2 2024年普通高校招生

全国统一考试·新课标Ⅱ卷

专家评卷 吉林省长春市优秀教师　朱丽杰

另辟蹊径寻题眼，稳中求胜探真知

■高考命题新动向

2024年新课标Ⅱ卷依托《中国高考评价体系》，创造性地落实立德树人的根本任务，全面考查数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析核心素养. 试题稳中求新，在服务选才、引导教学方向上功不可没.

■考点题型新变化

本套试卷结构实现了大胆优化创新，多选题3个，填空题3个，解答题5个. 基础题、难题比例平稳过渡，完美诠释了考教衔接，其中第1~5,7,9,12,13,15,16题，体现了低起点、易深入的布局特点，全面细致考查基础知识，体现对学生的人文关怀. 第19题圆锥曲线与数列构造相结合以压轴题的形式首次亮相新课标Ⅱ卷，试题难度是2023年新课标Ⅱ卷无法比拟的，此题融入轻量数学竞赛元素，以双曲线和数列为载体，探寻坐标变换，紧扣问题实质，思维量和运算量呈现暴增态势，全方位深度考查学生的逻辑思维能力、运算求解能力、数学建模能力、创新能力，为国家选拔创新型人才保驾护航.

■素养能力新亮点

本套试卷无套路可循，使得猜题、押题硬显苍白无力，多点支撑，更好地实现人才选拔.

1. 逻辑思维能力、空间想象能力：第6题探索两个函数图象在$(-1,1)$上的交点，可利用函数的性质解题.

2. 创新能力：第8题从函数值恒大于或等于0寻找突破口，建立等量关系，从而转化为二次函数问题.

3. 探索创新情境：第14题以4×4的方格表为载体，运用逻辑推理分析、解决问题，突出考查学生的理性思维.

4. 生活实践情境：第18题以投篮比赛为背景，融入对生活实践情境的考查，践行社会主义核心价值观.

名师解题 重庆市高级教师　郭海峰　慕泽刚

山西省优秀教师　田晨曦

重庆市竞赛主教练　刘晓煜　优秀教师　胡云兵

▶本卷答案仅供参考

答案速查　1—5 CBBCA　6—8 DBC　9. BC　10. ABD　11. AD　12. 95　13. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　14. 24　112

1. C　复数的模　$|z|=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,（提示：若$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$）故选C.

考教衔接　本题源自人教A版必修第二册第71页例2(2).

2. B　全称量词命题与存在量词命题的真假判断+命题的否定

通解　因为$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|\geqslant0$，所以命题p为假命题，所以$\neg p$为真命题. 因为$x^3=x$，所以$x^3-x=0$，所以$x(x^2-1)=0$，即$x(x+1)(x-1)=0$，解得$x=-1$或$x=0$或$x=1$，（题眼）所以$\exists x>0$，使得$x^3=x$，所以命题q为真命题，所以$\neg q$为假命题，所以$\neg p$和q都是真命题，故选B.

优解（特殊值法）　在命题p中，当$x=-1$时，$|x+1|=0$，所以命题p为假命题，$\neg p$为真命题. 在命题q中，因为立方根等于本身的实数有$-1,0,1$，所以$\exists x>0$，使得$x^3=x$，所以命题q为真命题，$\neg q$为假命题，所以$\neg p$和q都是真命题，故选B.

考教衔接　本题源自人教A版必修第一册第35页复习参考题1第6题.

3. B　向量的模+向量垂直条件的应用　由$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，得$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.（题眼）将$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$的两边同时平方，得$\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4$，（方法技巧：已知向量的和（差）的模，往往两边同时平方，由此将向量的模的问题转化为向量的数量积问题，从而与条件中的已知向量建立联系）即$1+2\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{b}^2=1+6|\boldsymbol{b}|^2=4$，（提醒：$\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2$）解得$|\boldsymbol{b}|^2=\frac{1}{2}$，所以$|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选B.

真题互鉴　首先，2022年全国乙卷理科第3题考到了已知向量的和（差）的模求向量的数量积.

(2022全国乙理,3) 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

答案：C

接着，2023年新课标Ⅱ卷第13题就考到了这个考点，并进行了延伸，延伸为已知两个向量的和与差的模之间的关系，求其中一个向量的模.

(2023新课标Ⅱ,13) 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$|\boldsymbol{b}|=$________.

