

## 2004 普通高等学校春季招生考试 (安徽卷理)

### 一、选择题

1.  $\frac{5(4+i)^2}{i(2+i)} =$  ( )  
(A)  $5(1-38i)$  (B)  $5(1+38i)$  (C)  $1+38i$  (D)  $1-38i$
2. 不等式  $|2x^2-1| \leq 1$  的解集为 ( )  
(A)  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$  (B)  $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$   
(C)  $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$  (D)  $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$
3. 已知  $F_1, F_2$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦点,  $M$  为椭圆上一点,  $MF_1$  垂直于  $x$  轴, 且  $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$ , 则椭圆的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^2(2+3n)^3}{(1-n)^5} =$  ( )  
(A) 0 (B) 32 (C) -27 (D) 27
5. 等边三角形  $ABC$  的边长为 4,  $M, N$  分别为  $AB, AC$  的中点, 沿  $MN$  将  $\triangle AMN$  折起, 使得面  $AMN$  与面  $MNCB$  所处的二面角为  $30^\circ$ , 则四棱锥  $A-MNCB$  的体积为 ( )  
(A)  $\frac{3}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 3
6. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_0 = 1, a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ), 则当  $n \geq 1$  时,  $a_n =$  ( )  
(A)  $2^n$  (B)  $\frac{n(n+1)}{2}$  (C)  $2^{n-1}$  (D)  $2^n - 1$
7. 若二面角  $\alpha-l-\beta$  为  $120^\circ$ , 直线  $m \perp \alpha$ , 则  $\beta$  所在平面内的直线与  $m$  所成角的取值范围是 ( )  
(A)  $(0^\circ, 90^\circ]$  (B)  $[30^\circ, 60^\circ]$  (C)  $[60^\circ, 90^\circ]$  (D)  $[30^\circ, 90^\circ]$
8. 若  $f(\sin x) = 2 - \cos 2x$ , 则  $f(\cos x) =$  ( )  
(A)  $2 - \sin 2x$  (B)  $2 + \sin 2x$  (C)  $2 - \cos 2x$  (D)  $2 + \cos 2x$
9. 直角坐标  $xOy$  平面上, 平行直线  $x = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) 与平行直线  $y = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) 组成的图形中, 矩形共有 ( )  
(A) 25 个 (B) 36 个 (C) 100 个 (D) 225 个
10. 已知直线  $l: x-y-1=0, l_1: 2x-y-2=0$ . 若直线  $l_2$  与  $l_1$  关于  $l$  对称, 则  $l_2$  的方程是 ( )  
(A)  $x-2y+1=0$  (B)  $x-2y-1=0$   
(C)  $x+y-1=0$  (D)  $x+2y-1=0$

11. 已知向量集合  $M = \{\vec{a} | \vec{a} = (1, 2) + \lambda(3, 4), \lambda \in \mathbf{R}\}, N = \{\vec{a} | \vec{a} = (-2, -2) + \lambda(4, 5), \lambda \in \mathbf{R}\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $\{(1, 1)\}$  (B)  $\{(1, 1), (-2, -2)\}$   
(C)  $\{(-2, -2)\}$  (D)  $\emptyset$
12. 函数  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$  的最小正周期为 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D)  $2\pi$

### 二、填空题

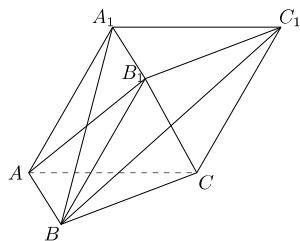
13. 抛物线  $y^2 = 6x$  的准线方程为\_\_\_\_\_.
14. 在 5 名学生 (3 名男生, 2 名女生) 中安排 2 名学生值日, 其中至少有 1 名女生的概率是\_\_\_\_\_.
15. 函数  $y = \sqrt{x} - x$  ( $x \geq 0$ ) 的最大值为\_\_\_\_\_.
16. 若  $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^n$  的展开式中常数项为 -20, 则自然数  $n =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 解关于  $x$  的不等式:  $\log_a^3 x < 3 \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

18. 已知正项数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $B_n = \frac{1}{4}(b_n + 1)^2$ , 求  $\{b_n\}$  的通项公式.
19. 已知  $k > 0$ , 直线  $l_1: y = kx, l_2: y = -kx$ .  
(1) 证明: 到  $l_1, l_2$  的距离的平方和为定值  $a$  ( $a > 0$ ) 的点的轨迹是圆或椭圆;  
(2) 求到  $l_1, l_2$  的距离之和为定值  $c$  ( $c > 0$ ) 的点的轨迹.

20. 已知三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 底面边长和侧棱长均为  $a$ , 侧面  $A_1ACC_1 \perp$  底面  $ABC$ ,  $A_1B = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ .
- (1) 求异面直线  $AC$  与  $BC_1$  所成角的余弦值;
  - (2) 求证:  $A_1B \perp$  面  $AB_1C$ .



21. 已知盒中有 10 个灯泡, 其中 8 个正品, 2 个次品. 现需要从中取出 2 个正品, 每次取出 1 个, 取出后不放回, 直到取出 2 个正品为止. 设  $\xi$  为取出的次数, 求  $\xi$  的分布列及  $E\xi$ .

22. 已知抛物线  $C: y = x^2 + 4x + \frac{2}{7}$ , 过  $C$  上一点  $M$ , 且与  $M$  处的切线垂直的直线称为  $C$  在点  $M$  的法线.
- (1) 若  $C$  在点  $M$  的法线的斜率为  $-\frac{1}{2}$ , 求点  $M$  的坐标  $(x_0, y_0)$ ;
  - (2) 设  $P(-2, a)$  为  $C$  对称轴上的一点, 在  $C$  上是否存在点, 使得  $C$  在该点的法线通过点  $P$ ? 若有, 求出这些点, 以及  $C$  在这些点的法线方程; 若没有, 请说明理由.

## 2004 普通高等学校春季招生考试 (安徽卷文)

### 一、选择题

- 若集合  $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $N = \{x \mid x(x-1) = 0\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $\{-1, 0, 1, 2\}$  (B)  $\{0, 1, 2\}$  (C)  $\{-1, 0, 1\}$  (D)  $\{0, 1\}$
- 不等式  $|2x^2 - 1| \leq 1$  的解集为 ( )  
(A)  $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$  (B)  $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$   
(C)  $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$  (D)  $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$
- 已知  $F_1, F_2$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦点,  $M$  为椭圆上一点,  $MF_1$  垂直于  $x$  轴, 且  $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$ , 则椭圆的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 已知向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, 3)$ ,  $\vec{c} = (3, 4)$ , 且  $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ , 则  $\lambda_1, \lambda_2$  的值分别是 ( )  
(A)  $-2, 1$  (B)  $1, -2$  (C)  $2, -1$  (D)  $-1, 2$
- 等边三角形  $ABC$  的边长为 4,  $M, N$  分别为  $AB, AC$  的中点, 沿  $MN$  将  $\triangle AMN$  折起, 使得面  $AMN$  与面  $MNCB$  所处的二面角为  $30^\circ$ , 则四棱锥  $A-MNCB$  的体积为 ( )  
(A)  $\frac{3}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 3
- 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_0 = 1, a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ), 则当  $n \geq 1$  时,  $a_n =$  ( )  
(A)  $2^n$  (B)  $\frac{n(n+1)}{2}$  (C)  $2^{n-1}$  (D)  $2^n - 1$
- 若二面角  $\alpha-l-\beta$  为  $120^\circ$ , 直线  $m \perp \alpha$ , 则  $\beta$  所在平面内的直线与  $m$  所成角的取值范围是 ( )  
(A)  $(0^\circ, 90^\circ]$  (B)  $[30^\circ, 60^\circ]$  (C)  $[60^\circ, 90^\circ]$  (D)  $[30^\circ, 90^\circ]$
- 若  $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$ , 则  $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  的值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{7}{5}$  (C)  $\pm \frac{1}{5}$  (D)  $\pm \frac{7}{5}$
- 直角坐标  $xOy$  平面上, 平行直线  $x = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) 与平行直线  $y = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) 组成的图形中, 矩形共有 ( )  
(A) 25 个 (B) 36 个 (C) 100 个 (D) 225 个
- 若直线  $ax + y = 1$  与圆  $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 = 1$  有两个不同的交点, 则  $a$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(1, \sqrt{3})$  (B)  $(-\sqrt{3}, 0)$  (C)  $(\sqrt{3}, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -\sqrt{3})$
- 若  $f(\sin x) = 2 - \cos 2x$ , 则  $f(\cos x) =$  ( )  
(A)  $2 - \sin 2x$  (B)  $2 + \sin 2x$  (C)  $2 - \cos 2x$  (D)  $2 + \cos 2x$

- 已知直线  $l: x - y - 1 = 0$ ,  $l_1: 2x - y - 2 = 0$ . 若直线  $l_2$  与  $l_1$  关于  $l$  对称, 则  $l_2$  的方程是 ( )  
(A)  $x - 2y + 1 = 0$  (B)  $x - 2y - 1 = 0$   
(C)  $x + y - 1 = 0$  (D)  $x + 2y - 1 = 0$

### 二、填空题

- 抛物线  $y^2 = 6x$  的准线方程为\_\_\_\_\_.
- 在 5 名学生 (3 名男生, 2 名女生) 中安排 2 名学生值日, 其中至少有 1 名女生的概率是\_\_\_\_\_.
- 函数  $y = x - x^2$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的最大值为\_\_\_\_\_.
- 若  $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^n$  的展开式中常数项为  $-20$ , 则自然数  $n =$ \_\_\_\_\_.

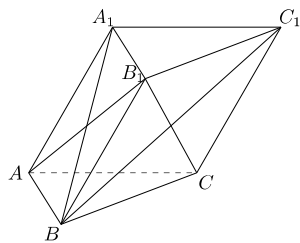
### 三、解答题

- 解关于  $x$  的不等式:  $\log_a^2 x < 2 \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

- 已知  $k > 0$ , 直线  $l_1: y = kx$ ,  $l_2: y = -kx$ .

- (1) 证明: 到  $l_1, l_2$  的距离的平方和为定值  $a$  ( $a > 0$ ) 的点的轨迹是圆或椭圆;
- (2) 求到  $l_1, l_2$  的距离之和为定值  $c$  ( $c > 0$ ) 的点的轨迹.

20. 已知三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 底面边长和侧棱长均为  $a$ , 侧面  $A_1ACC_1 \perp$  底面  $ABC$ ,  $A_1B = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ .
- (1) 求异面直线  $AC$  与  $BC_1$  所成角的余弦值;
  - (2) 求证:  $A_1B \perp$  面  $AB_1C$ .



21. 某商场从生产厂家以每件 20 元购进一批商品, 若该商品零售价定为  $p$  元, 则销售量  $Q$  (单位: 件) 与零售价  $p$  (单位: 元) 有如下关系  $Q = 8300 - 170p - p^2$ . 问该商品零售价定为多少时毛利润  $L$  最大, 并求出最大毛利润. (毛利润 = 销售收入 - 进货支出).

22. 已知抛物线  $C: y = x^2 + 4x + \frac{2}{7}$ , 过  $C$  上一点  $M$ , 且与  $M$  处的切线垂直的直线称为  $C$  在点  $M$  的法线.
- (1) 若  $C$  在点  $M$  的法线的斜率为  $-\frac{1}{2}$ , 求点  $M$  的坐标  $(x_0, y_0)$ ;
  - (2) 设  $P(-2, a)$  为  $C$  对称轴上的一点, 在  $C$  上是否存在点, 使得  $C$  在该点的法线通过点  $P$ ? 若有, 求出这些点, 以及  $C$  在这些点的法线方程; 若没有, 请说明理由.



## 2004 普通高等学校春季招生考试 (北京卷理)

### 一、选择题

- 在函数  $y = \sin 2x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan \frac{x}{2}$  中, 最小正周期为  $\pi$  的函数是 ( )  
(A)  $y = \sin 2x$  (B)  $y = \sin x$  (C)  $y = \cos x$  (D)  $y = \tan \frac{x}{2}$
- 当  $\frac{2}{3} < m < 1$  时, 复数  $z = (3m - 2) + (m - 1)i$  在复平面上对应的点位于 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  的渐近线方程是 ( )  
(A)  $y = \pm \frac{3}{2}x$  (B)  $y = \pm \frac{2}{3}x$  (C)  $y = \pm \frac{9}{4}x$  (D)  $y = \pm \frac{4}{9}x$
- 一个圆锥的侧面积是其底面积的 2 倍, 则该圆锥的母线与底面所成的角为 ( )  
(A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $75^\circ$
- 在极坐标系中, 圆心在  $(\sqrt{2}, \pi)$  且过极点的圆的方程为 ( )  
(A)  $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$  (B)  $\rho = -2\sqrt{2}\cos\theta$   
(C)  $\rho = 2\sqrt{2}\sin\theta$  (D)  $\rho = -2\sqrt{2}\sin\theta$
- 已知  $\sin(\theta + \pi) < 0$ ,  $\cos(\theta - \pi) > 0$ , 则下列不等关系中必定成立的是 ( )  
(A)  $\tan \frac{\theta}{2} < \cot \frac{\theta}{2}$  (B)  $\tan \frac{\theta}{2} > \cot \frac{\theta}{2}$   
(C)  $\sin \frac{\theta}{2} < \cos \frac{\theta}{2}$  (D)  $\sin \frac{\theta}{2} > \cos \frac{\theta}{2}$
- 已知三个不等式:  $ab > 0$ ,  $bc - ad > 0$ ,  $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$  (其中  $a, b, c, d$  均为实数), 用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 两个完全相同的长方体的长、宽、高分别为 5 cm, 4 cm, 3 cm, 把它们重叠在一起组成一个新长方体, 在这些新长方体中, 最长的对角线的长度是 ( )  
(A)  $\sqrt{77}$  cm (B)  $7\sqrt{2}$  cm (C)  $5\sqrt{5}$  cm (D)  $10\sqrt{2}$  cm
- 在 100 件产品中有 6 件次品, 现从中任取 3 件产品, 至少有 1 件次品的不同取法的种数是 ( )  
(A)  $C_6^1 C_{94}^2$  (B)  $C_6^1 C_{99}^2$  (C)  $C_{100}^3 - C_{94}^3$  (D)  $A_{100}^3 - A_{94}^3$
- 期中考试以后, 班长算出了全班 40 个人数学成绩的平均分为  $M$ , 如果把  $M$  当成一个同学的分数, 与原来的 40 个分数一起, 算出这 41 个分数的平均值为  $N$ , 那么  $M : N$  为 ( )  
(A)  $\frac{40}{41}$  (B) 1 (C)  $\frac{41}{40}$  (D) 2

### 二、填空题

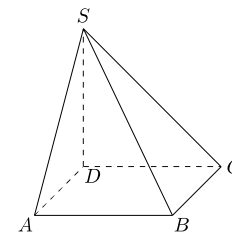
- 若  $f^{-1}(x)$  为函数  $f(x) = \lg(x + 1)$  的反函数, 则  $f^{-1}(x)$  的值域是\_\_\_\_\_.
- $\frac{\sin(\alpha + 30^\circ) - \sin(\alpha - 30^\circ)}{\cos \alpha}$  的值为\_\_\_\_\_.
- 据某校环保小组调查, 某区垃圾量的年增长率为  $b$ , 2003 年产生的垃圾量为  $a$  吨. 由此预测, 该区下一年的垃圾量为\_\_\_\_\_吨, 2008 年的垃圾量为\_\_\_\_\_吨.
- 若直线  $mx + ny - 3 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 3$  没有公共点, 则  $m, n$  满足的关系式为\_\_\_\_\_; 以  $(m, n)$  为点  $P$  的坐标, 过点  $P$  的一条直线与椭圆  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$  的公共点有\_\_\_\_\_个.

### 三、解答题

- 当  $0 < a < 1$  时, 解关于  $x$  的不等式:  $a^{\sqrt{2x-1}} < a^{x-2}$ .

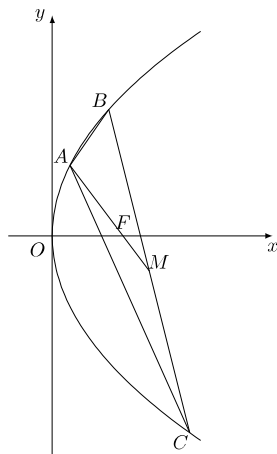
- 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边长, 已知  $a, b, c$  成等比数列, 且  $a^2 - c^2 = ac - bc$ , 求  $\angle A$  的大小及  $\frac{b \sin B}{c}$  的值.

- 如图, 四棱锥  $S - ABCD$  的底面是边长为 1 的正方形,  $SD$  垂直于底面  $ABCD$ ,  $SB = \sqrt{3}$ .  
(1) 求证:  $BC \perp SC$ ;  
(2) 求面  $ASD$  与面  $BSC$  所成二面角的大小;  
(3) 设棱  $SA$  的中点为  $M$ , 求异面直线  $DM$  与  $SB$  所成的角的大小.



18. 已知点  $A(2, 8)$ ,  $B(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$  在抛物线  $y^2 = 2px$  上,  $\triangle ABC$  的重心与此抛物线的焦点  $F$  重合 (如图).

- (1) 写出该抛物线的方程和焦点  $F$  的坐标;
- (2) 求线段  $BC$  中点  $M$  的坐标;
- (3) 求  $BC$  所在直线的方程.



19. 某厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价定为 60 元, 该厂为鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购一个, 订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元, 但实际出厂单价不能低于 51 元.

- (1) 当一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂单价恰降为 51 元?
- (2) 设一次订购量为  $x$  个, 零件的实际出厂单价为  $P$  元, 写出函数  $P = f(x)$  的表达式;
- (3) 当销售商一次订购 500 个零件时, 该厂获得的利润是多少元? 如果订购 1000 个, 利润又是多少元? (工厂售出一个零件的利润 = 实际出厂单价 - 成本)

20. 下表给出一个“等差数阵”:

4	7	( )	( )	( )	...	$a_{1j}$	...
7	12	( )	( )	( )	...	$a_{2j}$	...
( )	( )	( )	( )	( )	...	$a_{3j}$	...
( )	( )	( )	( )	( )	...	$a_{4j}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$	$a_{i5}$	...	$a_{ij}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

其中每行、每列都是等差数列,  $a_{ij}$  表示位于第  $i$  行第  $j$  列的数.

- (1) 写出  $a_{45}$  的值;
- (2) 写出  $a_{ij}$  的计算公式;
- (3) 证明: 正整数  $N$  在该等差数阵中的充要条件是  $2N + 1$  可以分解成两个不是 1 的正整数之积.

## 2004 普通高等学校春季招生考试 (北京卷文)

### 一、选择题

- 在函数  $y = \sin 2x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan \frac{x}{2}$  中, 最小正周期为  $\pi$  的函数是 ( )  
(A)  $y = \sin 2x$  (B)  $y = \sin x$  (C)  $y = \cos x$  (D)  $y = \tan \frac{x}{2}$
- 当  $m < 1$  时, 复数  $z = 2 + (m - 1)i$  在复平面上对应的点位于 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  的渐近线方程是 ( )  
(A)  $y = \pm \frac{3}{2}x$  (B)  $y = \pm \frac{2}{3}x$  (C)  $y = \pm \frac{9}{4}x$  (D)  $y = \pm \frac{4}{9}x$
- 一个圆锥的侧面积是其底面积的 2 倍, 则该圆锥的母线与底面所成的角为 ( )  
(A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $75^\circ$
- 已知  $\sin(\theta + \pi) < 0$ ,  $\cos(\theta - \pi) > 0$ , 则下列不等关系中必定成立的是 ( )  
(A)  $\sin \theta < 0$ ,  $\cos \theta > 0$  (B)  $\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta < 0$   
(C)  $\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta > 0$  (D)  $\sin \theta < 0$ ,  $\cos \theta < 0$
- 在抛物线  $y^2 = 2px$  上, 横坐标为 4 的点到焦点的距离为 5, 则  $p$  的值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B) 1 (C) 2 (D) 4
- 已知  $a, b, c, d$  均为实数, 有下列命题:  
① 若  $ab > 0$ ,  $bc - ad > 0$ , 则  $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ ;  
② 若  $ab > 0$ ,  $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ , 则  $bc - ad > 0$ ;  
③ 若  $bc - ad > 0$ ,  $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ , 则  $ab > 0$ .  
其中正确命题的个数是 ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 两个完全相同的长方体的长、宽、高分别为 5 cm, 4 cm, 3 cm, 把它们重叠在一起组成一个新长方体, 在这些新长方体中, 最长的对角线的长度是 ( )  
(A)  $\sqrt{77}$  cm (B)  $7\sqrt{2}$  cm (C)  $5\sqrt{5}$  cm (D)  $10\sqrt{2}$  cm
- 在 100 件产品中有 6 件次品, 现从中任取 3 件产品, 至少有 1 件次品的不同取法的种数是 ( )  
(A)  $C_6^1 C_{94}^2$  (B)  $C_6^1 C_{99}^2$  (C)  $A_{100}^3 - A_{94}^3$  (D)  $C_{100}^3 - C_{94}^3$
- 期中考试以后, 班长算出了全班 40 个人数学成绩的平均分为  $M$ , 如果把  $M$  当成一个同学的分数, 与原来的 40 个分数一起, 算出这 41 个分数的平均值为  $N$ , 那么  $M : N$  为 ( )  
(A)  $\frac{40}{41}$  (B) 1 (C)  $\frac{41}{40}$  (D) 2

### 二、填空题

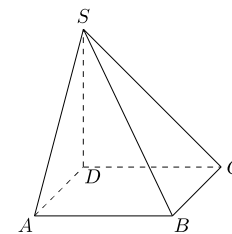
- 直线  $x - \sqrt{3}y + a = 0$  ( $a$  为实数) 的倾斜角的大小是\_\_\_\_\_.
- $\frac{\sin(\alpha + 30^\circ) - \sin(\alpha - 30^\circ)}{\cos \alpha}$  的值为\_\_\_\_\_.
- 若  $f^{-1}(x)$  为函数  $f(x) = \lg(x - 1)$  的反函数, 则  $f^{-1}(x)$  的值域是\_\_\_\_\_.
- 若直线  $mx + ny - 3 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 3$  没有公共点, 则  $m, n$  满足的关系式为\_\_\_\_\_; 以  $(m, n)$  为点  $P$  的坐标, 过点  $P$  的一条直线与椭圆  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$  的公共点有\_\_\_\_\_个.

### 三、解答题

- 解不等式:  $\sqrt{2x - 1} > x - 2$ .

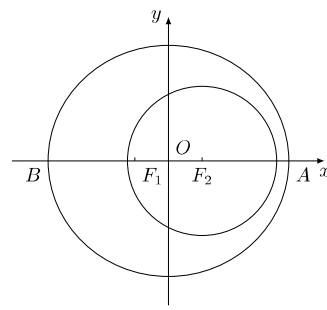
- 如图, 四棱锥  $S - ABCD$  的底面是边长为 1 的正方形,  $SD$  垂直于底面  $ABCD$ ,  $SB = \sqrt{3}$ .

- 求证:  $BC \perp SC$ ;
- 求面  $ASD$  与面  $BSC$  所成二面角的大小.



- 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边长, 已知  $a, b, c$  成等比数列, 且  $a^2 - c^2 = ac - bc$ , 求  $\angle A$  的大小及  $\frac{b \sin B}{c}$  的值.

18. 2003 年 10 月 15 日 9 时,“神舟”五号载人飞船发射升空,于 9 时 9 分 50 秒准确进入预定轨道,开始巡天飞行.该轨道是以地球的中心  $F_2$  为一个焦点的椭圆.选取坐标系如图所示,椭圆中心在原点.近地点  $A$  距地面 200 km,远地点  $B$  距地面 350 km.已知地球半径  $R = 6371$  km.
- (1) 求飞船飞行的椭圆轨道的方程;
- (2) 飞船绕地球飞行了十四圈后,于 16 日 5 时 59 分返回舱与推进舱分离,结束巡天飞行,飞船共巡天飞行了约  $6 \times 10^5$  km,问飞船巡天飞行的平均速度是多少 km/s? (结果精确到 1 km/s)



19. 某服装厂生产一种服装,每件服装的成本为 40 元,出厂单价定为 60 元,该厂为鼓励销售商订购,决定当一次订购量超过 100 件时,每多订购一件,订购的全部服装的出厂单价就降低 0.02 元.根据市场调查,经销商一次订购量不会超过 500 件.
- (1) 设一次订购量为  $x$  件,服装的实际出厂单价为  $P$  元,写出函数  $P = f(x)$  的表达式;
- (2) 当销售商一次订购 400 件服装时,该服装厂获得的利润是多少元? (服装厂售出一件服装的利润 = 实际出厂单价 - 成本)

20. 下表给出一个“等差数阵”:

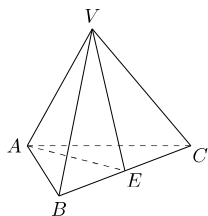
4	7	( )	( )	( )	...	$a_{1j}$	...
7	12	( )	( )	( )	...	$a_{2j}$	...
( )	( )	( )	( )	( )	...	$a_{3j}$	...
( )	( )	( )	( )	( )	...	$a_{4j}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$	$a_{i5}$	...	$a_{ij}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

- 其中每行、每列都是等差数列,  $a_{ij}$  表示位于第  $i$  行第  $j$  列的数.
- (1) 写出  $a_{45}$  的值;
- (2) 写出  $a_{ij}$  的计算公以及 2008 这个数在等差数阵中所在的位置.

