2022 年普通高等学校招生全国统一考试

（新高考全国 II 卷）数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

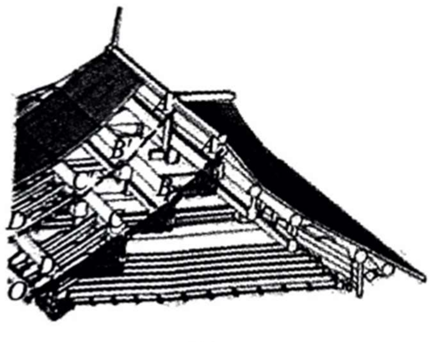
1．已知集合$A=\{-1,1,2,4\},B=\{x||x-1|\le 1\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{1,4\}$　　D．$\{-1,4\}$

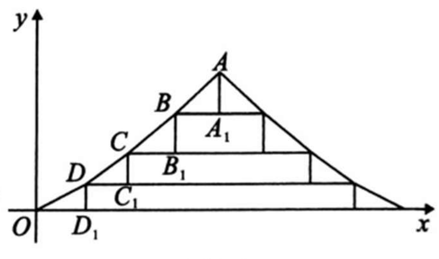
2．$(2+2i)(1-2i)=$（　　）

A．$-2+4i$　　B．$-2-4i$　　C．$6+2i$　　D．$6-2i$

3．图 1 是中国古代建筑中的举架结构，AA',BB',CC',DD'是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举，图 2 是某古代建筑屋顶截面的示意图．其中DD_1,CC_1,BB_1,AA_1是举，OD_1,DC_1,CB_1,BA_1是相等的步，相邻桁的举步之比分别为$\frac{DD_1}{OD_1}=0.5,\frac{CC_1}{DC_1}=k_1,\frac{BB_1}{CB_1}=k_2,\frac{AA_1}{BA_1}=k_3$．已知$k_1,k_2,k_3$成公差为 0.1 的等差数列，且直线$OA$的斜率为 0.725，则$k_3=$（　　）



图(1)



图(2)

A．0.75　　B．0.8　　C．0.85　　D．0.9

4．已知向量$\boldsymbol{a}=(3,4),\boldsymbol{b}=(1,0),\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，若$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$，则实数$t=$（　　）

A．-6　　B．-5　　C．5　　D．6

5．甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻，则不同的排列方式共有（　　）

A．12 种　　B．24 种　　C．36 种　　D．48 种

6．若$sin(\alpha+\beta)+cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\,cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)sin\,\beta$，则（　　）

A．$tan(\alpha-\beta)=1$　　B．$tan(\alpha+\beta)=1$

C．$tan(\alpha-\beta)=-1$　　D．$tan(\alpha+\beta)=-1$

7．已知正三棱台的高为 1，上下底面的边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A．100π　　B．128π　　C．144π　　D．192π

8．若函数$f(x)$的定义域为 R，且$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y),f(1)=1$，

则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　　）

A．-3　　B．-2　　C．0　　D．1

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．已知函数$f(x)=sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象关于点$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$中心对称，则（　　）

A．$f(x)$在$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$单调递减

B．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$有两个极值点

C．直线$x=\frac{7\pi}{6}$是曲线$y=f(x)$的对称轴

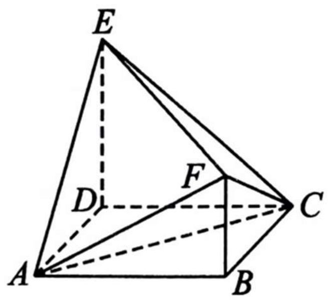
D．直线$y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$是曲线$y=f(x)$的切线

10．已知 O 为坐标原点，过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线与 C 交于 A，B 两点，其中 A 在第一象限，点$M(p,0)$，若$|AF|=|AM|$，则（　　）