答案：$\sqrt{3}$

4. C　中位数+极差+平均值　对于A，因为前3组的频率之和$0.06+0.12+0.18=0.36<0.5$，前4组的频率之和$0.36+0.30=0.66>0.5$，（题眼）所以100块稻田亩产量的中位数所在的区间为$[1\ 050,1\ 100)$，故A不正确；

对于B，100块稻田中亩产量低于1 100 kg的稻田所占比例为$\frac{6+12+18+30}{100}\times100\%=66\%$，故B不正确；

对于C，因为$1\ 200-900=300$，$1\ 150-950=200$，所以100块稻田亩产量的极差介于200 kg至300 kg之间，（提醒：若$a<x<b$，$c<y<d$，求$x-y$的范围时，应先求出$-y$的范围）故C正确；

对于D，100块稻田亩产量的平均值为$\frac{1}{100}\times(925\times6+975\times12+1\ 025\times18+1\ 075\times30+1\ 125\times24+1\ 175\times10)=1\ 067(\text{kg})$，故D不正确.（另解：由表知，小于1 000的数据远少于大于1 000的数据，所以100块稻田亩产量的平均值大于1 000 kg，所以D不正确）

综上所述，故选C.

考教衔接　本题以人教A版必修第二册9.2.3总体集中趋势的估计为载体，参照第205页例5命制.

高考题与教材中的题目虽然题型不同，但本质相同，解题的关键是掌握数据分析. 数据分析要求能够理解数据分析在大数据时代的重要性；能够理解数据蕴含着信息，可以通过对信息的加工，得到数据所提供的知识和规律，并用概率或统计的语言予以表达. 统计图表正是以上要求的具体体现，在现实生产与生活中各类统计图表的应用越来越广泛，高考中也经常考查此类问题.

5. A　动点的轨迹方程（理性思维、数学探索）　通解（代入法）　设

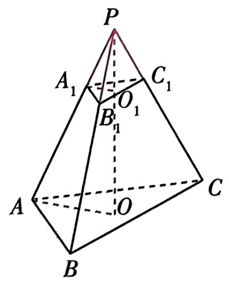
$M(x_0,y_0)$，则 $P(x_0,2y_0)$，因为点 P 在曲线 C 上，所以 $x_0^2+(2y_0)^2=16(y_0>0)$，即 $\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1(y_0>0)$，所以线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$，故选 A.

优解（**数形结合法**） 由题意可知把曲线 C 上所有点的纵坐标缩短至原来的一半，横坐标不变，即可得到点 M 的轨迹. 曲线 C 为半圆，则点 M 的轨迹为椭圆（x 轴上方部分），其中长半轴长为 4，短半轴长为 2，故选 A.

考教衔接 本题源自人教 A 版选择性必修第一册第 108 页例 2.

6. D 函数的图象 + 函数的性质（理性思维、数学应用） 由题意知 $f(x)=g(x)$，则 $a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，即 $\cos x=a(x^2+1)-1$. 令 $h(x)=\cos x-a(x^2+1)+1$. 易知 $h(x)$ 为偶函数，由题意知 $h(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有唯一零点，所以 $h(0)=0$，即 $\cos 0-a(0+1)+1=0$，得 $a=2$，故选 D.

7. B 正三棱台的体积 + 线面角 **补形法** 设正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h，三条侧棱延长后交于一点 P，作 $PO\perp$ 平面 ABC 于点 O，PO 交平面 $A_1B_1C_1$ 于点 O_1，连接 OA,O_1A_1，如图所示. 由 $AB=3A_1B_1$，可得 $PO_1=\frac{1}{2}h$，$PO=\frac{3}{2}h$，又 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$，所以正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=V_{P-ABC}-V_{P-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times\frac{3}{2}h-\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}h=\frac{52}{3}$，解得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 $PO=\frac{3}{2}h=2\sqrt{3}$. 由正三棱台的性质可知，$O$ 为底面 ABC 的中心，则 $OA=\frac{2}{3}\times\sqrt{6^2-3^2}=2\sqrt{3}$，因为 $PO\perp$ 平面 ABC，所以 $\angle PAO$ 是 A_1A 与平面 ABC 所成的角，在 $\mathrm{Rt}\triangle PAO$ 中，$\tan\angle PAO=\frac{PO}{OA}=1$，故选 B.



8. C 函数性质 + 不等式恒成立 + 最值（理性思维、数学探索） **等价转化法** 由 $f(x)\geqslant0$ 及 $y=x+a,y=\ln(x+b)$ 单调递增，可得 $x+a$ 与 $\ln(x+b)$ 同正、同负或同为零，所以当 $\ln(x+b)=0$ 时，$x+a=0$，即 $\begin{cases}x+b=1\\x+a=0\end{cases}$，所以 $b=a+1$，则 $a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2(a+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}$，故选 C.