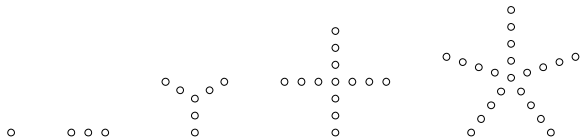
# 2004 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)

## 一、填空题

- 若复数  $z$  满足  $z(1+i)=2$ , 则  $z$  的实部是\_\_\_\_\_.
- 方程  $\lg x + \lg(x+3) = 1$  的解  $x =$ \_\_\_\_\_.
- 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是  $\angle A, \angle B, \angle C$  所对的边. 若  $\angle A = 105^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ , 则  $c =$ \_\_\_\_\_.
- 过抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点  $F$  作垂直于  $x$  轴的直线, 交抛物线于  $A, B$  两点, 则以  $F$  为圆心、 $AB$  为直径的圆方程是\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x) = \log_3\left(\frac{4}{x} + 2\right)$ , 则方程  $f^{-1}(x) = 4$  的解  $x =$ \_\_\_\_\_.
- 如图, 在底面边长为 2 的正三棱锥  $V-ABC$  中,  $E$  是  $BC$  的中点, 若  $\triangle VAE$  的面积是  $\frac{1}{4}$ , 则侧棱  $VA$  与底面所成角的大小为\_\_\_\_\_. (结果用反三角函数值表示)



- 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 3$ , 且对任意大于 1 的正整数  $n$ , 点  $(\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n-1}})$  在直线  $x - y - \sqrt{3} = 0$  上, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+1)^2} =$ \_\_\_\_\_.
- 根据下列 5 个图形及相应点的个数的变化规律, 试猜测第  $n$  个图中有\_\_\_\_\_个点.



- 一次二期课改经验交流会打算交流试点学校的论文 5 篇和非试点学校的论文 3 篇. 若任意排列交流次序, 则最先和最后交流的论文都为试点学校的概率是\_\_\_\_\_. (结果用分数表示)
- 若平移椭圆  $4(x+3)^2 + 9y^2 = 36$ , 使平移后的椭圆中心在第一象限, 且它与  $x$  轴、 $y$  轴分别只有一个交点, 则平移后的椭圆方程是\_\_\_\_\_.
- 如图, 在由二项式系数所构成的杨辉三角形中, 第\_\_\_\_\_行中从左至右第 14 与第 15 个数的比为  $2:3$ .

第 0 行																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 当  $a_r = a_s$  ( $r \neq s$ ) 时,  $\{a_n\}$  必定是常数数列. 然而在等比数列  $\{a_n\}$  中, 对某些正整数  $r, s$  ( $r \neq s$ ), 当  $a_r = a_s$  时, 非常数数列  $\{a_n\}$  的一个例子是\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

- 下列函数中, 周期为 1 的奇函数是 ( )  
(A)  $y = 1 - 2\sin^2 \pi x$  (B)  $y = \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$   
(C)  $y = \tan \frac{\pi}{2} x$  (D)  $y = \sin \pi x \cos \pi x$
- 若非空集合  $M \subseteq N$ , 则“ $a \in M$  或  $a \in N$ ”是“ $a \in M \cap N$ ”的 ( )  
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
- 在  $\triangle ABC$  中, 有命题①  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ ; ②  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ; ③ 若  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$ , 则  $\triangle ABC$  为等腰三角形; ④ 若  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$ , 则  $\triangle ABC$  为锐角三角形. 上述命题正确的是 ( )  
(A) ①② (B) ①④ (C) ②③ (D) ②③④
- 若  $p = a + \frac{1}{a} + 2$  ( $a > 0$ ),  $q = \arccos t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ), 则下列不等式恒成立的是 ( )  
(A)  $p \geq \pi > q$  (B)  $p > q \geq 0$  (C)  $4 > p \geq q$  (D)  $p \geq q > 0$

## 三、解答题

- 在直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $P(2\cos x + 1, 2\cos 2x + 2)$  和点  $Q(\cos x, -1)$ , 其中  $x \in [0, \pi]$ . 若向量  $\overrightarrow{OP}$  与  $\overrightarrow{OQ}$  垂直, 求  $x$  的值.

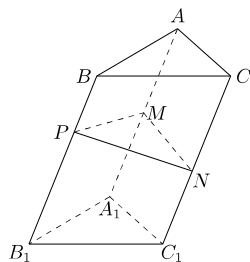
- 已知实数  $p$  满足不等式  $\frac{2x+1}{x+2} < 0$ , 试判断方程  $z^2 - 2z + 5 - p^2 = 0$  有无实根, 并给出证明.

- 某市 2003 年共有 1 万辆燃油型公交车. 有关部门计划于 2004 年投入 128 辆电力型公交车, 随后电力型公交车每年的投入比上一年增加 50%, 试问:  
(1) 该市在 2010 年应该投入多少辆电力型公交车?  
(2) 到哪一年底, 电力型公交车的数量开始超过该市公交车总量的  $\frac{1}{3}$ ?

20. 如图, 点  $P$  为斜三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱  $BB_1$  上一点,  $PM \perp BB_1$  交  $AA_1$  于点  $M$ ,  $PN \perp BB_1$  交  $CC_1$  于点  $N$ .

(1) 求证:  $CC_1 \perp MN$ ;

(2) 在任意  $\triangle DEF$  中有余弦定理:  $DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF \cos \angle DFE$ . 拓展到空间, 类比三角形的余弦定理, 写出斜三棱柱的三个侧面面积与其中两个侧面所成的二面角之间的关系式, 并予以证明.



21. 已知函数  $f(x) = |x - a|$ ,  $g(x) = x^2 + 2ax + 1$  ( $a$  为正常数), 且函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象在  $y$  轴上的截距相等.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求函数  $f(x) + g(x)$  的单调递增区间;

(3) 若  $n$  为正整数, 证明:  $10^{f(n)} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{g(n)} < 4$ .

22. 已知倾斜角为  $45^\circ$  的直线  $l$  过点  $A(1, -2)$  和点  $B$ ,  $B$  在第一象限,  $|AB| = 3\sqrt{2}$ .

(1) 求点  $B$  的坐标;

(2) 若直线  $l$  与双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 相交于  $E, F$  两点, 且线段  $EF$  的中点坐标为  $(4, 1)$ , 求  $a$  的值;

(3) 对于平面上任一点  $P$ , 当点  $Q$  在线段  $AB$  上运动时, 称  $|PQ|$  的最小值为  $P$  与线段  $AB$  的距离. 已知点  $P$  在  $x$  轴上运动, 写出点  $P(t, 0)$  到线段  $AB$  的距离  $h$  关于  $t$  的函数关系式.

# 2004 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

## 一、选择题

1. 设全集是实数集  $\mathbf{R}$ ,  $M = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $N = \{x \mid x < 1\}$ , 那么  $\overline{M} \cap N$  等于 ( )

(A)  $\{x \mid x < -2\}$  (B)  $\{x \mid -2 < x < 1\}$   
(C)  $\{x \mid x < 1\}$  (D)  $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$

2. 满足条件  $|z - i| = |3 + 4i|$  的复数  $z$  在复平面上对应点的轨迹是 ( )

(A) 一条直线 (B) 两条直线 (C) 圆 (D) 椭圆

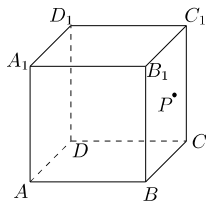
3. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 给出下列四个命题:

① 若  $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \perp n$ ;  
② 若  $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma, m \perp \alpha$ , 则  $m \perp \gamma$ ;  
③ 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$ ;  
④ 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ .

其中正确命题的序号是 ( )

(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ①和④

4. 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  是侧面  $BB_1C_1C$  内一动点, 若  $P$  到直线  $BC$  与直线  $C_1D_1$  的距离相等, 则动点  $P$  的轨迹所在的曲线是 ( )



(A) 直线 (B) 圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

5. 函数  $f(x) = x^2 - 2ax - 3$  在区间  $[1, 2]$  上存在反函数的充分必要条件是 ( )

(A)  $a \in (-\infty, 1]$  (B)  $a \in [2, +\infty)$   
(C)  $a \in [1, 2]$  (D)  $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

6. 已知  $a, b, c$  满足  $c < b < a$  且  $ac < 0$ , 那么下列选项中一定成立的是 ( )

(A)  $ab > ac$  (B)  $c(b - a) < 0$  (C)  $cb^2 < ab^2$  (D)  $ac(a - c) > 0$

7. 从长度分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五条线段中, 任取三条的不同取法共有  $n$  种. 在这些取法中, 以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为  $m$ , 则  $\frac{m}{n}$  等于 ( )

(A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{3}{10}$  (D)  $\frac{2}{5}$

8. 函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P, \\ -x, & x \in M, \end{cases}$  其中  $P, M$  为实数集  $\mathbf{R}$  的两个非空子集, 又规定  $f(P) = \{y \mid y = f(x), x \in P\}$ ,  $f(M) = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$ , 给出下列四个判断:

① 若  $P \cap M \neq \emptyset$ , 则  $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$ ;  
② 若  $P \cup M = \mathbf{R}$ , 则  $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$ ;  
③ 若  $P \cup M = \mathbf{R}$ , 则  $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$ ;  
④ 若  $P \cup M \neq \mathbf{R}$ , 则  $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$ .

其中正确判断有 ( )

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

## 二、填空题

9. 函数  $y = \cos 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x$  的最小正周期是\_\_\_\_\_.

10. 方程  $\lg(4^x + 2) = \lg 2^x + \lg 3$  的解是\_\_\_\_\_.

11. 某地球仪上北纬  $30^\circ$  纬线的长度为  $12\pi$ cm, 该地球仪的半径是\_\_\_\_\_cm, 表面积是\_\_\_\_\_cm<sup>2</sup>.

12. 曲线  $C: \begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = -1 + \sin \theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数) 的普通方程是\_\_\_\_\_, 如果曲线  $C$  与直线  $x + y + a = 0$  有公共点, 那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

13. 在函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  中, 若  $a, b, c$  成等比数列且  $f(0) = -4$ , 则  $f(x)$  有最\_\_\_\_\_值 (填“大”或“小”), 且该值为\_\_\_\_\_.

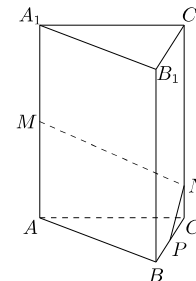
14. 定义“等和数列”: 在一个数列中, 如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数, 那么这个数列叫做等和数列, 这个常数叫做该数列的公和. 已知数列  $\{a_n\}$  是等和数列, 且  $a_1 = 2$ , 公和为 5, 那么  $a_{18}$  的值为\_\_\_\_\_, 且这个数列的前 21 项和  $S_{21}$  的计算公式为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin A + \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $AC = 2$ ,  $AB = 3$ , 求  $\tan A$  的值和  $\triangle ABC$  的面积.

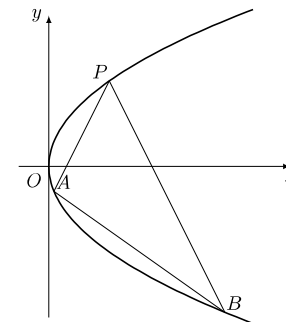
16. 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 3$ ,  $AA_1 = 4$ ,  $M$  为  $AA_1$  的中点,  $P$  是  $BC$  上一点, 且由  $P$  沿棱柱侧面经过棱  $CC_1$  到  $M$  的最短路线长为  $\sqrt{29}$ , 设这条最短路线与  $CC_1$  的交点为  $N$ , 求:

(1) 该三棱柱的侧面展开图的对角线长;  
(2)  $PC$  和  $NC$  的长;  
(3) 平面  $NMP$  与平面  $ABC$  所成二面角 (锐角) 的大小. (用反三角函数表示)



17. 如图, 过抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上一定点  $P(x_0, y_0)$  ( $y_0 > 0$ ), 作两条直线分别交抛物线于  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ .

(1) 求该抛物线上纵坐标为  $\frac{p}{2}$  的点到其焦点  $F$  的距离;  
(2) 当  $PA$  与  $PB$  的斜率存在且倾斜角互补时, 求  $\frac{y_1 + y_2}{y_0}$  的值, 并证明直线  $AB$  的斜率是非零常数.



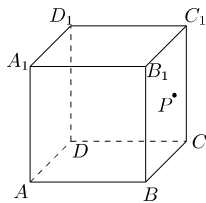
18. 函数  $f(x)$  是定义在  $[0, 1]$  上的增函数, 满足  $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$  且  $f(1) = 1$ , 在每个区间  $\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right]$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 上,  $y = f(x)$  的图象都是斜率为同一常数  $k$  的直线的一部分.
- (1) 求  $f(0)$  及  $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$  的值, 并归纳出  $f\left(\frac{1}{2^i}\right)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 的表达式;
- (2) 设直线  $x = \frac{1}{2^i}, x = \frac{1}{2^{i-1}}, x$  轴及  $y = f(x)$  的图象围成的矩形的面积为  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 记  $S(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ , 求  $S(k)$  的表达式, 并写出其定义域和最小值.
19. 某段城铁线路上依次有  $A, B, C$  三站,  $AB = 15$  km,  $BC = 3$  km, 在列车运行时刻表上, 规定列车 8 时整从  $A$  站发车, 8 时 07 分到达  $B$  站并停车 1 分钟, 8 时 12 分到达  $C$  站, 在实际运行中, 假设列车从  $A$  站正点发车, 在  $B$  站停留 1 分钟, 并在行驶时以同一速度  $v$  km/h 匀速行驶, 列车从  $A$  站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.
- (1) 分别写出列车在  $B, C$  两站的运行误差;
- (2) 若要求列车在  $B, C$  两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 求  $v$  的取值范围.
20. 给定有限个正数满足条件  $T$ : 每个数都不大于 50 且总和  $L = 1275$ . 现将这些数按下列要求进行分组, 每组数之和不大于一 50 且分组的步骤是: 首先, 从这些数中选择这样一些数构成第一组, 使得 150 与这组数之和的差  $r_1$  与所有可能的其他选择相比是最小的,  $r_1$  称为第一组余差; 然后, 在去掉已选入第一组的数后, 对余下的数按第一组的选择方式构成第二组, 这时的余差为  $r_2$ ; 如此继续构成第三组 (余差为  $r_3$ )、第四组 (余差为  $r_4$ )、 $\dots$ , 直至第  $N$  组 (余差为  $r_N$ ) 把这些数全部分完为止.
- (1) 判断  $r_1, r_2, \dots, r_N$  的大小关系, 并指出除第  $N$  组外的每组至少含有几个数;
- (2) 当构成第  $n$  ( $n < N$ ) 组后, 指出余下的每个数与  $r_n$  的大小关系, 并证明  $r_{n-1} > \frac{150n - L}{n - 1}$ ;
- (3) 对任何满足条件  $T$  的有限个正数, 证明:  $N \leq 11$ .



# 2004 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

## 一、选择题

1. 设  $M = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $N = \{x \mid x < 1\}$ , 则  $M \cap N$  等于 ( )  
(A)  $\{x \mid 1 < x < 2\}$  (B)  $\{x \mid -2 < x < 1\}$   
(C)  $\{x \mid 1 < x \leq 2\}$  (D)  $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$
2. 满足条件  $|z| = |3 + 4i|$  的复数  $z$  在复平面上对应点的轨迹是 ( )  
(A) 一条直线 (B) 两条直线 (C) 圆 (D) 椭圆
3. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 给出下列四个命题:  
① 若  $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \perp n$ ;  
② 若  $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma, m \perp \alpha$ , 则  $m \perp \gamma$ ;  
③ 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$ ;  
④ 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ .  
其中正确命题的序号是 ( )  
(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ①和④
4. 已知  $a, b, c$  满足  $c < b < a$  且  $ac < 0$ , 那么下列选项中一定成立的是 ( )  
(A)  $ab > ac$  (B)  $c(b - a) < 0$  (C)  $cb^2 < ab^2$  (D)  $ac(a - c) > 0$
5. 从长度分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五条线段中, 任取三条的不同取法共有  $n$  种. 在这些取法中, 以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为  $m$ , 则  $\frac{m}{n}$  等于 ( )  
(A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{3}{10}$  (D)  $\frac{2}{5}$
6. 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  是侧面  $BB_1C_1C$  内一动点, 若  $P$  到直线  $BC$  与直线  $C_1D_1$  的距离相等, 则动点  $P$  的轨迹所在的曲线是 ( )



- (A) 直线 (B) 圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线
7. 函数  $f(x) = x^2 - 2ax - 3$  在区间  $[1, 2]$  上存在反函数的充分必要条件是 ( )  
(A)  $a \in (-\infty, 1]$  (B)  $a \in [2, +\infty)$   
(C)  $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$  (D)  $a \in [1, 2]$

8. 函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P, \\ -x, & x \in M, \end{cases}$  其中  $P, M$  为实数集  $\mathbf{R}$  的两个非空子集, 又规定  $f(P) = \{y \mid y = f(x), x \in P\}$ ,  $f(M) = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$ , 给出下列四个判断:  
① 若  $P \cap M = \emptyset$ , 则  $f(P) \cup f(M) = \emptyset$ ;  
② 若  $P \cap M \neq \emptyset$ , 则  $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$ ;  
③ 若  $P \cup M = \mathbf{R}$ , 则  $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$ ;  
④ 若  $P \cup M \neq \mathbf{R}$ , 则  $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$ .  
其中正确判断有 ( )  
(A) 3 个 (B) 2 个 (C) 1 个 (D) 0 个

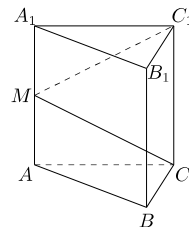
## 二、填空题

9. 函数  $y = \sin x \cos x$  的最小正周期是\_\_\_\_\_.
10. 方程  $\lg(x^2 + 2) = \lg x + \lg 3$  的解是\_\_\_\_\_.
11. 某地球仪上北纬  $30^\circ$  纬线的长度为  $12\pi$  cm, 该地球仪的半径是\_\_\_\_\_cm, 表面积是\_\_\_\_\_cm<sup>2</sup>.
12. 圆  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$  的圆心坐标是\_\_\_\_\_, 如果直线  $x + y + a = 0$  与该圆有公共点, 那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
13. 在函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  中, 若  $a, b, c$  成等比数列且  $f(0) = -4$ , 则  $f(x)$  有最\_\_\_\_\_值 (填“大”或“小”), 且该值为\_\_\_\_\_.
14. 定义“等和数列”: 在一个数列中, 如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数, 那么这个数列叫做等和数列, 这个常数叫做该数列的公和. 已知数列  $\{a_n\}$  是等和数列, 且  $a_1 = 2$ , 公和为 5, 那么  $a_{18}$  的值为\_\_\_\_\_, 且这个数列的前 21 项和  $S_{21}$  的计算公式为\_\_\_\_\_.

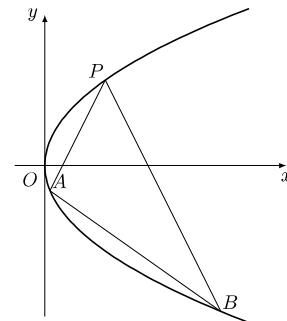
## 三、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin A + \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $AC = 2$ ,  $AB = 3$ , 求  $\tan A$  的值和  $\triangle ABC$  的面积.

16. 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 2$ ,  $AA_1 = 2$ , 由顶点  $B$  沿棱柱侧面经过棱  $AA_1$  到顶点  $C$  的最短路线与  $AA_1$  的交点为  $M$ , 求:  
(1) 该三棱柱的侧面展开图的对角线长;  
(2) 该最短路线的长与  $\frac{A_1M}{AM}$  的值;  
(3) 平面  $C_1MB$  与平面  $ABC$  所成二面角 (锐角) 的大小.



17. 如图, 抛物线关于  $x$  轴对称, 它的顶点在坐标原点, 点  $P(1, 2)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  均在抛物线上.  
(1) 写出该抛物线的方程及其准线方程;  
(2) 当  $PA$  与  $PB$  的斜率存在且倾斜角互补时, 求  $y_1 + y_2$  的值及直线  $AB$  的斜率.



18. 函数  $f(x)$  是定义在  $[0, 1]$  上的增函数, 满足  $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$  且  $f(1) = 1$ , 在每个区间  $\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right]$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 上,  $y = f(x)$  的图象都是斜率为同一常数  $k$  的直线的一部分.
- (1) 求  $f(0)$  及  $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$  的值, 并归纳出  $f\left(\frac{1}{2^i}\right)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 的表达式;
- (2) 设直线  $x = \frac{1}{2^i}, x = \frac{1}{2^{i-1}}, x$  轴及  $y = f(x)$  的图象围成的矩形的面积为  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 求  $a_1, a_2$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  的值.
19. 某段城铁线路上依次有  $A, B, C$  三站,  $AB = 15$  km,  $BC = 3$  km, 在列车运行时刻表上, 规定列车 8 时整从  $A$  站发车, 8 时 07 分到达  $B$  站并停车 1 分钟, 8 时 12 分到达  $C$  站, 在实际运行中, 假设列车从  $A$  站正点发车, 在  $B$  站停留 1 分钟, 并在行驶时以同一速度  $v$  km/h 匀速行驶, 列车从  $A$  站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.
- (1) 分别写出列车在  $B, C$  两站的运行误差;
- (2) 若要求列车在  $B, C$  两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 求  $v$  的取值范围.
20. 给定有限个正数满足条件  $T$ : 每个数都不大于 50 且总和  $L = 1275$ . 现将这些数按下列要求进行分组, 每组数之和不大 于 150 且分组的步骤是: 首先, 从这些数中选择这样一些数构成第一组, 使得 150 与这组数之和的差  $r_1$  与所有可能的其他选择相比是最小的,  $r_1$  称为第一组余差; 然后, 在去掉已选入第一组的数后, 对余下的数按第一组的选择方式构成第二组, 这时的余差为  $r_2$ ; 如此继续构成第三组 (余差为  $r_3$ )、第四组 (余差为  $r_4$ )、 $\dots$ , 直至第  $N$  组 (余差为  $r_N$ ) 把这些数全部分完为止.
- (1) 判断  $r_1, r_2, \dots, r_N$  的大小关系, 并指出除第  $N$  组外的每组至少含有几个数;
- (2) 当构成第  $n$  ( $n < N$ ) 组后, 指出余下的每个数与  $r_n$  的大小关系, 并证明  $r_{n-1} > \frac{150n-L}{n-1}$ ;
- (3) 对任何满足条件  $T$  的有限个正数, 证明:  $N \leq 11$ .

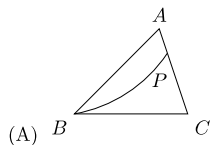
# 2004 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

## 一、选择题

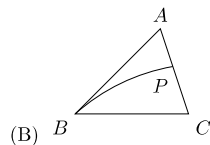
- 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$  的定义域是 ( )  
(A)  $[1, +\infty)$  (B)  $(\frac{2}{3}, +\infty)$  (C)  $[\frac{2}{3}, 1]$  (D)  $(\frac{2}{3}, 1]$
- 设复数  $Z = 1 + \sqrt{2}i$ , 则  $Z^2 - 2Z =$  ( )  
(A)  $-3$  (B)  $3$  (C)  $-3i$  (D)  $3i$
- 圆  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$  的圆心到直线  $x - y = 1$  的距离为 ( )  
(A)  $2$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $1$  (D)  $\sqrt{2}$
- 不等式  $x + \frac{2}{x+1} > 2$  的解集是 ( )  
(A)  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$  (B)  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$   
(C)  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  (D)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- $\sin 163^\circ \sin 223^\circ + \sin 253^\circ \sin 313^\circ =$  ( )  
(A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 若向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = -72$ , 则向量  $\vec{a}$  的模为 ( )  
(A)  $2$  (B)  $4$  (C)  $6$  (D)  $12$
- 一元二次方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  ( $a \neq 0$ ) 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 ( )  
(A)  $a < 0$  (B)  $a > 0$  (C)  $a < -1$  (D)  $a > 1$
- 设  $P$  是  $60^\circ$  的二面角  $\alpha - l - \beta$  内一点,  $PA \perp$  平面  $\alpha$ ,  $PB \perp$  平面  $\beta$ ,  $A, B$  为垂足,  $PA = 4$ ,  $PB = 2$ , 则  $AB$  的长为 ( )  
(A)  $2\sqrt{3}$  (B)  $2\sqrt{5}$  (C)  $2\sqrt{7}$  (D)  $4\sqrt{2}$
- 若数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 首项  $a_1 > 0$ ,  $a_{2003} + a_{2004} > 0$ ,  $a_{2003} \cdot a_{2004} < 0$ , 则使前  $n$  项和  $S_n > 0$  成立的最大自然数  $n$  是 ( )  
(A)  $4005$  (B)  $4006$  (C)  $4007$  (D)  $4008$
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在双曲线的右支上, 且  $|PF_1| = 4|PF_2|$ , 则此双曲线的离心率  $e$  的最大值为 ( )  
(A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{5}{3}$  (C)  $2$  (D)  $\frac{7}{3}$
- 某校高三年级举行一次演讲赛共有 10 位同学参赛, 其中一班有 3 位, 二班有 2 位, 其它班有 5 位, 若采用抽签的方式确定他们的演讲顺序, 则一班有 3 位同学恰好被排在一起 (指演讲序号相连), 而二班的 2 位同学没有被排在一起的概率为 ( )

- (A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{1}{20}$  (C)  $\frac{1}{40}$  (D)  $\frac{1}{120}$

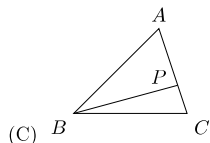
- 若三棱锥  $A-BCD$  的侧面  $ABC$  内一动点  $P$  到底面  $BCD$  的距离与到棱  $AB$  的距离相等, 则动点  $P$  的轨迹与  $\triangle ABC$  组成图形可能是 ( )



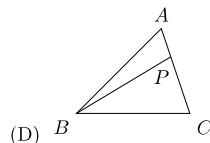
(A)



(B)



(C)



(D)

## 二、填空题

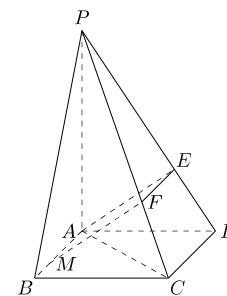
- 若在  $(1+ax)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数为  $-80$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 曲线  $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$  与  $y = \frac{1}{4}x^3 - 2$  在交点处切线的夹角是\_\_\_\_\_. (用弧度数作答)
- 如图  $P_1$  是一块半径为 1 的半圆形纸板, 在  $P_1$  的左下端剪去一个半径为  $\frac{1}{2}$  的半圆后得到图形  $P_2$ , 然后依次剪去一个更小半圆 (其直径为前一个被剪掉半圆的半径) 得圆形  $P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$ , 记纸板  $P_n$  的面积为  $S_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ \_\_\_\_\_.
- 对任意实数  $k$ , 直线  $y = kx + b$  与椭圆  $\begin{cases} x = \sqrt{3} + 2\cos\theta, \\ y = 1 + 4\sin\theta, \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$  恰有一个公共点, 则  $b$  取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 求函数  $y = \sin^4 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^4 x$  的取小正周期和取小值; 并写出该函数在  $[0, \pi]$  上的单调递增区间.