A．直线AB的斜率为$2\sqrt{6}$　　　B．$|OB|=|OF|$

C．$|AB|>4|OF|$　　　D．$\angle OAM+\angle OBM<180°$

11．如图，四边形$ABCD$为正方形，$ED\perp$平面$ABCD$，$FB\parallel ED,AB=ED=2FB$，记三棱锥$E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$的体积分别为V_1,V_2,V_3，则（　　）



A．$V_3=2V_2$　　　B．$V_3=V_1$　　　C．$V_3=V_1+V_2$　　　D．$2V_3=3V_1$

12．若实数 x，y 满足$x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

A．$x+y\le 1$　　　B．$x+y\ge -2$　　　C．$x^2+y^2\le 2$　　　D．$x^2+y^2\ge 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．随机变量 X 服从正态分布$N(2,\sigma^2)$，若$P(2<X\le 2.5)=0.36$，则$P(X>2.5)=$ ＿＿＿＿＿＿．

14．曲线$y=ln|x|$过坐标原点的两条切线方程为＿＿＿＿＿＿，＿＿＿＿＿＿．

15．设点$A(-2,3),B(0,a)$，若直线AB关于$y=a$对称的直线与圆$(x+3)^2+(y+2)^2=1$有公共点，则 a 的取值范围为＿＿＿＿＿＿．

16．已知直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$在第一象限交于 A，B 两点，l 与 x 轴、y 轴分别相交于 M,N两点，且$|MA|=|NB|,|MN|=2\sqrt{3}$，则 l的方程为＿＿＿＿＿．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（10 分）已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为公比为 2 的等比数列，且$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$．

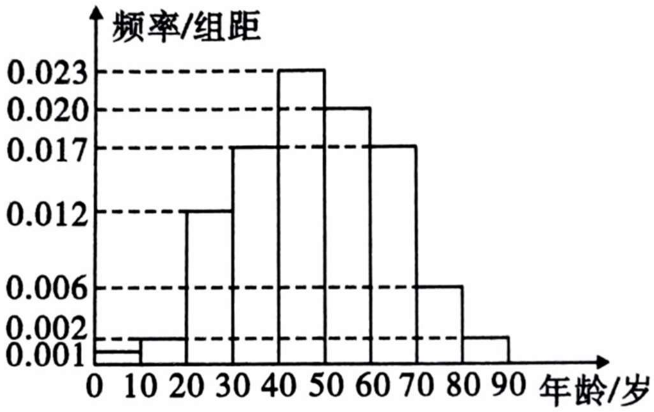
（1）证明：$a_1=b_1$；

（2）求集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\le m\le 500\}$中元素个数．

18．（12 分）记△ABC的内角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，分别以 a，b，c 为边长的三个正三角形的面积分别为S_1,S_2,S_3，且$S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin B=\frac{1}{3}$．

（1）求△ABC的面积；　　（2）若$\sin A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{3}$，求 b．

19．(12 分) 在某地区进行某种疾病调查，随机调查了 100 位这种疾病患者的年龄，得到如下样本数据频率分布直方图．



(1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄（同一组数据用该组区间的中点值作代表)；

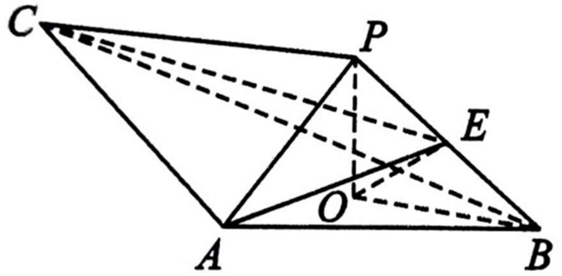
(2) 估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间$[20,70)$的概率；

(3) 已知该地区这种疾病患者的患病率为0.1%，该地区年龄位于区间$[40,50)$的人口数占该地区总人口数的16%，从该地区选出一人，若此人的年龄位于区间$[40,50)$，求此人患这种疾病的概率（以样本数据中患者的年龄位于各区间的频率作为患者的年龄位于该区间的概率，精确到 0.0001）．