考情速递 **以创新设计考查学生真实的数学能力** 第 8 题给出的函数模型简单，要求学生推断两个参数平方和的最小值. 本题可以通过分析函数的单调性和零点得出答案，不需要求导和分类讨论.

9. BC 三角函数的图象与性质 + 零点（理性思维） **直接法** 对于 A，令 $f(x)=0$，则 $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，又 $g(\frac{k\pi}{2})\neq0$，故 A 错误；

对于 B，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值都为 1，故 B 正确；

对于 C，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期都为 π，故 C 正确；

对于 D，$f(x)$ 图象的对称轴方程为 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，$g(x)$ 图象的对称轴方程为 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴不相同，故 D 错误. 故选 BC.

10. ABD 直线与圆相切 + 直线与抛物线的位置关系（理性思维、数学探索） **数形结合法** 对于 A，易知 $l:x=-1$，故 l 与 $\odot A$ 相切，A 正确；

对于 B，$A(0,4)$，$\odot A$ 的半径 $r=1$，当 P,A,B 三点共线时，$P(4,4)$，所以 $|PA|=4$，$|PQ|=\sqrt{|PA|^2-r^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，故 B 正确；

对于 C，当 $|PB|=2$ 时，$P(1,2)$，$B(-1,2)$ 或 $P(1,-2)$，$B(-1,-2)$，易知 PA 与 AB 不垂直，故 C 错误；

对于 D，记抛物线 C 的焦点为 F，连接 AF,PF，易知 $F(1,0)$，由抛物线定义可知 $|PF|=|PB|$，因为 $|PA|=|PB|$，所以 $|PA|=|PF|$，所以点 P 在线段 AF 的中垂线上，线段 AF 的中垂线方程为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$，即 $x=4y-\frac{15}{2}$，代入 $y^2=4x$ 可得 $y^2-16y+30=0$，解得 $y=8\pm\sqrt{34}$，易知满足条件的点 P 有且仅有两个，故 D 正确. 故选 ABD.

11. AD 三次函数的单调性、零点个数、极值点 + 曲线的对称性 由题可知，$f'(x)=6x(x-a)$.

对于 A，当 $a>1$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<a$，由 $f'(x)>0$ 得 $x<0$ 或 $x>a$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，$f(0)=1$，$f(a)=-a^3+1<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，故 $f(x)$ 有三个零点，A 正确；

对于 B，当 $a<0$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $a<x<0$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>0$ 或 $x<a$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在 $(a,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，B 错误；

对于 C，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故曲线 $y=f(x)$ 必不存在对称轴，C 错误；

对于 D，**解法一（配方、平移）** $f(x)=2x^3-3ax^2+1=2(x-\frac{a}{2})^3-\frac{3}{2}a^2(x-\frac{a}{2})+1-\frac{a^3}{2}$，令 $t=x-\frac{a}{2}$，则 $f(x)$ 可转化为 $g(t)=2t^3-\frac{3}{2}a^2t+1-\frac{a^3}{2}$，由 $y=2t^3-\frac{3}{2}a^2t$ 为奇函数，且其图象关于原点对称，可知 $g(t)$ 的图象关于点 $(0,1-\frac{a^3}{2})$ 对称，则 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2},1-\frac{a^3}{2})$ 对称，故存在 $a=2$，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，D 正确. 故选 AD.

解法二（二级结论） 任意三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 的图象均关于点 $(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$ 成中心对称，D 正确. 故选 AD.

12. 95 等差数列的通项公式与前 n 项和 **解法一（基本量法）** 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_3+a_4=a_1+2d+a_1+3d=2a_1+5d=7$，$3a_2+a_5=3(a_1+d)+a_1+4d=4a_1+7d=5$，解得 $a_1=-4,d=3$，则 $S_{10}=10a_1+45d=95$.

解法二（利用下标和性质） 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_3+a_4=a_2+a_5=7$，$3a_2+a_5=5$，得 $a_2=-1,a_5=8$，故 $d=\frac{a_5-a_2}{5-2}=3$，$a_6=11$，则

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times 10=5(a_5+a_6)=5\times 19=95.$

13. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **两角和的正切公式＋同角三角函数的基本关系** 由题知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{4}{1-\sqrt{2}-1}=-2\sqrt{2}$，即 $\sin(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}\cos(\alpha+\beta)$，又 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$，可得 $\sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 由 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$2m\pi+\pi<\beta<2m\pi+\frac{3\pi}{2}$，$m\in\mathbf{Z}$，得 $2(k+m)\pi+\pi<\alpha+\beta<2(k+m)\pi+2\pi$，$k+m\in\mathbf{Z}$. 又 $\tan(\alpha+\beta)<0$，所以 $\alpha+\beta$ 是第四象限角，故 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

14. 24　112　**分步乘法计数原理＋逻辑推理** 第一步，从第一行任选一个数，共有 4 种不同的选法；第二步，从第二行选一个与第一个数不同列的数，共有 3 种不同的选法；第三步，从第三行选一个与第一、二个数均不同列的数，共有 2 种不同的选法；第四步，从第四行选一个与第一、二、三个数均不同列的数，只有 1 种选法.