- 设一汽车在前进途中要经过 4 个路口, 汽车在每个路口遇到绿灯的概率为  $\frac{3}{4}$ , 遇到红灯 (禁止通行) 的概率为  $\frac{1}{4}$ . 假定汽车只在遇到红灯或到达目的地才停止前进,  $\xi$  表示停车时已经通过的路口数, 求:  
(1)  $\xi$  的概率的分布列及期望  $E\xi$ ;  
(2) 停车时最多已通过 3 个路口的概率.

- 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是正方形,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AE \perp PD$ ,  $EF \parallel CD$ ,  $AM = EF$ .  
(1) 证明:  $MF$  是异面直线  $AB$  与  $PC$  的公垂线;  
(2) 若  $PA = 3AB$ , 求直线  $AC$  与平面  $EAM$  所成角的正弦值.



20. 设函数  $f(x) = x(x-1)(x-a)$  ( $a > 1$ ).

(1) 求导数  $f'(x)$ , 并证明  $f(x)$  有两个不同的极值点  $x_1, x_2$ ;

(2) 若不等式  $f(x_1) + f(x_2) \leq 0$  成立, 求  $a$  的取值范围.

21. 设  $p > 0$  是一常数, 过点  $Q(2p, 0)$  的直线与抛物线  $y^2 = 2px$  交于相异两点  $A, B$ , 以线段  $AB$  为直径作圆  $H$  ( $H$  为圆心). 试证抛物线顶点在圆  $H$  的圆周上; 并求圆  $H$  的面积最小时直线  $AB$  的方程.

22. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

(1) 证明  $a_n > \sqrt{2n+1}$  对一切正整数  $n$  成立;

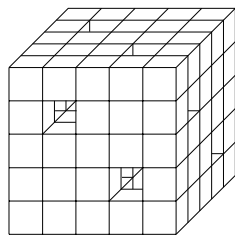
(2) 令  $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 判断  $b_n$  与  $b_{n+1}$  的大小, 并说明理由.

# 2004 普通高等学校招生考试 (重庆卷文)

## 一、选择题

- 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$  的定义域是 ( )  
(A)  $[1, +\infty)$  (B)  $(\frac{2}{3}, +\infty)$  (C)  $[\frac{2}{3}, 1]$  (D)  $(\frac{2}{3}, 1]$
- 函数  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ , 则  $\frac{f(2)}{f(\frac{1}{2})} =$  ( )  
(A) 1 (B) -1 (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $-\frac{3}{5}$
- 圆  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$  的圆心到直线  $x - y = 1$  的距离为 ( )  
(A) 2 (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C) 1 (D)  $\sqrt{2}$
- 不等式  $x + \frac{2}{x+1} > 2$  的解集是 ( )  
(A)  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$  (B)  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$   
(C)  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  (D)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- $\sin 163^\circ \sin 223^\circ + \sin 253^\circ \sin 313^\circ =$  ( )  
(A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 若向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = -72$ , 则向量  $\vec{a}$  的模为 ( )  
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 12
- 已知  $p$  是  $r$  的充分不必要条件,  $s$  是  $r$  的必要条件,  $q$  是  $s$  的必要条件. 那么  $p$  是  $q$  成立的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 不同直线  $m, n$  和不同平面  $\alpha, \beta$ , 给出下列命题:  
①  $\begin{cases} \alpha \parallel \beta, \\ m \subset \alpha, \end{cases} \Rightarrow m \parallel \beta$ ; ②  $\begin{cases} m \parallel n, \\ m \parallel \beta, \end{cases} \Rightarrow n \parallel \beta$ ;  
③  $\begin{cases} m \subset \alpha, \\ n \subset \beta, \end{cases} \Rightarrow m, n \text{ 异面}$ ; ④  $\begin{cases} \alpha \perp \beta, \\ m \parallel \alpha, \end{cases} \Rightarrow m \perp \beta$ .  
其中假命题有 ( )  
(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个
- 若数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 首项  $a_1 > 0$ ,  $a_{2003} + a_{2004} > 0$ ,  $a_{2003} \cdot a_{2004} < 0$ , 则使前  $n$  项和  $S_n > 0$  成立的最大自然数  $n$  是 ( )  
(A) 4005 (B) 4006 (C) 4007 (D) 4008

- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左, 右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在双曲线的右支上, 且  $|PF_1| = 4|PF_2|$ , 则此双曲线的离心率  $e$  的最大值为 ( )  
(A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{5}{3}$  (C) 2 (D)  $\frac{7}{3}$
- 已知盒中装有 3 只螺口与 7 只卡口灯泡, 这些灯泡的外形与功率都相同且灯口向下放着, 现需要一只卡口灯泡使用, 电工师傅每次从中任取一只并不放回, 则他直到第 3 次才取得卡口灯泡的概率为 ( )  
(A)  $\frac{21}{40}$  (B)  $\frac{17}{40}$  (C)  $\frac{3}{10}$  (D)  $\frac{7}{120}$
- 如图, 棱长为 5 的正方体无论从哪一个面看, 都有两个直通的边长为 1 的正方形孔, 则这个有孔正方体的表面积 (含孔内各面) 是 ( )



- (A) 258 (B) 234 (C) 222 (D) 210

## 二、填空题

- 若在  $(1+ax)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数为 -80, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 已知  $\frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 2$  ( $x > 0, y > 0$ ), 则  $xy$  的最小值是\_\_\_\_\_.
- 已知曲线  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ , 则过点  $P(2, 4)$  的切线方程是\_\_\_\_\_.
- 毛泽东在《送瘟神》中写到: “坐地日行八万里”. 又知地球的体积大约是火星的 8 倍, 则火星的大圆周长约\_\_\_\_\_万里.

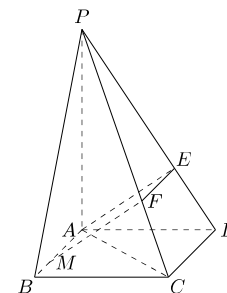
## 三、解答题

- 求函数  $y = \sin^4 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^4 x$  的取小正周期和取小值; 并写出该函数在  $[0, \pi]$  上的单调递增区间.

- 设甲、已、丙三人每次射击命中目标的概率分别为 0.7、0.6 和 0.5.  
(1) 三人各向目标射击一次, 求至少有一人命中目标的概率及恰有两人命中目标的概率;  
(2) 若甲单独向目标射击三次, 求他恰好命中两次的概率.

- 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是正方形,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AE \perp PD$ ,  $EF \parallel CD$ ,  $AM = EF$ .

- (1) 证明:  $MF$  是异面直线  $AB$  与  $PC$  的公垂线;  
(2) 若  $PA = 3AB$ , 求直线  $AC$  与平面  $EAM$  所成角的正弦值.

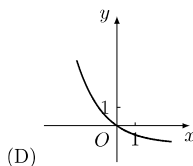
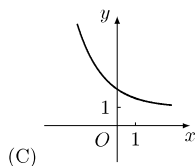
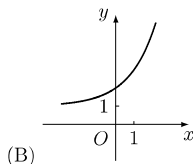
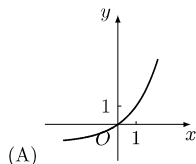


20. 某工厂生产某种产品, 已知该产品的月生产量  $x$  (吨) 与每吨产品的价格  $p$  (元/吨) 之间的关系式为:  $p = 24200 - \frac{1}{5}x^2$ , 且生产  $x$  吨的成本为  $R = 50000 + 200x$  (元). 问该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大? 最大利润是多少? (利润 = 收入 - 成本)
21. 设  $p > 0$  是一常数, 过点  $Q(2p, 0)$  的直线与抛物线  $y^2 = 2px$  交于相异两点  $A, B$ , 以线段  $AB$  为直径作圆  $H$  ( $H$  为圆心). 试证抛物线顶点在圆  $H$  的圆周上; 并求圆  $H$  的面积最小时直线  $AB$  的方程.
22. 设数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 2, a_2 = \frac{5}{3}, a_{n+2} = \frac{5}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
- (1) 令  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 求数列  $\{na_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

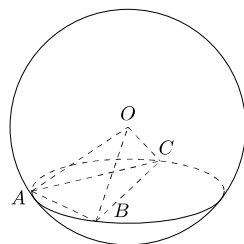
# 2004 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

## 一、选择题

- 复数  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$  的值是 ( )  
(A) -1 (B) 1 (C) -32 (D) 32
- $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$  的值是 ( )  
(A) 2 (B)  $2 + \sqrt{3}$  (C) 4 (D)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- 命题  $p$ : 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $|a| + |b| > 1$  是  $|a + b| > 1$  的充要条件. 命题  $q$ : 函数  $y = \sqrt{|x-1|-2}$  的定义域是  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ . 则 ( )  
(A) “ $p$  或  $q$ ”为假 (B) “ $p$  且  $q$ ”为真 (C)  $p$  真  $q$  假 (D)  $p$  假  $q$  真
- 已知  $F_1, F_2$  是椭圆的两个焦点, 过  $F_1$  且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于  $A, B$  两点, 若  $\triangle ABF_2$  是正三角形, 则这个椭圆的离心率是 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 已知  $m, n$  是不重合的直线,  $\alpha, \beta$  是不重合的平面, 有下列命题:  
① 若  $m \subset \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$ ;  
② 若  $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;  
③ 若  $\alpha \cap \beta = n, m \parallel n$ , 则  $m \parallel \alpha$  且  $m \parallel \beta$ ;  
④ 若  $m \perp \alpha, m \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ .  
其中真命题的个数是 ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 某校高二年级共有六个班级, 现从外地转入 4 名学生, 要安排到该年级的两个班级且每班安排 2 名, 则不同的安排方案种数为 ( )  
(A)  $A_6^2 C_4^2$  (B)  $\frac{1}{2} A_6^2 C_4^2$  (C)  $A_6^2 A_4^2$  (D)  $2A_6^2$
- 已知函数  $y = \log_2 x$  的反函数是  $y = f^{-1}(x)$ , 则函数  $y = f^{-1}(1-x)$  的图象是 ( )

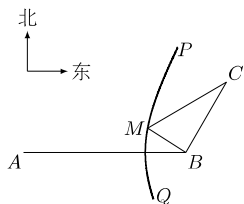


- 已知  $a, b$  是非零向量且满足  $(a - 2b) \perp a, (b - 2a) \perp b$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{2\pi}{3}$  (D)  $\frac{5\pi}{6}$
- 若  $(1 - 2x)^9$  展开式的第 3 项为 288, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n}\right)$  的值是 ( )  
(A) 2 (B) 1 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{2}{5}$
- 如图,  $A, B, C$  是表面积为  $48\pi$  的球面上三点,  $AB = 2, BC = 4, \angle ABC = 60^\circ$ ,  $O$  为球心, 则直线  $OA$  与截面  $ABC$  所成的角是 ( )



- (A)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$  (B)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$  (C)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$

- 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(x+2)$ , 当  $x \in [3, 5]$  时,  $f(x) = 2 - |x-4|$ , 则 ( )  
(A)  $f\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) < f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$  (B)  $f(\sin 1) > f(\cos 1)$   
(C)  $f\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) < f\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$  (D)  $f(\cos 2) > f(\sin 2)$
- 如图,  $B$  地在  $A$  地的正东方向 4 km 处,  $C$  地在  $B$  地的北偏东  $30^\circ$  方向 2 km 处, 河流的没岸  $PQ$  (曲线) 上任意一点到  $A$  的距离比到  $B$  的距离远 2 km. 现要在曲线  $PQ$  上选一处  $M$  建一座码头, 向  $B, C$  两地转运货物. 经测算, 从  $M$  到  $B, C$  两地修建公路的费用分别是  $a$  万元/km,  $2a$  万元/km, 那么修建这两条公路的总费用最低是 ( )



- (A)  $(2\sqrt{7} - 2)a$  万元 (B)  $5a$  万元  
(C)  $(2\sqrt{7} + 1)a$  万元 (D)  $(2\sqrt{7} + 3)a$  万元

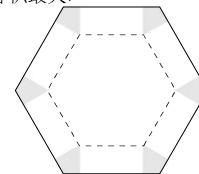
## 二、填空题

- 直线  $x + 2y = 0$  被曲线  $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$  所截得的弦长等于\_\_\_\_\_.

- 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

- 某射手射击 1 次, 击中目标的概率是 0.9. 他连续射击 4 次, 且各次射击是否击中目标相互之间没有影响. 有下列结论:  
① 他第 3 次击中目标的概率是 0.9;  
② 他恰好击中目标 3 次的概率是  $0.9^3 \times 0.1$ ;  
③ 他至少击中目标 1 次的概率是  $1 - 0.1^4$ .  
其中正确结论的序号是\_\_\_\_\_. (写出所有正确结论的序号)

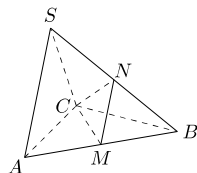
- 如图, 将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形, 再沿虚线折起, 做成一个无盖的正六棱柱容器. 当这个正六棱柱容器的底面边长为\_\_\_\_\_时, 其容积最大.



## 三、解答题

- 设函数  $f(x) = a \cdot b$ , 其中向量  $a = (2 \cos x, 1)$ ,  $b = (\cos x, \sqrt{3} \sin 2x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .  
(1) 若  $f(x) = 1 - \sqrt{3}$  且  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ , 求  $x$ ;  
(2) 若函数  $y = 2 \sin 2x$  的图象按向量  $c = (m, n)$  ( $|m| < \frac{\pi}{2}$ ) 平移后得到函数  $y = f(x)$  的图象, 求实数  $m, n$  的值.
- 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的 10 道试题中, 甲能答对其中的 6 题, 乙能答对其中的 8 题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试, 至少答对 2 题才算合格.  
(1) 求甲答对试题数  $\xi$  的概率分布及数学期望;  
(2) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

19. 在三棱锥  $S-ABC$  中,  $\triangle ABC$  是边长为 4 的正三角形, 平面  $SAC \perp$  平面  $ABC$ ,  $SA=SC=2\sqrt{3}$ ,  $M$ 、 $N$  分别为  $AB$ 、 $SB$  的中点.
- (1) 证明:  $AC \perp SB$ ;
  - (2) 求二面角  $N-CM-B$  的大小;
  - (3) 求点  $B$  到平面  $CMN$  的距离.



20. 某企业 2003 年的纯利润为 500 万元, 因设备老化等原因, 企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造, 预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元, 今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造, 预测在未扣除技术改造资金的情况下, 第  $n$  年 (今年为第一年) 的利润为  $500\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$  万元 ( $n$  为正整数).
- (1) 设从今年起的前  $n$  年, 若该企业不进行技术改造的累计纯利润为  $A_n$  万元, 进行技术改造后的累计纯利润为  $B_n$  万元 (须扣除技术改造资金), 求  $A_n$ 、 $B_n$  的表达式;
  - (2) 依上述预测, 从今年起该企业至少经过多少年, 进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

21. 已知  $f(x) = \frac{2x-a}{x^2+2}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 在区间  $[-1, 1]$  上是增函数.
- (1) 求实数  $a$  的值组成的集合  $A$ ;
  - (2) 设关于  $x$  的方程  $f(x) = \frac{1}{x}$  的两个非零实根为  $x_1$ 、 $x_2$ . 试问: 是否存在实数  $m$ , 使得不等式  $m^2 + tm + 1 \geq |x_1 - x_2|$  对任意  $a \in A$  及  $t \in [-1, 1]$  恒成立? 若存在, 求  $m$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

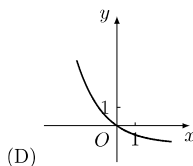
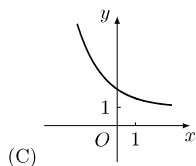
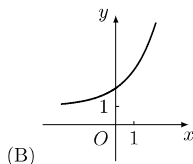
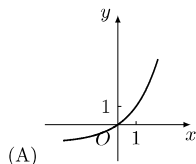
22. 如图,  $P$  是抛物线  $C: y = \frac{1}{2}x^2$  上一点, 直线  $l$  过点  $P$  且与抛物线  $C$  交于另一点  $Q$ .
- (1) 若直线  $l$  与过点  $P$  的切线垂直, 求线段  $PQ$  中点  $M$  的轨迹方程;
  - (2) 若直线  $l$  不过原点且与  $x$  轴交于点  $S$ , 与  $y$  轴交于点  $T$ , 试求  $\frac{|ST|}{|SP|} + \frac{|ST|}{|SQ|}$  的取值范围.



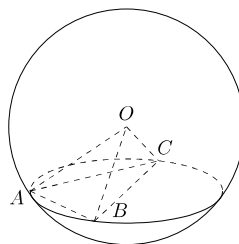
# 2004 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

## 一、选择题

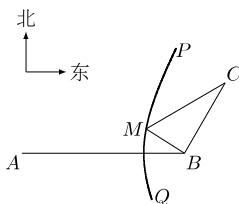
1. 设集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 5\}$ , 则  $\complement_U(A \cap B)$  等于 ( )  
(A)  $\{1, 2, 4\}$  (B)  $\{4\}$  (C)  $\{3, 5\}$  (D)  $\emptyset$
2.  $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$  的值是 ( )  
(A) 2 (B)  $2 + \sqrt{3}$  (C) 4 (D)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
3. 命题  $p$ : 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $|a| + |b| > 1$  是  $|a + b| > 1$  的充要条件. 命题  $q$ : 函数  $y = \sqrt{|x-1|} - 2$  的定义域是  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ . 则 ( )  
(A) “ $p$  或  $q$ ”为假 (B) “ $p$  且  $q$ ”为真 (C)  $p$  真  $q$  假 (D)  $p$  假  $q$  真
4. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆的两个焦点, 过  $F_1$  且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于  $A, B$  两点, 若  $\triangle ABF_2$  是正三角形, 则这个椭圆的离心率是 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$ , 则  $\frac{S_9}{S_5} =$  ( )  
(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D)  $\frac{1}{2}$
6. 已知  $m, n$  是不重合的直线,  $\alpha, \beta$  是不重合的平面, 有下列命题:  
① 若  $m \subset \alpha, n \not\subset \alpha$ , 则  $m \parallel n$ ;  
② 若  $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;  
③ 若  $\alpha \cap \beta = n, m \parallel n$ , 则  $m \parallel \alpha$  且  $m \parallel \beta$ ;  
④ 若  $m \perp \alpha, m \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ .  
其中真命题的个数是 ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
7. 已知函数  $y = \log_2 x$  的反函数是  $y = f^{-1}(x)$ , 则函数  $y = f^{-1}(1-x)$  的图象是 ( )



8. 已知  $a, b$  是非零向量且满足  $(a - 2b) \perp a, (b - 2a) \perp b$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{2\pi}{3}$  (D)  $\frac{5\pi}{6}$
9. 已知  $\left(x - \frac{a}{x}\right)^8$  展开式中常数项为 1120, 其中实数  $a$  是常数, 则展开式中各项系数的和是 ( )  
(A)  $2^8$  (B)  $3^8$  (C) 1 或  $3^8$  (D) 1 或  $2^8$
10. 如图,  $A, B, C$  是表面积为  $48\pi$  的球面上三点,  $AB = 2, BC = 4, \angle ABC = 60^\circ$ ,  $O$  为球心, 则直线  $OA$  与截面  $ABC$  所成的角是 ( )



- (A)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$  (B)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$  (C)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$
11. 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(x+2)$ , 当  $x \in [3, 4]$  时,  $f(x) = x - 2$ , 则 ( )  
(A)  $f\left(\sin \frac{1}{2}\right) < f\left(\cos \frac{1}{2}\right)$  (B)  $f\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) > f\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$   
(C)  $f(\sin 1) < f(\cos 1)$  (D)  $f\left(\sin \frac{3}{2}\right) > f\left(\cos \frac{3}{2}\right)$
12. 如图,  $B$  地在  $A$  地的正东方向 4 km 处,  $C$  地在  $B$  地的北偏东  $30^\circ$  方向 2 km 处, 河流的没岸  $PQ$  (曲线) 上任意一点到  $A$  的距离比到  $B$  的距离远 2 km. 现要在曲线  $PQ$  上选一处  $M$  建一座码头, 向  $B, C$  两地转运货物. 经测算, 从  $M$  到  $B, C$  两地修建公路的费用分别是  $a$  万元/km、 $2a$  万元/km, 那么修建这两条公路的总费用最低是 ( )



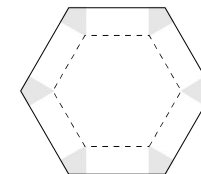
- (A)  $(\sqrt{7} + 1)a$  万元 (B)  $(2\sqrt{7} - 2)a$  万元  
(C)  $2\sqrt{7}a$  万元 (D)  $(\sqrt{7} - 1)a$  万元

## 二、填空题

13. 直线  $x + 2y = 0$  被曲线  $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$  所截得的弦长等于\_\_\_\_\_.

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1, & (x \geq 0), \\ \frac{1}{x}, & (x < 0). \end{cases}$  若  $f(a) > a$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 一个总体中有 100 个个体, 随机编号 0, 1, 2,  $\dots$ , 99, 依编号顺序平均分成 10 个小组, 组号依次为 1, 2, 3,  $\dots$ , 10. 现用系统抽样方法抽取一个容量为 10 的样本, 规定如果在第 1 组随机抽取的号码为  $m$ , 那么在第  $k$  组中抽取的号码个位数字与  $m + k$  的个位数字相同, 若  $m = 6$ , 则在第 7 组中抽取的号码是\_\_\_\_\_.
16. 如图, 将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形, 再沿虚线折起, 做成一个无盖的正六棱柱容器. 当这个正六棱柱容器的底面边长为\_\_\_\_\_时, 其容积最大.

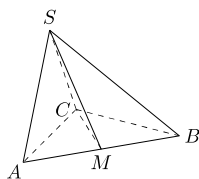


## 三、解答题

17. 设函数  $f(x) = a \cdot b$ , 其中向量  $a = (2 \cos x, 1)$ ,  $b = (\cos x, \sqrt{3} \sin 2x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .  
(1) 若  $f(x) = 1 - \sqrt{3}$  且  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ , 求  $x$ ;  
(2) 若函数  $y = 2 \sin 2x$  的图象按向量  $c = (m, n)$  ( $|m| < \frac{\pi}{2}$ ) 平移后得到函数  $y = f(x)$  的图象, 求实数  $m, n$  的值.

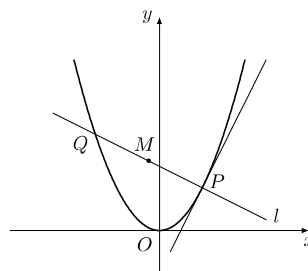
18. 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的 10 道试题中, 甲能答对其中的 6 题, 乙能答对其中的 8 题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试, 至少答对 2 题才算合格.
- (1) 分别求甲、乙两人考试合格的概率;
  - (2) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

19. 在三棱锥  $S-ABC$  中,  $\triangle ABC$  是边长为 4 的正三角形, 平面  $SAC \perp$  平面  $ABC$ ,  $SA = SC = 2\sqrt{2}$ ,  $M$  为  $AB$  的中点.
- (1) 证明:  $AC \perp SB$ ;
  - (2) 求二面角  $S-CM-B$  的大小;
  - (3) 求点  $B$  到平面  $SCM$  的距离.



20. 某企业 2003 年的纯利润为 500 万元, 因设备老化等原因, 企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造, 预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元, 今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造, 预测在未扣除技术改造资金的情况下, 第  $n$  年 (今年为第一年) 的利润为  $500\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$  万元 ( $n$  为正整数).
- (1) 设从今年起的前  $n$  年, 若该企业不进行技术改造的累计纯利润为  $A_n$  万元, 进行技术改造后的累计纯利润为  $B_n$  万元 (须扣除技术改造资金), 求  $A_n$ 、 $B_n$  的表达式;
  - (2) 依上述预测, 从今年起该企业至少经过多少年, 进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

21. 如图,  $P$  是抛物线  $C: y = \frac{1}{2}x^2$  上一点, 直线  $l$  过点  $P$  并与抛物线  $C$  在点  $P$  的切线垂直,  $l$  与抛物线  $C$  相交于另一点  $Q$ .
- (1) 当点  $P$  的横坐标为 2 时, 求直线  $l$  的方程;
  - (2) 当点  $P$  在抛物线  $C$  上移动时, 求线段  $PQ$  中点  $M$  的轨迹方程, 并求点  $M$  到  $x$  轴的最短距离.



