式中变量 x, y 满足下列条件: $\begin{cases}2x-y\geqslant -1,\\ 3x+2y\leqslant 23,\\ y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 z 的最大值为______.

16. 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有______种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_3=2$, $a_2+a_4=\frac{20}{3}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

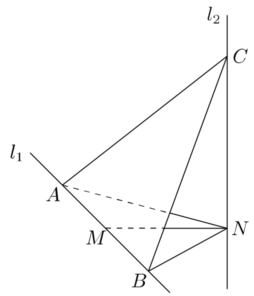
18. $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C, 求当 A 为何值时, $\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.

19. A, B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A, 另 2 只服用 B, 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$.
(1) 求一个试验组为甲类组的概率;
(2) 观察 3 个试验组, 求这 3 个试验组中至少有一个甲类组的概率.

20. 如图, l_1, l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A, B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM = MB = MN$.

(1) 证明: $AC \perp NB$;

(2) 若 $\angle ACB = 60°$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



21. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ $(a > 1)$ 短轴的一个端点, Q 为椭圆上一个动点, 求 $|PQ|$ 的最大值.

22. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 都是增函数, 求 a 的取值范围.

2006 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid x<3\}$, $N=\{x\mid \log_2 x>1\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\varnothing$　(B) $\{x\mid 0<x<3\}$　(C) $\{x\mid 1<x<3\}$　(D) $\{x\mid 2<x<3\}$

2. 函数 $y=\sin 2x\cos 2x$ 的最小正周期是 ( )

(A) 2π　(B) 4π　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

3. $\dfrac{3}{(1-\mathrm{i})^2}=$ ( )

(A) $\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　(C) i　(D) $-\mathrm{i}$

4. 过球的一条半径的中点, 作垂直于该半径的平面, 则所得截面的面积与球的表面积的比为 ( )

(A) $\dfrac{3}{16}$　(B) $\dfrac{9}{16}$　(C) $\dfrac{3}{8}$　(D) $\dfrac{9}{32}$

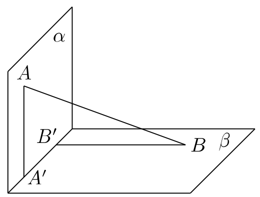
5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$　(B) 6　(C) $4\sqrt{3}$　(D) 12

6. 已知函数 $f(x)=\ln x+1$ $(x>0)$, 则 $f(x)$ 的反函数为 ( )

(A) $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$　(B) $y=\mathrm{e}^{x-1}$ $(x\in\mathbf{R})$　(C) $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x>1)$　(D) $y=\mathrm{e}^{x-1}$ $(x>1)$

7. 如图, 平面 $\alpha\perp$ 平面 β, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, AB 与两平面 α, β 所成的角分别为 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{\pi}{6}$. 过 A, B 分别作两平面交线的垂线, 垂足为 A', B', 则 $AB:A'B'=$ ( )



(A) $2:1$　(B) $3:1$　(C) $3:2$　(D) $4:3$

8. 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_2 x$ $(x>0)$ 的图象关于原点对称, 则 $f(x)$ 的表达式为 ( )

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\log_2 x}$ $(x>0)$　(B) $f(x)=\dfrac{1}{\log_2(-x)}$ $(x<0)$

(C) $f(x)=-\log_2 x$ $(x>0)$　(D) $f(x)=-\log_2(-x)$ $(x<0)$

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{4}{3}x$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{5}{3}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $\dfrac{5}{4}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

10. 若 $f(\sin x)=3-\cos 2x$, 则 $f(\cos x)=$ ( )

(A) $3-\cos 2x$　(B) $3-\sin 2x$　(C) $3+\cos 2x$　(D) $3+\sin 2x$

11. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{S_6}{S_{12}}=$ ( )

(A) $\dfrac{3}{10}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{8}$　(D) $\dfrac{1}{9}$

12. 函数 $\sum\limits_{n=1}^{19}|x-n|$ 的最小值为 ( )

(A) 190　(B) 171　(C) 90　(D) 45

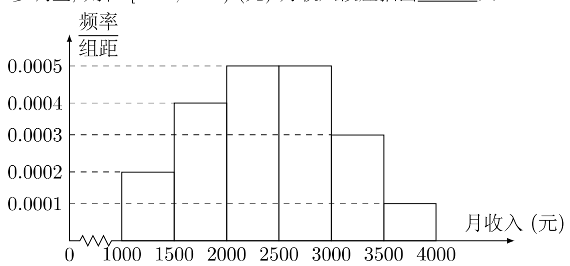
二、填空题

13. 在 $\left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中常数项是______. (用数字作答)

14. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 成等差数列, 且 $AB=1$, $BC=4$, 则边 BC 上的中线 AD 的长为______.

15. 过点 $(1,\sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时, 直线 l 的斜率 $k=$______.

16. 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 $[2500,3000)$ (元) 月收入段应抽出______人.



三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求 θ;

(2) 求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值.

18. 某批产品成箱包装, 每箱 5 件, 一用户在购进该批产品前先取出 3 箱, 再从每箱中任意取出 2 件产品进行检验. 设取出的第一, 二, 三箱中分别有 0 件, 1 件, 2 件二等品, 其余为一等品.

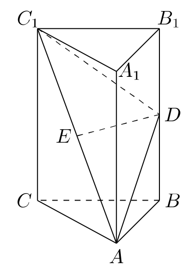
(1) 用 ξ 表示抽检的 6 件产品中二等品的件数, 求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望;

(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品, 用户就拒绝购买这批产品, 求这批产品被用户拒绝购买的概率.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC$, D, E 分别为 BB_1, AC_1 的中点.

(1) 证明: ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(2) 设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$, 求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.



20. 设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$. 若对所有的 $x\geqslant 0$, 都有 $f(x)\geqslant ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F, A、B 是抛物线上的两动点, 且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ $(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M.
(1) 证明 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值;
(2) 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S, 写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$ 有一根为 S_n-1, $n=1,2,3,\cdots$.
(1) 求 a_1, a_2;
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2006 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

一、选择题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,2)$, 向量 $\boldsymbol{b}=(x,3)$, 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $x=$ ( )

(A) 9 (B) 6 (C) 5 (D) 3

2. 已知集合 $M=\{x\mid x<3\}$, $N=\{x\mid \log_2 x>1\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\varnothing$ (B) $\{x\mid 0<x<3\}$

(C) $\{x\mid 1<x<3\}$ (D) $\{x\mid 2<x<3\}$

3. 函数 $y=\sin 2x\cos 2x$ 的最小正周期是 ( )

(A) 2π (B) 4π (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 如果函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=3-2x$ 的图象关于坐标原点对称, 则 $y=f(x)$ 的表达式为 ( )

(A) $y=2x-3$ (B) $y=2x+3$ (C) $y=-2x+3$ (D) $y=-2x-3$

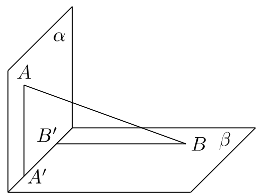
5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) 6 (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=7$, $a_4=15$, 则前 10 项的和 $S_{10}=$ ( )

(A) 100 (B) 210 (C) 380 (D) 400

7. 如图, 平面 $\alpha\perp$ 平面 β, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, AB 与两平面 α, β 所成的角分别为 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{\pi}{6}$. 过 A, B 分别作两平面交线的垂线, 垂足为 A', B', 若 $AB=12$, 则 $A'B'=$ ( )



(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9

8. 已知函数 $f(x)=\ln x+1\ (x>0)$, 则 $f(x)$ 的反函数为 ( )

(A) $y=\mathrm{e}^{x+1}\ (x\in\mathbf{R})$ (B) $y=\mathrm{e}^{x-1}\ (x\in\mathbf{R})$

(C) $y=\mathrm{e}^{x+1}\ (x>1)$ (D) $y=\mathrm{e}^{x-1}\ (x>1)$

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{4}{3}x$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{5}{3}$ (B) $\dfrac{4}{3}$ (C) $\dfrac{5}{4}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

10. 若 $f(\sin x)=3-\cos 2x$, 则 $f(\cos x)=$ ( )

(A) $3-\cos 2x$ (B) $3-\sin 2x$ (C) $3+\cos 2x$ (D) $3+\sin 2x$

11. 过点 $(-1,0)$ 作抛物线 $y=x^2+x+1$ 的切线, 则其中一条切线为 ( )

(A) $2x+y+2=0$ (B) $3x-y+3=0$

(C) $x+y+1=0$ (D) $x-y+1=0$

12. 5 名志愿者分到 3 所学校支教, 要求每所学校至少去 1 名志愿者, 则不同的分法共有 ( )

(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 200 种 (D) 280 种

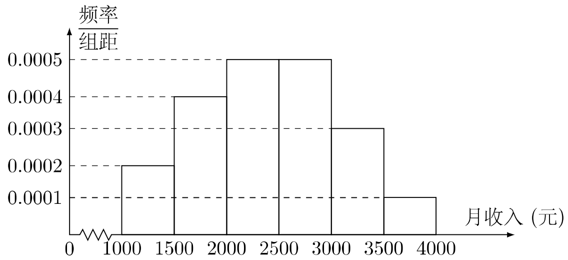
二、填空题

13. 在 $\left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中常数项是______. (用数字作答)

14. 已知圆 O_1 是半径为 R 的球 O 的小圆, 若圆 O_1 的面积与球 O 的表面积的比值为 $\dfrac{2}{9}$, 则线段 OO_1 与 R 的比值为______.

15. 过点 $(1,\sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时, 直线 l 的斜率 $k=$______.

16. 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 $[2500,3000)$ (元) 月收入段应抽出______人.



三、解答题

17. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=45^\circ$, $AC=\sqrt{10}$, $\cos C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 BC 边的长;

(2) 记 AB 的中点为 D, 求中线 CD 的长度.

18. 记等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_4=1$, $S_8=17$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. 某批产品成箱包装, 每箱 5 件, 一用户在购进该批产品前先取出 3 箱, 再从每箱中任意取出 2 件产品进行检验. 设取出的第一, 二, 三箱中分别有 0 件, 1 件, 2 件二等品, 其余为一等品.

