1978 普通高等学校招生考试 (全国卷)

1. (1) 分解因式: $x^2-4xy+4y^2-4z^2$.

(2) 已知正方形的边长为 a, 求侧面积等于这个正方形的面积, 高等于这个正方形边长的直圆柱体的体积.

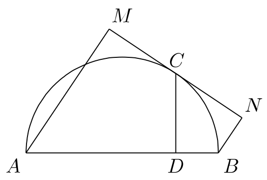
(3) 求函数 $y=\sqrt{\lg(2+x)}$ 的定义域.

(4) 不查表求 $\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\cos 55^\circ$ 的值.

(5) 化简: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{4ab^{-1}}\right)^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$.

2. 已知方程 $kx^2+y^2=4$, 其中 k 为实数. 对于不同范围的 k 值, 分别指出方程所代表图形的内形, 并画出显示其数量特征的草图.

3. 如图, AB 是半圆的直径, C 是半圆上一点, 直线 MN 切半圆于 C 点, $AM\perp MN$ 于 M 点, $BN\perp MN$ 于 N 点, $CD\perp AB$ 于 D 点, 求证:
(1) $CD=CM=CN$;
(2) $CD^2=AM\cdot BN$.



4. 已知 $\log_{18}9=a$, $18^b=5$, 求 $\log_{36}45$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角的大小成等差数列, $\tan A\tan C=2+\sqrt{3}$, 求角 A, B, C 的大小. 又已知顶点 C 的对边 c 上的高等于 $4\sqrt{3}$, 求三角形各边 a, b, c 的长. (提示: 必要时可验证 $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

6. 已知 α, β 为锐角, $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$, $3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$. 求证: $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

7. 已知函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$ (m 为实数).
(1) m 是什么数值时, y 的极值是 0?
(2) 求证: 不论 m 是什么数值, 函数图象 (即抛物线) 的顶点都在同一条直线 L_1 上, 画出 $m=-1$、0、1 时抛物线的草图, 来检验这个结论;
(3) 平行于 L_1 的直线中, 哪些与抛物线相交, 哪些不相交? 求证: 任一条平行于 L_1 而与抛物线相交的直线, 被各抛物线截出的线段都相等.

1978 普通高等学校招生考试 (备用卷)

1. (1) 分解因式: $x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$.

(2) 求 $\sin 30^\circ-\tan 0^\circ+\cot\dfrac{\pi}{4}-\cos^2\dfrac{5\pi}{6}$.

(3) 求函数 $y=\dfrac{\lg(25-5^x)}{x+1}$ 的定义域.

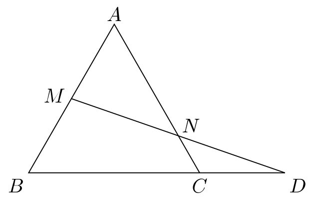
(4) 已知直圆锥体的底面半径等于 1 cm, 母线的长等于 2 cm, 求它的体积.

(5) 计算: $10\left(2+\sqrt{5}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{500}\right)^{-\frac{1}{2}}+30\left(\dfrac{125}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的值.

2. 已知两数 x_1, x_2 满足下列条件:
(1) 它们的和是等差数列 1, 3, $\cdots$ 的第 20 项;
(2) 它们的积是等比数列 2, -6, $\cdots$ 的前 4 项和, 求根为 $\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_2}$ 的方程.

3. 已知: $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AD 交 BC 的延长线于 D 点, 求证: $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BD}{CD}$.

4. 如图, CD 是 BC 的延长线, $AB=BC=CA=CD=a$, DM 与 AB, AC 分别交于 M 点和 N 点, 且 $\angle BDM=\alpha$. 求证: $BM=\dfrac{4a\tan\alpha}{\sqrt{3}+\tan\alpha}$, $CN=\dfrac{4a\tan\alpha}{\sqrt{3}-\tan\alpha}$.



5. 设 $f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$ $(p\neq 0)$. 求证:
(1) 如果 $f(x)$ 的系数满足 $p^2-4q-4(m+1)=0$, 那么 $f(x)$ 恰好是一个二次三项式的平方;
(2) 如果 $f(x)$ 与 $F(x)=(2x^2+ax+b)^2$ 表示同一个多项式, 那么 $p^2-4q-4(m+1)=0$.

6. 已知: $a\sin x+b\cos x=0$, $A\sin 2x+B\cos 2x=C$, 其中 a, b 不同时为 0, 求证: $2abA+(b^2-a^2)B+(a^2+b^2)C=0$.

7. 已知 L 为过点 $P\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ 倾斜角为 30° 的直线, 圆 C 为中心在坐标原点而半径等于 1 的圆, Q 表示顶点在原点而焦点在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8},0\right)$ 的抛物线. 设 A 为 L 和 C 在第三象限的交点, B 为 C 和 Q 在第四象限的交点.
(1) 写出直线 L、圆 C 和抛物线 Q 的方程, 并作草图;
(2) 写出线段 PA、圆弧 AB 和抛物线上 OB 一段的函数表达式;
(3) 设 P'、B' 依次为从 P、B 到 x 轴的垂足, 求由圆弧 AB 和直线段 BB'、$B'P'$、$P'P$、PA 所包含的面积.