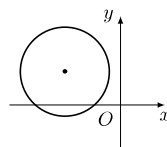
22. 已知  $f(x) = 4x + ax^2 - \frac{2}{3}x^3$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 在区间  $[-1, 1]$  上是增函数.
- (1) 求实数  $a$  的值组成的集合  $A$ ;
  - (2) 设关于  $x$  的方程  $f(x) = 2x + \frac{1}{3}x^3$  的两个非零实根为  $x_1$ 、 $x_2$ . 试问: 是否存在实数  $m$ , 使得不等式  $m^2 + tm + 1 \geq |x_1 - x_2|$  对任意  $a \in A$  及  $t \in [-1, 1]$  恒成立? 若存在, 求  $m$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

# 2004 普通高等学校招生考试 (广东卷)

## 一、选择题

- 已知平面向量  $\vec{a} = (3, 1)$ ,  $\vec{b} = (x, -3)$ , 且  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $x =$  ( )  
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3
- 已知  $A = \{x \mid |2x + 1| > 3\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + x \leq 6\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $[-3, -2] \cup (1, 2]$  (B)  $[-3, -2) \cup (1, +\infty)$   
(C)  $(-3, -2] \cup [1, 2)$  (D)  $(-\infty, -3] \cup (1, 2]$
- 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+2}{x^2-4} - \frac{2}{x-2}, & x > 2, \\ a, & x \leq 2, \end{cases}$  在  $x = 2$  处连续, 则  $a =$  ( )  
(A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+1} - \cdots + \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n}{n+1} \right)$  的值为 ( )  
(A) -1 (B) 0 (C)  $\frac{1}{2}$  (D) 1
- 函数  $f(x) = \sin^2 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$  是 ( )  
(A) 周期为  $\pi$  的偶函数 (B) 周期为  $\pi$  的奇函数  
(C) 周期为  $2\pi$  的偶函数 (D) 周期为  $2\pi$  的奇函数
- 一台  $X$  型号自动机床在一小时内不需要工人照看的概率为 0.8000, 有四台这种型号的自动机床各自独立工作, 则在一小时内至多 2 台机床需要工人照看的概率是 ( )  
(A) 0.1536 (B) 0.1808 (C) 0.5632 (D) 0.9728
- 在棱长为 1 的正方体上, 分别用过共顶点的三条棱中点的平面截该正方体, 则截去 8 个三棱锥后, 剩下的凸多面体的体积是 ( )  
(A)  $\frac{2}{3}$  (B)  $\frac{7}{6}$  (C)  $\frac{4}{5}$  (D)  $\frac{5}{6}$
- 若双曲线  $2x^2 - y^2 = k$  ( $k > 0$ ) 的焦点到它相对应的准线的距离是 2, 则  $k =$  ( )  
(A) 6 (B) 8 (C) 1 (D) 4
- 当  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  时, 函数  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x - \sin^2 x}$  的最小值是 ( )  
(A) 4 (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 2 (D)  $\frac{1}{4}$
- 变量  $x, y$  满足下列条件:  $\begin{cases} 2x + y \geq 12, \\ 2x + 9y \geq 36, \\ 2x + 3y = 24, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$  则使  $z = 3x + 2y$  的值最小的  $(x, y)$  是 ( )  
(A) (4.5, 3) (B) (3, 6) (C) (9, 2) (D) (6, 4)

- 若  $f(x) = \tan \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ , 则 ( )  
(A)  $f(-1) > f(0) > f(1)$  (B)  $f(0) > f(1) > f(-1)$   
(C)  $f(1) > f(0) > f(-1)$  (D)  $f(0) > f(-1) > f(1)$
- 如图, 定圆半径为  $a$ , 圆心为  $(b, c)$ , 则直线  $ax + by + c = 0$  与直线  $x - y + 1 = 0$  的交点在 ( )



- (A) 第四象限 (B) 第三象限 (C) 第二象限 (D) 第一象限

## 二、填空题

- 某班委会由 4 名男生与 3 名女生组成, 现从中选出 2 人担任正副班长, 其中至少有 1 名女生当选的概率是\_\_\_\_\_. (用分数作答)
- 已知复数  $z$  与  $(z + 2)^2 - 8i$  均是纯虚数, 则  $z =$ \_\_\_\_\_.
- 由图 (1) 有面积关系:  $\frac{S_{\triangle PA'B'}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{PA' \cdot PB'}{PA \cdot PB}$ , 则由图 (2) 有体积关系:  $\frac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}} =$ \_\_\_\_\_.

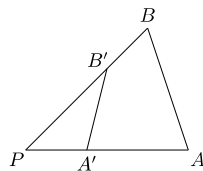


图 (1)

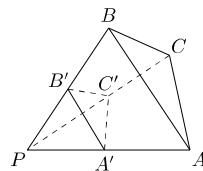


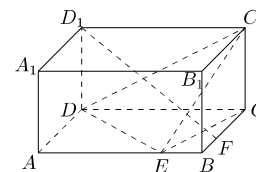
图 (2)

- 函数  $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - 1)$  ( $x > 0$ ) 的反函数  $f^{-1}(x) =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  成公比为 2 的等比数列 ( $\alpha \in [0, 2\pi]$ ), 且  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  也成等比数列. 求  $\alpha, \beta, \gamma$  的值.

- 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 2$ .  $E, F$  分别是线段  $AB, BC$  上的点, 且  $EB = FB = 1$ .  
(1) 求二面角  $C - DE - C_1$  的正切值;  
(2) 求直线  $EC_1$  与  $FD_1$  所成的余弦值.



- 设函数  $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$  ( $x > 0$ ).  
(1) 证明: 当  $0 < a < b$ , 且  $f(a) = f(b)$  时,  $ab > 1$ ;  
(2) 点  $P(x_0, y_0)$  ( $0 < x_0 < 1$ ) 在曲线  $y = f(x)$  上, 求曲线在点  $P$  处的切线与  $x$  轴和  $y$  轴的正向所围成的三角形面积表达式 (用  $x_0$  表达).

20. 某中心接到其正东、正西、正北方向三个观测点的报告: 正西、正北两个观测点同时听到了一声巨响, 正东观测点听到的时间比其他两观测点晚 4 s. 已知各观测点到该中心的距离都是 1020 m. 试确定该巨响发生的位置. (假定当时声音传播的速度为 340 m/s, 相关各点均在同一平面上)
21. 设函数  $f(x) = x - \ln(x+m)$ , 其中常数  $m$  为整数.
- (1) 当  $m$  为何值时,  $f(x) \geq 0$ ;
- (2) 定理: 若函数  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $g(a)$  与  $g(b)$  异号, 则至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$ , 使  $g(x_0) = 0$ . 试用上述定理证明: 当整数  $m > 1$  时, 方程  $f(x) = 0$  在  $[e^{-m} - m, e^{2m} - m]$  内有两个实根.
22. 设直线  $l$  与椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  相交于  $A, B$  两点,  $l$  又与双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  相交于  $C, D$  两点,  $C, D$  三等分线段  $AB$ . 求直线  $l$  的方程.

# 2004 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

## 一、选择题

- 与直线  $2x - y + 4 = 0$  平行的抛物线  $y = x^2$  的切线方程是 ( )  
(A)  $2x - y + 3 = 0$  (B)  $2x - y - 3 = 0$   
(C)  $2x - y + 1 = 0$  (D)  $2x - y - 1 = 0$
- 复数  $\frac{(-1 + \sqrt{3}i)^5}{1 + \sqrt{3}i}$  的值是 ( )  
(A)  $-16$  (B)  $16$  (C)  $-\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$
- 已知  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ , 则  $f(x)$  的解析式可取为 ( )  
(A)  $\frac{x}{1+x^2}$  (B)  $-\frac{2x}{1+x^2}$  (C)  $\frac{2x}{1+x^2}$  (D)  $-\frac{x}{1+x^2}$
- 已知  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为非零的平面向量. 甲:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ; 乙:  $\vec{b} = \vec{c}$ , 则 ( )  
(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件  
(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件  
(C) 甲是乙的充要条件  
(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
- 若  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ , 则下列不等式①  $a + b < ab$ ; ②  $|a| > |b|$ ; ③  $a < b$ ; ④  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$  中, 正确的不等式有 ( )  
(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个
- 已知椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在椭圆上, 若  $P, F_1, F_2$  是一个直角三角形的三个顶点, 则点  $P$  到  $x$  轴的距离为 ( )  
(A)  $\frac{9}{5}$  (B)  $3$  (C)  $\frac{9\sqrt{7}}{7}$  (D)  $\frac{9}{4}$
- 函数  $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$  在  $[0, 1]$  上的最大值与最小值之和为  $a$ , 则  $a$  的值为 ( )  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $2$  (D)  $4$
- 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = a\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] - b\left[2 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $a, b$  是非零常数. 则存在数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  使得 ( )  
(A)  $a_n = x_n + y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  为等差数列,  $\{y_n\}$  为等比数列  
(B)  $a_n = x_n + y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都为等差数列  
(C)  $a_n = x_n \cdot y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  为等差数列,  $\{y_n\}$  为等比数列  
(D)  $a_n = x_n \cdot y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都为等比数列

- 函数  $f(x) = ax^3 + x + 1$  有极值的充要条件是 ( )  
(A)  $a > 0$  (B)  $a \geq 0$  (C)  $a < 0$  (D)  $a \leq 0$

- 设集合  $P = \{m \mid -1 < m < 0\}$ ,  $Q = \{m \in \mathbf{R} \mid mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$ , 则下列关系中成立的是 ( )

- (A)  $P \subsetneq Q$  (B)  $Q \subsetneq P$  (C)  $P = Q$  (D)  $P \cap Q = \emptyset$

- 已知平面  $\alpha$  与  $\beta$  所成的二面角为  $80^\circ$ ,  $P$  为  $\alpha, \beta$  外一定点, 过点  $P$  的一条直线与  $\alpha, \beta$  所成的角都是  $30^\circ$ , 则这样的直线有且仅有 ( )

- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

- 设  $y = f(t)$  是某港口水的深度  $y$  (米) 关于时间  $t$  (时) 的函数, 其中  $0 \leq t \leq 24$ , 下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间  $t$  与水深  $y$  的关系:

$t$	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$y$	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经长期观察, 函数  $y = f(t)$  的图象可以近似地看成函数  $y = k + A \sin(\omega t + \varphi)$  的图象. 下面的函数中, 最能近似表示表中数据间对应关系的函数是 ( )

- (A)  $y = 12 + 3 \sin \frac{\pi}{6} t, t \in [0, 24]$   
(B)  $y = 12 + 3 \sin \left(\frac{\pi}{6} t + \pi\right), t \in [0, 24]$   
(C)  $y = 12 + 3 \sin \frac{\pi}{12} t, t \in [0, 24]$   
(D)  $y = 12 + 3 \sin \left(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{2}\right), t \in [0, 24]$

## 二、填空题

- 设随机变量  $\xi$  的概率分布为  $P(\xi = k) = \frac{a}{5^k}$ ,  $a$  为常数,  $k = 1, 2, \dots$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 将标号为  $1, 2, \dots, 10$  的 10 个球放入标号为  $1, 2, \dots, 10$  的 10 个盒子内, 每个盒内放一个球, 则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入方法共有\_\_\_\_\_种. (以数字作答)
- 设  $A, B$  为两个集合. 下列四个命题:  
①  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$  对任意  $x \in A$ , 有  $x \notin B$ ;  
②  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ ;  
③  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$ ;  
④  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$  存在  $x \in A$ , 使得  $x \notin B$ .  
其中真命题的序号是\_\_\_\_\_. (把符合要求的命题序号都填上)

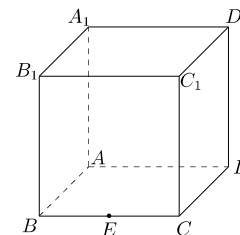
- 某日中午 12 时整, 甲船自  $A$  处以  $16 \text{ km/h}$  的速度向正东行驶, 乙船自  $A$  的正北  $18 \text{ km}$  处以  $24 \text{ km/h}$  的速度向正南行驶, 则当日 12 时 30 分时两船之距离对时间的变化率是\_\_\_\_\_  $\text{km/h}$ .

## 三、解答题

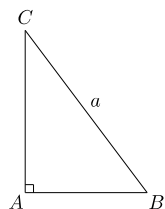
- 已知  $6 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 0$ ,  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , 求  $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  的值.

- 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $E$  是棱  $BC$  的中点, 点  $F$  是棱  $CD$  上的动点.

- 试确定点  $F$  的位置, 使得  $D_1E \perp$  平面  $AB_1F$ ;
- 当  $D_1E \perp$  平面  $AB_1F$  时, 求二面角  $C_1 - EF - A$  的大小. (结果用反三角函数值表示)



19. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 已知  $BC = a$ , 若长为  $2a$  的线段  $PQ$  以点  $A$  为中点, 问  $\overrightarrow{PQ}$  与  $\overrightarrow{BC}$  的夹角  $\theta$  取何值时  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$  的值最大? 并求出这个最大值.



21. 某突发事件, 在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3; 一旦发生, 将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用. 单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元, 采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率分别是 0.9 和 0.85. 若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用, 请确定预防方案使总费用最少.

注: 总费用 = 采取预防措施的费用 + 发生突发事件损失的期望值.

22. 已知  $a > 0$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .
- (1) 已知数列  $\{a_n\}$  极限存在且大于零, 求  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (将  $A$  用  $a$  表示);
  - (2) 设  $b_n = a_n - A$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 证明:  $b_{n+1} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$ ;
  - (3) 若  $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$  对  $n = 1, 2, \dots$  都成立, 求  $a$  的取值范围.

20. 直线  $l: y = kx + 1$  与双曲线  $C: 2x^2 - y^2 = 1$  的右支交于不同的两点  $A$ 、 $B$ .

- (1) 求实数  $k$  的取值范围;
- (2) 是否存在实数  $k$ , 使得以线段  $AB$  为直径的圆经过双曲线  $C$  的右焦点  $F$ ? 若存在, 求出  $k$  的值. 若不存在, 说明理由.

# 2004 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

## 一、选择题

- 设  $A = \{x \mid x = \sqrt{5k+1}, k \in \mathbf{N}\}$ ,  $B = \{x \mid x \leq 6, x \in \mathbf{Q}\}$ , 则  $A \cap B$  等于 ( )  
(A)  $\{1, 4\}$  (B)  $\{1, 6\}$  (C)  $\{4, 6\}$  (D)  $\{1, 4, 6\}$
- 已知点  $M_1(6, 2)$  和  $M_2(1, 7)$ . 直线  $y = mx - 7$  与线段  $M_1M_2$  的交点  $M$  分有向线段  $M_1M_2$  的比为  $3:2$ , 则  $m$  的值为 ( )  
(A)  $-\frac{3}{2}$  (B)  $-\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $4$
- 已知函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处的导数为 3, 则  $f(x)$  的解析式可能为 ( )  
(A)  $f(x) = (x-1)^2 + 3(x-1)$  (B)  $f(x) = 2(x-1)$   
(C)  $f(x) = 2(x-1)^2$  (D)  $f(x) = x-1$
- 两个圆  $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$  与  $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$  的公切线有且仅有 ( )  
(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条
- 若函数  $f(x) = a^x + b - 1$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图象经过第二、三、四象限, 则一定有 ( )  
(A)  $0 < a < 1$ , 且  $b > 0$  (B)  $a > 1$ , 且  $b > 0$   
(C)  $0 < a < 1$ , 且  $b < 0$  (D)  $a > 1$ , 且  $b < 0$
- 四面体  $ABCD$  四个面的重心分别为  $E, F, G, H$ , 则四面体  $EFGH$  的表面积与四面体  $ABCD$  的表面积的值是 ( )  
(A)  $\frac{1}{27}$  (B)  $\frac{1}{16}$  (C)  $\frac{1}{9}$  (D)  $\frac{1}{8}$
- 已知  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为非零的平面向量. 甲:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ , 乙:  $\vec{b} = \vec{c}$ , 则 ( )  
(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件  
(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件  
(C) 甲是乙的充要条件  
(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
- 已知  $x \geq \frac{5}{2}$ , 则  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}$  有 ( )  
(A) 最大值  $\frac{5}{4}$  (B) 最小值  $\frac{5}{4}$  (C) 最大值 1 (D) 最小值 1
- 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = a \left[ 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] - b \left[ 2 - (n+1) \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $a, b$  是非零常数. 则存在数列  $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$  使得 ( )  
(A)  $a_n = x_n + y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  为等差数列,  $\{y_n\}$  为等比数列  
(B)  $a_n = x_n + y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都为等差数列  
(C)  $a_n = x_n \cdot y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  为等差数列,  $\{y_n\}$  为等比数列  
(D)  $a_n = x_n \cdot y_n$ , 其中  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都为等比数列

- 若  $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , 则下列结论中不正确的是 ( )  
(A)  $\log_a b > \log_b a$   
(B)  $|\log_a b + \log_b a| > 2$   
(C)  $(\log_b a)^2 < 1$   
(D)  $|\log_a b| + |\log_b a| > |\log_a b + \log_b a|$

- 将标号为 1, 2,  $\dots$ , 10 的 10 个球放入标号为 1, 2,  $\dots$ , 10 的 10 个盒子里, 每个盒内放一个球, 恰好 3 个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为 ( )  
(A) 120 (B) 240 (C) 360 (D) 720
- 设  $y = f(t)$  是某港口水的深度  $y$  (米) 关于时间  $t$  (时) 的函数, 其中  $0 \leq t \leq 24$ , 下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间  $t$  与水深  $y$  的关系:

$t$	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$y$	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经长期观察, 函数  $y = f(t)$  的图象可以近似地看成函数  $y = k + A \sin(\omega t + \varphi)$  的图象. 下面的函数中, 最能近似表示表中数据间对应关系的函数是 ( )

- $y = 12 + 3 \sin \frac{\pi}{6} t, t \in [0, 24]$
- $y = 12 + 3 \sin \left( \frac{\pi}{6} t + \pi \right), t \in [0, 24]$
- $y = 12 + 3 \sin \frac{\pi}{12} t, t \in [0, 24]$
- $y = 12 + 3 \sin \left( \frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{2} \right), t \in [0, 24]$

## 二、填空题

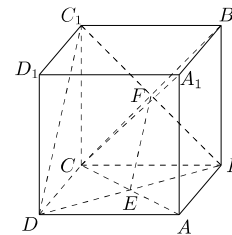
- $\tan 2010^\circ$  的值为\_\_\_\_\_.
- 已知  $\left( x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right)^n$  的展开式中各项系数的和是 128, 则展开式中  $x^5$  的系数是\_\_\_\_\_. (以数字作答)
- 某校有老师 200 人, 男学生 1200 人, 女学生 1000 人. 现用分层抽样的方法从所有师生中抽取一个容量为  $n$  的样本; 已知从女学生中抽取的人数为 80 人, 则  $n =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $A, B$  为两个集合. 下列四个命题:  
①  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$  对任意  $x \in A$ , 有  $x \notin B$ ;  
②  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ ;  
③  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$ ;  
④  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$  存在  $x \in A$ , 使得  $x \notin B$ .  
其中真命题的序号是\_\_\_\_\_. (把符合要求的命题序号都填上)

## 三、解答题

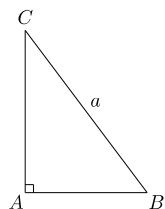
- 已知  $6 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 0, \alpha \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ , 求  $\sin \left( 2\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$  的值. ( )

- 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AC$  与  $BD$  交于点  $E$ ,  $C_1B$  与  $CB_1$  交于点  $F$ .

- 求证:  $A_1C \perp$  平面  $BDC_1$ ;
- 求二面角  $B - EF - C$  的大小. (结果用反三角函数值表示)



19. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 已知  $BC = a$ , 若长为  $2a$  的线段  $PQ$  以点  $A$  为中点, 问  $\overrightarrow{PQ}$  与  $\overrightarrow{BC}$  的夹角  $\theta$  取何值时  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$  的值最大? 并求出这个最大值.



20. 直线  $l: y = kx + 1$  与双曲线  $C: 2x^2 - y^2 = 1$  的右支交于不同的两点  $A, B$ .
- (1) 求实数  $k$  的取值范围;
  - (2) 是否存在实数  $k$ , 使得以线段  $AB$  为直径的圆经过双曲线  $C$  的右焦点  $F$ ? 若存在, 求出  $k$  的值. 若不存在, 说明理由.

21. 为防止某突发事件发生, 有甲、乙、丙、丁四种相互独立的预防措施可供采用, 单独采用甲、乙、丙、丁预防措施后此突发事件不发生的概率 (记为  $P$ ) 和所需费用如下表:

预防措施	甲	乙	丙	丁
$P$	0.9	0.8	0.7	0.6
费用 (万元)	90	60	30	10

预防方案可单独采用一种预防措施或联合采用几种预防措施, 在总费用不超过 120 万元的前提下, 请确定一个预防方案, 使得此突发事件不发生的概率最大.

22. 已知  $b > -1, c > 0$ , 函数  $f(x) = x + b$  的图象与函数  $g(x) = x^2 + bx + c$  的图象相切.
- (1) 求  $b$  与  $c$  的关系式 (用  $c$  表示  $b$ );
  - (2) 设函数  $F(x) = f(x)g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有极值点, 求  $c$  的取值范围.



# 2004 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

## 一、选择题

- 复数  $\left(1 + \frac{1}{i}\right)^4$  的值是 ( )  
(A) 4i (B) -4i (C) 4 (D) -4
- 如果双曲线  $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{12} = 1$  上一点  $P$  到右焦点的距离等于  $\sqrt{13}$ , 那么点  $P$  到右准线的距离是 ( )  
(A)  $\frac{13}{5}$  (B) 13 (C) 5 (D)  $\frac{5}{13}$
- 设  $f^{-1}(x)$  是函数  $f(x) = \log_2(x+1)$  的反函数, 若  $[1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)] = 8$ , 则  $f(a-b)$  的值为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)  $\log_2 3$
- 把正方形  $ABCD$  沿对角线  $AC$  折起, 当以  $A, B, C, D$  四点为顶点的三棱锥体积最大时, 直线  $BD$  和平面  $ABC$  所成的角的大小为 ( )  
(A) 90 (B) 60 (C) 45 (D) 30
- 某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点. 公司为了调查产品销售的情况, 需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本, 记这项调查为①; 在丙地区中有 20 个特大型销售点, 要从中抽取 7 个调查其销售收入和售后服务情况, 记这项调查为②. 则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是 ( )  
(A) 分层抽样, 系统抽样法 (B) 分层抽样法, 简单随机抽样法  
(C) 系统抽样法, 分层抽样法 (D) 简单随机抽样法, 分层抽样法
- 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$  若  $f(-4) = f(0)$ ,  $f(-2) = -2$ , 则关于  $x$  的方程  $f(x) = x$  的解的个数为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 设  $a > 0, b > 0$ , 则以下不等式中不恒成立的是 ( )  
(A)  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$  (B)  $a^3 + b^3 \geq 2ab^2$   
(C)  $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$  (D)  $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
- 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = \frac{1}{5}, a_n + a_{n+1} = \frac{6}{5^{n+1}}, n \in \mathbf{N}^*$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$  ( )  
(A)  $\frac{2}{5}$  (B)  $\frac{2}{7}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{4}{25}$
- 设集合  $U = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $A = \{(x, y) | 2x - y + m > 0\}$ ,  $B = \{(x, y) | x + y - n \leq 0\}$ , 那么点  $P(2, 3) \in A \cap (\complement_U B)$  的充要条件是 ( )  
(A)  $m > -1, n < 5$  (B)  $m < -1, n < 5$   
(C)  $m > -1, n > 5$  (D)  $m < -1, n > 5$

- 从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形, 其中直角三角形的个数为 ( )  
(A) 56 (B) 52 (C) 48 (D) 40
- 农民收入由工资性收入和其它收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元 (其中工资性收入为 1800 元, 其它收入为 1350 元), 预计该地区自 2004 年起的 5 年内, 农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长, 其它收入每年增加 160 元. 根据以上数据, 2008 年该地区农民人均收入介于 ( )  
(A) 4200 元 ~ 4400 元 (B) 4400 元 ~ 4600 元  
(C) 4600 元 ~ 4800 元 (D) 4800 元 ~ 5000 元
- 设  $f(x), g(x)$  分别是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数和偶函数, 当  $x < 0$  时,  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$ . 且  $g(-3) = 0$ , 则不等式  $f(x)g(x) < 0$  的解集是 ( )  
(A)  $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$  (B)  $(-3, 0) \cup (0, 3)$   
(C)  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

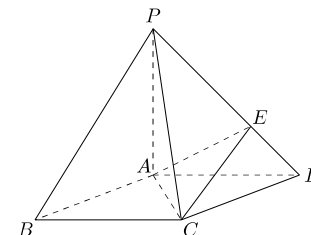
## 二、填空题

- 已知向量  $\mathbf{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , 向量  $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, -1)$ , 则  $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  的最大值是\_\_\_\_\_.
- 同时抛掷两枚相同的均匀硬币, 随机变量  $\xi = 1$  表示结果中有正面向上,  $\xi = 0$  表示结果中没有正面向上, 则  $E\xi =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $\left(x^3 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$  的展开式中的常数项为 84, 则  $n =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $F$  是椭圆  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{6} = 1$  的右焦点, 且椭圆上至少有 21 个不同的点  $P_i (i = 1, 2, 3, \cdots)$ , 使  $|FP_1|, |FP_2|, |FP_3|, \cdots$  组成公差为  $d$  的等差数列, 则  $d$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 已知  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{1}{4}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 求  $2\sin^2\alpha + \tan\alpha - \cot\alpha - 1$  的值.

- 如图, 在底面是菱形的四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle ABC = 60^\circ, PA = AC = a, PB = PD = \sqrt{2}a$ , 点  $E$  在  $PD$  上, 且  $PE : ED = 2 : 1$ .  
(1) 证明:  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ;  
(2) 求以  $AC$  为棱,  $EAC$  与  $DAC$  为面的二面角  $\theta$  的大小;  
(3) 在棱  $PC$  上是否存在一点  $F$ , 使  $BF \parallel$  平面  $AEC$ ? 证明你的结论.



- 甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件, 已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为  $\frac{1}{4}$ , 乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为  $\frac{1}{12}$ , 甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为  $\frac{2}{9}$ .  
(1) 分别求甲、乙、丙三台机床各自加工零件是一等品的概率;  
(2) 从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验, 求至少有一个一等品的概率.

20. 已知函数  $f(x) = x^2 e^{ax}$ , 其中  $a \leq 0$ ,  $e$  为自然对数的底数.

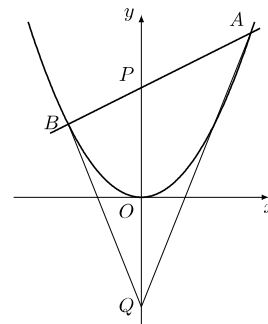
(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的最大值.

21. 如图, 过抛物线  $x^2 = 4y$  的对称轴上任一点  $P(0, m)$  ( $m > 0$ ) 作直线与抛物线交于  $A, B$  两点, 点  $Q$  是点  $P$  关于原点的对称点.

(1) 设点  $P$  分有向线段  $\overrightarrow{AB}$  所成的比为  $\lambda$ , 证明:  $\overrightarrow{QP} \perp (\overrightarrow{QA} - \lambda \overrightarrow{QB})$ ;

(2) 设直线  $AB$  的方程是  $x - 2y + 12 = 0$ , 过  $A, B$  两点的圆  $C$  与抛物线在点  $A$  处有共同的切线, 求圆  $C$  的方程.