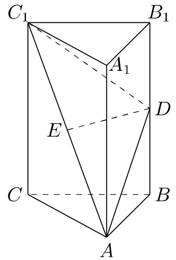
(1) 求抽检的 6 件产品中恰有一件二等品的概率;

(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品, 用户就拒绝购买这批产品, 求这批产品被用户拒绝购买的概率.

20. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC$, D, E 分别为 BB_1, AC_1 的中点.

(1) 证明: ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(2) 设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$, 求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.



21. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 设不等式 $f(x)>0$ 的解集为 A, 又知集合 $B=\{x\mid 1<x<3\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$, 求 a 的取值范围.

22. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F, A、B 是抛物线上的两动点, 且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ $(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M.

(1) 证明 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值;

(2) 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S, 写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值.

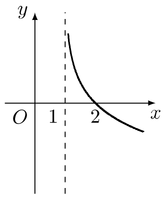
2006 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

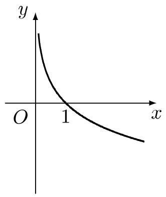
1. 定义集合运算: $A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),\ x\in A,\ y\in B\}$, 设集合 $A=\{0,\ 1\}$, $B=\{2,\ 3\}$, 则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为 ( )

(A) 0 (B) 6 (C) 12 (D) 18

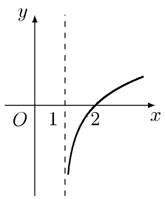
2. 函数 $y=1+a^x$ $(0<a<1)$ 的反函数的图象大致是 ( )



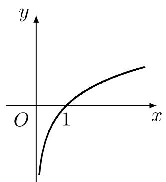
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{x-1}, & x<2,\\ \log_3(x^2-1), & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)>2$ 的解集为 ( )

(A) $(1,2)\cup(3,+\infty)$ (B) $(\sqrt{10},+\infty)$

(C) $(1,2)\cup(\sqrt{10},+\infty)$ (D) $(1,2)$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $A=\dfrac{\pi}{3}$, $a=\sqrt{3}$, $b=1$, 则 $c=$ ( )

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3}-1$ (D) $\sqrt{3}$

5. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,4)$, $\boldsymbol{c}=(-1,-2)$, 若表示向量 $4\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{d}$ 的有向线段首尾相接能构成四边形, 则向量 $\boldsymbol{d}$ 为 ( )

(A) $(2,6)$ (B) $(-2,6)$ (C) $(2,-6)$ (D) $(-2,-6)$

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为 ( )

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

7. 在给定椭圆中, 过焦点且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 1, 则该椭圆的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

8. 设 p: $x^2-x-20>0$, q: $\dfrac{1-x^2}{|x|-2}<0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 已知集合 $A=\{5\}$, $B=\{1,\ 2\}$, $C=\{1,\ 3,\ 4\}$, 从这三个集合各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为 ( )

(A) 33 (B) 34 (C) 35 (D) 36

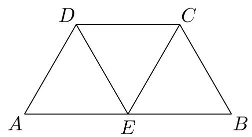
10. 已知 $\left(x^3-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $-\dfrac{3}{14}$, 其中 $\mathrm{i}^2=-1$, 则展开式中常数项是 ( )

(A) $-45\mathrm{i}$ (B) $45\mathrm{i}$ (C) -45 (D) 45

11. 某公司招收男职员 x 名, 女职员 y 名, x 和 y 须满足约束条件 $\begin{cases}5x-11y\geqslant -22,\\ 2x+3y\geqslant 9,\\ 2x\leqslant 11,\end{cases}$ 则 $z=10x+10y$ 的最大值是 ( )

(A) 80 (B) 85 (C) 90 (D) 95

12. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB=2DC=2$, $\angle DAB=60^\circ$, E 为 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED、EC 向上折起, 使 A、B 重合于点 P, 则三棱锥 $P-DCE$ 的外接球的体积为 ( )



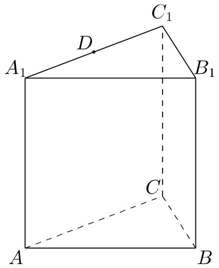
(A) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ (B) $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{8}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{24}$

二、填空题

13. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})}=1$, 则常数 $a=$______.

14. 已知抛物线 $y^2=4x$, 过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是______.

15. 如图, 已知在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等, D 是 A_1C_1 的中点, 则直线 AD 与平面 B_1DC 所成角的正弦值为______.



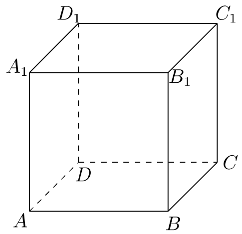
16. 下列四个命题中, 真命题的序号有______. (写出所有真命题的序号)

① 将函数 $y=|x+1|$ 的图象按向量 $\boldsymbol{v}=(-1,0)$ 平移, 得到的图象对应的函数表达式为 $y=|x|$;

② 圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 与直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 相交, 所得弦长为 2;

③ 若 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\tan\alpha\cot\beta=5$;

④ 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P 为底面 $ABCD$ 内一动点, P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等, 则 P 点的轨迹是抛物线的一部分.



三、解答题

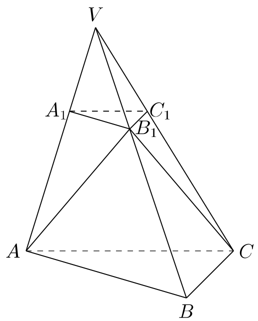
17. 已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $y=f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1,2)$.

(1) 求 φ;

(2) 计算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2008)$.

18. 设函数 $f(x)=ax-(a+1)\ln(x+1)$, 其中 $a\geqslant -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 如图, 已知平面 $A_1B_1C_1$ 平行于三棱锥 $V-ABC$ 的底面 ABC, 等边 $\triangle AB_1C$ 所在平面与底面 ABC 垂直, 且 $\angle ACB=90°$, 设 $AC=2a$, $BC=a$.
(1) 求证直线 B_1C_1 是异面直线 AB_1 与 A_1C_1 的公垂线;
(2) 求点 A 到平面 VBC 的距离;
(3) 求二面角 $A-VB-C$ 的大小.



20. 袋中装有标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的小球各 2 个, 从袋中任取 3 个小球, 按 3 个小球上最大数字的 9 倍计分, 每小球被取出的可能性都相等, 用 ξ 表示取出的 3 个小球上的最大数字, 求:
(1) 取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率;
(2) 随机变量 ξ 的概率分布和数学期望;
(3) 计分介于 20 分到 40 分之间的概率.

21. 双曲线 C 与椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点, 直线 $y=\sqrt{3}x$ 为 C 的一条渐近线.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 过点 $P(0,4)$ 的直线 l, 交双曲线 C 于 A, B 两点, 交 x 轴于 Q 点 (Q 点与 C 的顶点不重合). 当 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}=\lambda_2\overrightarrow{QB}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{8}{3}$ 时, 求 Q 点的坐标.

22. 已知 $a_1=2$, 点 (a_n,a_{n+1}) 在函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图象上, 其中 $n=1$, 2, 3, $\cdots$.
(1) 证明数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是等比数列;
(2) 设 $T_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$, 求 T_n 及数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(3) 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n+2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 数列的前 n 项和 S_n, 并证明 $S_n+\dfrac{2}{3T_n-1}=1$.

2006 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

一、选择题

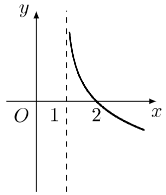
1. 定义集合运算: $A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),\ x\in A,\ y\in B\}$, 设集合 $A=\{0,\ 1\}$, $B=\{2,\ 3\}$, 则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为 ( )

(A) 0　(B) 6　(C) 12　(D) 18

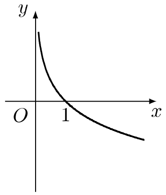
2. 设 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{x-1}, & x<2,\\ \log_3(x^2-1), & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(f(2))$ 的值为 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

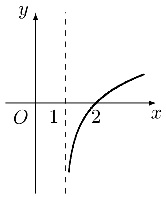
3. 函数 $y=1+a^x$ $(0<a<1)$ 的反函数的图象大致是 ( )



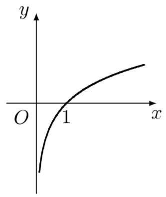
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$, $\boldsymbol{b}=(-2,4)$, 若表示向量 $4\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ 的有向线段首尾相接能构成三边形, 则向量 $\boldsymbol{c}$ 为 ( )

(A) $(1,-1)$　(B) $(-1,1)$　(C) $(-4,6)$　(D) $(4,-6)$

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为 ( )

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $A=\dfrac{\pi}{3}$, $a=\sqrt{3}$, $b=1$, 则 $c=$ ( )

(A) 1　(B) 2　(C) $\sqrt{3}-1$　(D) $\sqrt{3}$

7. 在给定双曲线中, 过焦点且垂直于实轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 $\dfrac{1}{2}$, 则该双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B) 2　(C) $\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{2}$

8. 正方体的内切球与其外接球的体积之比为 ( )

(A) $1:\sqrt{3}$　(B) $1:3$　(C) $1:3\sqrt{3}$　(D) $1:9$

9. 设 p: $x^2-x-2<0$, q: $\dfrac{1+x}{|x|-2}<0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

10. 已知 $\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $\dfrac{3}{14}$, 则展开式中常数项是 ( )

(A) -1　(B) 1　(C) -45　(D) 45

11. 已知集合 $A=\{5\}$, $B=\{1,\ 2\}$, $C=\{1,\ 3,\ 4\}$, 从这三个集合各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为 ( )

(A) 33　(B) 34　(C) 35　(D) 36

12. 已知 x 和 y 是正整数, 且满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 10,\\ x-y\leqslant 2,\\ 2x\geqslant 7,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最小值是 ( )

(A) 24　(B) 14　(C) 13　(D) 11.5

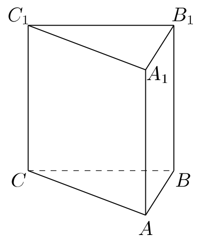
二、填空题

13. 某学校共有师生 2400 人, 现用分层抽样的方法, 从所有师生中抽取一个容量为 160 的样本. 已知从学生中抽取的人数为 150, 那么该学校的教师人数是______.

14. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_4=14$, $S_{10}-S_7=30$, 则 $S_9=$______.