由分步乘法计数原理知，不同的选法种数为 $4\times3\times2\times1=24$.

先按列分析，每列必选出一个数，故所选 4 个数的十位上的数字分别为 1，2，3，4. 再按行分析，第一、二、三、四行个位上的数字的最大值分别为 1，3，3，5，故从第一行选 21，从第二行选 33，从第三行选 43，从第 4 行选 15，此时个位上的数字之和最大. 故选中方格中的 4 个数之和的最大值为 $21+33+43+15=112$.

15. 辅助角公式＋同角三角函数的基本关系＋正弦定理（理性思维、数学探索）

解：(1)**解法一（辅助角法）　第 1 步：利用辅助角公式化简已知等式**

由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，得 $\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=1$，　（1 分）

所以 $\sin(A+\frac{\pi}{3})=1$.（提示：辅助角公式 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$）　（3 分）

第 2 步：判断角的范围，求出角 A 的大小

因为 $0<A<\pi$，所以 $\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，

所以 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，故 $A=\frac{\pi}{6}$.　（6 分）

解法二（同角三角函数的基本关系法）　第 1 步：利用同角三角函数的基本关系求 $\sin A$ 的值

由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，得 $\sqrt{3}\cos A=2-\sin A$，

两边同时平方，得 $3\cos^2A=4-4\sin A+\sin^2A$，　（1 分）

则 $3(1-\sin^2A)=4-4\sin A+\sin^2A$，（题眼）　（2 分）

整理，得 $1-4\sin A+4\sin^2A=0$，

所以 $(1-2\sin A)^2=0$，则 $\sin A=\frac{1}{2}$.　（4 分）

第 2 步：求角 A 的大小

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$ 或 $A=\frac{5\pi}{6}$.

当 $A=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$ 成立，符合条件；

当 $A=\frac{5\pi}{6}$ 时，$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$ 不成立，不符合条件.（易错：忽视验证）

故 $A=\frac{\pi}{6}$.　（6 分）

解法三（同角三角函数的基本关系法）　第 1 步：利用同角三角函数的基本关系求 $\cos A$ 的值

由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，得 $\sin A=2-\sqrt{3}\cos A$，

两边同时平方，得 $\sin^2A=4-4\sqrt{3}\cos A+3\cos^2A$，　（1 分）

则 $1-\cos^2A=4-4\sqrt{3}\cos A+3\cos^2A$，（题眼）　（2 分）

整理，得 $3-4\sqrt{3}\cos A+4\cos^2A=0$，

所以 $(\sqrt{3}-2\cos A)^2=0$，则 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　（4 分）

第 2 步：求角 A 的大小

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.　（6 分）

(2)**第 1 步：利用正弦定理求 B 的值**

由 $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，得 $\sqrt{2}b\sin C=2c\sin B\cos B$，

由正弦定理，得 $\sqrt{2}bc=2cb\cos B$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.　（8 分）

第 2 步：利用两角和的正弦公式及三角形的内角和定理求 $\sin C$ 的值

$C=\pi-(A+B)=\frac{7\pi}{12}$，

所以 $\sin C=\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.（特殊角：$\sin\frac{7\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin\frac{\pi}{12}=-\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$）　（10 分）

第 3 步：求△ABC 的周长

解法一（基本量法） 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}$，　（11 分）

$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.　（12 分）

所以△ABC 的周长为 $a+b+c=2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.　（13 分）

解法二（整体思想法） 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=4$，　（12 分）

所以 $a+b+c=4(\sin A+\sin B+\sin C)=4\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})=2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$，

所以△ABC 的周长为 $2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.　（13 分）

考向预见 高考对正弦定理和余弦定理的考查较为灵活，以解答题的形式综合考查正、余弦定理，多与三角形的周长、面积有关，有时也会与平面向量、三角恒等变换等结合考查. 试题难度控制在中等或以下，主要考查运算求解能力、推理论证能力、数学应用意识、数形结合思想等. 预测 2025 年高考大概率考查三角恒等变换及正、余弦定理，求解时注意三角形内角和定理与诱导公式的应用，在求角的大小时，注意条件中是否明确给出三角形为锐角三角形或钝角三角形.