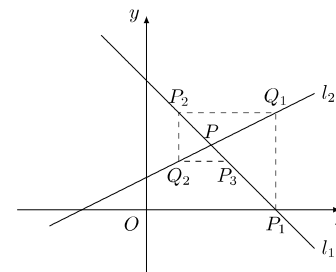


22. 如图, 直线  $l_1: y = kx + 1 - k$  ( $k \neq 0, k \neq \pm \frac{1}{2}$ ) 与  $l_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  相交于点  $P$ . 直线  $l_1$  与  $x$  轴交于点  $P_1$ , 过点  $P_1$  作  $x$  轴的垂线交直线  $l_2$  于点  $Q_1$ , 过点  $Q_1$  作  $y$  轴的垂线交直线  $l_1$  于点  $P_2$ , 过点  $P_2$  作  $x$  轴的垂线交直线  $l_2$  于点  $Q_2, \dots$ , 这样一直作下去, 可得到一系列点  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots$ . 点  $P_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的横坐标构成数列  $\{x_n\}$ .

(1) 证明:  $x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2k}(x_n - 1), n \in \mathbf{N}^*$ ;

(2) 求数列  $\{x_n\}$  的通项公式;

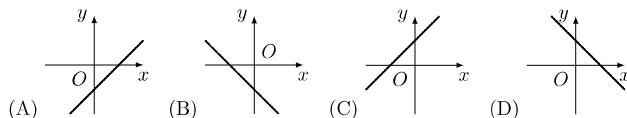
(3) 比较  $2|PP_n|^2$  与  $4k^2|PP_1|^2 + 5$  的大小.



# 2004 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

## 一、选择题

- 函数  $y = \lg\left(1 - \frac{1}{x}\right)$  的定义域为 ( )  
 (A)  $\{x \mid x < 0\}$  (B)  $\{x \mid x > 1\}$   
 (C)  $\{x \mid 0 < x < 1\}$  (D)  $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$
- 设直线  $ax + by + c = 0$  的倾斜角为  $\alpha$ , 且  $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$ , 则  $a, b$  满足 ( )  
 (A)  $a + b = 1$  (B)  $a - b = 1$  (C)  $a + b = 0$  (D)  $a - b = 0$
- 设  $f^{-1}(x)$  是函数  $f(x) = \sqrt{x}$  的反函数, 则下列不等式中恒成立的是 ( )  
 (A)  $f^{-1}(x) \leq 2x - 1$  (B)  $f^{-1}(x) \leq 2x + 1$   
 (C)  $f^{-1}(x) \geq 2x - 1$  (D)  $f^{-1}(x) \geq 2x + 1$
- 如果双曲线  $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{12} = 1$  上一点  $P$  到右焦点的距离等于  $\sqrt{13}$ , 那么点  $P$  到右准线的距离是 ( )  
 (A)  $\frac{13}{5}$  (B) 13 (C) 5 (D)  $\frac{5}{13}$
- 把正方形  $ABCD$  沿对角线  $AC$  折起, 当以  $A, B, C, D$  四点为顶点的三棱锥体积最大时, 直线  $BD$  和平面  $ABC$  所成的角的大小为 ( )  
 (A) 90 (B) 60 (C) 45 (D) 30
- 某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点. 公司为了调查产品销售的情况, 需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本, 记这项调查为①; 在丙地区中有 20 个特大型销售点, 要从中抽取 7 个调查其销售收入和售后服务情况, 记这项调查为②. 则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是 ( )  
 (A) 分层抽样, 系统抽样法 (B) 分层抽样法, 简单随机抽样法  
 (C) 系统抽样法, 分层抽样法 (D) 简单随机抽样法, 分层抽样法
- 若  $f(x) = -x^2 + 2ax$  与  $g(x) = \frac{a}{x+1}$  在区间  $[1, 2]$  上都是减函数, 则  $a$  的值范围是 ( )  
 (A)  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  (B)  $(-1, 0) \cup (0, 1]$   
 (C)  $(0, 1)$  (D)  $(0, 1]$
- 已知向量  $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , 向量  $\vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$ , 则  $|2\vec{a} - \vec{b}|$  的最大值, 最小值分别是 ( )  
 (A)  $4\sqrt{2}, 0$  (B) 4,  $4\sqrt{2}$  (C) 16, 0 (D) 4, 0
- 若函数  $f(x) = x^2 + bx + c$  的图象的顶点在第四象限, 则函数  $f'(x)$  的图象是 ( )



- 从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形, 其中直角三角形的个数为 ( )  
 (A) 56 (B) 52 (C) 48 (D) 40
- 农民收入由工资性收入和其它收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元 (其中工资性收入为 1800 元, 其它收入为 1350 元), 预计该地区自 2004 年起的 5 年内, 农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长, 其它收入每年增加 160 元. 根据以上数据, 2008 年该地区农民人均收入介于 ( )  
 (A) 4200 元 ~ 4400 元 (B) 4400 元 ~ 4600 元  
 (C) 4600 元 ~ 4800 元 (D) 4800 元 ~ 5000 元
- 设集合  $U = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $A = \{(x, y) \mid 2x - y + m > 0\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid x + y - n \leq 0\}$ , 那么点  $P(2, 3) \in A \cap (\complement_U B)$  的充要条件是 ( )  
 (A)  $m > -1, n < 5$  (B)  $m < -1, n < 5$   
 (C)  $m > -1, n > 5$  (D)  $m < -1, n > 5$

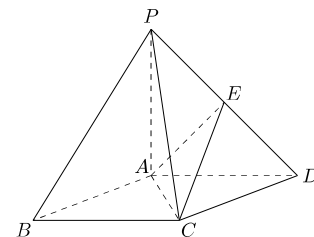
## 二、填空题

- 过点  $P(-1, 2)$  且与曲线  $y = 3x^2 - 4x + 2$  在点  $M(1, 1)$  处的切线平行的直线方程是\_\_\_\_\_.
- $(x^2 + \frac{1}{x})^9$  的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_. (用数字作答)
- $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦点, 在  $C$  上满足  $PF_1 \perp PF_2$  的点  $P$  的个数为\_\_\_\_\_.
- 若直线  $y = 2a$  与函数  $y = |a^x - 1|$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象有两个公共点, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$ , 求  $\frac{1}{2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$  的值.

- 如图, 在底面是菱形的四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $PA = AC = a$ ,  $PB = PD = \sqrt{2}a$ , 点  $E$  是  $PD$  的中点.  
 (1) 证明:  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PB \parallel$  平面  $EAC$ ;  
 (2) 求以  $AC$  为棱,  $EAC$  与  $DAC$  为面的二面角  $\theta$  的正切值.



- 甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件, 已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为  $\frac{1}{4}$ , 乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为  $\frac{1}{12}$ , 甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为  $\frac{2}{9}$ .  
 (1) 分别求甲、乙、丙三台机床各自加工零件是一等品的概率;  
 (2) 从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验, 求至少有一个一等品的概率.

20. 已知数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a$  且公比  $q$  不等于 1 的等比数列,  $S_n$  是其前  $n$  项的和,  $a_1, 2a_7, 3a_4$  成等差数列.

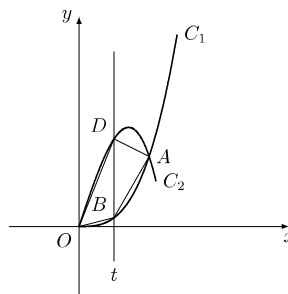
(1) 证明:  $12S_3, S_6, S_{12} - S_6$  成等比数列;

(2) 求和  $T_n = a_1 + 2a_4 + 3a_7 + \cdots + na_{3n-2}$ .

21. 如图, 已知曲线  $C_1: y = x^3 (x \geq 0)$  与曲线  $C_2: y = -2x^3 + 3x (x \geq 0)$  交于  $O, A$ , 直线  $x = t (0 < t < 1)$  与曲线  $C_1, C_2$  分别交于  $B, D$ .

(1) 写出四边形  $ABOD$  的面积  $S$  与  $t$  的函数关系式  $S = f(t)$ ;

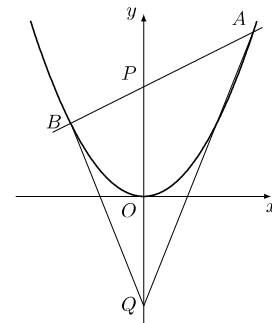
(2) 讨论  $f(t)$  的单调性, 并求  $f(t)$  的最大值.



22. 如图, 过抛物线  $x^2 = 4y$  的对称轴上任一点  $P(0, m) (m > 0)$  作直线与抛物线交于  $A, B$  两点, 点  $Q$  是点  $P$  关于原点的对称点.

(1) 设点  $P$  分有向线段  $\overrightarrow{AB}$  所成的比为  $\lambda$ , 证明:  $\overrightarrow{QP} \perp (\overrightarrow{QA} - \lambda \overrightarrow{QB})$ ;

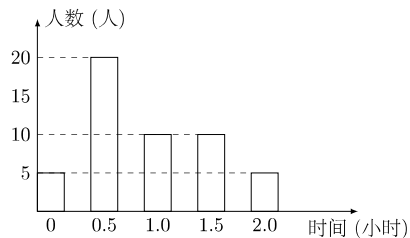
(2) 设直线  $AB$  的方程是  $x - 2y + 12 = 0$ , 过  $A, B$  两点的圆  $C$  与抛物线在点  $A$  处有共同的切线, 求圆  $C$  的方程.



## 2004 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

### 一、选择题

1. 设集合  $P = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Q = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $P \cap Q$  等于 ( )  
(A)  $\{1, 2\}$  (B)  $\{3, 4\}$   
(C)  $\{1\}$  (D)  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. 函数  $y = 2\cos^2 x + 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的最小正周期为 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$
3. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会, 若这 4 人中必须既有男生又有女生, 则不同的选法共有 ( )  
(A) 140 种 (B) 120 种 (C) 35 种 (D) 34 种
4. 一平面截一球得到直径是 6 cm 的圆面, 球心到这个平面的距离是 4 cm, 则该球的体积是 ( )  
(A)  $\frac{100\pi}{3} \text{ cm}^3$  (B)  $\frac{208\pi}{3} \text{ cm}^3$  (C)  $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$  (D)  $\frac{416\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$
5. 若双曲线  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条准线与抛物线  $y^2 = 8x$  的准线重合, 则双曲线离心率为 ( )  
(A)  $\sqrt{2}$  (B)  $2\sqrt{2}$  (C) 4 (D)  $4\sqrt{2}$
6. 某校为了了解学生的课外阅读情况, 随机调查了 50 名学生, 得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据, 结果用下面的条形图表示. 根据条形图可得这 50 名学生这一天平均每人的课外阅读时间为 ( )



- (A) 0.6 小时 (B) 0.9 小时 (C) 1.0 小时 (D) 1.5 小时
7.  $(2x + \sqrt{x})^4$  的展开式中  $x^3$  的系数是 ( )  
(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 48
8. 若函数  $y = \log_a(x + b)$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图象过两点  $(-1, 0)$  和  $(0, 1)$ , 则 ( )  
(A)  $a = 2, b = 2$  (B)  $a = \sqrt{2}, b = 2$   
(C)  $a = 2, b = 1$  (D)  $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

9. 将一颗质地均匀的骰子 (它是一种各面上分别标有点数 1, 2, 3, 4, 5, 6 的正方体玩具) 先后抛掷 3 次, 至少出现的概率是 ( )  
(A)  $\frac{5}{216}$  (B)  $\frac{25}{216}$  (C)  $\frac{31}{216}$  (D)  $\frac{91}{216}$
10. 函数  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  在闭区间  $[-3, 0]$  上的最大值、最小值分别是 ( )  
(A) 1, -1 (B) 1, -17 (C) 3, -17 (D) 9, -19
11. 设  $k > 1$ ,  $f(x) = k(x - 1)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ). 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 函数  $y = f(x)$  的图象与  $x$  轴交于  $A$  点, 它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图象与  $y$  轴交于  $B$  点, 并且这两个函数的图象交于  $P$  点. 已知四边形  $OAPB$  的面积是 3, 则  $k$  等于 ( )  
(A) 3 (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{6}{5}$
12. 设函数  $f(x) = -\frac{x}{1 + |x|}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 区间  $M = [a, b]$  ( $a < b$ ), 集合  $N = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$ , 则使  $M = N$  成立的实数对  $(a, b)$  有 ( )  
(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 无数多个

### 二、填空题

13. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的部分对应值如下表:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

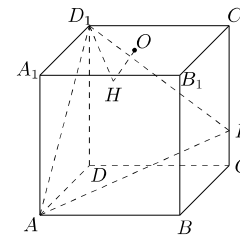
则不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

14. 以点  $(1, 2)$  为圆心, 与直线  $4x + 3y - 35 = 0$  相切的圆的方程是\_\_\_\_\_.
15. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{2}$  (对于所有  $n \geq 1$ ), 且  $a_4 = 54$ , 则  $a_1$  的数值是\_\_\_\_\_.
16. 平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  中, 已知  $\vec{a} = (4, -3)$ ,  $|\vec{b}| = 1$ , 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ , 则向量  $\vec{b}$  =\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 已知  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{2}$ , 求  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  的值.

18. 在棱长为 4 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $O$  是正方形  $A_1B_1C_1D_1$  的中心, 点  $P$  在棱  $CC_1$  上, 且  $CC_1 = 4CP$ .  
(1) 求直线  $AP$  与平面  $BCC_1B_1$  所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示);  
(2) 设  $O$  点在平面  $D_1AP$  上的射影是  $H$ , 求证:  $D_1H \perp AP$ ;  
(3) 求点  $P$  到平面  $ABD_1$  的距离.



19. 制定投资计划时, 不仅要考虑可能获得的盈利, 而且要考虑可能出现的亏损. 某投资人打算投资甲、乙两个项目. 根据预测, 甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100% 和 50%, 可能的最大亏损分别为 30% 和 10%. 投资人计划投资金额不超过 10 万元, 要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元. 问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元, 才能使可能的盈利最大?

20. 设无穷等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ .

(1) 若首项  $a_1 = \frac{3}{2}$ , 公差  $d = 1$ , 求满足  $S_{k^2} = (S_k)^2$  的正整数  $k$ ;

(2) 求所有的无穷等差数列  $\{a_n\}$ , 使得对于一切正整数  $k$  都有  $S_{k^2} = (S_k)^2$  成立.

21. 已知椭圆的中心在原点, 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 一个焦点是  $F(-m, 0)$  ( $m$  是大于 0 的常数).

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设  $Q$  是椭圆上的一点, 且过点  $F$ 、 $Q$  的直线  $l$  与  $y$  轴交于点  $M$ . 若  $|\overrightarrow{MQ}| = 2|\overrightarrow{QF}|$ , 求直线  $l$  的斜率.

22. 已知函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 满足下列条件: 对任意的实数  $x_1, x_2$  都有  $\lambda(x_1 - x_2)^2 \leq (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]$  和  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ , 其中  $\lambda$  是大于 0 的常数. 设实数  $a_0, a, b$  满足  $f(a_0) = 0$  和  $b = a - \lambda f(a)$ .

(1) 证明:  $\lambda \leq 1$ , 并且不存在  $b_0 \neq a_0$ , 使得  $f(b_0) = 0$ ;

(2) 证明:  $(b - a_0)^2 \leq (1 - \lambda^2)(a - a_0)^2$ ;

(3) 证明:  $[f(b)]^2 \leq (1 - \lambda^2)[f(a)]^2$ .

# 2004 普通高等学校招生考试 (辽宁卷)

## 一、选择题

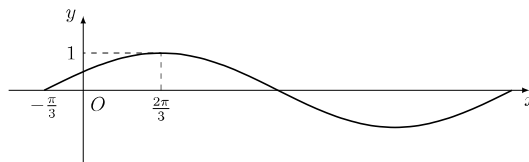
- 若  $\cos \theta > 0$ ,  $\sin 2\theta < 0$ , 则角  $\theta$  的终边所在象限是 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 对于  $0 < a < 1$ , 给出下列四个不等式: ①  $\log_a(1+a) < \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$ ; ②  $\log_a(1+a) > \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$ ; ③  $a^{1+a} < a^{1+\frac{1}{a}}$ ; ④  $a^{1+a} > a^{1+\frac{1}{a}}$ . 其中成立的是 ( )  
(A) ①与③ (B) ①与④ (C) ②与③ (D) ②与④
- 已知  $\alpha, \beta$  是不同的两个平面, 直线  $a \subset \alpha$ , 直线  $b \subset \beta$ , 命题  $p$ :  $a$  与  $b$  无公共点; 命题  $q$ :  $\alpha \parallel \beta$ . 则  $p$  是  $q$  的 ( )  
(A) 充分而不必要的条件 (B) 必要而不充分的条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件
- 设复数  $z$  满足  $\frac{1-z}{1+z} = i$ , 则  $|1+z| =$  ( )  
(A) 0 (B) 1 (C)  $\sqrt{2}$  (D) 2
- 甲、乙两人独立地解同一问题, 甲解决这个问题的概率是  $p_1$ , 乙解决这个问题的概率是  $p_2$ , 那么恰好有 1 人解决这个问题的概率是 ( )  
(A)  $p_1 p_2$  (B)  $p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$   
(C)  $1 - p_1 p_2$  (D)  $1 - (1-p_1)(1-p_2)$
- 已知点  $A(-2, 0)$ 、 $B(3, 0)$ , 动点  $P(x, y)$  满足  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2$ , 则点  $P$  的轨迹是 ( )  
(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线
- 已知函数  $f(x) = \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ , 则下列命题正确的是 ( )  
(A)  $f(x)$  是周期为 1 的奇函数  
(B)  $f(x)$  是周期为 2 的偶函数  
(C)  $f(x)$  是周期为 1 的非奇非偶函数  
(D)  $f(x)$  是周期为 2 的非奇非偶函数
- 已知随机变量  $\xi$  的概率分布如下:

$\xi$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	$\frac{2}{3^6}$	$\frac{2}{3^7}$	$\frac{2}{3^8}$	$\frac{2}{3^9}$	$m$

则  $P(\xi = 10) =$

- (A)  $\frac{2}{3^9}$  (B)  $\frac{2}{3^{10}}$  (C)  $\frac{1}{3^9}$  (D)  $\frac{1}{3^{10}}$  ( )

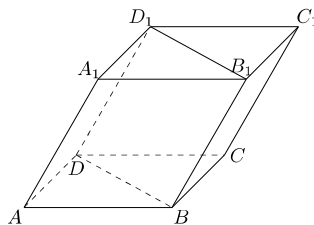
- 已知点  $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{2}, 0)$ , 动点  $P$  满足  $|PF_2| - |PF_1| = 2$ . 当点  $P$  的纵坐标是  $\frac{1}{2}$  时, 点  $P$  到坐标原点的距离是 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 2
- 设  $A, B, C, D$  是球面上的四个点, 且在同一平面内,  $AB = BC = CD = DA = 3$ , 球心到该平面的距离是球半径的一半, 则球的体积是 ( )  
(A)  $8\sqrt{6}\pi$  (B)  $64\sqrt{6}\pi$  (C)  $24\sqrt{2}\pi$  (D)  $72\sqrt{2}\pi$
- 若函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  的图象 (部分) 如图所示, 则  $\omega$  和  $\varphi$  的取值是 ( )



- (A)  $\omega = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}$  (B)  $\omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{3}$   
(C)  $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{6}$  (D)  $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$
- 有两排座位, 前排 11 个座位, 后排 12 个座位, 现安排 2 人就座, 规定前排中间的 3 个座位不能坐, 并且这 2 人不左右相邻, 那么不同排法的种数是 ( )  
(A) 234 (B) 346 (C) 350 (D) 363

## 二、填空题

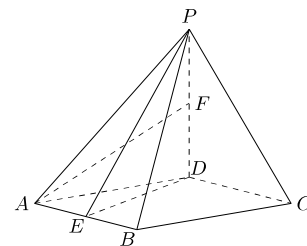
- 若经过点  $P(-1, 0)$  的直线与圆  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$  相切, 则此直线在  $y$  轴上的截距是\_\_\_\_\_.
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi) \cos x}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} =$ \_\_\_\_\_.
- 如图, 四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  为正方形, 侧棱与底面边长均为  $2a$ , 且  $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60^\circ$ , 则侧棱  $AA_1$  和截面  $B_1D_1DB$  的距离是\_\_\_\_\_.



- 口袋内装有 10 个相同的球, 其中 5 个球标有数字 0, 5 个球标有数字 1, 若从袋中摸出 5 个球, 那么摸出的 5 个球所标数字之和小于 2 或大于 3 的概率是\_\_\_\_\_. (以数值作答)

## 三、解答题

- 已知四棱锥  $P - ABCD$ , 底面  $ABCD$  是菱形,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PD = AD$ , 点  $E$  为  $AB$  中点, 点  $F$  为  $PD$  中点.  
(1) 证明: 平面  $PED \perp$  平面  $PAB$ ;  
(2) 求二面角  $P - AB - F$  的平面角的余弦值.



- 设全集  $U = \mathbf{R}$ .

- 解关于  $x$  的不等式  $|x - 1| + a - 1 > 0$  ( $a \in \mathbf{R}$ );
- 记  $A$  为 (1) 中不等式的解集, 集合  $B = \left\{x \mid \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 0\right\}$ , 若  $(\complement_U A) \cap B$  恰有 3 个元素, 求  $a$  的取值范围.

19. 设椭圆方程为  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ , 过点  $M(0, 1)$  的直线  $l$  交椭圆于点  $A, B$ ,  $O$  是坐标原点, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ , 点  $N$  的坐标为  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , 当  $l$  绕点  $M$  旋转时, 求:
- (1) 动点  $P$  的轨迹方程;
  - (2)  $|\overrightarrow{NP}|$  的最小值与最大值.
20. 甲方是一农场, 乙方是一工厂. 由于乙方生产须占用甲方的资源, 因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入, 在乙方不赔付甲方的情况下, 乙方的年利润  $x$  (元) 与年产量  $t$  (吨) 满足函数关系  $x = 2000\sqrt{t}$ . 若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方  $s$  元 (以下称  $s$  为赔付价格).
- (1) 将乙方的年利润  $w$  (元) 表示为年产量  $t$  (吨) 的函数, 并求出乙方获得最大利润的年产量;
  - (2) 甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额  $y = 0.002t^2$  (元), 在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下, 甲方要在索赔中获得最大净收入, 应向乙方要求的赔付价格  $s$  是多少?
21. 已知函数  $f(x) = ax - \frac{3}{2}x^2$  的最大值不大于  $\frac{1}{6}$ , 又当  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  时,  $f(x) \geq \frac{1}{8}$ .
- (1) 求  $a$  的值;
  - (2) 设  $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ . 证明  $a_n < \frac{1}{n+1}$ .
22. 已知函数  $f(x) = \ln(e^x + a)$  ( $a > 0$ ).
- (1) 求函数  $y = f(x)$  的反函数  $y = f^{-1}(x)$  及  $f(x)$  的导数  $f'(x)$ ;
  - (2) 假设对任意  $x \in [\ln(3a), \ln(4a)]$ , 不等式  $|m - f^{-1}(x)| + \ln(f'(x)) < 0$  成立, 求实数  $m$  的取值范围.



# 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

## 一、选择题

- $(1-i)^2 \cdot i =$  ( )  
(A)  $2-2i$  (B)  $2+2i$  (C)  $-2$  (D)  $2$
- 已知函数  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ , 若  $f(a) = b$ , 则  $f(-a) =$  ( )  
(A)  $b$  (B)  $-b$  (C)  $\frac{1}{b}$  (D)  $-\frac{1}{b}$
- 已知  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  均为单位向量, 它们的夹角为  $60^\circ$ , 那么  $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{7}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C)  $\sqrt{13}$  (D)  $4$
- 函数  $y = \sqrt{x-1} + 1$  ( $x \geq 1$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x < 1$ ) (B)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x \geq 1$ )  
(C)  $y = x^2 - 2x$  ( $x < 1$ ) (D)  $y = x^2 - 2x$  ( $x \geq 1$ )
- $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$  的展开式中常数项是 ( )  
(A)  $14$  (B)  $-14$  (C)  $42$  (D)  $-42$
- 设  $A$ 、 $B$ 、 $I$  均为非空集合, 且满足  $A \subseteq B \subseteq I$ , 则下列各式中错误的是 ( )  
(A)  $(\complement_I A) \cup B = I$  (B)  $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$   
(C)  $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$  (D)  $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$
- 椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的两个焦点为  $F_1$ 、 $F_2$ , 过  $F_1$  作垂直于  $x$  轴的直线与椭圆相交, 一个交点为  $P$ , 则  $|\overrightarrow{PF_2}| =$  ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{7}{2}$  (D)  $4$
- 设抛物线  $y^2 = 8x$  的准线与  $x$  轴交于点  $Q$ , 若过点  $Q$  的直线  $l$  与抛物线有公共点, 则直线  $l$  的斜率的取值范围是 ( )  
(A)  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (B)  $[-2, 2]$  (C)  $[-1, 1]$  (D)  $[-4, 4]$
- 为了得到函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 可以将函数  $y = \cos 2x$  的图象 ( )  
(A) 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度
- 已知正四面体  $ABCD$  的表面积为  $S$ , 其四个面的中心分别为  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ . 设四面体  $EFGH$  的表面积为  $T$ , 则  $\frac{T}{S}$  等于 ( )  
(A)  $\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{4}{9}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$

- 从数字 1, 2, 3, 4, 5, 中, 随机抽取 3 个数字 (允许重复) 组成一个三位数, 其各位数字之和等于 9 的概率为 ( )  
(A)  $\frac{13}{125}$  (B)  $\frac{16}{125}$  (C)  $\frac{18}{125}$  (D)  $\frac{19}{125}$
- $a^2 + b^2 = 1$ ,  $b^2 + c^2 = 2$ ,  $c^2 + a^2 = 2$ ,  $ab + bc + ca$  的最小值为 ( )  
(A)  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (C)  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (D)  $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

## 二、填空题

- 不等式  $|x+2| \geq |x|$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 由动点  $P$  向圆  $x^2 + y^2 = 1$  引两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 切点分别为  $A$ 、 $B$ ,  $\angle APB = 60^\circ$ , 则动点  $P$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.
- 已知数列  $\{a_n\}$ , 满足  $a_1 = 1$ ,  $a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), 则  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \text{_____,} & n \geq 2. \end{cases}$
- 已知  $a$ 、 $b$  为不垂直的异面直线,  $\alpha$  是一个平面, 则  $a$ 、 $b$  在  $\alpha$  上的射影有可能是:  
① 两条平行直线;  
② 两条互相垂直的直线;  
③ 同一条直线;  
④ 一条直线及其外一点.  
在上面结论中, 正确结论的编号是\_\_\_\_\_. (写出所有正确结论的编号)

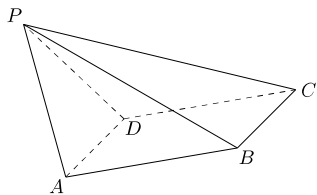
## 三、解答题

- 求函数  $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$  的最小正周期、最大值和最小值.