15. 已知抛物线 $y^2=4x$, 过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是______.

16. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 所有棱长均为 1, 则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为______.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=2x^3-3(a-1)x^2+1$, 其中 $a\geqslant 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 讨论 $f(x)$ 的极值.

18. 已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $y=f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1,2)$.

(1) 求 φ;

(2) 计算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2008)$.

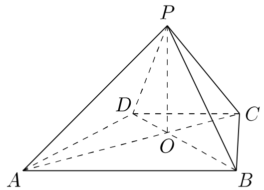
19. 盒中装有标有数字 1, 2, 3, 4 的卡片各 2 张, 从盒中任意抽取 3 张, 每张卡片被取出的可能性都相等, 求:

(1) 抽出的 3 张卡片上最大的数字是 4 的概率;

(2) 抽出的 3 张中有 2 张卡片上的数字是 3 的概率;

(3) 抽出的 3 张卡片上的数字互不相同的概率.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel DC$, $AC \perp BD$, AC 与 BD 相交于点 O, 且顶点 P 在底面上的射影恰为 O 点. 又 $BO=2$, $PO=\sqrt{2}$, $PB \perp PD$.
(1) 求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值;
(2) 求二面角 $P-AB-C$ 的大小;
(3) 设点 M 在棱 PC 上, 且 $\dfrac{PM}{MC}=\lambda$, 问 λ 为何值时, $PC \perp$ 平面 BMD.



21. 已知椭圆的中心在坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 椭圆的短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形, 两准线间的距离为 4.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 直线 l 过点 $P(0,2)$ 且与椭圆相交于 A、B 两点, 当 $\triangle AOB$ 面积取得最大值时, 求直线 l 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{2}$. 点 $(n, 2a_{n+1}-a_n)$ 在直线 $y=x$ 上, 其中 $n=1, 2, 3, \cdots$.
(1) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n-1$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(3) 设 S_n、T_n 分别为数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和. 是否存在实数 λ, 使得数列 $\left\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\right\}$ 为等差数列? 若存在, 试求出 λ; 若不存在, 则说明理由.

2006 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 10\}$, 集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+x-6\leqslant 0\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{1,\ 2\}$ (C) $\{2,\ 3\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3\}$

2. 复数 $\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}$ 等于 ( )

(A) $1-\mathrm{i}$ (B) $1+\mathrm{i}$ (C) $-1+\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}$ 等于 ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) 0

4. 设函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象过点 $(2,1)$, 其反函数的图象过点 $(2,8)$, 则 $a+b$ 等于 ( )

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

5. 设直线过点 $(0,a)$, 其斜率为 1, 且与圆 $x^2+y^2=2$ 相切, 则 a 的值为 ( )

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) ± 2 (C) $\pm 2\sqrt{2}$ (D) ± 4

6. "等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立"是"$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 成等差数列"的 ( )

(A) 必要而不充分条件 (B) 充分而不必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ $(a>\sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知不等式 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}\right)\geqslant 9$ 对任意正实数 $x,\ y$ 恒成立, 则正实数 a 的最小值为 ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为 ( )

(A) 三边均不相等的三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰非等边三角形 (D) 等边三角形

10. 已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4$ $(0<a<3)$. 若 $x_1<x_2$, $x_1+x_2=1-a$, 则 ( )

(A) $f(x_1)<f(x_2)$ (B) $f(x_1)=f(x_2)$

(C) $f(x_1)>f(x_2)$ (D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

11. 已知平面 α 外不共线的三点 $A,\ B,\ C$ 到 α 的距离都相等, 则正确的结论是 ( )

(A) 平面 ABC 必平行于 α

(B) 平面 ABC 必与 α 相交

(C) 平面 ABC 必不垂直于 α

(D) 存在 $\triangle ABC$ 的一条中位线平行于 α 或在 α 内

12. 为确保信息安全, 信息需加密传播, 发送方由明文 $\longrightarrow$ 密文 (加密), 接收方由密文 $\longrightarrow$ 明文 (解密). 已知加密规则为: 明文 a,b,c,d 对应密文 $a+2b$, $2b+c$, $2c+3d$, $4d$. 例如, 明文 1, 2, 3, 4 对应密文 5, 7, 18, 16. 当接收方收到密文 14, 9, 23, 28 时, 则解密得到的明文为 ( )

(A) 4, 6, 1, 7 (B) 7, 6, 1, 4 (C) 6, 4, 1, 7 (D) 1, 6, 4, 7

二、填空题

13. $\cos 43^\circ\cos 77^\circ+\sin 43^\circ\cos 167^\circ$ 的值为______.

14. $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 展开式中 x^{-3} 的系数为______. (用数字作答)

15. 水平桌面 α 上放有 4 个半径均为 $2R$ 的球, 且相邻的球都相切 (球心的连线构成正方形). 在这 4 个球的上面放 1 个半径为 R 的小球, 它和下面的 4 个球恰好都相切, 则小球的球心到水平桌面 α 的距离是______.

16. 某校从 8 名教师中选派 4 名教师同时去 4 个边远地区支教 (每地 1 人), 其中甲和乙不同去, 甲和丙只能同去或同不去, 则不同的选派方案共有______种.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求使函数 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

18. 甲、乙、丙 3 人投篮, 投进的概率分别是 $\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{1}{2}$.

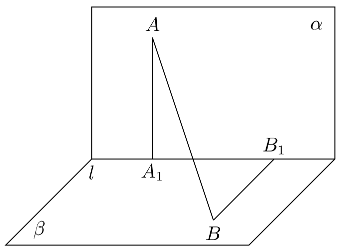
(1) 现 3 人各投篮 1 次, 求 3 人都没有投进的概率;

(2) 用 ξ 表示乙投篮 3 次的进球数, 求随机变量 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, 点 A 在直线 l 上的射影为 A_1, 点 B 在 l 上的射影为 B_1. 已知 $AB=2$, $AA_1=1$, $BB_1=\sqrt{2}$. 求:

(1) 直线 AB 分别与平面 α,β 所成角的大小;

(2) 二面角 A_1-AB-B_1 的大小.

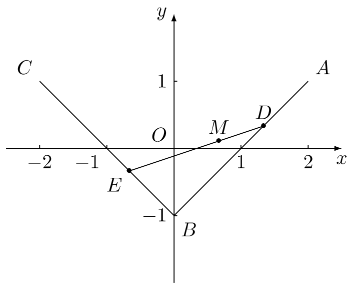


20. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n=a_n^2+5a_n+6$, 且 a_1, a_3, a_{15} 成等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

21. 如图, 三定点 $A(2,1)$, $B(0,-1)$, $C(-2,1)$, 三动点 D, E, M 满足 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}=t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DE}$, $t\in[0,1]$.

(1) 求动直线 DE 斜率的变化范围;

(2) 求动点 M 的轨迹方程.



22. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$, 且存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 使 $f(x_0)=x_0$.

(1) 证明: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数;

(2) 设 $x_1=0$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $y_1=\dfrac{1}{2}$, $y_{n+1}=f(y_n)$, 其中 $n=1,2,\cdots$. 证明: $x_n<x_{n+1}<x_0<y_{n+1}<y_n$;

(3) 证明: $\dfrac{y_{n+1}-x_{n+1}}{y_n-x_n}<\dfrac{1}{2}$.

2006 普通高等学校招生考试 (陕西卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 10\}$, 集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+x-6=0\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{3\}$ (C) $\{-2,\ 3\}$ (D) $\{-3,\ 2\}$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的值域是 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $(0,1]$ (C) $[0,1)$ (D) $[0,1]$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_8=8$, 则该数列前 9 项和 S_9 等于 ( )

(A) 18 (B) 27 (C) 36 (D) 45

4. 设函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象过点 $(0,0)$, 其反函数的图象过点 $(1,2)$, 则 $a+b$ 等于 ( )

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

5. 设直线过点 $(0,a)$, 其斜率为 1, 且与圆 $x^2+y^2=2$ 相切, 则 a 的值为 ( )

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) ± 2 (C) $\pm 2\sqrt{2}$ (D) ± 4

6. "α,β,γ 成等差数列"是"等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 设 x,y 为正数, 则 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)$ 的最小值为 ( )

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15

8. 已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为 ( )

(A) 三边均不相等的三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰非等边三角形 (D) 等边三角形

9. 已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4$ $(a>0)$. 若 $x_1<x_2$, $x_1+x_2=0$, 则 ( )

(A) $f(x_1)<f(x_2)$ (B) $f(x_1)=f(x_2)$

(C) $f(x_1)>f(x_2)$ (D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ $(a>\sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

11. 已知平面 α 外不共线的三点 A,B,C 到 α 的距离都相等, 则正确的结论是 ( )

(A) 平面 ABC 必平行于 α

(B) 平面 ABC 必与 α 相交

(C) 平面 ABC 必不垂直于 α

(D) 存在 $\triangle ABC$ 的一条中位线平行于 α 或在 α 内

12. 为确保信息安全, 信息需加密传播, 发送方由明文 $\longrightarrow$ 密文 (加密), 接收方由密文 $\longrightarrow$ 明文 (解密). 已知加密规则为: 明文 a,b,c,d 对应密文 $a+2b$, $2b+c$, $2c+3d$, $4d$. 例如, 明文 1, 2, 3, 4 对应密文 5, 7, 18, 16. 当接收方收到密文 14, 9, 23, 28 时, 则解密得到的明文为 ( )

(A) 1, 6, 4, 7 (B) 4, 6, 1, 7 (C) 7, 6, 1, 4 (D) 6, 4, 1, 7

二、填空题

13. $\cos 43^\circ\cos 77^\circ+\sin 43^\circ\cos 167^\circ$ 的值为______.

14. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中的常数项为______. (用数字作答)

15. 某校从 8 名教师中选派 4 名教师同时去 4 个边远地区支教 (每地 1 人), 其中甲和乙不同去, 则不同的选派方案共有______种.

16. 水平桌面 α 上放有 4 个半径均为 $2R$ 的球, 且相邻的球都相切 (球心的连线构成正方形). 在这 4 个球的上面放 1 个半径为 R 的小球, 它和下面的 4 个球恰好都相切, 则小球的球心到水平桌面 α 的距离是______.