16. 导数的几何意义＋导数与极值的关系(理性思维、数学探索)

解:(1)第 1 步:求当 $a=1$ 时函数的解析式与导函数

当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x-x-1$,则 $f'(x)=e^x-1$, (1 分)

第 2 步:求切线的斜率与切点坐标

则 $f'(1)=e-1$. (2 分)

$f(1)=e-2$,所以切点坐标为 $(1,e-2)$.(提示:求曲线的切线方程时注意条件是"过点"还是"在点") (3 分)

第 3 步:求切线方程

所以切线方程为 $y-(e-2)=(e-1)(x-1)$,即 $(e-1)x-y-1=0$. (5 分)

(2)第 1 步:求导

易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x-a$.(提示:$f'(x)$ 的符号与 a 的取值有关) (6 分)

第 2 步:讨论函数的单调性,求出极小值

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,无极值; (7 分)

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x>\ln a$,由 $f'(x)<0$,得 $x<\ln a$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在区间 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3$.(题眼) (9 分)

第 3 步:根据极小值小于 0 求 a 的取值范围

由题意知 $a-a\ln a-a^3<0(a>0)$,等价于 $1-\ln a-a^2<0(a>0)$. (10 分)

解法一(导数法) 令 $g(a)=1-\ln a-a^2(a>0)$,

则 $g'(a)=1-\dfrac{1}{a}-2a=\dfrac{-2a^2+a-1}{a}=-\dfrac{2(a-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}}{a}<0$,(提示:通过配方法判断符号) (12 分)

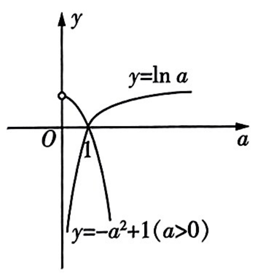
所以函数 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, (13 分)

又 $g(1)=0$,故当 $0<a<1$ 时,$g(a)>0$;当 $a>1$ 时,$g(a)<0$.

故实数 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$. (15 分)

解法二(图象法) 由 $1-\ln a-a^2<0(a>0)$,得 $\ln a>-a^2+1(a>0)$.

如图为函数 $y=\ln a$ 与 $y=-a^2+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的大致图象, (12 分)



由图易知当 $a>1$ 时,$\ln a>-a^2+1$,即 $1-\ln a-a^2<0$. (14 分)

所以实数 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$. (15 分)

真题互鉴 2023 年全国乙卷理科第 21 题第(1)问是求曲线上一点处的切线方程,第(3)问是根据函数存在极值点求参数范围.

(2023 全国乙理,21)已知函数 $f(x)=(\dfrac{1}{x}+a)\ln(1+x)$.

(1)当 $a=-1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程.

(2)是否存在 a,b,使得曲线 $y=f(\dfrac{1}{x})$ 关于直线 $x=b$ 对称?若存在,求 a,b 的值;若不存在,说明理由.

(3)若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极值点,求 a 的取值范围.

17. 线面垂直的判定与性质＋二面角

解:(1)第 1 步:证明 $EF\perp AE$

由题,$AE=\dfrac{2}{5}AD=2\sqrt{3}$,$AF=\dfrac{1}{2}AB=4$,又 $\angle BAD=30°$,所以由余弦定理得 $EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos 30°=4$,故 $EF=2$.

又 $EF^2+AE^2=AF^2$,所以 $EF\perp AE$. (3 分)

第 2 步:证明 $EF\perp PD$

由 $EF\perp AE$ 及翻折的性质知 $EF\perp PE$,$EF\perp ED$,

又 $ED\cap PE=E$,$ED,PE\subset$ 面 PED,所以 $EF\perp$ 面 PED. (5 分)

又 $PD\subset$ 面 PED,所以 $EF\perp PD$. (6 分)

(2)第 1 步:证明 $PE\perp$ 面 $ABCD$

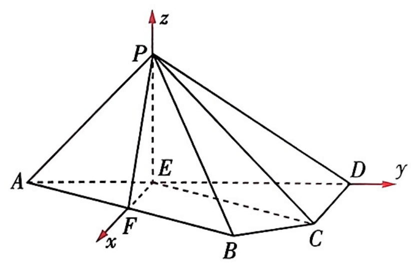
如图,连接 CE,由题,$DE=3\sqrt{3}$,$CD=3$,$\angle CDE=90°$,故 $CE=\sqrt{DE^2+CD^2}=6$.

又 $PE=AE=2\sqrt{3}$,$PC=4\sqrt{3}$,所以 $PE^2+CE^2=PC^2$,故 $PE\perp CE$.