- 一接待中心有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四部热线电话, 已知某一时刻电话  $A$ 、 $B$  占线的概率均为 0.5, 电话  $C$ 、 $D$  占线的概率均为 0.4, 各部电话是否占线相互之间没有影响. 假设该时刻有  $\xi$  部电话占线. 试求随机变量  $\xi$  的概率分布和它的期望.

- 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 求函数  $f(x) = x^2 e^{ax}$  的单调区间.

20. 如图, 已知四棱锥  $P-ABCD$ ,  $PB \perp AD$ , 侧面  $PAD$  为边长等于 2 的正三角形, 底面  $ABCD$  为菱形, 侧面  $PAD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角为  $120^\circ$ .
- (1) 求点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离;
  - (2) 求面  $APB$  与面  $CPB$  所成二面角的大小.



21. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 与直线  $l: x + y = 1$  相交于两个不同的点  $A, B$ .
- (1) 求双曲线  $C$  的离心率  $e$  的取值范围;
  - (2) 设直线  $l$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 且  $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$ . 求  $a$  的值.

22. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ , 且  $a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k$ ,  $a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$ , 其中  $k = 1, 2, 3, \dots$ .
- (1) 求  $a_3, a_5$ ;
  - (2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

# 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

## 一、选择题

1. 设集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ , 则  $A \cap (\complement_U B) =$  ( )  
(A)  $\{2\}$  (B)  $\{2, 3\}$  (C)  $\{3\}$  (D)  $\{1, 3\}$
2. 已知函数  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ , 若  $f(a) = \frac{1}{2}$ , 则  $f(-a) =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C) 2 (D) -2
3. 已知  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  均为单位向量, 它们的夹角为  $60^\circ$ , 那么  $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{7}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C)  $\sqrt{13}$  (D) 4
4. 函数  $y = \sqrt{x-1} + 1$  ( $x \geq 1$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x < 1$ ) (B)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x \geq 1$ )  
(C)  $y = x^2 - 2x$  ( $x < 1$ ) (D)  $y = x^2 - 2x$  ( $x \geq 1$ )
5.  $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$  的展开式中常数项是 ( )  
(A) 14 (B) -14 (C) 42 (D) -42
6. 设  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 若  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )  
(A)  $\frac{7}{5}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $-\frac{7}{5}$  (D)  $-\frac{1}{5}$
7. 椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的两个焦点为  $F_1$ 、 $F_2$ , 过  $F_1$  作垂直于  $x$  轴的直线与椭圆相交, 一个交点为  $P$ , 则  $|\overrightarrow{PF_2}| =$  ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{7}{2}$  (D) 4
8. 设抛物线  $y^2 = 8x$  的准线与  $x$  轴交于点  $Q$ , 若过点  $Q$  的直线  $l$  与抛物线有公共点, 则直线  $l$  的斜率的取值范围是 ( )  
(A)  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (B)  $[-2, 2]$  (C)  $[-1, 1]$  (D)  $[-4, 4]$
9. 为了得到函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 可以将函数  $y = \cos 2x$  的图象  
(A) 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度
10. 已知正四面体  $ABCD$  的表面积为  $S$ , 其四个面的中心分别为  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ . 设四面体  $EFGH$  的表面积为  $T$ , 则  $\frac{T}{S}$  等于 ( )  
(A)  $\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{4}{9}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$

11. 从数字 1, 2,  $\dots$ , 9, 中, 随机抽取 3 个不同的数, 则这 3 个数的和为偶数的概率为 ( )  
(A)  $\frac{5}{9}$  (B)  $\frac{4}{9}$  (C)  $\frac{11}{21}$  (D)  $\frac{10}{21}$
12.  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $b^2 + c^2 = 2$ ,  $c^2 + a^2 = 2$ ,  $ab + bc + ca$  的最小值为 ( )  
(A)  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (C)  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (D)  $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

## 二、填空题

13. 不等式  $x + x^3 \geq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
14. 已知等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 = 3$ ,  $a_{10} = 384$ , 则该数列的通项  $a_n =$ \_\_\_\_\_.
15. 由动点  $P$  向圆  $x^2 + y^2 = 1$  引两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 切点分别为  $A$ 、 $B$ ,  $\angle APB = 60^\circ$ , 则动点  $P$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.
16. 已知  $a$ 、 $b$  为不垂直的异面直线,  $\alpha$  是一个平面, 则  $a$ 、 $b$  在  $\alpha$  上的射影有可能是:  
① 两条平行直线;  
② 两条互相垂直的直线;  
③ 同一条直线;  
④ 一条直线及其外一点.  
在上面结论中, 正确结论的编号是\_\_\_\_\_. (写出所有正确结论的编号)

## 三、解答题

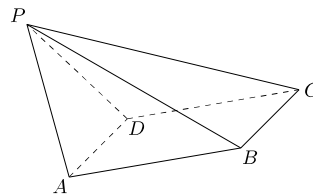
17. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ . 已知  $a_{10} = 30$ ,  $a_{20} = 50$ .  
(1) 求通项  $a_n$ ;  
(2) 若  $S_n = 242$ , 求  $n$ .

18. 求函数  $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$  的最小正周期、最大值和最小值.

19. 已知  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 求  $a$  的取值范围.

20. 从 10 位同学 (其中 6 女, 4 男) 中随机选出 3 位参加测验. 每位女同学能通过测验的概率均为  $\frac{4}{5}$ , 每位男同学能通过测验的概率均为  $\frac{3}{5}$ . 试求:
- (1) 选出的 3 位同学中, 至少有一位男同学的概率;
  - (2) 10 位同学中的女同学甲和男同学乙同时被选中且通过测验的概率.

21. 如图, 已知四棱锥  $P-ABCD$ ,  $PB \perp AD$ , 侧面  $PAD$  为边长等于 2 的正三角形, 底面  $ABCD$  为菱形, 侧面  $PAD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角为  $120^\circ$ .
- (1) 求点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离;
  - (2) 求面  $APB$  与面  $CPB$  所成二面角的大小.



22. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 与直线  $l: x + y = 1$  相交于两个不同的点  $A, B$ .
- (1) 求双曲线  $C$  的离心率  $e$  的取值范围;
  - (2) 设直线  $l$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 且  $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB}$ . 求  $a$  的值.

# 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{x \mid x^2 < 4\}$ ,  $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 则集合  $M \cap N =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid x < -2\}$  (B)  $\{x \mid x > 3\}$   
 (C)  $\{x \mid -1 < x < 2\}$  (D)  $\{x \mid 2 < x < 3\}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5} =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 1 (C)  $\frac{2}{5}$  (D)  $\frac{1}{4}$
- 设复数  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , 则  $1 + \omega =$  ( )  
 (A)  $-\omega$  (B)  $\omega^2$  (C)  $-\frac{1}{\omega}$  (D)  $\frac{1}{\omega^2}$
- 已知圆  $C$  与圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  关于直线  $y = -x$  对称, 则圆  $C$  的方程为 ( )  
 (A)  $(x+1)^2 + y^2 = 1$  (B)  $x^2 + y^2 = 1$   
 (C)  $x^2 + (y+1)^2 = 1$  (D)  $x^2 + (y-1)^2 = 1$
- 已知函数  $y = \tan(2x + \varphi)$  的图象过点  $(\frac{\pi}{12}, 0)$ , 则  $\varphi$  可以是 ( )  
 (A)  $-\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{6}$  (C)  $-\frac{\pi}{12}$  (D)  $\frac{\pi}{12}$
- 函数  $y = -e^x$  的图象 ( )  
 (A) 与  $y = e^x$  的图象关于  $y$  轴对称  
 (B) 与  $y = e^x$  的图象关于坐标原点对称  
 (C) 与  $y = e^{-x}$  的图象关于  $y$  轴对称  
 (D) 与  $y = e^{-x}$  的图象关于坐标原点对称
- 已知球  $O$  的半径为 1,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 则球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- 在坐标平面内, 与点  $A(1, 2)$  距离为 1, 且与点  $B(3, 1)$  距离为 2 的直线共有 ( )  
 (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条
- 已知平面上直线  $L$  的方向向量  $\mathbf{e} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ , 点  $O(0, 0)$  和  $A(1, -2)$  在  $L$  上的射影分别是  $O_1$  和  $A_1$ , 则  $\overrightarrow{O_1A_1} = \lambda \mathbf{e}$ , 其中  $\lambda =$  ( )  
 (A)  $\frac{11}{5}$  (B)  $-\frac{11}{5}$  (C) 2 (D) -2

- 函数  $y = x \cos x - \sin x$  在下面哪个区间内是增函数 ( )  
 (A)  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  (B)  $(\pi, 2\pi)$  (C)  $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$  (D)  $(2\pi, 3\pi)$
- 函数  $y = \sin^4 x + \cos^2 x$  的最小正周期为 ( )  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D)  $2\pi$
- 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有 ( )  
 (A) 56 个 (B) 57 个 (C) 58 个 (D) 60 个

## 二、填空题

- 从装有 3 个红球, 2 个白球的袋中随机取出 2 个球, 设其中有  $\xi$  个红球, 则随机变量  $\xi$  的概率分布为:

$\xi$	0	1	2
$P$			

- 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq y, \\ 2x - y \leq 1, \end{cases}$  则  $z = 3x + 2y$  的最大值是\_\_\_\_\_.
- 设中心在原点的椭圆与双曲线  $2x^2 - 2y^2 = 1$  有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是\_\_\_\_\_.
- 下面是关于四棱柱的四个命题:  
 ① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.  
 其中, 真命题的编号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的编号)

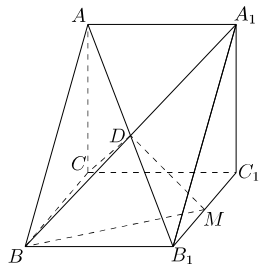
## 三、解答题

- 已知锐角三角形  $ABC$  中,  $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$ ,  $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$ .  
 (1) 求证:  $\tan A = 2 \tan B$ ;  
 (2) 设  $AB = 3$ , 求  $AB$  边上的高.

- 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为  $A$ 、 $B$  两组, 每组 4 支. 求:  
 (1)  $A$ 、 $B$  两组中有一组恰有两支弱队的概率;  
 (2)  $A$  组中至少有两支弱队的概率.

- 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ , 已知  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} S_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). 证明:  
 (1) 数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是等比数列;  
 (2)  $S_{n+1} = 4a_n$ .

20. 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 1$ ,  $CB = \sqrt{2}$ , 侧棱  $AA_1 = 1$ , 侧面  $AA_1B_1B$  的两条对角线交点为  $D$ ,  $B_1C_1$  的中点为  $M$ .
- (1) 求证:  $CD \perp$  平面  $BDM$ ;
- (2) 求面  $B_1BD$  与面  $CBD$  所成二面角的大小.



21. 给定抛物线  $C: y^2 = 4x$ ,  $F$  是  $C$  的焦点, 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点.
- (1) 设  $l$  的斜率为 1, 求  $\overrightarrow{OA}$  与  $\overrightarrow{OB}$  夹角的大小;
- (2) 设  $\overrightarrow{FB} = \lambda \overrightarrow{AF}$ , 若  $\lambda \in [4, 9]$ , 求  $l$  在  $y$  轴上截距的变化范围.
22. 已知函数  $f(x) = \ln(1+x) - x$ ,  $g(x) = x \ln x$ .
- (1) 求函数  $f(x)$  的最大值;
- (2) 设  $0 < a < b$ , 证明:  $0 < g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) < (b-a) \ln 2$ .

# 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 文)

## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{x \mid x^2 < 4\}$ ,  $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 则集合  $M \cap N =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid x < -2\}$  (B)  $\{x \mid x > 3\}$   
 (C)  $\{x \mid -1 < x < 2\}$  (D)  $\{x \mid 2 < x < 3\}$
- 函数  $y = \frac{1}{x+5}$  ( $x \neq -5$ ) 的反函数是 ( )  
 (A)  $y = \frac{1}{x} - 5$  ( $x \neq 0$ ) (B)  $y = x + 5$  ( $x \in \mathbf{R}$ )  
 (C)  $y = \frac{1}{x} + 5$  ( $x \neq 0$ ) (D)  $y = x - 5$  ( $x \in \mathbf{R}$ )
- 曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  在点  $(1, -1)$  处的切线方程为 ( )  
 (A)  $y = 3x - 4$  (B)  $y = -3x + 2$  (C)  $y = -4x + 3$  (D)  $y = 4x - 5$
- 已知圆  $C$  与圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  关于直线  $y = -x$  对称, 则圆  $C$  的方程为 ( )  
 (A)  $(x+1)^2 + y^2 = 1$  (B)  $x^2 + y^2 = 1$   
 (C)  $x^2 + (y+1)^2 = 1$  (D)  $x^2 + (y-1)^2 = 1$
- 已知函数  $y = \tan(2x + \varphi)$  的图象过点  $(\frac{\pi}{12}, 0)$ , 则  $\varphi$  可以是 ( )  
 (A)  $-\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{6}$  (C)  $-\frac{\pi}{12}$  (D)  $\frac{\pi}{12}$
- 正四棱锥的侧棱长与底面边长都是 1, 则侧棱与底面所成的角为 ( )  
 (A)  $75^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $30^\circ$
- 函数  $y = -e^x$  的图象 ( )  
 (A) 与  $y = e^x$  的图象关于  $y$  轴对称  
 (B) 与  $y = e^x$  的图象关于坐标原点对称  
 (C) 与  $y = e^{-x}$  的图象关于  $y$  轴对称  
 (D) 与  $y = e^{-x}$  的图象关于坐标原点对称
- 已知点  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 1)$ , 则线段  $AB$  的垂直平分线的方程为 ( )  
 (A)  $4x + 2y = 5$  (B)  $4x - 2y = 5$  (C)  $x + 2y = 5$  (D)  $x - 2y = 5$
- 已知向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  满足:  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $|\mathbf{b}| = 2$ ,  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 2$ , 则  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| =$  ( )  
 (A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $\sqrt{6}$
- 已知球  $O$  的半径为 1,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 则球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

- 函数  $y = \sin^4 x + \cos^2 x$  的最小正周期为 ( )  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D)  $2\pi$
- 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有 ( )  
 (A) 56 个 (B) 57 个 (C) 58 个 (D) 60 个

## 二、填空题

- 已知  $a$  为实数,  $(x+a)^{10}$  展开式中  $x^7$  的系数是  $-15$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq y, \\ 2x - y \leq 1, \end{cases}$  则  $z = 3x + 2y$  的最大值是\_\_\_\_\_.
- 设中心在原点的椭圆与双曲线  $2x^2 - 2y^2 = 1$  有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是\_\_\_\_\_.
- 下面是关于四棱柱的四个命题:  
 ① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;  
 ④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.  
 其中, 真命题的编号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的编号)

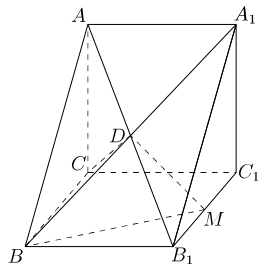
## 三、解答题

- 已知等差数列  $\{a_n\}$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_5 = 21$ .  
 (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 令  $b_n = 2^{a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

- 已知锐角三角形  $ABC$  中,  $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$ ,  $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$ .  
 (1) 求证:  $\tan A = 2 \tan B$ ;  
 (2) 设  $AB = 3$ , 求  $AB$  边上的高.

- 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为  $A$ 、 $B$  两组, 每组 4 支. 求:  
 (1)  $A$ 、 $B$  两组中有一组恰有两支弱队的概率;  
 (2)  $A$  组中至少有两支弱队的概率.

20. 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 1$ ,  $CB = \sqrt{2}$ , 侧棱  $AA_1 = 1$ , 侧面  $AA_1B_1B$  的两条对角线交点为  $D$ ,  $B_1C_1$  的中点为  $M$ .
- (1) 求证:  $CD \perp$  平面  $BDM$ ;
- (2) 求面  $B_1BD$  与面  $CBD$  所成二面角的大小.



21. 若函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + 1$  在区间  $(1, 4)$  内为减函数, 在区间  $(6, +\infty)$  上为增函数, 试求实数  $a$  的取值范围.
22. 给定抛物线  $C: y^2 = 4x$ ,  $F$  是  $C$  的焦点, 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点.
- (1) 设  $l$  的斜率为 1, 求  $\overrightarrow{OA}$  与  $\overrightarrow{OB}$  夹角的大小;
- (2) 设  $\overrightarrow{FB} = \lambda \overrightarrow{AF}$ , 若  $\lambda \in [4, 9]$ , 求  $l$  在  $y$  轴上截距的变化范围.



## 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

### 一、选择题

1. 设集合  $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ , 则集合  $M \cap N$  中元素的个数为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. 函数  $y = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$  的最小正周期是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$
3. 设数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_2 = -6$ ,  $a_8 = 6$ ,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则 ( )  
(A)  $S_4 < S_5$  (B)  $S_4 = S_5$  (C)  $S_6 < S_5$  (D)  $S_6 = S_5$
4. 圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  在点  $P(1, \sqrt{3})$  处的切线方程为 ( )  
(A)  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$  (B)  $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$   
(C)  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$  (D)  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$
5. 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$  的定义域为 ( )  
(A)  $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$  (B)  $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$   
(C)  $[-2, -1) \cup (1, 2]$  (D)  $(-2, -1) \cup (1, 2)$
6. 设复数  $z$  的辐角的主值为  $\frac{2\pi}{3}$ , 虚部为  $\sqrt{3}$ , 则  $z^2 =$  ( )  
(A)  $-2 - 2\sqrt{3}i$  (B)  $-2\sqrt{3} - 2i$  (C)  $2 + 2\sqrt{3}i$  (D)  $2\sqrt{3} + 2i$
7. 设双曲线的焦点在  $x$  轴上, 两条渐近线为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 则该双曲线的离心率  $e =$  ( )  
(A) 5 (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (D)  $\frac{5}{4}$
8. 不等式  $1 < |x + 1| < 3$  的解集为 ( )  
(A)  $(0, 2)$  (B)  $(-2, 0) \cup (2, 4)$   
(C)  $(-4, 0)$  (D)  $(-4, -2) \cup (0, 2)$
9. 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为 ( )  
(A)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (D)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
10. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3$ ,  $BC = \sqrt{13}$ ,  $AC = 4$ , 则边  $AC$  上的高为 ( )  
(A)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{3}{2}$  (D)  $3\sqrt{3}$
11. 设函数  $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 1, \\ 4 - \sqrt{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$  则使得  $f(x) \geq 1$  的自变量  $x$  的取值范围为 ( )  
(A)  $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$  (B)  $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$   
(C)  $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$  (D)  $[-2, 0] \cup [1, 10]$

12. 将 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名, 则不同的分配方案共有 ( )  
(A) 12 种 (B) 24 种 (C) 36 种 (D) 48 种

### 二、填空题

13. 用平面  $\alpha$  截半径为  $R$  的球, 如果球心到平面  $\alpha$  的距离为  $\frac{R}{2}$ , 那么截得小圆的面积与球的表面积比值为\_\_\_\_\_.
14. 函数  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最小值为\_\_\_\_\_.
15. 已知函数  $y = f(x)$  是奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 3^x - 1$ , 设  $f(x)$  的反函数是  $y = g(x)$ , 则  $g(-8) =$ \_\_\_\_\_.
16. 设  $P$  是曲线  $y^2 = 4(x - 1)$  上的一个动点, 则点  $P$  到点  $(0, 1)$  的距离与点  $P$  到  $y$  轴的距离之和的最小值为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 已知  $\alpha$  为锐角, 且  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 求  $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$  的值.

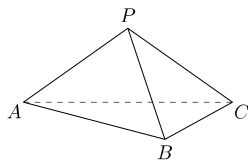
18. 解方程:  $4^x + |1 - 2^x| = 11$ .

19. 某村计划建造一个室内面积为  $800 \text{ m}^2$  的矩形蔬菜温室. 在温室内, 沿左、右两侧与后侧内墙各保留  $1 \text{ m}$  宽的通道, 沿前侧内墙保留  $3 \text{ m}$  宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时? 蔬菜的种植面积最大, 最大种植面积是多少?

20. 三棱锥  $P-ABC$  中, 侧面  $PAC$  与底面  $ABC$  垂直,  $PA=PB=PC=3$ .

(1) 求证:  $AB \perp BC$ ;

(2) 设  $AB=BC=2\sqrt{3}$ , 求  $AC$  与平面  $PBC$  所成角的大小.



21. 设椭圆  $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$  的两个焦点是  $F_1(-c, 0)$  与  $F_2(c, 0)$ , ( $c > 0$ ), 且椭圆上存在一点  $P$ , 使得直线  $PF_1$  与  $PF_2$  垂直.

(1) 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 设  $L$  是相应于焦点  $F_2$  的准线, 直线  $PF_2$  与  $L$  相交于点  $Q$ , 若  $\left| \frac{QF_2}{PF_2} \right| = 2 - \sqrt{3}$ , 求直线  $PF_2$  的方程.

22. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n = 2a_n + (-1)^n, n \geq 1$ .

(1) 写出数列  $\{a_n\}$  的前三项  $a_1, a_2, a_3$ ;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(3) 证明: 对任意的整数  $m > 4$ , 有  $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \cdots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$ .

# 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 文)

## 一、选择题

1. 设集合  $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ , 则集合  $M \cap N$  中元素的个数为 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. 函数  $y = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$  的最小正周期是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$
3. 记函数  $y = 1 + 3^{-x}$  的反函数为  $y = g(x)$ , 则  $g(10) =$  ( )  
(A) 2 (B) -2 (C) 3 (D) -1
4. 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 = 9$ ,  $a_5 = 243$ , 则  $\{a_n\}$  的前 4 项和为 ( )  
(A) 81 (B) 120 (C) 168 (D) 192
5. 圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  在点  $P(1, \sqrt{3})$  处的切线方程为 ( )  
(A)  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$  (B)  $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$   
(C)  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$  (D)  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$
6.  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^6$  展开式中的常数项为 ( )  
(A) 15 (B) -15 (C) 20 (D) -20
7. 设复数  $z$  的辐角的主值为  $\frac{2\pi}{3}$ , 虚部为  $\sqrt{3}$ , 则  $z^2 =$  ( )  
(A)  $-2 - 2\sqrt{3}i$  (B)  $-2\sqrt{3} - 2i$  (C)  $2 + 2\sqrt{3}i$  (D)  $2\sqrt{3} + 2i$
8. 设双曲线的焦点在  $x$  轴上, 两条渐近线为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 则该双曲线的离心率  $e =$  ( )  
(A) 5 (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (D)  $\frac{5}{4}$
9. 不等式  $1 < |x + 1| < 3$  的解集为 ( )  
(A)  $(0, 2)$  (B)  $(-2, 0) \cup (2, 4)$   
(C)  $(-4, 0)$  (D)  $(-4, -2) \cup (0, 2)$
10. 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为 ( )  
(A)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (D)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
11. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3$ ,  $BC = \sqrt{13}$ ,  $AC = 4$ , 则边  $AC$  上的高为 ( )  
(A)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{3}{2}$  (D)  $3\sqrt{3}$
12. 将 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名, 则不同的分配方案共有 ( )  
(A) 12 种 (B) 24 种 (C) 36 种 (D) 48 种

## 二、填空题

13. 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)}$  的定义域是\_\_\_\_\_.
14. 用平面  $\alpha$  截半径为  $R$  的球, 如果球心到平面  $\alpha$  的距离为  $\frac{R}{2}$ , 那么截得小圆的面积与球的表面积比值为\_\_\_\_\_.
15. 函数  $y = \sin x - \frac{1}{2} \cos x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的最大值为\_\_\_\_\_.
16. 设  $P$  为圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的动点, 则点  $P$  到直线  $3x - 4y - 10 = 0$  的距离的最小值为\_\_\_\_\_.

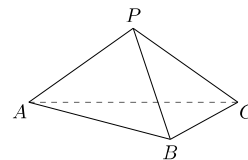
## 三、解答题

17. 解方程:  $4^x - 2^{x+2} - 12 = 0$ .

19. 设数列  $\{a_n\}$  是公差不为零的等差数列,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $S_1^2 = 9S_2$ ,  $S_4 = 4S_2$ , 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

20. 某村计划建造一个室内面积为  $800 \text{ m}^2$  的矩形蔬菜温室. 在温室内, 沿左、右两侧与后侧内墙各保留  $1 \text{ m}$  宽的通道, 沿前侧内墙保留  $3 \text{ m}$  宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时? 蔬菜的种植面积最大, 最大种植面积是多少?

21. 三棱锥  $P-ABC$  中, 侧面  $PAC$  与底面  $ABC$  垂直,  $PA = PB = PC = 3$ .  
 (1) 求证:  $AB \perp BC$ ;  
 (2) 设  $AB = BC = 2\sqrt{3}$ , 求  $AC$  与平面  $PBC$  所成角的大小.



22. 设椭圆  $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$  的两个焦点是  $F_1(-c, 0)$  与  $F_2(c, 0)$ , ( $c > 0$ ), 且椭圆上存在一点  $P$ , 使得直线  $PF_1$  与  $PF_2$  垂直.  
 (1) 求实数  $m$  的取值范围;  
 (2) 设  $L$  是相应于焦点  $F_2$  的准线, 直线  $PF_2$  与  $L$  相交于点  $Q$ , 若  $\left| \frac{QF_2}{PF_2} \right| = 2 - \sqrt{3}$ , 求直线  $PF_2$  的方程.