三、解答题

17. 甲、乙、丙 3 人投篮, 投进的概率分别是 $\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{3}{5}$. 现 3 人各投篮 1 次, 求:

(1) 3 人都投进的概率;

(2) 3 人中恰有 2 人投进的概率.

18. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

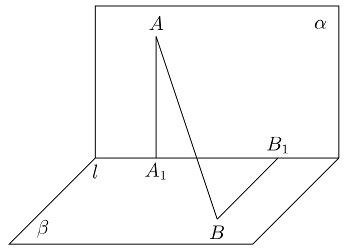
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求使函数 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

19. 如图, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, 点 A 在直线 l 上的射影为 A_1, 点 B 在 l 上的射影为 B_1. 已知 $AB=2$, $AA_1=1$, $BB_1=\sqrt{2}$. 求:

(1) 直线 AB 分别与平面 α,β 所成角的大小;

(2) 二面角 A_1-AB-B_1 的大小.

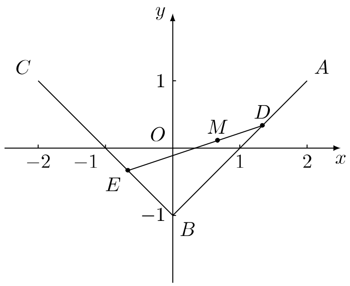


20. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n = a_n^2 + 5a_n + 6$, 且 a_1, a_3, a_{15} 成等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

21. 如图, 三定点 $A(2,1)$, $B(0,-1)$, $C(-2,1)$, 三动点 D, E, M 满足 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DE}$, $t \in [0,1]$.

(1) 求动直线 DE 斜率的变化范围;

(2) 求动点 M 的轨迹方程.



22. 设函数 $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 1$ $(k \geqslant 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的极小值大于 0, 求 k 的取值范围.

2006 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,\ 3,\ 2m-1\}$, 集合 $B=\{3,\ m^2\}$, 若 $B\subseteq A$, 则实数 $m=$______.

2. 已知圆 $x^2-4x-4+y^2=0$ 的圆心是点 P, 则点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离是______.

3. 若函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的反函数的图象过点 $(2,-1)$, 则 $a=$______.

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_n^3}{n^3+1}=$______.

5. 若复数 z 同时满足 $z-\overline{z}=2\mathrm{i}$, $\overline{z}=\mathrm{i}z$ (i 为虚数单位), 则 $z=$______.

6. 如果 $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, 且 α 是第四象限的角, 那么 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$______.

7. 已知椭圆中心在原点, 一个焦点为 $F(-2\sqrt{3},0)$, 且长轴长是短轴长的 2 倍, 则该椭圆的标准方程是______.

8. 在极坐标系中, O 是极点, 设点 $A\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(5,-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. 则 $\triangle OAB$ 的面积是______.

9. 两部不同的长篇小说各由第一、二、三、四卷组成, 每卷 1 本, 共 8 本. 将它们任意地排成一排, 左边 4 本恰好都属于同一部小说的概率是______. (结果用分数表示)

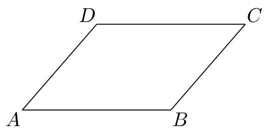
10. 如果一条直线与一个平面垂直, 那么, 称此直线与平面构成一个"正交线面对". 在一个正方体中, 由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的"正交线面对"的个数是______.

11. 若曲线 $y^2=|x|+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点, 则 k, b 分别应满足的条件是______.

12. 三个同学对问题"关于 x 的不等式 $x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 在 $[1,12]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围"提出各自的解题思路.
甲说: "只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值".
乙说: "把不等式变形为左边含变量 x 的函数, 右边仅含常数, 求函数的最值".
丙说: "把不等式两边看成关于 x 的函数, 作出函数图象".
参考上述解题思路, 你认为他们所讨论的问题的正确结论, 即 a 的取值范围是______.

二、选择题

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 下列结论中错误的是 ( )

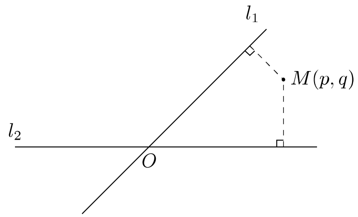


(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$
(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ (D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

14. 若空间中有四个点, 则"这四个点中有三点在同一条直线上"是"这四个点在同一个平面上"的 ( )
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

15. 若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M, 则对任意实常数 k, 总有 ( )
(A) $2\in M$, $0\in M$ (B) $2\notin M$, $0\notin M$
(C) $2\in M$, $0\notin M$ (D) $2\notin M$, $0\in M$

16. 如图, 平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O, 对于平面上任意一点 M, 若 p, q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离, 则称有序非负实数对 (p,q) 是点 M 的"距离坐标". 已知常数 $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, 给出下列命题:
① 若 $p=q=0$, 则"距离坐标"为 $(0,0)$ 的点有且仅有 1 个;
② 若 $pq=0$, 且 $p+q\neq 0$, 则"距离坐标"为 (p,q) 的点有且仅有 2 个;
③ 若 $pq\neq 0$, 则"距离坐标"为 (p,q) 的点有且仅有 4 个.
上述命题中, 正确命题的个数是 ( )

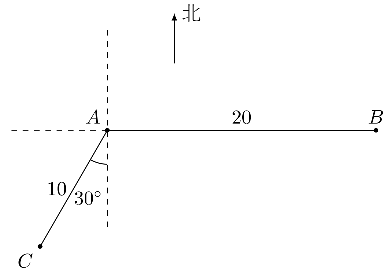


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

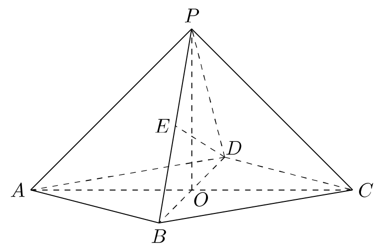
三、解答题

17. 求函数 $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$ 的值域和最小正周期.

18. 如图, 当甲船位于 A 处时获悉, 在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援, 同时把消息告知在甲船的南偏西 $30°$, 相距 10 海里 C 处的乙船, 试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援? (角度精确到 $1°$)



19. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 2 的菱形. $\angle DAB=60°$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O, $PO\perp$ 平面 $ABCD$, PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$.
(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;
(2) 若 E 是 PB 的中点, 求异面直线 DE 与 PA 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A, B 两点.
(1) 求证: "如果直线 l 过点 $T(3,0)$, 那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题;
(2) 写出 (1) 中命题的逆命题, 判断它是真命题还是假命题, 并说明理由.

21. 已知有穷数列 $\{a_n\}$ 共有 $2k$ 项 (整数 $k\geqslant 2$), 首项 $a_1=2$. 设该数列的前 n 项和为 S_n, 且 $a_{n+1}=(a-1)S_n+2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k-1)$, 其中常数 $a>1$.
(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;
(2) 若 $a=2^{\frac{2}{2k-1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(3) 若 (2) 中的数列 $\{b_n\}$ 满足不等式 $\left|b_1-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_2-\dfrac{3}{2}\right|+\cdots+\left|b_{2k-1}-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_{2k}-\dfrac{3}{2}\right|\leqslant 4$, 求 k 的值.

22. 已知函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 有如下性质: 如果常数 $a>0$, 那么该函数在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数.
(1) 如果函数 $y=x+\dfrac{2^b}{x}$ $(x>0)$ 的值域为 $[6,+\infty)$, 求 b 的值;
(2) 研究函数 $y=x^2+\dfrac{c}{x^2}$ (常数 $c>0$) 在定义域内的单调性, 并说明理由;
(3) 对函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 和 $y=x^2+\dfrac{a}{x^2}$ (常数 $a>0$) 作出推广, 使它们都是你所推广的函数的特例. 研究推广后的函数的单调性 (只须写出结论, 不必证明), 并求函数 $F(x)=\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n+\left(\dfrac{1}{x^2}+x\right)^n$ (n 是正整数) 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最大值和最小值. (可利用你的研究结论)

2006 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,\ 3,\ m\}$, 集合 $B=\{3,\ 4\}$. 若 $B\subseteq A$, 则实数 $m=$______.

2. 已知两条直线 l_1: $ax+3y-3=0$, l_2: $4x+6y-1=0$. 若 $l_1\parallel l_2$, 则 $a=$______.

3. 若函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的反函数的图象过点 $(2,-1)$, 则 $a=$______.

4. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n^2+1)}{6n^3+1}=$______.

5. 若复数 $z=(m-2)+(m+1)\mathrm{i}$ 为纯虚数 (i 为虚数单位), 其中 $m\in\mathbf{R}$, 则 $|z|=$______.

6. 函数 $y=\sin x\cos x$ 的最小正周期是______.

7. 已知双曲线的中心在原点, 一个顶点的坐标是 $(3,0)$, 且焦距与虚轴长之比为 $5:4$, 则双曲线的标准方程是______.

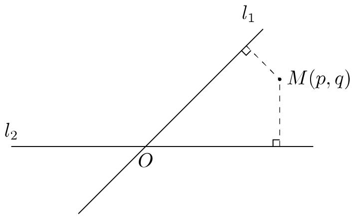
8. 方程 $\log_3(x^2-10)=1+\log_3 x$ 的解是______.

9. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}x+y-3\geqslant 0,\\ x+2y-5\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $y-2x$ 的最大值是______.

10. 在一个小组中有 8 名女同学和 4 名男同学, 从中任意地挑选 2 名同学担任交通安全宣传志愿者, 那么选到的两名都是女同学的概率是______. (结果用分数表示)

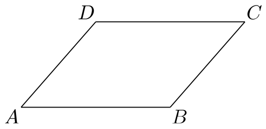
11. 若曲线 $|y|=2^x+1$ 与直线 $y=b$ 没有公共点, 则 b 的取值范围是______.

12. 如图, 平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O. 对于平面上任意一点 M, 若 p、q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离, 则称有序非负实数对 (p,q) 是点 M 的"距离坐标". 根据上述定义, "距离坐标"是 $(1,2)$ 的点的个数是______.