又 $PE\perp EF$,$CE\cap EF=E$,$CE,EF\subset$ 面 $ABCD$,所以 $PE\perp$ 面 $ABCD$. (8 分)

第 2 步:建立空间直角坐标系,得到相关向量的坐标

EF,ED,PE 两两垂直,故以 E 为原点,EF,ED,PE 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则 $P(0,0,2\sqrt{3})$,$D(0,3\sqrt{3},0)$,$F(2,0,0)$,$A(0,-2\sqrt{3},0)$,$C(3,3\sqrt{3},0)$,



连接 PA,则 $\overrightarrow{PD}=(0,3\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,2\sqrt{3},2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AF}=(2,2\sqrt{3},0)$. (10 分)

第 3 步:求面 PCD 和面 PBF 的法向量

设面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DC}=3x_1=0\end{cases}$,可取 $\boldsymbol{n}_1=(0,2,3)$. (11 分)

设面 PBF 即面 PAF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AP}=2\sqrt{3}y_2+2\sqrt{3}z_2=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AF}=2x_2+2\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$,可取 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},-1,1)$. (12 分)

第 4 步:求面 PCD 与面 PBF 所成二面角的余弦值的绝对值

$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$. (14 分)

第 5 步:利用同角三角函数的基本关系求得结果

故面 PCD 与面 PBF 所成二面角的正弦值为 $\sqrt{1-\dfrac{1}{65}}=\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$. (15 分)

18. 相互独立事件的概率＋分布列与数学期望

解:(1)第 1 步:计算甲、乙所在队进入第二阶段的概率

设 A_1="甲、乙所在队进入第二阶段",则 $P(A_1)=1-(1-0.4)^3=0.784$. (1 分)

第 2 步:计算乙在第二阶段至少得 5 分的概率

设 A_2="乙在第二阶段至少得 5 分",则 $P(A_2)=1-(1-0.5)^3=0.875$. (2 分)

第 3 步:计算甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率

设 A_3 = "甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分"，则 $P(A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0.686$. (4 分)

(2)(i) **第 1 步：计算甲参加第一阶段比赛时甲、乙所在队得 15 分的概率**

设甲参加第一阶段比赛时甲、乙所在队得 15 分的概率为 $P_{甲}$，

则 $P_{甲}=[1-(1-p)^3]\cdot q^3=pq^3\cdot(3-3p+p^2)$. (5 分)

第 2 步：计算乙参加第一阶段比赛时甲、乙所在队得 15 分的概率

设乙参加第一阶段比赛时甲、乙所在队得 15 分的概率为 $P_{乙}$，

则 $P_{乙}=[1-(1-q)^3]\cdot p^3=qp^3\cdot(3-3q+q^2)$. (6 分)

第 3 步：比较 $P_{甲}$ 与 $P_{乙}$ 的大小

则 $P_{甲}-P_{乙}=pq(3q^2-3pq^2+p^2q^2-3p^2+3p^2q-p^2q^2)=3pq(q-p)\cdot(p+q-pq)$， (8 分)

由 $0<p<q\leqslant 1$，得 $q-p>0, p+q-pq=p+q(1-p)>0$，

所以 $P_{甲}-P_{乙}>0$，即 $P_{甲}>P_{乙}$. (9 分)

第 4 步：做决策

故应该由甲参加第一阶段比赛. (10 分)

(ii) **第 1 步：计算甲参加第一阶段比赛时甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望**

若甲参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩 X 的所有可能取值为 0,5,10,15. (11 分)

$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3]\cdot(1-q)^3$，

$P(X=5)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^1\cdot q\cdot(1-q)^2$，

$P(X=10)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^2\cdot q^2\cdot(1-q)$，

$P(X=15)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^3q^3$，

所以 $E(X)=[1-(1-p)^3]\cdot[15q(1-q)^2+30q^2(1-q)+15q^3]=[1-(1-p)^3]\cdot 15q=15pq(p^2-3p+3)$. (13 分)

第 2 步：计算乙参加第一阶段比赛时甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望

若乙参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩 Y 的所有可能取值为 0,5,10,15.

同理，可得 $E(Y)=15pq(q^2-3q+3)$. (14 分)

第 3 步：比较 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 的大小

$E(X)-E(Y)=15pq(p^2-3p-q^2+3q)=15pq\cdot(q-p)\cdot(3-p-q)$， (15 分)

由 $0<p<q\leqslant 1$，得 $q-p>0, 3-p-q=3-(p+q)>0$，

所以 $E(X)-E(Y)>0$，即 $E(X)>E(Y)$. (16 分)

第 4 步：做决策

故应该由甲参加第一阶段比赛. (17 分)

考情速递　聚焦主干知识，考查核心素养　本题以相互独立事件的概率、离散型随机变量的分布列为工具，考查分类讨论思想和推理论证能力，使思维能力强的学生能够展示素养、发挥潜力、脱颖而出，发挥高考的选拔功能，引导数学教学关注对学生核心素养的培养.