# 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 IV 理)

## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $N = \{x \mid x = 2a, a \in M\}$ , 则集合  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $\{0\}$  (B)  $\{0, 1\}$  (C)  $\{1, 2\}$  (D)  $\{0, 2\}$
- 函数  $y = e^{2x} (x \in \mathbf{R})$  的反函数为 ( )  
(A)  $y = 2 \ln x (x > 0)$  (B)  $y = \ln(2x) (x > 0)$   
(C)  $y = \frac{1}{2} \ln x (x > 0)$  (D)  $y = \frac{1}{2} \ln 2x (x > 0)$
- 过点  $(-1, 3)$  且垂直于直线  $x - 2y + 3 = 0$  的直线方程为 ( )  
(A)  $2x + y - 1 = 0$  (B)  $2x + y - 5 = 0$   
(C)  $x + 2y - 5 = 0$  (D)  $x - 2y + 7 = 0$
- $\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i}\right)^2 =$  ( )  
(A)  $\sqrt{3} + i$  (B)  $-\sqrt{3} - i$  (C)  $\sqrt{3} - i$  (D)  $-\sqrt{3} + i$
- 不等式  $\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$  的解集为 ( )  
(A)  $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$  (B)  $\{x \mid -2 < x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$   
(C)  $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$  (D)  $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x < 3\}$
- 等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 + a_2 + a_3 = -24$ ,  $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 78$ , 则此数列前 20 项和等于 ( )  
(A) 160 (B) 180 (C) 200 (D) 220
- 对于直线  $m$ 、 $n$  和平面  $\alpha$ , 下面命题中的真命题是 ( )  
(A) 如果  $m \subset \alpha$ ,  $n \not\subset \alpha$ ,  $m$ 、 $n$  是异面直线, 那么  $n \parallel \alpha$   
(B) 如果  $m \subset \alpha$ ,  $n \not\subset \alpha$ ,  $m$ 、 $n$  是异面直线, 那么  $n$  与  $\alpha$  相交  
(C) 如果  $m \subset \alpha$ ,  $n \parallel \alpha$ ,  $m$ 、 $n$  共面, 那么  $m \parallel n$   
(D) 如果  $m \parallel \alpha$ ,  $n \parallel \alpha$ ,  $m$ 、 $n$  共面, 那么  $m \parallel n$
- 已知椭圆的中心在原点, 离心率  $e = \frac{1}{2}$ , 且它的一个焦点与抛物线  $y^2 = -4x$  的焦点重合, 则此椭圆方程为 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$   
(C)  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  (D)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
- 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师, 派到 3 个班担任班主任 (每班 1 位班主任), 要求这 3 位班主任中男、女教师都要有, 则不同的选派方案共有 ( )  
(A) 210 种 (B) 420 种 (C) 630 种 (D) 840 种

- 已知球的表面积为  $20\pi$ , 球面上有  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点. 如果  $AB = AC = 2$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ , 则球心到平面  $ABC$  的距离为 ( )  
(A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 2
- $\triangle ABC$  中,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分别为  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的对边. 如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$  成等差数列,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3}{2}$ , 那么  $b =$  ( )  
(A)  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  (B)  $1 + \sqrt{3}$  (C)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$  (D)  $2 + \sqrt{3}$
- 设函数  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  为奇函数,  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(x+2) = f(x) + f(2)$ , 则  $f(5) =$  ( )  
(A) 0 (B) 1 (C)  $\frac{5}{2}$  (D) 5

## 二、填空题

- $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$  展开式中  $x^5$  的系数为\_\_\_\_\_.
- 向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = -4$ , 且  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  夹角的余弦值等于\_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x (x \in \mathbf{R})$  的最大值等于\_\_\_\_\_.
- 设  $x, y$  满足约束条件: 
$$\begin{cases} x + y \leq 1, \\ y \leq x, \\ y \geq 0, \end{cases}$$
 则  $z = 2x + y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 已知  $\alpha$  为第二象限角, 且  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , 求  $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1}$  的值.

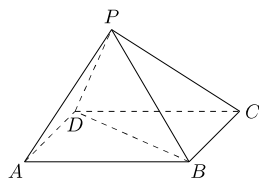
- 求函数  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2$  在  $[0, 2]$  上的最大值和最小值.

- 某同学参加科普知识竞赛, 需回答三个问题. 竞赛规则规定: 每题回答正确得 100 分, 回答不正确得 -100. 假设这名同学每题回答正确的概率均为 0.8, 且各题回答正确与否相互之间没有影响.

- 求这名同学回答这三个问题的总得分  $\xi$  的概率分布和数学期望;
- 求这名同学总得分不为负分 (即  $\xi \geq 0$ ) 的概率.

20. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $AB = 8$ ,  $AD = 4\sqrt{3}$ , 侧面  $PAD$  为等边三角形, 并且与底面所成二面角为  $60^\circ$ .

- (1) 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积;
- (2) 证明:  $PA \perp BD$ .



21. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 1$ ,  $b > 0$ ) 的焦点距为  $2c$ , 直线  $l$  过点  $(a, 0)$  和  $(0, b)$ , 且点  $(1, 0)$  到直线  $l$  的距离与点  $(-1, 0)$  到直线  $l$  的距离之和  $s \geq \frac{4}{5}c$ . 求双曲线的离心率  $e$  的取值范围.

22. 已知函数  $f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$ , 将满足  $f'(x) = 0$  的所有正数  $x$  从小到大排成数列  $\{x_n\}$ .

- (1) 证明数列  $\{f(x_n)\}$  为等比数列;
- (2) 记  $S_n$  是数列  $\{x_n f(x_n)\}$  的前  $n$  项和, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ .

# 2004 普通高等学校招生考试 (全国卷 IV 文)

## 一、选择题

1. 设集合  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $M = \{0, 3, 5\}$ ,  $N = \{1, 4, 5\}$ , 则  $M \cap (\complement_U N) =$  ( )  
(A)  $\{5\}$  (B)  $\{0, 3\}$  (C)  $\{0, 2, 3, 5\}$  (D)  $\{0, 1, 3, 4, 5\}$
2. 函数  $y = e^{2x} (x \in \mathbf{R})$  的反函数为 ( )  
(A)  $y = 2 \ln x (x > 0)$  (B)  $y = \ln(2x) (x > 0)$   
(C)  $y = \frac{1}{2} \ln x (x > 0)$  (D)  $y = \frac{1}{2} \ln 2x (x > 0)$
3. 正三棱柱侧面的一条对角线长为 2, 且与底面成  $45^\circ$  角, 则此三棱柱的体积为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (B)  $\sqrt{6}$  (C)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$  (D)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
4. 函数  $y = (x+1)^2(x-1)$  在  $x=1$  处的导数等于 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
5. 为了得到函数  $y = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$  的图象, 可以把函数  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  的图象 ( )  
(A) 向左平移 3 个单位长度 (B) 向右平移 3 个单位长度  
(C) 向左平移 1 个单位长度 (D) 向右平移 1 个单位长度
6. 等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 + a_2 + a_3 = -24$ ,  $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 78$ , 则此数列前 20 项和等于 ( )  
(A) 160 (B) 180 (C) 200 (D) 220
7. 已知函数  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$  与  $y = kx$  的图象有公共点 A, 且点 A 的横坐标为 2, 则  $k =$  ( )  
(A)  $-\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$
8. 已知圆 C 的半径为 2, 圆心在 x 轴的正半轴上, 直线  $3x + 4y + 4 = 0$  与圆 C 相切, 则圆 C 的方程为 ( )  
(A)  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  (B)  $x^2 + y^2 + 4x = 0$   
(C)  $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$  (D)  $x^2 + y^2 - 4x = 0$
9. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师, 派到 3 个班担任班主任 (每班 1 位班主任), 要求这 3 位班主任中男、女教师都要有, 则不同的选派方案共有 ( )  
(A) 210 种 (B) 420 种 (C) 630 种 (D) 840 种
10. 函数  $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) (x \in \mathbf{R})$  的最小值等于 ( )  
(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D)  $-\sqrt{5}$

11. 已知球的表面积为  $20\pi$ , 球面上有 A、B、C 三点. 如果  $AB = AC = 2$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ , 则球心到平面 ABC 的距离为 ( )  
(A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 2
12.  $\triangle ABC$  中, a、b、c 分别为  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的对边. 如果 a、b、c 成等差数列,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3}{2}$ , 那么  $b =$  ( )  
(A)  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$  (B)  $1+\sqrt{3}$  (C)  $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$  (D)  $2+\sqrt{3}$

## 二、填空题

13.  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$  展开式中  $x^5$  的系数为\_\_\_\_\_.
14. 已知函数  $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x+\pi}{A} (A > 0)$  的最小正周期为  $3\pi$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_.
15. 向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = -4$ , 且  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  夹角的余弦值等于\_\_\_\_\_.
16. 设  $x, y$  满足约束条件:  $\begin{cases} x+y \leq 1, \\ y \leq x, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 已知  $\alpha$  为第二象限角, 且  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , 求  $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1}$  的值.

18. 已知数列  $\{a_n\}$  为等比数列,  $a_2 = 6$ ,  $a_5 = 162$ .  
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 设  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 证明  $\frac{S_n \cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2} \leq 1$ .

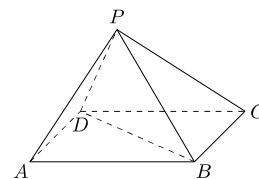
19. 已知直线  $l_1$  为曲线  $y = x^2 + x - 2$  在点 (1, 0) 处的切线,  $l_2$  为该曲线的另一条切线, 且  $l_1 \perp l_2$ .  
(1) 求直线  $l_2$  的方程;  
(2) 求由直线  $l_1$ 、 $l_2$  和 x 轴所围成的三角形的面积.

20. 某同学参加科普知识竞赛, 需回答 3 个问题. 竞赛规则规定: 答对第一、二、三问题分别得 100 分、100 分、200 分, 答错得零分. 假设这名同学答对第一、二、三个问题的概率分别为 0.8、0.7、0.6, 且各题答对与否相互之间没有影响.

- (1) 求这名同学得 300 分的概率;
- (2) 求这名同学至少得 300 分的概率.

21. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $AB=8$ ,  $AD=4\sqrt{3}$ , 侧面  $PAD$  为等边三角形, 并且与底面所成二面角为  $60^\circ$ .

- (1) 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积;  
(2) 证明:  $PA \perp BD$ .



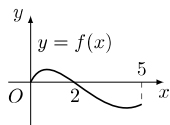
22. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 1, b > 0$ ) 的焦距为  $2c$ , 直线  $l$  过点  $(a, 0)$  和  $(0, b)$ , 且点  $(1, 0)$  到直线  $l$  的距离与点  $(-1, 0)$  到直线  $l$  的距离之和  $s \geq \frac{4}{5}c$ . 求双曲线的离心率  $e$  的取值范围.



## 2004 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

### 一、填空题

1. 若  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 则  $\tan \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) =$ \_\_\_\_\_.
2. 设抛物线的顶点坐标为  $(2, 0)$ , 准线方程为  $x = -1$ , 则它的焦点坐标为\_\_\_\_\_.
3. 设集合  $A = \{5, \log_2(a+3)\}$ , 集合  $B = \{a, b\}$ . 若  $A \cap B = \{2\}$ , 则  $A \cup B =$ \_\_\_\_\_.
4. 设等比数列  $\{a_n\}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) 的公比  $q = -\frac{1}{2}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) = \frac{8}{3}$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_.
5. 设奇函数  $f(x)$  的定义域为  $[-5, 5]$ . 若当  $x \in [0, 5]$  时,  $f(x)$  的图象如右图, 则不等式  $f(x) < 0$  的解是\_\_\_\_\_.



6. 已知点  $A(1, -2)$ , 若向量  $\overrightarrow{AB}$  与  $\vec{a} = (2, 3)$  同向,  $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$ , 则点  $B$  的坐标为\_\_\_\_\_.
7. 在极坐标系中, 点  $M\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  到直线  $l: \rho(2\cos\theta + \sin\theta) = 4$  的距离  $d =$ \_\_\_\_\_.
8. 圆心在直线  $2x - y - 7 = 0$  上的圆  $C$  与  $y$  轴交于两点  $A(0, -4)$ ,  $B(0, -2)$ , 则圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.
9. 若在二项式  $(x+1)^{10}$  的展开式中任取一项, 则该项的系数为奇数的概率是\_\_\_\_\_. (结果用分数表示)
10. 若函数  $f(x) = a|x-b|+2$  在  $[0, +\infty)$  上为增函数, 则实数  $a, b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
11. 教材中“坐标平面上的直线”与“圆锥曲线”两章内容体现出解析几何的本质是\_\_\_\_\_.
12. 若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的“基本量”. 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的无穷等比数列, 下列  $\{a_n\}$  的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第\_\_\_\_\_组. (写出所有符合要求的组号)  
①  $S_1$  与  $S_2$ ; ②  $a_2$  与  $S_3$ ; ③  $a_1$  与  $a_n$ ; ④  $q$  与  $a_n$ .  
其中  $n$  为大于 1 的整数,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和.

### 二、选择题

13. 在下列关于直线  $l, m$  与平面  $\alpha, \beta$  的命题中, 真命题是 ( )  
(A) 若  $l \subset \beta$  且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \perp \alpha$  (B) 若  $l \perp \beta$  且  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $l \perp \alpha$   
(C) 若  $l \perp \beta$  且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \parallel \alpha$  (D) 若  $\alpha \cap \beta = m$  且  $l \parallel m$ , 则  $l \parallel \alpha$

14. 三角方程  $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$  的解集为 ( )  
(A)  $\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$  (B)  $\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$   
(C)  $\left\{x \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$  (D)  $\{x \mid x = k\pi + (-1)^k, k \in \mathbf{Z}\}$
15. 若函数  $y = f(x)$  的图象可由函数  $y = \lg(x+1)$  的图象绕坐标原点  $O$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  得到, 则  $f(x) =$  ( )  
(A)  $10^{-x} - 1$  (B)  $10^x - 1$  (C)  $1 - 10^{-x}$  (D)  $1 - 10^x$
16. 某地 2004 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215830	200250	154676	74570	65280

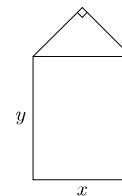
行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124620	102935	89115	76516	70436

- 若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况, 则根据表中数据, 就业形势一定是 ( )  
(A) 计算机行业好于化工行业 (B) 建筑行业好于物流行业  
(C) 机械行业最紧张 (D) 营销行业比贸易行业紧张

### 三、解答题

17. 已知复数  $z_1$  满足  $(1+i)z_1 = -1+5i$ ,  $z_2 = a-2-i$ , 其中  $i$  为虚数单位,  $a \in \mathbf{R}$ , 若  $|z_1 - \overline{z_2}| < |z_1|$ , 求  $a$  的取值范围.

18. 某单位用木料制作如图所示的框架, 框架的下部是边长分别为  $x, y$  (单位: m) 的矩形. 上部是等腰直角三角形. 要求框架围成的总面积  $8 \text{ cm}^2$ . 问  $x, y$  分别为多少 (精确到 0.001 m) 时用料最省?



19. 记函数  $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$  的定义域为  $A$ ,  $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]$  ( $a < 1$ ) 的定义域为  $D$ .  
(1) 求  $A$ ;  
(2) 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

20. 已知二次函数  $y = f_1(x)$  的图象以原点为顶点且过点  $(1, 1)$ , 反比例函数  $y = f_2(x)$  的图象与直线  $y = x$  的两个交点间距离为 8,  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的表达式;

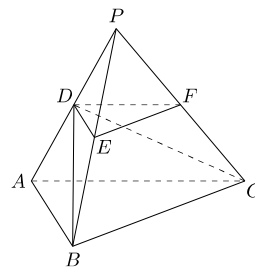
(2) 证明: 当  $a > 3$  时, 关于  $x$  的方程  $f(x) = f(a)$  有三个实数解.

21. 如图,  $P-ABC$  是底面边长为 1 的正三棱锥,  $D, E, F$  分别为棱长  $PA, PB, PC$  上的点, 截面  $DEF \parallel$  底面  $ABC$ , 且棱台  $DEF-ABC$  与棱锥  $P-ABC$  的棱长和相等. (棱长和是指多面体中所有棱的长度之和)

(1) 证明:  $P-ABC$  为正四面体;

(2) 若  $PD = \frac{1}{2}PA$ , 求二面角  $D-BC-A$  的大小; (结果用反三角函数值表示)

(3) 设棱台  $DEF-ABC$  的体积为  $V$ , 是否存在体积为  $V$  且各棱长均相等的直平行六面体, 使得它与棱台  $DEF-ABC$  有相同的棱长和? 若存在, 请具体构造出这样的一个直平行六面体, 并给出证明; 若不存在, 请说明理由.



22. 设  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$  ( $n \geq 3, n \in \mathbf{N}$ ) 是二次曲线  $C$  上的点, 且  $a_1 = |OP_1|^2, a_2 = |OP_2|^2, \dots, a_n = |OP_n|^2$  构成了一个公差为  $d$  ( $d \neq 0$ ) 的等差数列, 其中  $O$  是坐标原点. 记  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

(1) 若  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1, n = 3$ . 点  $P_1(3, 0)$  及  $S_3 = 255$ , 求点  $P_3$  的坐标; (只需写出一个)

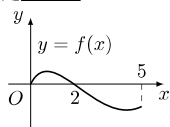
(2) 若  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ). 点  $P_1(a, 0)$ , 对于给定的自然数  $n$ , 当公差  $d$  变化时, 求  $S_n$  的最小值;

(3) 请选定一条除椭圆外的二次曲线  $C$  及  $C$  上的一点  $P_1$ , 对于给定的自然数  $n$ , 写出符合条件的点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  存在的充要条件, 并说明理由.

## 2004 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

### 一、填空题

1. 若  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 则  $\tan \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) =$ \_\_\_\_\_.
2. 设抛物线的顶点坐标为  $(2, 0)$ , 准线方程为  $x = -1$ , 则它的焦点坐标为\_\_\_\_\_.
3. 设集合  $A = \{5, \log_2(a+3)\}$ , 集合  $B = \{a, b\}$ . 若  $A \cap B = \{2\}$ , 则  $A \cup B =$ \_\_\_\_\_.
4. 设等比数列  $\{a_n\}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) 的公比  $q = -\frac{1}{2}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) = \frac{8}{3}$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_.
5. 设奇函数  $f(x)$  的定义域为  $[-5, 5]$ . 若当  $x \in [0, 5]$  时,  $f(x)$  的图象如右图, 则不等式  $f(x) < 0$  的解是\_\_\_\_\_.



6. 已知点  $A(-1, 5)$  和向量  $\vec{a} = (2, 3)$ , 若  $\vec{AB} = 3\vec{a}$ , 则点  $B$  的坐标为\_\_\_\_\_.
7. 当  $x, y$  满足不等式  $\begin{cases} 2 \leq x \leq 4, \\ y \geq 3, \\ x + y \leq 8 \end{cases}$  时, 目标函数  $k = 3x - 2y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
8. 圆心在直线  $x = 2$  上的圆  $C$  与  $y$  轴交于两点  $A(0, -4), B(0, -2)$ , 则圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.
9. 若在二项式  $(x+1)^{10}$  的展开式中任取一项, 则该项的系数为奇数的概率是\_\_\_\_\_. (结果用分数表示)
10. 若函数  $f(x) = a|x-b| + 2$  在  $[0, +\infty)$  上为增函数, 则实数  $a, b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
11. 教材中“坐标平面上的直线”与“圆锥曲线”两章内容体现出解析几何的本质是\_\_\_\_\_.
12. 若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的“基本量”. 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的无穷等比数列, 下列  $\{a_n\}$  的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第\_\_\_\_\_组. (写出所有符合要求的组号)
  - ①  $S_1$  与  $S_2$ ; ②  $a_2$  与  $S_3$ ; ③  $a_1$  与  $a_n$ ; ④  $q$  与  $a_n$ .
 其中  $n$  为大于 1 的整数,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和.

### 二、选择题

13. 在下列关于直线  $l, m$  与平面  $\alpha, \beta$  的命题中, 真命题是 ( )
  - (A) 若  $l \subset \beta$  且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \perp \alpha$
  - (B) 若  $l \perp \beta$  且  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $l \perp \alpha$
  - (C) 若  $l \perp \beta$  且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \parallel \alpha$
  - (D) 若  $\alpha \cap \beta = m$  且  $l \parallel m$ , 则  $l \parallel \alpha$
14. 三角方程  $2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 1$  的解集为 ( )
  - (A)  $\left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\}$
  - (B)  $\left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\}$
  - (C)  $\left\{ x \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\}$
  - (D)  $\left\{ x \mid x = k\pi + (-1)^k, k \in \mathbf{Z} \right\}$
15. 若函数  $y = f(x)$  的图象与函数  $y = \lg(x+1)$  的图象关于直线  $x-y=0$  对称, 则  $f(x) =$  ( )
  - (A)  $10^x - 1$
  - (B)  $1 - 10^x$
  - (C)  $1 - 10^{-x}$
  - (D)  $10^{-x} - 1$
16. 某地 2004 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215830	200250	154676	74570	65280

行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124620	102935	89115	76516	70436

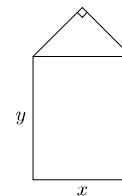
若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况, 则根据表中数据, 就业形势一定是 ( )

- (A) 计算机行业好于化工行业
- (B) 建筑行业好于物流行业
- (C) 机械行业最紧张
- (D) 营销行业比贸易行业紧张

### 三、解答题

17. 已知复数  $z_1$  满足  $(1+i)z_1 = -1+5i$ ,  $z_2 = a-2-i$ , 其中  $i$  为虚数单位,  $a \in \mathbf{R}$ , 若  $|z_1 - z_2| < |z_1|$ , 求  $a$  的取值范围.

18. 某单位用木料制作如图所示的框架, 框架的下部是边长分别为  $x, y$  (单位: m) 的矩形. 上部是等腰直角三角形. 要求框架围成的总面积  $8 \text{ cm}^2$ . 问  $x, y$  分别为多少 (精确到 0.001 m) 时用料最省?

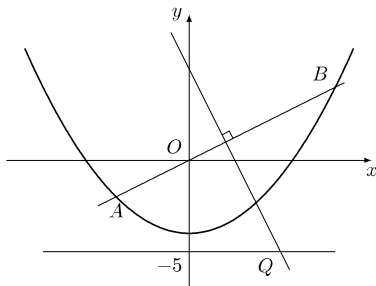


19. 记函数  $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$  的定义域为  $A$ ,  $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]$  ( $a < 1$ ) 的定义域为  $D$ .
  - (1) 求  $A$ ;
  - (2) 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

20. 如图, 直线  $y = \frac{1}{2}x$  与抛物线  $y = \frac{1}{8}x^2 - 4$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 线段  $AB$  的垂直平分线与直线  $y = -5$  交于  $Q$  点.

(1) 求点  $Q$  的坐标;

(2) 当  $P$  为抛物线上位于线段  $AB$  下方 (含  $A$ 、 $B$ ) 的动点时, 求  $\triangle OPQ$  面积的最大值.

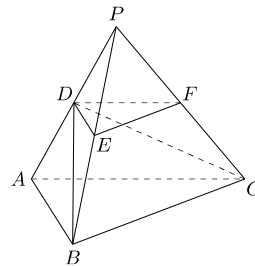


21. 如图,  $P-ABC$  是底面边长为 1 的正三棱锥,  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别为棱长  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$  上的点, 截面  $DEF \parallel$  底面  $ABC$ , 且棱台  $DEF-ABC$  与棱锥  $P-ABC$  的棱长和相等. (棱长和是指多面体中所有棱的长度之和)

(1) 证明:  $P-ABC$  为正四面体;

(2) 若  $PD = \frac{1}{2}PA$ , 求二面角  $D-BC-A$  的大小; (结果用反三角函数值表示)

(3) 设棱台  $DEF-ABC$  的体积为  $V$ , 是否存在体积为  $V$  且各棱长均相等的直平行六面体, 使得它与棱台  $DEF-ABC$  有相同的棱长和? 若存在, 请具体构造出这样的一个直平行六面体, 并给出证明; 若不存在, 请说明理由.



22. 设  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ ,  $\dots$ ,  $P_n(x_n, y_n)$  ( $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ) 是二次曲线  $C$  上的点, 且  $a_1 = |OP_1|^2$ ,  $a_2 = |OP_2|^2$ ,  $\dots$ ,  $a_n = |OP_n|^2$  构成了一个公差为  $d$  ( $d \neq 0$ ) 的等差数列, 其中  $O$  是坐标原点. 记  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

(1) 若  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ ,  $n = 3$ . 点  $P_1(3, 0)$  及  $S_3 = 162$ , 求点  $P_3$  的坐标; (只需写出一个)

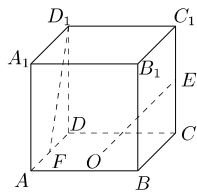
(2) 若  $C$  的方程为  $y^2 = 2px$  ( $p \neq 0$ ). 点  $P_1(0, 0)$ , 对于给定的自然数  $n$ , 证明:  $(x_1 + p)^2$ ,  $(x_2 + p)^2$ ,  $\dots$ ,  $(x_n + p)^2$  成等差数列;

(3) 若  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ). 点  $P_1(a, 0)$ , 对于给定的自然数  $n$ , 当公差  $d$  变化时, 求  $S_n$  的最小值.