二、选择题

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 下列结论中错误的是 ( )



(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$
(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ (D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

14. 如果 $a<0$, $b>0$, 那么, 下列不等式中正确的是 ( )

(A) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ (B) $\sqrt{-a}<\sqrt{b}$ (C) $a^2<b^2$ (D) $|a|>|b|$

15. 若空间中有两条直线, 则"这两条直线为异面直线"是"这两条直线没有公共点"的 ( )

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

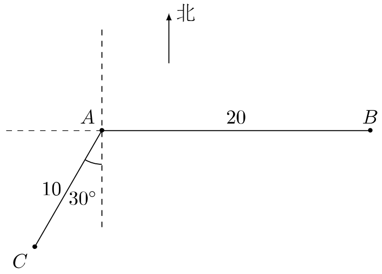
16. 如果一条直线与一个平面垂直, 那么, 称此直线与平面构成一个"正交线面对". 在一个正方体中, 由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的"正交线面对"的个数是 ( )

(A) 48 (B) 18 (C) 24 (D) 36

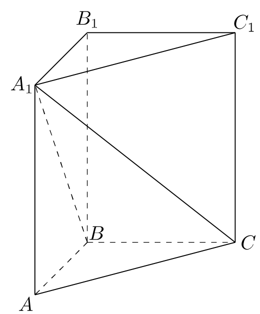
三、解答题

17. 已知 α 是第一象限的角, 且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, 求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos(2\alpha+4\pi)}$ 的值.

18. 如图, 当甲船位于 A 处时获悉, 在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援, 同时把消息告知在甲船的南偏西 30°, 相距 10 海里 C 处的乙船, 试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援? (角度精确到 1°)



19. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=BC=1$.
(1) 求异面直线 B_1C_1 与 AC 所成角的大小;
(2) 若 A_1C 与平面 ABC 所成角为 45°, 求三棱锥 A_1-ABC 的体积.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且对任意正整数 n, $a_n+S_n=4096$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{\log_2 a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 对数列 $\{T_n\}$, 从第几项起 $T_n<-509$?

21. 已知在平面直角坐标系 xOy 中的一个椭圆, 它的中心在原点, 左焦点为 $F(-\sqrt{3},0)$, 且右顶点为 $D(2,0)$, 设点 A 的坐标是 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 若 P 是椭圆上的动点, 求线段 PA 中点 M 的轨迹方程;

(3) 过原点 O 的直线交椭圆于点 B、C, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

22. 已知函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 有如下性质: 如果常数 $a>0$, 那么该函数在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数.

(1) 如果函数 $y=x+\dfrac{2^b}{x}$ $(x>0)$ 在 $(0,4]$ 上是减函数, 在 $[4,+\infty)$ 上是增函数, 求 b 的值;

(2) 设常数 $c\in[1,4]$, 求函数 $f(x)=x+\dfrac{c}{x}$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$ 的最大值和最小值;

(3) 当 n 是正整数时, 研究函数 $g(x)=x^n+\dfrac{c}{x^n}$ $(c>0)$ 的单调性, 并说明理由.

2006 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6\leqslant 0\}$, 集合 $B=\{x\mid |2x-1|>3\}$, 则集合 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$　(B) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

(C) $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　(D) $\{x\mid -1<x<3\}$

2. 复数 $(1-\mathrm{i})^3$ 的虚部为 ( )

(A) 3　(B) -3　(C) 2　(D) -2

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 下面结论正确的是 ( )

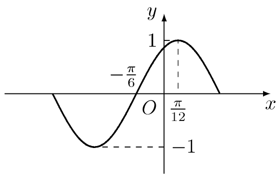
(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续　(B) $f(1)=5$

(C) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$　(D) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=5$

4. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 60°, m、n 为异面直线, 且 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, 则 m、n 所成的角为 ( )

(A) 30°　(B) 60°　(C) 90°　(D) 120°

5. 下列函数中, 图象的一部分如图所示的是 ( )



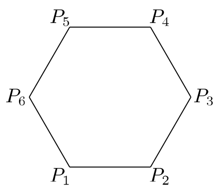
(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　(D) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

6. 已知两定点 $A(-2,0)$、$B(1,0)$, 如果动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$, 则点 P 的轨迹所包围的图形的面积等于 ( )

(A) π　(B) 4π　(C) 8π　(D) 9π

7. 如图, 已知正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, 下列向量的数量积中最大的是 ( )



(A) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$　(B) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$　(C) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}$　(D) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}$

8. 某厂生产甲产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_1、b_1 千克, 生产乙产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_2、b_2 千克. 甲、乙产品每千克可获利润分别为 d_1、d_2 元. 月初一次性购进本月用原料 A、B 各 c_1、c_2 千克. 要计划本月生产甲产品和乙产品各多少千克才能使月利润总额达到最大. 在这个问题中, 设全月生产甲、乙两种产品分别为 x 千克、y 千克, 月利润总额为 z 元, 那么, 用于求使总利润 $z=d_1x+d_2y$ 最大的数学模型中, 约束条件为 ( )

(A) $\begin{cases}a_1x+a_2y\geqslant c_1,\\ b_1x+b_2y\geqslant c_2,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}a_1x+b_1y\leqslant c_1,\\ a_2x+b_2y\leqslant c_2,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}a_1x+a_2y\leqslant c_1,\\ b_1x+b_2y\leqslant c_2,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}a_1x+a_2y=c_1,\\ b_1x+b_2y=c_2,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$

9. 直线 $y=x-3$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点, 过 A、B 两点向抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 P、Q, 则梯形 $APQB$ 的面积为 ( )

(A) 48　(B) 56　(C) 64　(D) 72

10. 已知球 O 的半径是 1, A、B、C 三点都在球面上, A、B 两点和 A、C 两点的球面距离都是 $\dfrac{\pi}{4}$, B、C 两点的球面距离是 $\dfrac{\pi}{3}$, 则二面角 $B-OA-C$ 的大小是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

11. 设 a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 所对的边, 则 $a^2=b(b+c)$ 是 $A=2B$ 的 ( )

(A) 充要条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

12. 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数, 这个数不能被 3 整除的概率为 ( )

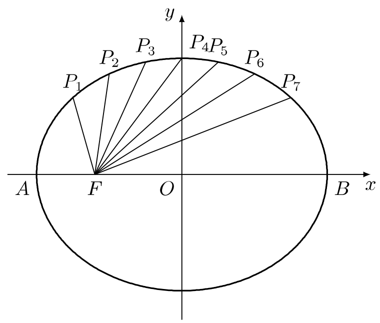
(A) $\dfrac{19}{54}$　(B) $\dfrac{35}{54}$　(C) $\dfrac{38}{54}$　(D) $\dfrac{41}{60}$

二、填空题

13. 在三棱锥 $O-ABC$ 中, 三条棱 OA、OB、OC 两两互相垂直, 且 $OA=OB=OC$, M 是 AB 边的中点, 则 OM 与平面 ABC 所成角的大小是______. (用反三角函数表示)

14. 设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 1, 2, 3, 4. $P(\xi=k)=ak+b$ ($k=1, 2, 3, 4$). 又 ξ 的数学期望 $E\xi=3$, 则 $a+b=$______.

15. 如图, 把椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的长轴 AB 分成 8 等分, 过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 P_1、P_2、$\cdots$、P_7 七个点, F 是椭圆的一个焦点, 则 $|P_1F|+|P_2F|+\cdots+|P_7F|=$______.



16. 非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足: (1) 对任意 a、$b\in G$, 都有 $a\oplus b\in G$; (2) 存在 $e\in G$, 使得对一切 $a\in G$, 都有 $a\oplus e=e\oplus a=a$, 则称 G 关于运算 $\oplus$ 为"融洽集". 现给出下列集合和运算:

① $G=\{$非负整数$\}$, $\oplus$ 为整数的加法;
② $G=\{$偶数$\}$, $\oplus$ 为整数的乘法;
③ $G=\{$平面向量$\}$, $\oplus$ 为平面向量的加法;
④ $G=\{$二次三项式$\}$, $\oplus$ 为多项式的加法;
⑤ $G=\{$虚数$\}$, $\oplus$ 为复数的乘法.

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为"融洽集"的是______. (写出所有"融洽集"的序号)

三、解答题

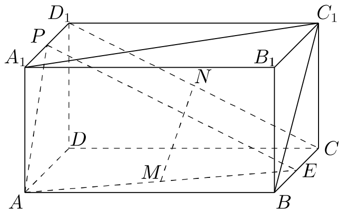
17. 已知 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 三内角, 向量 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$, 且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$.

(1) 求角 A;

(2) 若 $\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$, 求 $\tan C$.

18. 某课程考核分理论和实验两部分进行, 每部分考核成绩只记"合格"与"不合格", 两部分考核都"合格"则该课程考核"合格". 甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9、0.8、0.7; 在实验考核中合格的概率分别为 0.8、0.7、0.9. 所有考核是否合格互相之间没有影响.
(1) 求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率;
(2) 求这三人该课程考核都合格的概率. (结果保留三位小数)

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、P 分别是 BC、A_1D_1 的中点, M N 分别是 AE CD_1 的中点, $AD=AA_1=a$, $AB=2a$.
(1) 求证: $MN\parallel$ 面 ADD_1A_1;
(2) 求二面角 $P-AE-D$ 的大小;
(3) 求三棱锥 $P-DEN$ 的体积.



20. 已知数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_1=1$, $a_2=3$, $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 数列 $\{\ln S_n\}$ 的前 n 项和为 U_n.
(1) 求 U_n;
(2) 设 $F_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{U_n}}{2n(n!)^2}x^{2n}$ $(x>0)$, $T_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}F_k'(x)$ (其中 $F_k'(x)$ 为 $F_k(x)$ 的导函数), 计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n(x)}{T_{n+1}(x)}$.

21. 已知两定点 $F_1(-\sqrt{2},0)$, $F_2(\sqrt{2},0)$, 满足条件 $\left|\overrightarrow{PF_2}\right|-\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=2$ 的点 P 的轨迹是曲线 E, 直线 $y=kx-1$ 与曲线 E 交于 A、B 两点. 如果 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6\sqrt{3}$, 且曲线 E 上存在点 C, 使 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OC}$, 求 m 的值和 $\triangle ABC$ 的面积 S.

22. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}+a\ln x$ $(x>0)$, $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$. 对任意两个不相等的正数 x_1、x_2, 证明:
(1) 当 $a\leqslant 0$ 时, $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$;
(2) 当 $a\leqslant 4$ 时, $|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$.