19. 直线与双曲线的位置关系＋等比数列＋三角形的面积

解：将点 $P_1(5,4)$ 的坐标代入 C 的方程得 $5^2-4^2=m$，解得 $m=9$，所以 $C:x^2-y^2=9$.

(1) 过点 $P_1(5,4)$ 且斜率 $k=\frac{1}{2}$ 的直线方程为 $y=\frac{1}{2}(x-5)+4$，

与 C 的方程联立，消去 y 化简可得 $x^2-2x-15=0$，即 $(x-5)(x+3)=0$， (2 分)

所以点 Q_1 的横坐标为 -3，将 $x=-3$ 代入直线方程，得 $y=0$，

因此 $Q_1(-3,0)$，从而 $P_2(3,0)$，

即 $x_2=3, y_2=0$. (4 分)

(2) **解法一**　由题意，$P_n(x_n,y_n)$，$P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$，$Q_n(-x_{n+1},y_{n+1})$.

设过点 $P_n(x_n,y_n)$ 且斜率为 k 的直线为 $l_n:y=k(x-x_n)+y_n$，

将 l_n 的方程与 C 的方程联立，消去 y 化简可得 $(1-k^2)x^2+(2k^2x_n-2ky_n)x-(kx_n-y_n)^2-9=0$， (6 分)

由根与系数的关系得 $-x_{n+1}+x_n=-\frac{2k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$，

所以 $x_{n+1}=\frac{2k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}+x_n=\frac{k^2x_n+x_n-2ky_n}{1-k^2}$. (7 分)

又 $Q_n(-x_{n+1},y_{n+1})$ 在直线 l_n 上，

所以 $y_{n+1}=k(-x_{n+1}-x_n)+y_n=-kx_{n+1}-kx_n+y_n$.

从而 $x_{n+1}-y_{n+1}=x_{n+1}+kx_{n+1}+kx_n-y_n=(1+k)x_{n+1}+kx_n-y_n=(1+k)\cdot\frac{k^2x_n+x_n-2ky_n}{1-k^2}+kx_n-y_n=\frac{1+k}{1-k}\cdot(x_n-y_n)$，

易知 $x_n-y_n\neq 0$，所以数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列. (9 分)

解法二　由题意，$P_n(x_n,y_n)$，$P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$，$Q_n(-x_{n+1},y_{n+1})$.

由点 P_n,Q_n 所在直线的斜率为 k，可知 $k=\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$.

又点 P_n,Q_n 都在 C 上，所以 $\begin{cases}x_n^2-y_n^2=9\\x_{n+1}^2-y_{n+1}^2=9\end{cases}$，

即 $\begin{cases}(x_n-y_n)(x_n+y_n)=9\\(x_{n+1}-y_{n+1})(x_{n+1}+y_{n+1})=9\end{cases}$， (6 分)

易知 $x_n-y_n\neq 0$，

则 $\frac{1+k}{1-k}=\frac{1+\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}}{1-\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}}=\frac{x_n+x_{n+1}+y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}-y_n+y_{n+1}}=\frac{x_{n+1}-y_{n+1}+\frac{9}{x_n-y_n}}{x_n-y_n+\frac{9}{x_{n+1}-y_{n+1}}}=\frac{\frac{1}{x_n-y_n}[(x_{n+1}-y_{n+1})(x_n-y_n)+9]}{\frac{1}{x_{n+1}-y_{n+1}}[(x_n-y_n)(x_{n+1}-y_{n+1})+9]}=\frac{x_{n+1}-y_{n+1}}{x_n-y_n}$，

即数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列. (9 分)

(3) **解法一**　由(2)知，数列 $\{x_n-y_n\}$ 是首项为 $x_1-y_1=5-4=1$，公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

令 $t=\frac{1+k}{1-k}$，由 $0<k<1$ 可知 $t>1$，则 $x_n-y_n=t^{n-1}$ (10 分)

又 $x_n^2-y_n^2=9$，所以 $x_n+y_n=\frac{9}{x_n-y_n}=\frac{9}{t^{n-1}}$，

可得 $x_n=\frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}}$，$y_n=\frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}}$.