# 2004 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

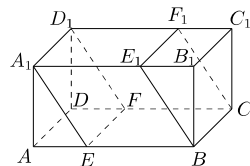
## 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位,  $\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3} =$  ( )  
(A)  $1+i$  (B)  $-1-i$  (C)  $1+3i$  (D)  $-1-3i$
2. 不等式  $\frac{x-1}{x} \geq 2$  的解集为 ( )  
(A)  $[-1, 0)$  (B)  $[-1, +\infty)$   
(C)  $(-\infty, -1]$  (D)  $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$
3. 若平面向量  $\vec{b}$  与向量  $\vec{a} = (1, -2)$  的夹角是  $180^\circ$ , 且  $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$ , 则  $\vec{b} =$  ( )  
(A)  $(-3, 6)$  (B)  $(3, -6)$  (C)  $(6, -3)$  (D)  $(-6, 3)$
4. 设  $P$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$  上一点, 双曲线的一条渐近线方程为  $3x - 2y = 0$ ,  $F_1, F_2$  分别是双曲线的左、右焦点, 若  $|PF_1| = 3$ , 则  $|PF_2| =$  ( )  
(A) 1 或 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9
5. 若函数  $f(x) = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ ) 在区间  $[a, 2a]$  上的最大值是最小值的 3 倍, 则  $a =$  ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$
6. 如图, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $O$  是底面  $ABCD$  的中心,  $E, F$  分别是  $CC_1, AD$  的中点, 那么异面直线  $OE$  和  $FD_1$  所成的角的余弦值等于 ( )



- (A)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  (B)  $\frac{\sqrt{15}}{5}$  (C)  $\frac{4}{5}$  (D)  $\frac{2}{3}$
7. 若  $P(2, -1)$  为圆  $(x-1)^2 + y^2 = 25$  的弦  $AB$  的中点, 则直线  $AB$  的方程是 ( )  
(A)  $x - y - 3 = 0$  (B)  $2x + y - 3 = 0$   
(C)  $x + y - 1 = 0$  (D)  $2x - y - 5 = 0$
8. 已知数列  $\{a_n\}$ , 那么“对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 点  $P_n(n, a_n)$  都在直线  $y = 2x + 1$  上”是“ $\{a_n\}$  为等差数列”的 ( )  
(A) 必要而不充分条件 (B) 充分而不必要条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 函数  $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$  ( $x \in [0, \pi]$ ) 为增函数的区间是 ( )  
(A)  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  (B)  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  (C)  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$  (D)  $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$
10. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 6$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 3$ . 分别过  $BC, A_1D_1$  的两个平行截面将长方体分成三部分, 其体积分别记为  $V_1 = V_{AEA_1 - DFD_1}$ ,  $V_2 = V_{EBE_1A_1 - FCF_1D_1}$ ,  $V_3 = V_{B_1E_1B - C_1F_1C}$ . 若  $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 4 : 1$ , 则截面  $A_1EFD_1$  的面积为 ( )



- (A)  $4\sqrt{10}$  (B)  $8\sqrt{3}$  (C)  $4\sqrt{13}$  (D) 16
11. 函数  $y = 3^{x^2-1}$  ( $-1 \leq x < 0$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = \sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $x \geq \frac{1}{3}$ ) (B)  $y = -\sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $x \geq \frac{1}{3}$ )  
(C)  $y = \sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $\frac{1}{3} < x \leq 1$ ) (D)  $y = -\sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $\frac{1}{3} < x \leq 1$ )
12. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  既是偶函数又是周期函数, 若  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$ , 且当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $f(x) = \sin x$ , 则  $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$  的值为 ( )  
(A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 二、填空题

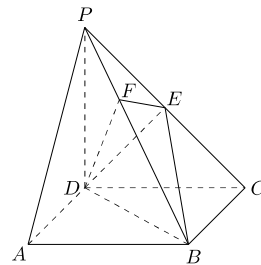
13. 某工厂生产  $A, B, C$  三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为  $2:3:5$ , 现用分层抽样方法抽出一个容量为  $n$  的样本, 样本中  $A$  种型号产品有 16 件. 那么此样本的容量  $n =$ \_\_\_\_\_.
14. 如果过两点  $A(a, 0)$  和  $B(0, a)$  的直线与抛物线  $y = x^2 - 2x - 3$  没有交点, 那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
15. 若  $(1-2x)^{2004} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2004}x^{2004}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则  $(a_0 + a_1) + (a_0 + a_2) + (a_0 + a_3) + \dots + (a_0 + a_{2004}) =$ \_\_\_\_\_. (用数字作答)
16. 从 1, 3, 5, 7 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6, 8 中任取 2 个数字, 组成没有重复数字的四位数, 其中能被 5 整除的四位数共有\_\_\_\_\_个. (用数字作答)

## 三、解答题

17. 已知  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$ .  
(1) 求  $\tan \alpha$  的值;  
(2) 求  $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$  的值.

18. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛, 设随机变量  $\xi$  表示所选 3 人中女生的人数.  
(1) 求  $\xi$  的分布列;  
(2) 求  $\xi$  的数学期望;  
(3) 求“所选 3 人中女生人数  $\xi \leq 1$ ”的概率.

19. 如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是正方形, 侧棱  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PD = DC$ ,  $E$  是  $PC$  的中点, 作  $EF \perp PB$  交  $PB$  于点  $F$ .  
(1) 证明:  $PA \parallel$  平面  $EDB$ ;  
(2) 证明:  $PB \perp$  平面  $EFD$ ;  
(3) 求二面角  $C - PB - D$  的大小.

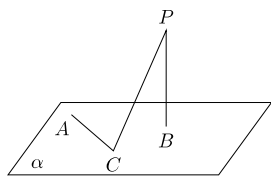


20. 已知函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x$  在  $x = \pm 1$  处取得极值.
- (1) 讨论  $f(1)$  和  $f(-1)$  是函数  $f(x)$  的极大值还是极小值;
  - (2) 过点  $A(0, 16)$  作曲线  $y = f(x)$  的切线, 求此切线方程.
21. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  和数列  $\{a_n\}$  满足下列条件:  $a_1 = a$ ,  $a_n = f(a_{n-1})$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ),  $a_2 \neq a_1$ ,  $f(a_n) - f(a_{n-1}) = k(a_n - a_{n-1})$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), 其中  $a$  为常数,  $k$  为非零常数.
- (1) 令  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 证明数列  $\{b_n\}$  是等比数列;
  - (2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
  - (3) 当  $|k| < 1$  时, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
22. 椭圆的中心是原点  $O$ , 它的短轴长为  $2\sqrt{2}$ , 相应于焦点  $F(c, 0)$  ( $c > 0$ ) 的准线  $l$  与  $x$  轴相交于点  $A$ ,  $|OF| = 2|FA|$ , 过点  $A$  的直线与椭圆相交于  $P$ 、 $Q$  两点.
- (1) 求椭圆的方程及离心率;
  - (2) 若  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ , 求直线  $PQ$  的方程;
  - (3) 设  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AQ}$  ( $\lambda > 1$ ), 过点  $P$  且平行于准线  $l$  的直线与椭圆相交于另一点  $M$ , 证明  $\overrightarrow{FM} = -\lambda \overrightarrow{FQ}$ .

# 2004 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

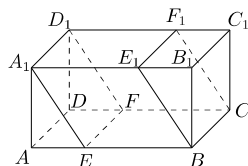
## 一、选择题

- 设集合  $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $Q = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$ , 那么下列结论正确的是 ( )  
(A)  $P \cap Q = P$  (B)  $P \cap Q \supseteq Q$  (C)  $P \cup Q = Q$  (D)  $P \cap Q \subsetneq P$
- 不等式  $\frac{x-1}{x} \geq 2$  的解集为 ( )  
(A)  $[-1, 0)$  (B)  $[-1, +\infty)$   
(C)  $(-\infty, -1]$  (D)  $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$
- 对任意实数  $a, b, c$  在下列命题中, 真命题是 ( )  
(A) “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的必要条件 (B) “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的必要条件  
(C) “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的充分条件 (D) “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的充分条件
- 若平面向量  $\vec{b}$  与向量  $\vec{a} = (1, -2)$  的夹角是  $180^\circ$ , 且  $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$ , 则  $\vec{b} =$  ( )  
(A)  $(-3, 6)$  (B)  $(3, -6)$  (C)  $(6, -3)$  (D)  $(-6, 3)$
- 设  $P$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$  上一点, 双曲线的一条渐近线方程为  $3x - 2y = 0$ ,  $F_1, F_2$  分别是双曲线的左、右焦点, 若  $|PF_1| = 3$ , 则  $|PF_2| =$  ( )  
(A) 1 或 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9
- 若函数  $f(x) = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ ) 在区间  $[a, 2a]$  上的最大值是最小值的 3 倍, 则  $a =$  ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$
- 若过定点  $M(-1, 0)$  且斜率为  $k$  的直线与圆  $x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$  在第一象限内的部分有交点, 则  $k$  的取值范围是 ( )  
(A)  $0 < k < \sqrt{5}$  (B)  $-\sqrt{5} < k < 0$   
(C)  $0 < k < \sqrt{13}$  (D)  $0 < k < 5$
- 如图, 定点  $A$  和  $B$  都在平面  $\alpha$  内, 定点  $P \notin \alpha$ ,  $PB \perp \alpha$ ,  $C$  是  $\alpha$  内异于  $A$  和  $B$  的动点, 且  $PC \perp AC$ . 那么, 动点  $C$  在平面  $\alpha$  内的轨迹是 ( )



- (A) 一条线段, 但要去掉两个点 (B) 一个圆, 但要去掉两个点  
(C) 一个椭圆, 但要去掉两个点 (D) 半圆, 但要去掉两个点

- 函数  $y = 3^{x^2-1}$  ( $-1 \leq x < 0$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = \sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $x \geq \frac{1}{3}$ ) (B)  $y = -\sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $x \geq \frac{1}{3}$ )  
(C)  $y = \sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $\frac{1}{3} < x \leq 1$ ) (D)  $y = -\sqrt{1 + \log_3 x}$  ( $\frac{1}{3} < x \leq 1$ )
- 函数  $y = 2 \sin(\frac{\pi}{6} - 2x)$  ( $x \in [0, \pi]$ ) 为增函数的区间是 ( )  
(A)  $[0, \frac{\pi}{3}]$  (B)  $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$  (C)  $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$  (D)  $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$
- 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 6$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 3$ . 分别过  $BC, A_1D_1$  的两个平行截面将长方体分成三部分, 其体积分别记为  $V_1 = V_{AEA_1-DFD_1}$ ,  $V_2 = V_{EBE_1A_1-FCF_1D_1}$ ,  $V_3 = V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$ . 若  $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 4 : 1$ , 则截面  $A_1EFD_1$  的面积为 ( )



- (A)  $4\sqrt{10}$  (B)  $8\sqrt{3}$  (C)  $4\sqrt{13}$  (D) 16
- 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  既是偶函数又是周期函数, 若  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$ , 且当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f(x) = \sin x$ , 则  $f(\frac{5\pi}{3})$  的值为 ( )  
(A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 二、填空题

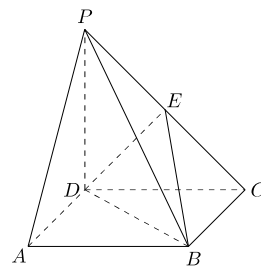
- 某工厂生产  $A, B, C$  三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为  $2 : 3 : 5$ , 现用分层抽样方法抽出一个容量为  $n$  的样本, 样本中  $A$  种型号产品有 16 件. 那么此样本的容量  $n =$ \_\_\_\_\_.
- 已知向量  $\vec{a} = (1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, -3)$ , 若  $k\vec{a} - 2\vec{b}$  与  $\vec{a}$  垂直, 则实数  $k$  等于\_\_\_\_\_.
- 如果过两点  $A(a, 0)$  和  $B(0, a)$  的直线与抛物线  $y = x^2 - 2x - 3$  没有交点, 那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 从 0, 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个数字, 组成没有重复数字的三位数, 其中能被 5 整除的三位数共有\_\_\_\_\_个. (用数字作答)

## 三、解答题

- 已知  $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{2}$ .  
(1) 求  $\tan \alpha$  的值;  
(2) 求  $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$  的值.

- 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛.  
(1) 求所选 3 人都是男生的概率;  
(2) 求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率;  
(3) 求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率.

- 如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是正方形, 侧棱  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PD = DC$ ,  $E$  是  $PC$  的中点.  
(1) 证明:  $PA \parallel$  平面  $EDB$ ;  
(2) 求  $EB$  与底面  $ABCD$  所成角的正切值.



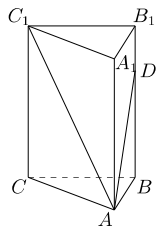
20. 设  $\{a_n\}$  是一个公差为  $d$  ( $d \neq 0$ ) 的等差数列, 它的前 10 项和  $S_{10} = 110$  且  $a_1, a_2, a_4$  成等比数列.
- (1) 证明  $a_1 = d$ ;
  - (2) 求公差  $d$  的值和数列  $\{a_n\}$  的通项公式.
21. 已知函数  $f(x) = ax^3 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) 是  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x = 1$  时  $f(x)$  取得极值  $-2$ .
- (1) 求  $f(x)$  的单调区间和极大值;
  - (2) 证明对任意  $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ , 不等式  $|f(x_1) - f(x_2)| < 4$  恒成立.
22. 椭圆的中心是原点  $O$ , 它的短轴长为  $2\sqrt{2}$ , 相应于焦点  $F(c, 0)$  ( $c > 0$ ) 的准线  $l$  与  $x$  轴相交于点  $A$ ,  $|OF| = 2|FA|$ , 过点  $A$  的直线与椭圆相交于  $P, Q$  两点.
- (1) 求椭圆的方程及离心率;
  - (2) 若  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ , 求直线  $PQ$  的方程.



# 2004 普通高等学校招生考试 (浙江卷理)

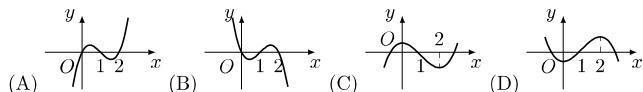
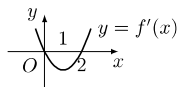
## 一、选择题

- 若  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $M = \{1, 2\}$ ,  $N = \{2, 3\}$ , 则  $\complement_U(M \cup N) =$  ( )  
(A)  $\{1, 2, 3\}$  (B)  $\{2\}$  (C)  $\{1, 3, 4\}$  (D)  $\{4\}$
- 点  $P$  从  $(1, 0)$  出发, 沿单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  逆时针方向运动  $\frac{2\pi}{3}$  弧长到达  $Q$  点, 则  $Q$  的坐标为 ( )  
(A)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  (B)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  (C)  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  (D)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为 2, 若  $a_1, a_3, a_4$  成等比数列, 则  $a_2 =$  ( )  
(A)  $-4$  (B)  $-6$  (C)  $-8$  (D)  $-10$
- 曲线  $y^2 = 4x$  关于直线  $x = 2$  对称的曲线方程是 ( )  
(A)  $y^2 = 8 - 4x$  (B)  $y^2 = 4x - 8$  (C)  $y^2 = 16 - 4x$  (D)  $y^2 = 4x - 16$
- 设  $z = x - y$ , 式中变量  $x$  和  $y$  满足条件  $\begin{cases} x + y - 3 \geq 0, \\ x - 2y \geq 0, \end{cases}$  则  $z$  的最小值为 ( )  
(A) 1 (B)  $-1$  (C) 3 (D)  $-3$
- 已知复数  $z_1 = 3 + 4i$ ,  $z_2 = t + i$ , 且  $z_1 \cdot \bar{z}_2$  是实数, 则实数  $t =$  ( )  
(A)  $\frac{3}{4}$  (B)  $\frac{4}{3}$  (C)  $-\frac{4}{3}$  (D)  $-\frac{3}{4}$
- 若  $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$  展开式中存在常数项, 则  $n$  的值可以是 ( )  
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12
- 在  $\triangle ABC$  中, “ $A > 30^\circ$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也必要条件
- 若椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 线段  $F_1F_2$  被抛物线  $y^2 = 2bx$  的焦点分成  $5:3$  两段, 则此椭圆的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{16}{17}$  (B)  $\frac{4\sqrt{17}}{17}$  (C)  $\frac{4}{5}$  (D)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中已知  $AB = 1$ ,  $D$  在棱  $BB_1$  上, 且  $BD = 1$ , 若  $AD$  与平面  $AA_1C_1C$  所成的角为  $\alpha$ , 则  $\alpha =$  ( )



- (A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{4}$  (D)  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$

- 设  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数,  $y = f'(x)$  的图象如图所示, 则  $y = f(x)$  的图象最有可能的是 ( )



- 若  $f(x)$  和  $g(x)$  都是定义在实数集  $\mathbf{R}$  上的函数, 且方程  $x - f[g(x)] = 0$  有实数解, 则  $g[f(x)]$  不可能是 ( )  
(A)  $x^2 + x - \frac{1}{5}$  (B)  $x^2 + x + \frac{1}{5}$  (C)  $x^2 - \frac{1}{5}$  (D)  $x^2 + \frac{1}{5}$

## 二、填空题

- 已知  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$  则不等式  $x + (x+2) \cdot f(x+2) \leq 5$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 已知平面上三点  $A, B, C$  满足  $|\overrightarrow{AB}| = 3$ ,  $|\overrightarrow{BC}| = 4$ ,  $|\overrightarrow{CA}| = 5$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$  的值等于\_\_\_\_\_.
- 设坐标平面内有一个质点从原点出发, 沿  $x$  轴跳动, 每次向正方向或负方向跳 1 个单位, 经过 5 次跳动质点落在点  $(3, 0)$  (允许重复过此点) 处, 则质点不同的运动方法共有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)
- 已知平面  $\alpha$  和平面  $\beta$  交于直线  $l$ ,  $P$  是空间一点,  $PA \perp \alpha$ , 垂足为  $A$ ,  $PB \perp \beta$ , 垂足为  $B$ , 且  $PA = 1$ ,  $PB = 2$ , 若点  $A$  在  $\beta$  内的射影与点  $B$  在  $\alpha$  内的射影重合, 则点  $P$  到  $l$  的距离为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

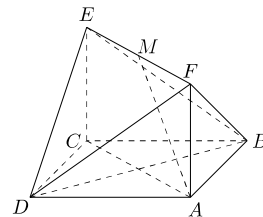
- 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\cos A = \frac{1}{3}$ .  
(1) 求  $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A$  的值;  
(2) 若  $a = \sqrt{3}$ , 求  $bc$  的最大值.

- 盒子中有大小相同的球 10 个, 其中标号为 1 的球 3 个, 标号为 2 的球 4 个, 标号为 5 的球 3 个, 第一次从盒子中任取 1 个球, 放回后第二次再任取 1 个球 (假设取到每个球的可能性都相同). 记第一次与第二次取到球的标号之和为  $\varepsilon$ .

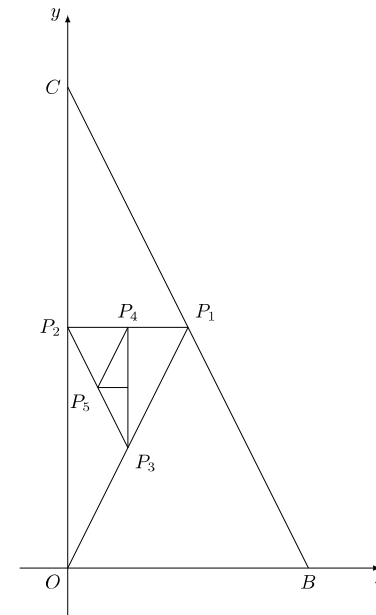
- 求随机变量  $\varepsilon$  的分布列;
- 求随机变量  $\varepsilon$  的期望  $E\varepsilon$ .

- 如图, 已知正方形  $ABCD$  和矩形  $ACEF$  所在的平面互相垂直,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AF = 1$ ,  $M$  是线段  $EF$  的中点.

- 求证:  $AM \parallel$  平面  $BDE$ ;
- 求二面角  $A - DF - B$  的大小.



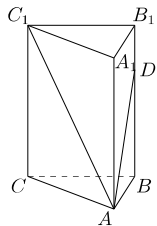
20. 设曲线  $y = e^{-x}$  ( $x \geq 0$ ) 在点  $M(t, e^{-t})$  处的切线  $l$  与  $x$  轴  $y$  轴所围成的三角形面积为  $S(t)$ .
- (1) 求切线  $l$  的方程;
  - (2) 求  $S(t)$  的最大值.
21. 已知双曲线的中心在原点, 右顶点为  $A(1, 0)$  点  $P, Q$  在双曲线的右支上, 点  $M(m, 0)$  到直线  $AP$  的距离为 1.
- (1) 若直线  $AP$  的斜率为  $k$ , 且  $|k| \in \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right]$ , 求实数  $m$  的取值范围;
  - (2) 当  $m = \sqrt{2} + 1$  时,  $\triangle APQ$  的内心恰好是点  $M$ , 求此双曲线的方程.
22. 如图,  $\triangle OBC$  的个顶点坐标分别为  $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, 2)$ , 设  $P$  为线段  $BC$  的中点,  $P_2$  为线段  $CO$  的中点,  $P_3$  为线段  $OP_1$  的中点, 对于每一个正整数  $n$ ,  $P_{n+3}$  为线段  $P_n P_{n+1}$  的中点, 令  $P_n$  的坐标为  $(x_n, y_n)$ ,  $a_n = \frac{1}{2}y_n + y_{n+1} + y_{n+2}$ .
- (1) 求  $a_1, a_2, a_3$  及  $a_n$ ;
  - (2) 证明  $y_{n+4} = 1 - \frac{y_n}{4}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ;
  - (3) 若记  $b_n = y_{4n+4} - y_{4n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 证明  $\{b_n\}$  是等比数列.



# 2004 普通高等学校招生考试 (浙江卷文)

## 一、选择题

- 若  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $M = \{1, 2\}$ ,  $N = \{2, 3\}$ , 则  $\complement_U(M \cup N) =$  ( )  
(A)  $\{1, 2, 3\}$  (B)  $\{4\}$  (C)  $\{1, 3, 4\}$  (D)  $\{2\}$
- 直线  $y = 2$  与直线  $x + y - 2 = 0$  的夹角是 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\frac{3\pi}{4}$
- 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为 2, 若  $a_1, a_3, a_4$  成等比数列, 则  $a_2 =$  ( )  
(A) -4 (B) -6 (C) -8 (D) -10
- 已知向量  $\vec{a} = (3, 4)$ ,  $\vec{b} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$ , 且  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则  $\tan \alpha =$  ( )  
(A)  $\frac{3}{4}$  (B)  $-\frac{3}{4}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $-\frac{4}{3}$
- 点  $P$  从  $(1, 0)$  出发, 沿单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  逆时针方向运动  $\frac{2\pi}{3}$  弧长到达  $Q$  点, 则  $Q$  的坐标为 ( )  
(A)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  (B)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  (C)  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  (D)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- 曲线  $y^2 = 4x$  关于直线  $x = 2$  对称的曲线方程是 ( )  
(A)  $y^2 = 8 - 4x$  (B)  $y^2 = 4x - 8$  (C)  $y^2 = 16 - 4x$  (D)  $y^2 = 4x - 16$
- 若  $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$  展开式中存在常数项, 则  $n$  的值可以是 ( )  
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12
- 在  $\triangle ABC$  中, “ $A > 30^\circ$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 若函数  $f(x) = \log_a(x + 1)$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) 的定义域和值域都是  $[0, 1]$ , 则  $a =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D) 2
- 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中已知  $AB = 1$ ,  $D$  在棱  $BB_1$  上, 且  $BD = 1$ , 若  $AD$  与平面  $AA_1C_1C$  所成的角为  $\alpha$ , 则  $\alpha =$  ( )



- (A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{4}$  (D)  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$
- 若椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 线段  $F_1F_2$  被点  $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$  分成 5:3 两段, 则此椭圆的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{16}{17}$  (B)  $\frac{4\sqrt{17}}{17}$  (C)  $\frac{4}{5}$  (D)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 若  $f(x)$  和  $g(x)$  都是定义在实数集  $\mathbf{R}$  上的函数, 且方程  $x - f[g(x)] = 0$  有实数解, 则  $g[f(x)]$  不可能是 ( )  
(A)  $x^2 + x - \frac{1}{5}$  (B)  $x^2 + x + \frac{1}{5}$  (C)  $x^2 - \frac{1}{5}$  (D)  $x^2 + \frac{1}{5}$

## 二、填空题

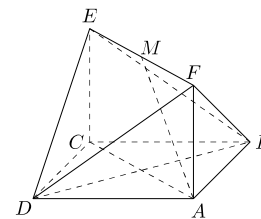
- 已知  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$  则不等式  $x + (x + 2) \cdot f(x + 2) \leq 5$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 已知平面上三点  $A, B, C$  满足  $|\vec{AB}| = 3$ ,  $|\vec{BC}| = 4$ ,  $|\vec{CA}| = 5$ , 则  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$  的值等于\_\_\_\_\_.
- 已知平面  $\alpha \perp \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = l$ ,  $P$  是空间一点, 且  $P$  到  $\alpha, \beta$  的距离分别是 1, 2, 则点  $P$  到  $l$  的距离为\_\_\_\_\_.
- 设坐标平面内有一个质点从原点出发, 沿  $x$  轴跳动, 每次向正方向或负方向跳 1 个单位, 经过 5 次跳动质点落在点  $(3, 0)$  (允许重复过此点) 处, 则质点不同的运动方法共有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)

## 三、解答题

- 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $S_n = \frac{1}{3}(a_n - 1)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).  
(1) 求  $a_1, a_2$ ;  
(2) 求证数列  $\{a_n\}$  是等比数列.

- 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\cos A = \frac{1}{3}$ .  
(1) 求  $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A$  的值;  
(2) 若  $a = \sqrt{3}$ , 求  $bc$  的最大值.

- 如图, 已知正方形  $ABCD$  和矩形  $ACEF$  所在的平面互相垂直,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AF = 1$ ,  $M$  是线段  $EF$  的中点.  
(1) 求证:  $AM \parallel$  平面  $BDE$ ;  
(2) 求证:  $AM \perp$  平面  $BDF$ ;  
(3) 求二面角  $A - DF - B$  的大小.



20. 某地区有 5 个工厂, 由于用电紧缺, 规定每个工厂在一周内必须选择某一天停电 (选哪一天是等可能的). 假定工厂之间的选择互不影响.
- (1) 求 5 个工厂均选择星期日停电的概率;
- (2) 求至少有两个工厂选择同一天停电的概率.
21. 已知  $a$  为实数,  $f(x) = (x^2 - 4)(x - a)$ .
- (1) 求导数  $f'(x)$ ;
- (2) 若  $f'(-1) = 0$ , 求  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上的最大值和最小值;
- (3) 若  $f(x)$  在  $(-\infty, -2]$  和  $[2, +\infty)$  上都是递增的, 求  $a$  的取值范围.
22. 已知双曲线的中心在原点, 右顶点为  $A(1, 0)$  点  $P$ 、 $Q$  在双曲线的右支上, 点  $M(m, 0)$  到直线  $AP$  的距离为 1.
- (1) 若直线  $AP$  的斜率为  $k$ , 且  $|k| \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ , 求实数  $m$  的取值范围;
- (2) 当  $m = \sqrt{2} + 1$  时,  $\triangle APQ$  的内心恰好是点  $M$ , 求此双曲线的方程.