2006 普通高等学校招生考试 (四川卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6\leqslant 0\}$, 集合 $B=\{x\mid |2x-1|>3\}$, 则集合 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$　(B) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

(C) $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　(D) $\{x\mid -1<x<3\}$

2. 函数 $f(x)=\ln(x-1)\ (x>1)$ 的反函数是 ( )

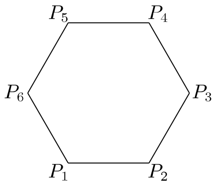
(A) $f^{-1}(x)=\mathrm{e}^x+1\ (x\in\mathbf{R})$　(B) $f^{-1}(x)=10^x+1\ (x\in\mathbf{R})$

(C) $f^{-1}(x)=10^x+1\ (x>1)$　(D) $f^{-1}(x)=\mathrm{e}^x+1\ (x>1)$

3. 曲线 $y=4x-x^3$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程是 ( )

(A) $y=7x+4$　(B) $y=7x+2$　(C) $y=x-4$　(D) $y=x-2$

4. 如图, 已知正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, 下列向量的数量积中最大的是 ( )



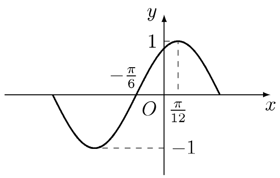
(A) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$　(B) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$　(C) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}$　(D) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}$

5. 甲校有 3600 名学生, 乙校有 5400 名学生, 丙校有 1800 名学生, 为统计三校学生某方面的情况, 计划采用分层抽样法, 抽取一个容量为 90 人的样本, 应在这三校分别抽取学生 ( )

(A) 30 人, 30 人, 30 人　(B) 30 人, 45 人, 15 人

(C) 20 人, 30 人, 10 人　(D) 30 人, 50 人, 10 人

6. 下列函数中, 图象的一部分如图所示的是 ( )



(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　(D) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

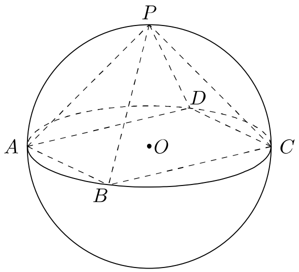
7. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 60°, m、n 为异面直线, 且 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, 则 m、n 所成的角为 ( )

(A) 30°　(B) 60°　(C) 90°　(D) 120°

8. 已知两定点 $A(-2,0)$、$B(1,0)$, 如果动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$, 则点 P 的轨迹所包围的图形的面积等于 ( )

(A) 9π　(B) 8π　(C) 4π　(D) π

9. 如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 底面的四个顶点 A、B、C、D 在球 O 的同一个大圆上, 点 P 在球面上, 如果 $V_{P-ABCD}=\dfrac{16}{3}$, 则球 O 的表面积是 ( )



(A) 4π　(B) 8π　(C) 12π　(D) 16π

10. 直线 $y=x-3$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点, 过 A、B 两点向抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 P、Q, 则梯形 $APQB$ 的面积为 ( )

(A) 36　(B) 48　(C) 56　(D) 64

11. 设 a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 所对的边, 则 $a^2=b(b+c)$ 是 $A=2B$ 的 ( )

(A) 充要条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

12. 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数, 这个数不能被 3 整除的概率为 ( )

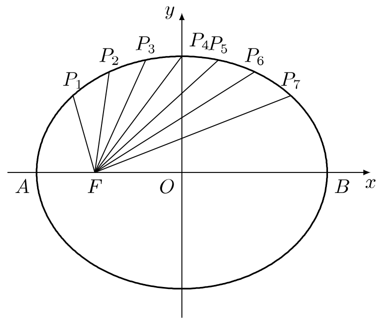
(A) $\dfrac{41}{60}$　(B) $\dfrac{38}{54}$　(C) $\dfrac{35}{54}$　(D) $\dfrac{19}{54}$

二、填空题

13. $(1-2x)^{10}$ 展开式中的 x^3 的系数为______. (用数字作答)

14. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ y\geqslant\dfrac{1}{2}x,\\ 2x+y\leqslant 10,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值为______.

15. 如图, 把椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的长轴 AB 分成 8 等分, 过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 P_1、P_2、$\cdots$、P_7 七个点, F 是椭圆的一个焦点, 则 $|P_1F|+|P_2F|+\cdots+|P_7F|=$______.



16. m、n 是空间两条不同直线, α、β 是两个不同平面, 下面有四个命题:

① $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta\Rightarrow m\perp n$;

② $m\perp n$, $\alpha\parallel\beta$, $m\perp\alpha\Rightarrow n\parallel\beta$;

③ $m\perp n$, $\alpha\parallel\beta$, $m\parallel\alpha\Rightarrow n\perp\beta$;

④ $m\perp\alpha$, $m\parallel n$, $\alpha\parallel\beta\Rightarrow n\perp\beta$.

其中真命题的编号是______. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, $a_1=1$, $a_{n+1}=2S_n+1\ (n\geqslant 1)$.

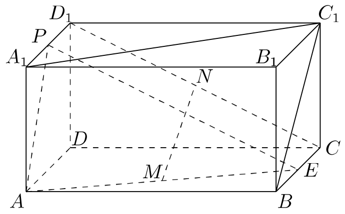
(1) 求 $\{a_n\}$ 的的通项公式;

(2) 等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正, 其前 n 项和为 T_n, 且 $T_3=15$, 又 a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 成等比数列, 求 T_n.

18. 已知 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 三内角, 向量 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$, 且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$.
(1) 求角 A;
(2) 若 $\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$, 求 $\tan C$.

19. 某课程考核分理论和实验两部分进行, 每部分考核成绩只记"合格"与"不合格", 两部分考核都"合格"则该课程考核"合格". 甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9、0.8、0.7; 在实验考核中合格的概率分别为 0.8、0.7、0.9. 所有考核是否合格互相之间没有影响.
(1) 求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率;
(2) 求这三人该课程考核都合格的概率. (结果保留三位小数)

20. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、P 分别是 BC、A_1D_1 的中点, M N 分别是 AE CD_1 的中点, $AD=AA_1=a$, $AB=2a$.
(1) 求证: $MN\parallel$ 面 ADD_1A_1;
(2) 求二面角 $P-AE-D$ 的大小.



21. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax-1$, $g(x)=f'(x)-ax-5$, 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.
(1) 对满足 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 的一切 a 的值, 都有 $g(x)<0$, 求实数 x 的取值范围;
(2) 设 $a=-m^2$, 当实数 m 在什么范围内变化时, 函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=3$ 只有一个公共点.

22. 已知两定点 $F_1(-\sqrt{2},0)$, $F_2(\sqrt{2},0)$, 满足条件 $\left|\overrightarrow{PF_2}\right|-\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=2$ 的点 P 的轨迹是曲线 E, 直线 $y=kx-1$ 与曲线 E 交于 A、B 两点.
(1) 求 k 的取值范围;
(2) 如果 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6\sqrt{3}$, 且曲线 E 上存在点 C, 使 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OC}$, 求 m 的值和 $\triangle ABC$ 的面积 S.

2006 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 如果双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$, 一条渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$, 那么它的两条渐近线间的距离是 ( )

(A) $6\sqrt{3}$ (B) 4 (C) 2 (D) 1

3. 设变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x, \\ x+y\geqslant 2, \\ y\geqslant 3x-6, \end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+y$ 的最小值为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9

4. 设集合 $M=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$, $N=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$, 那么"$a\in M$"是"$a\in N$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子里, 使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号, 则不同的放球方法有 ( )

(A) 10 种 (B) 20 种 (C) 36 种 (D) 52 种

6. 设 m、n 是两条不同的直线, α、β 是两个不同的平面. 考查下列命题, 其中正确的命题是 ( )

(A) $m\perp\alpha$, $n\subset\beta$, $m\perp n\Rightarrow\alpha\perp\beta$

(B) $\alpha /\!/ \beta$, $m\perp\alpha$, $n /\!/ \beta\Rightarrow m\perp n$

(C) $\alpha\perp\beta$, $m\perp\alpha$, $n /\!/ \beta\Rightarrow m\perp n$

(D) $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\perp m\Rightarrow n\perp\beta$

7. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是公差为 1 的等差数列, 其首项分别为 a_1、b_1, 且 $a_1+b_1=5$, a_1, $b_1\in\mathbf{N}^*$. 设 $C_n=a_{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{C_n\}$ 的前 10 项和等于 ( )

(A) 55 (B) 70 (C) 85 (D) 100

8. 已知函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$ (a、b 为常数, $a\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$) 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处取得最小值, 则函数 $y=f\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)$ 是 ( )

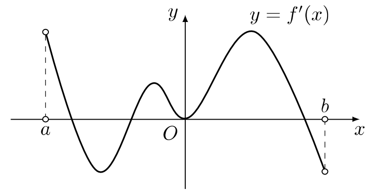
(A) 偶函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

(B) 偶函数且它的图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(C) 奇函数且它的图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(D) 奇函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

9. 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b), 导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图像如图所示, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点 ( )



(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

10. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 记 $g(x)=f(x)[f(x)+f(2)-1]$. 若 $y=g(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $[2,+\infty)$ (B) $(0,1)\cup(1,2)$

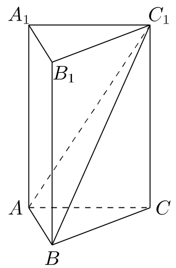
(C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ (D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

二、填空题

11. $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的二项展开式中 x 的系数是______. (用数字作答)

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 且 $\boldsymbol{a}=(3,3)$, $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,1)$, 则 $\cos\theta=$______.

13. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=1$. 若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 60°, 则点 C 到平面 ABC_1 的距离为______.



14. 设直线 $ax-y+3=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 A、B 两点, 且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a=$______.

15. 某公司一年购买某种货物 400 吨, 每次都购买 x 吨, 运费为 4 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 $x=$______吨.

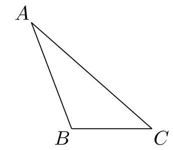
16. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, 点 A_0 表示坐标原点, 点 $A_n(n,f(n))$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 若向量 $\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, θ_n 是 $\overrightarrow{a_n}$ 与 $\overrightarrow{i}$ 的夹角 (其中 $\overrightarrow{i}=(1,0)$), 设 $S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

三、解答题

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $BC=1$, $\cos C=\dfrac{3}{4}$.