所以 $P_n\left(\frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}},\frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}}\right)$，$P_{n+1}\left(\frac{9+t^{2n}}{2t^n},\frac{9-t^{2n}}{2t^n}\right)$，$P_{n+2}\left(\frac{9+t^{2n+2}}{2t^{n+1}},\frac{9-t^{2n+2}}{2t^{n+1}}\right)$. (12 分)

所以直线 P_nP_{n+1} 的方程为 $x-x_n=\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}(y-y_n)$，即 $(9+t^{2n-1})x-(9-t^{2n-1})y-9t^{n-1}(1+t)=0$. (14 分)

易知点 P_{n+2} 到直线 P_nP_{n+1} 的距离

$d=\frac{\left|(9+t^{2n-1})\cdot\frac{9+t^{2n+2}}{2t^{n+1}}-(9-t^{2n-1})\cdot\frac{9-t^{2n+2}}{2t^{n+1}}-9t^{n-1}(1+t)\right|}{\sqrt{(9+t^{2n-1})^2+(9-t^{2n-1})^2}}=$

$\frac{|9t^{n-2}(t-1)^2(t+1)|}{\sqrt{(9+t^{2n-1})^2+(9-t^{2n-1})^2}}$.

又 $|P_nP_{n+1}|=\sqrt{(\frac{9+t^{2n}}{2t^n}-\frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}})^2+(\frac{9-t^{2n}}{2t^n}-\frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}})^2}=$ $\frac{\sqrt{(t-1)^2[(9-t^{2n-1})^2+(9+t^{2n-1})^2]}}{2t^n}$, (16 分)

则 $S_n=\frac{1}{2}\cdot|P_nP_{n+1}|\cdot d=\frac{9(t-1)^3(t+1)}{4t^2}=\frac{36k^3}{(1-k^2)^2}$,即 S_n 为定值,所以 $S_n=S_{n+1}$. (17 分)

解法二 由(2)知,数列$\{x_n-y_n\}$是首项为 $x_1-y_1=5-4=1$,公比为$\frac{1+k}{1-k}$的等比数列.

令 $t=\frac{1+k}{1-k}$,由 $0<k<1$ 可知 $t>1$,则 $x_n-y_n=t^{n-1}$, (10 分)

又 $x_n^2-y_n^2=9$,所以 $x_n+y_n=\frac{9}{x_n-y_n}=\frac{9}{t^{n-1}}$,

可得 $x_n=\frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}}$,$y_n=\frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}}$.

所以 $P_n(\frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}},\frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}})$,$P_{n+1}(\frac{9+t^{2n}}{2t^n},\frac{9-t^{2n}}{2t^n})$,$P_{n+2}(\frac{9+t^{2n+2}}{2t^{n+1}},\frac{9-t^{2n+2}}{2t^{n+1}})$,$P_{n+3}(\frac{9+t^{2n+4}}{2t^{n+2}},\frac{9-t^{2n+4}}{2t^{n+2}})$. (12 分)

所以$\frac{x_{n+3}-x_n}{y_{n+3}-y_n}=\frac{\frac{9+t^{2n+4}}{2t^{n+2}}-\frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}}}{\frac{9-t^{2n+4}}{2t^{n+2}}-\frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}}}=\frac{9-t^{2n+1}}{9+t^{2n+1}}$,

$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\frac{\frac{9+t^{2n+2}}{2t^{n+1}}-\frac{9+t^{2n}}{2t^n}}{\frac{9-t^{2n+2}}{2t^{n+1}}-\frac{9-t^{2n}}{2t^n}}=\frac{9-t^{2n+1}}{9+t^{2n+1}}$,

即$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\frac{x_{n+3}-x_n}{y_{n+3}-y_n}$,所以 $P_nP_{n+3}\parallel P_{n+1}P_{n+2}$,

所以点 P_n 和点 P_{n+3} 到直线$P_{n+1}P_{n+2}$的距离相等, (16 分)

因此$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$和$\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}$的面积相等,即 $S_n=S_{n+1}$. (17 分)

考情速递 解答题加强考查基本能力,提升压轴题思维量 本题分层设问,环环相扣,三问都可以通过基本方法简化计算过程;第(2)问利用固定斜率的直线与双曲线交点的性质可以迅速得出结论;第(3)问证明面积相等时,可以将问题转化为证明两条直线平行.试题充分体现了“多想少算”的设计理念,引导中学教学充分重视思维能力、探究能力和解决问题能力的培养.

解法对比

		解法一	解法二
第(2)问	对学生的要求	熟练运用根与系数的关系	理解点差法,并能灵活变形、应用
	方法	联立方程	点差法
	评价	常规	创新
	用时	中等	较短
第(3)问	对学生的要求	熟练运用两点间的距离公式及点到直线的距离公式	数形结合,理解面积相等的几何意义
	方法	利用三角形面积公式求解	判断两直线平行
	评价	常规	创新
	用时	非常长	较短