20．(12 分) 如图，PO是三棱锥$P-ABC$的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 为PB的中点．

(1) 证明：$OE\parallel$平面PAC；

(2) 若$\angle ABO=\angle CBO=30^{\circ}$, $PO=3$, $PA=5$, 求二面角$C-AE-B$正余弦值．



21．(12 分) 设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F(2,0)$，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$．

(1) 求 C的方程；

(2) 过 F的直线与 C的两条渐近线分别交于 A，B两点，点$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$在 C上，且$x_1>x_2>0,y_1>0$．过 P且斜率为$-\sqrt{3}$的直线与过 Q且斜率为$\sqrt{3}$的直线交于点 M.从下面①②③中选取两个作为条件，证明另一个成立．

①M在AB上；②$PQ\parallel AB$；③$|MA|=|MB|$．

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．

22．（12 分）已知函数$f(x)=xe^{ax}-e^{x}$．

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求 a 的取值范围；

（3）设$n\in N^{*}$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^{2}+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^{2}+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}>ln(n+1)$．

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（新高考全国 II 卷）

数学

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. B　2. D　3. D　4. C　5. B　6. C　7. A　8. A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. AD　10. ACD　11. CD　12. BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 0.14

14. ①. $y=\frac{1}{e}x$　　②. $y=-\frac{1}{e}x$

15. $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$

16. $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，所以，$\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1\\a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d)\end{cases}$，即

解得，$b_1 = a_1 = \frac{d}{2}$，所以原命题得证．

（2）9．

18.（1）$\frac{\sqrt{2}}{8}$

（2）$\frac{1}{2}$

19.（1）$4_{4.65}$岁；

（2）0.89；

（3）0.0014．

20.（1）证明：连接BO并延长交AC于点D，连接OA、PD，

因为PO是三棱锥$P-ABC$的高，所以$PO\perp$平面ABC，$AO, BO \subset$平面ABC，

所以$PO\perp AO$、$PO\perp BO$，

又$PA = PB$，所以$\triangle POA \cong \triangle POB$，即$OA = OB$，所以$\angle OAB = \angle OBA$，

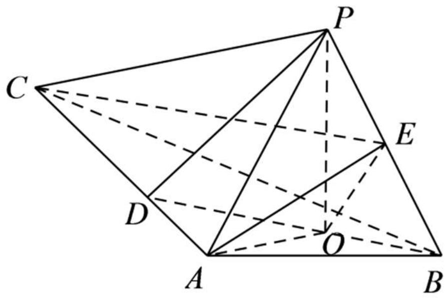
又$AB \perp AC$，即$\angle BAC = 90°$，所以$\angle OAB + \angle OAD = 90°$，$\angle OBA + \angle ODA = 90°$，

所以$\angle ODA = \angle OAD$

所以$AO = DO$，即$AO = DO = OB$，所以O为BD的中点，又E为PB的中点，所以$OE_{//}PD$，

又$OE \not\subset$平面PAC，$PD \subset$平面PAC，

所以$OE_{//}$平面PAC



（2）$\frac{11}{13}$

21.（1）$x^2-\frac{y^2}{3}=1$

（2）由已知得直线PQ的斜率存在且不为零，直线AB的斜率不为零，

若选由①②推③或选由②③推①：由②成立可知直线AB的斜率存在且不为零；

若选①③推②，则M为线段AB的中点，假若直线AB的斜率不存在，则由双曲线的对称性可知M在x轴上，即为焦点F,此时由对称性可知P、Q关于x轴对称，与从而$x_1=x_2$，已知不符；

总之，直线AB的斜率存在且不为零.