(1) 求 AB 的值;

(2) 求 $\sin(2A+C)$ 的值.



18. 某射手进行射击训练, 假设每次射击击中目标的概率为 $\dfrac{3}{5}$, 且每次射击的结果互不影响.

(1) 求射手在 3 次射击中, 至少有两次连续击中目标的概率 (用数字作答);

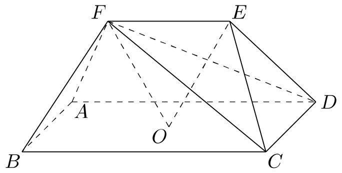
(2) 求射手第 3 次击中目标时, 恰好射击了 4 次的概率 (用数字作答);

(3) 设随机变量 ξ 表示射手第 3 次击中目标时已射击的次数, 求 ξ 的分布列.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点, 面 CDE 是等边三角形, 棱 $EF \parallel BC$ 且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

(1) 证明: $FO \parallel$ 平面 CDE;

(2) 设 $BC=\sqrt{3}CD$, 证明: $EO \perp$ 平面 CDF.



20. 已知函数 $f(x)=4x^3-3x^2\cos\theta+\frac{3}{16}\cos\theta$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, θ 为参数, 且 $0\leqslant\theta<2\pi$.

(1) 当 $\cos\theta=0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 是否有极值;

(2) 要使函数 $f(x)$ 的极小值大于零, 求参数 θ 的取值范围;

(3) 若对 (2) 中所求的取值范围内的任意参数 θ, 函数 $f(x)$ 在区间 $(2a-1,a)$ 内都是增函数, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $x_1=x_2=1$, $y_1=y_2=2$, 并且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\frac{x_n}{x_{n-1}}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n}\geqslant\lambda\frac{y_n}{y_{n-1}}$ (λ 为非零参数, $n=2, 3, 4, \cdots$).

(1) 若 x_1, x_3, x_5 成等比数列, 求参数 λ 的值;

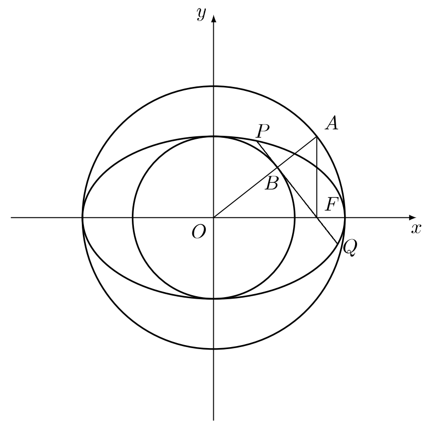
(2) 当 $\lambda>0$ 时, 证明: $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\frac{x_n}{y_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$;

(3) 当 $\lambda>1$, 证明: $\frac{x_1-y_1}{x_2-y_2}+\frac{x_2-y_2}{x_3-y_3}+\cdots+\frac{x_n-y_n}{x_{n+1}-y_{n+1}}<\frac{\lambda}{\lambda-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

22. 如图, 以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的中心 O 为圆心, 分别以 a 和 b 为半径作大圆和小圆. 过椭圆右焦点 $F(c,o)$ $(c>b)$ 作垂直于 x 轴的直线交大圆于第一象限内的点 A. 连结 OA 交小圆于点 B. 设直线 BF 是小圆的切线.

(1) 证明 $c^2=ab$, 并求直线 BF 与 y 轴的交点 M 的坐标;

(2) 设直线 BF 交椭圆于 P、Q 两点, 证明: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}b^2$.



2006 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$, 则 $A\cap B=$ ( )
(A) $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$ (B) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$
(C) $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$ (D) $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1+a_3+a_5=9$, $a_6=9$, 则这个数列的前 6 项和等于 ( )
(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48

3. 设变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x, \\ x+y\geqslant 2, \\ y\geqslant 3x-6, \end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+y$ 的最小值为 ( )
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9

4. 设 $P=\log_2 3$, $Q=\log_3 2$, $R=\log_2(\log_3 2)$, 则 ( )
(A) $R<Q<P$ (B) $P<R<Q$ (C) $Q<R<P$ (D) $R<P<Q$

5. 设 α、$\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 那么"$\alpha<\beta$"是"$\tan\alpha<\tan\beta$"的 ( )
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 函数 $y=\sqrt{x^2+1}+1$ $(x<0)$ 的反函数是 ( )
(A) $y=\sqrt{x^2-2x}$ $(x<0)$ (B) $y=-\sqrt{x^2-2x}$ $(x<0)$
(C) $y=\sqrt{x^2-2x}$ $(x>2)$ (D) $y=-\sqrt{x^2-2x}$ $(x>2)$

7. 若 l 为一条直线, α、β、γ 为三个互不重合的平面, 给出下面三个命题:
① $\alpha\perp\gamma,\ \beta\perp\gamma\Rightarrow\alpha\perp\beta$;
② $\alpha\perp\gamma,\ \beta /\!/ \gamma\Rightarrow\alpha\perp\beta$;
③ $l /\!/ \alpha,\ l\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.
其中正确的命题有 ( )
(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

8. 椭圆的中心为点 $E(-1,0)$, 它的一个焦点为 $F(-3,0)$, 相应于焦点 F 的准线方程为 $x=-\dfrac{7}{2}$, 则这个椭圆的方程是 ( )
(A) $\dfrac{2(x-1)^2}{21}+\dfrac{2y^2}{3}=1$ (B) $\dfrac{2(x+1)^2}{21}+\dfrac{2y^2}{3}=1$
(C) $\dfrac{(x-1)^2}{5}+y^2=1$ (D) $\dfrac{(x+1)^2}{5}+y^2=1$

9. 已知函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$ (a、b 为常数, $a\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$) 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称, 则函数 $y=f\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)$ 是 ( )
(A) 偶函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称
(B) 偶函数且它的图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$ 对称
(C) 奇函数且它的图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$ 对称
(D) 奇函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

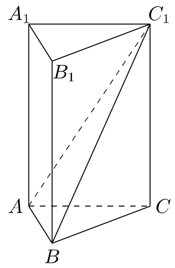
10. 如果函数 $f(x)=a^x(a^x-3a^2-1)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数, 那么实数 a 的取值范围是 ( )
(A) $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ (C) $(1,\sqrt{3}]$ (D) $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

二、填空题

11. $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的二项展开式中 x 的系数是______. (用数字作答)

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 且 $\boldsymbol{a}=(3,3)$, $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,1)$, 则 $\cos\theta=$______.

13. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=1$. 若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 60°, 则点 C 到平面 ABC_1 的距离为______.



14. 若半径为 1 的圆分别与 y 轴的正半轴和射线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ $(x\geqslant 0)$ 相切, 则这个圆的方程为______.

15. 某公司一年购买某种货物 400 吨, 每次都购买 x 吨, 运费为 4 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 $x=$______吨.

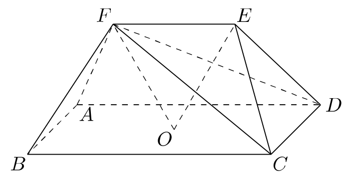
16. 用数字 0、1、2、3、4 组成没有重复数字的五位数, 则其中数字 1、2 相邻的偶数有______个. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{5}{2}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求 $\cos 2\alpha$ 和 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 甲、乙两台机床相互没有影响地生产某种产品, 甲机床产品的正品率是 0.9, 乙机床产品的正品率是 0.95.
(1) 从甲机床生产的产品中任取 3 件, 求其中恰有 2 件正品的概率 (用数字作答);
(2) 从甲、乙两台机床生产的产品中各任取 1 件, 求其中至少有 1 件正品的概率 (用数字作答).

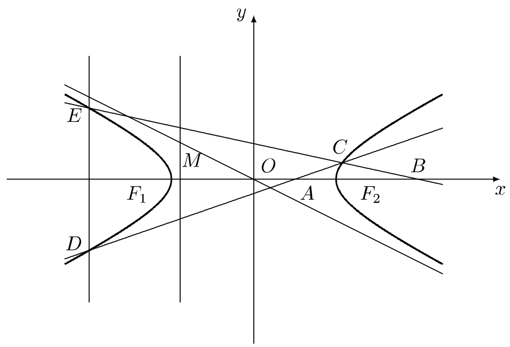
19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点, 面 CDE 是等边三角形, 棱 $EF /\!/ BC$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}BC$.
(1) 证明: $FO /\!/$ 平面 CDE;
(2) 设 $BC=\sqrt{3}CD$, 证明: $EO\perp$ 平面 CDF.



20. 已知函数 $f(x)=4x^3-3x^2\cos\theta+\dfrac{1}{32}$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, θ 为参数, 且 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.
(1) 当 $\cos\theta=0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 是否有极值;
(2) 要使函数 $f(x)$ 的极小值大于零, 求参数 θ 的取值范围;
(3) 若对 (2) 中所求的取值范围内的任意参数 θ, 函数 $f(x)$ 在区间 $(2a-1,a)$ 内都是增函数, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=x_2=1$, 并且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ (λ 为非零参数, $n=2,3,4,\cdots$).
(1) 若 x_1, x_3, x_5 成等比数列, 求参数 λ 的值;
(2) 设 $0<\lambda<1$, 常数 $k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant3$, 证明: $\dfrac{x_{1+k}}{x_1}+\dfrac{x_{2+k}}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_{n+k}}{x_n}<\dfrac{\lambda^k}{1-\lambda^k}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

22. 如图, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, F_1、F_2 分别为左、右焦点, M 为左准线与渐近线在第二象限内的交点, 且 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=-\dfrac{1}{4}$.
(1) 求双曲线的方程;
(2) 设 $A(m,0)$ 和 $B\left(\dfrac{1}{m},0\right)$ $(0<m<1)$ 是 x 轴上的两点. 过点 A 作斜率不为 0 的直线 l, 使得 l 交双曲线于 C、D 两点, 作直线 BC 交双曲线于另一点 E. 证明: 直线 DE 垂直于 x 轴.



2006 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $[0,2]$ (B) $[1,2]$ (C) $[0,4]$ (D) $[1,4]$

2. 已知 $\dfrac{m}{1+\mathrm{i}}=1-n\mathrm{i}$, 其中 m, n 是实数, i 是虚数单位, 则 $m+n\mathrm{i}=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) $2+\mathrm{i}$ (D) $2-\mathrm{i}$

3. 已知 $0<a<1$, $\log_a m<\log_a n<0$, 则 ( )

(A) $1<n<m$ (B) $1<m<n$ (C) $m<n<1$ (D) $n<m<1$

4. 在平面直角坐标系中, 不等式组 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是 ( )

(A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

5. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ 上的点到左准线的距离是到左焦点距离的 $\dfrac{1}{3}$, 则 $m=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{1}{8}$ (D) $\dfrac{9}{8}$

6. 函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x$, $x\in\mathbf{R}$ 的值域是 ( )

(A) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ (B) $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

(C) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right]$ (D) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\right]$

7. "$a>b>0$"是"$ab<\dfrac{a^2+b^2}{2}$"的 ( )

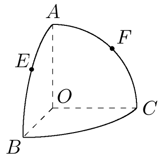
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 若多项式 $x^2+x^{10}=a_0+a_1(x+1)+\cdots+a_9(x+1)^9+a_{10}(x+1)^{10}$, 则 $a_9=$ ( )

(A) 9 (B) 10 (C) -9 (D) -10

9. 如图, O 是半径为 1 的球心, 点 A, B, C 在球面上, OA, OB, OC 两两垂直, E, F 分别是大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点, 则点 E, F 在该球面上的球面距离是 ( )



(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$

10. 函数 f: $|1,\ 2,\ 3|\to|1,\ 2,\ 3|$ 满足 $f(f(x))=f(x)$, 则这样的函数个数共有 ( )

(A) 1 个 (B) 4 个 (C) 8 个 (D) 10 个

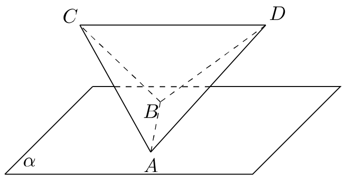
二、填空题

11. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_5=10$, $S_{10}=-5$, 则公差为______. (用数字作答)

12. 对 a, $b\in\mathbf{R}$, 记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & a\geqslant b,\\ b, & a<b,\end{cases}$ 函数 $f(x)=\max\{|x+1|,\ |x-2|\}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最小值是______.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 若 $|\boldsymbol{a}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$ 的值是______.

14. 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1, 棱 AB // 平面 α, 则正四面体上的所有点在平面 α 内的射影构成的图形面积的取值范围是______.

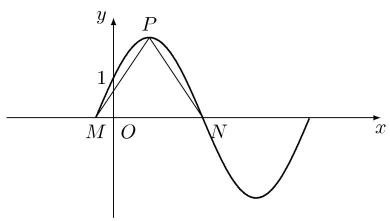


三、解答题

15. 如图, 函数 $y=2\sin(\pi x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, $\left(\text{其中 } 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,1)$.

(1) 求 φ 的值;

(2) 设 P 是图象上的最高点, M, N 是图象与 x 轴的交点, 求 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角.



16. 设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$. 若 $a+b+c=0$, $f(0)>0$, $f(1)>0$, 求证:

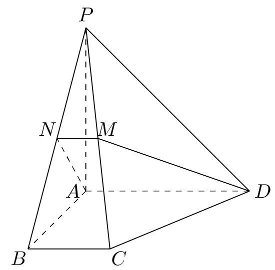
(1) $a>0$ 且 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$;

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有两个实根.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面为直角梯形, AD // BC, $\angle BAD=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=AB=2BC$, M, N 分别为 PC, PB 的中点.

(1) 求证: $PB\perp DM$;

(2) 求 CD 与平面 $ADMN$ 所成的角.



18. 甲, 乙两袋装有大小相同的红球和白球, 甲袋装有 2 个红球, 2 个白球, 乙袋装有 2 个红球, n 个白球. 现从甲, 乙两袋中各任取 2 个球.

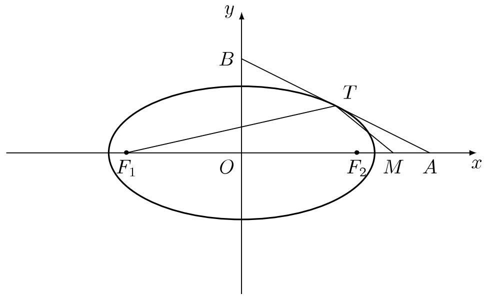
(1) 若 $n=3$, 求取到的 4 个球全是红球的概率;

(2) 若取到的 4 个球中至少有 2 个红球的概率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 n.

19. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1\ (a>b>0)$ 与过点 $A\ (2,0)$, $B\ (0,1)$ 的直线有且只有一个公共点 T, 且椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆方程;

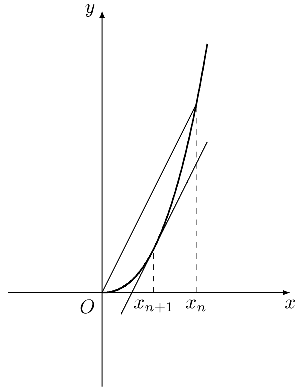
(2) 设 F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, M 为线段 AF_1 的中点, 求证: $\angle ATM=\angle AF_1T$.



20. 已知函数 $f(x)=x^3+x^2$, 数列 $\{x_n\}$ $(x_n>0)$ 的第一项 $x_1=1$, 以后各项按如下方式取定: 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线与经过 $(0,0)$ 和 $(x_n,f(x_n))$ 两点的直线平行 (如图). 求证: 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,

(1) $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.



2006 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$, 则 $A\cap B=$ ( )
(A) $[0,2]$ (B) $[1,2]$ (C) $[0,4]$ (D) $[1,4]$

2. 在二项式 $(x+1)^6$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数是 ( )
(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 40

3. 抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是 ( )
(A) $x=-2$ (B) $x=-4$ (C) $y=-2$ (D) $y=-4$

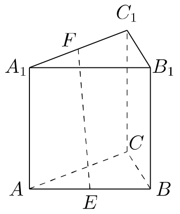
4. 已知 $\log_{\frac{1}{2}}m<\log_{\frac{1}{2}}n<0$, 则 ( )
(A) $n<m<1$ (B) $m<n<1$ (C) $1<m<n$ (D) $1<n<m$

5. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}=2$, 则 $|\boldsymbol{c}|^2=$ ( )
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5

6. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值是 ( )
(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4

7. "$a>0$, $b>0$"是"$ab>0$"的 ( )
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都 2, E, F 分别是 AB, A_1C_1 的中点, 则 EF 的长是 ( )



(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{7}$

9. 在平面直角坐标系中, 不等式组 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是 ( )
(A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

10. 对 a, $b\in\mathbf{R}$, 记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & a\geqslant b,\\ b, & a<b,\end{cases}$ 函数 $f(x)=\max\{|x+1|,\ |x-2|\}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最小值是 ( )
(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 3

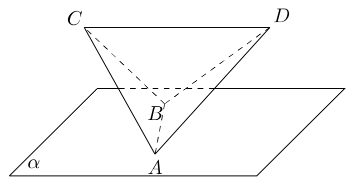
二、填空题

11. 不等式 $\dfrac{x+1}{x-2}>0$ 的解集是______.

12. 函数 $y=2\sin x\cos x-1$, $x\in\mathbf{R}$ 的值域是______.

13. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ 上的点到左焦点的距离与到左准线的距离的比是 3, 则 m 等于______.

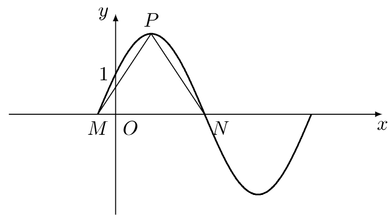
14. 如图, 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1, 平面 α 过棱 AB, 且 $CD\,/\!\!/\,\alpha$, 则正四面体上的所有点在平面 α 内的射影构成的图形面积是______.



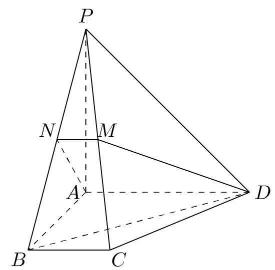
三、解答题

15. 若 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列.
(1) 求数列 S_1, S_2, S_4 的公比;
(2) 若 $S_2=4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

16. 如图, 函数 $y=2\sin(\pi x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, $\left(\text{其中 } 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,1)$.
(1) 求 φ 的值;
(2) 设 P 是图象上的最高点, M, N 是图象与 x 轴的交点, 求 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角.



17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面为直角梯形, $AD\,/\!\!/\,BC$, $\angle BAD=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=AB=2BC$, M, N 分别为 PC, PB 的中点.
(1) 求证: $PB\perp DM$;
(2) 求 BD 与平面 $ADMN$ 所成的角.



18. 甲, 乙两袋装有大小相同的红球和白球, 甲袋装有 2 个红球, 2 个白球, 乙袋装有 2 个红球, n 个白球. 现从甲, 乙两袋中各任取 2 个球.

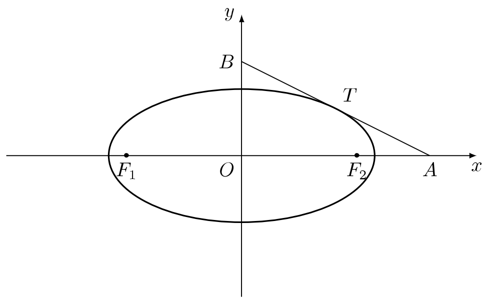
(1) 若 $n=3$, 求取到的 4 个球全是红球的概率;

(2) 若取到的 4 个球中至少有 2 个红球的概率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 n.

19. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1\ (a>b>0)$ 与过点 $A\ (2,0)$, $B\ (0,1)$ 的直线有且只有一个公共点 T, 且椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 设 F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, 求证: $|AT|^2=\dfrac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|$.



20. 设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$, 若 $a+b+c=0$, $f(0)f(1)>0$, 求证:

(1) 方程 $f(x)=0$ 有实根;

(2) $-2<\dfrac{b}{a}<-1$;

(3) 设 x_1, x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个实根, 则 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\dfrac{2}{3}$.