设直线AB的斜率为k,直线AB方程为$y=k(x-2)$,

则条件①M在AB上，等价于$y_0=k(x_0-2)\Leftrightarrow ky_0=k^2(x_0-2)$；

两渐近线的方程合并为$3x^2-y^2=0$,

联立消去y并化简整理得：$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2=0$

设$A(x_3,y_3),B(x_3,y_4)$,线段中点为$N(x_N,y_N)$,则$x_N=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{2k^2}{k^2-3},y_N=k(x_N-2)=\frac{6k}{k^2-3}$,

设$M(x_0,y_0)$,

则条件③$|AM|=|BM|$等价于$(x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2=(x_0-x_4)^2+(y_0-y_4)^2$,

移项并利用平方差公式整理得:

$(x_3-x_4)[2x_0-(x_3+x_4)]+(y_3-y_4)[2y_0-(y_3+y_4)]=0$,

$[2x_0-(x_3+x_4)]+\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}[2y_0-(y_3+y_4)]=0$,即$x_0-x_N+k(y_0-y_N)=0$,

即$x_0+ky_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$;

由题意知直线PM的斜率为$-\sqrt{3}$,直线QM的斜率为$\sqrt{3}$,

$\therefore$由$y_1-y_0=-\sqrt{3}(x_1-x_0), y_2-y_0=\sqrt{3}(x_2-x_0)$,

$\therefore y_1-y_2=-\sqrt{3}(x_1+x_2-2x_0)$,

所以直线PQ的斜率$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{\sqrt{3}(x_1+x_2-2x_0)}{x_1-x_2}$,

直线PM: $y=-\sqrt{3}(x-x_0)+y_0$,即$y=y_0+\sqrt{3}x_0-\sqrt{3}x$,

代入双曲线的方程$3x^2-y^2-3=0$,即$\left(\sqrt{3}x+y\right)\left(\sqrt{3}x-y\right)=3$中,

得:$\left(y_0+\sqrt{3}x_0\right)\left[2\sqrt{3}x-\left(y_0+\sqrt{3}x_0\right)\right]=3$,

解得P的横坐标:$x_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0+\sqrt{3}x_0}+y_0+\sqrt{3}x_0\right)$,

同理:$x_2=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0-\sqrt{3}x_0}+y_0-\sqrt{3}x_0\right)$,

$\therefore x_1-x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3y_0}{y_0^2-3x_0^2}+y_0\right), x_1+x_2-2x_0=-\frac{3x_0}{y_0^2-3x_0^2}-x_0$,

$\therefore m=\frac{3x_0}{y_0}$,

$\therefore$条件②$PQ//AB$等价于$m=k \Leftrightarrow ky_0=3x_0$,

综上所述:

条件①M在AB上,等价于$ky_0=k^2(x_0-2)$;

条件②$PQ//AB$等价于$ky_0=3x_0$;

条件③$|AM|=|BM|$等价于$x_0+ky_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$;

选①②推③:

由①②解得:$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}$, $\therefore x_0+ky_0=4x_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$, $\therefore$③成立;

选①③推②:

由①③解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\frac{6k^2}{k^2-3}$，

$\therefore ky_0=3x_0$，$\therefore$②成立；

选②③推①：

由②③解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\frac{6k^2}{k^2-3}$，$\therefore x_0-2=\frac{6}{k^2-3}$，

$\therefore ky_0=k^2(x_0-2)$，$\therefore$①成立.

22.（1）$f(x)$的减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$.

（2）$a\le\frac{1}{2}$

（3）取$a=\frac{1}{2}$，则$\forall x>0$，总有$xe^{\frac{1}{2}x}-e^x+1<0$成立，

令$t=e^{\frac{1}{2}x}$，则$t>1,t^2=e^x,x=2\ln t$，

故$2t\ln t<t^2-1$即$2\ln t<t-\frac{1}{t}$对任意的$t>1$恒成立.

所以对任意的$n\in N^*$，有$2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}$，

整理得到：$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，

故$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$

$=\ln(n+1)$，

故不等式成立.