2022 年新高考数学Ⅰ卷

适用地区：山东、广东、湖南、湖北、河北、江苏、福建

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\{x \mid \sqrt{x}<4\}, N=\{x \mid 3x \geq 1\}$,则 $M \cap N=$

$A.\{x \mid 0 \leq x<2\}$　　$B.\{x \mid \frac{1}{3} \leq x<2\}$

$C.\{x \mid 3 \leq x<16\}$　　$D.\{x \mid \frac{1}{3} \leqslant x<16\}$

2. 若 $i(1-z)=1$,则 $z+\bar{z}=$

$A.-2$　　$B.-1$　　C. 1　　D. 2

3. 在 ΔABC中，点 D 在边 AB 上， $BD=2DA$.记 $\overrightarrow{CA}=m, \overrightarrow{CD}=n$,则 $\overrightarrow{CB}=$(　　)

$A.3m-2n$　　$B.-2m+3n$

$C.3m+2n$　　$D.2m+3n$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 $140.0km^2$;水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 $180.0km^2$.. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为 $(\sqrt{7} \approx 2.65)$

$A.1.0 \times 10^9 m^3$　　$B.1.2 \times 10^9 m^3$

$C.1.4 \times 10^9 m^3$　　$D.1.6 \times 10^9 m^3$

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为

$A.\frac{1}{6}$　　$B.\frac{1}{3}$　　$C.\frac{1}{2}$　　$D.\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b\ (\omega>0)$的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$,且 $y=f(x)$的图像关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$中心对称，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

A. 1　　$B.\frac{3}{2}$　　$C.\frac{5}{2}$　　D. 3

7. 设 $a=0.1e^{0.1},b=\frac{1}{9},c=-\ln 0.9$,则

$A.a<b<c$　　$B.c<b<a$

$C.c<a<b$　　$D.a<c<b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$,则该正四棱锥体积的取值范围是

$A.\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　$B.\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$

$C.\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　$D.[18,27]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,则

A. 直线 BC_1与 DA_1所成的角为 $90°$

B. 直线 BC_1与 CA_1所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1与平面 BB_1D_1D所成的角为 45°

D. 直线 BC_1与平面 ABCD 所成的角为 $45°$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$,则

A. f(x)有两个极值点

B. f(x)有三个零点

C. 点(0，1)是曲线 $y=f(x)$的对称中心

D. 直线 $y=2x$是曲线 $y=f(x)$的切线

11. 已知 O 为坐标原点，点 A(1，1)在抛物线 C: $x^2=2py$（$p>0$)上，过点 $B(0,-1)$的直线交 C 于 P，Q 两点，则

A. C 的准线为 $y=-1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12. 已知函数 f(x)及其导函数$f'(x)$的定义域均为 R，记 $g(x)=f'(x)$.若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则

A. $f(0)=0$　　B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

C. $f(-1)=f(4)$　　D. g(-1)=g(2)

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中 x^2y^6的系数为_________(用数字作答).

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$都相切的一条直线方程___

15. 若曲线 $y=(x+a)e^x$有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________

16. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$,C 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1, F_2, 离心率为 $\frac{1}{2}$.过F_1且垂直于AF_2的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$,则 ΔADE 的周长是__________

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)

记 S_n为数列 $\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=1,\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为 $\frac{1}{3}$的等差数列，

(1)求 $\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明： $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2.$

18.(12 分)

记ΔABC的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$

(1)若 $C=\frac{2\pi}{3}$,求 B;

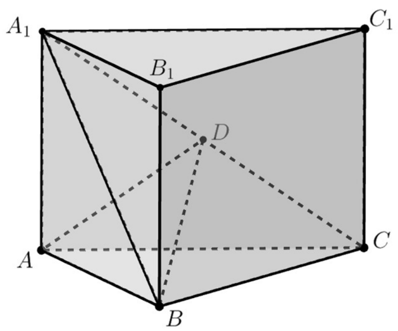
(2)求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

19.(12 分)

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$的体积为 4， ΔA_1BC的面积为 $2\sqrt{2}$，

(1)求 A 到平面 A_1BC的距离;

(2)设 D 为 A_1C的中点， $AA_1=AB$,平面 $A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1,，求二面角 $A-BD-C$的正弦值.



20.(12 分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组)，同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组)，得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1)能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2)从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”， $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

(i)证明： $R=\frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

(ii)利用该调查数据，给出 $P(A|B)$，$P(A|\bar{B})$的估计值，并利用(i)的结果给出 R 的估计值.

附： $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21.(12 分)

已知点 A(2，1)在双曲线 C:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线$l$交 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 的斜率之和为 0.

(1)求l的斜率；

(2)若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$,求 ΔPAQ的面积.

22.(12 分)已知函数 $f(x)=e^x-ax$和 $g(x)=ax-\ln x$有相同的最小值.

(1)求a；

(2)证明：存在直线 $y=b$,其与两条曲线 $y=f(x)$和 $y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（新高考全国 I 卷）

数学

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.D 2. D 3. B 4. C 5. D 6. A 7. C 8. C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. ABD 10. AC 11. BCD 12. BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. -28

14. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ 或 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$ 或 $x=-1$

15. $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

16. 13

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（1） $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

（2） $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$$

18.（1） $\frac{\pi}{6}$;

（2） $4\sqrt{2}-5$.

19.（1） $\sqrt{2}$

（2） $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20. （1）由已知 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200(40\times 90-60\times 10)^2}{50\times 150\times 100\times 100}=24$，

又 $P(K^2\geq 6.635)=0.01$， $24>6.635$，

所以有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

（2）(i) 因为 $R=\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}\cdot\dfrac{P(\overline{B}|\overline{A})}{P(B|\overline{A})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(A)}{P(A\overline{B})}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}\cdot\dfrac{P(\overline{A})}{P(\overline{A}B)}$，

所以 $R=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\cdot\dfrac{P(B)}{P(\overline{A}B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}\cdot\dfrac{P(\overline{B})}{P(A\overline{B})}$

所以 $R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$；

(ii) $R=6$；

21.（1） -1；

（2） $\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$.

22.（1） $a=1$

（2）由（1）可得 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$ 和 $g(x)=x-\ln x$ 的最小值为 $1-\ln 1=1-\ln\dfrac{1}{1}=1$.

当 $b>1$ 时，考虑 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解的个数、$x-\ln x=b$ 的解的个数.

设 $S(x)=\mathrm{e}^x-x-b$， $S'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

当 $x<0$ 时， $S'(x)<0$，当 $x>0$ 时， $S'(x)>0$，

故 $S(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $S(x)_{\min}=S(0)=1-b<0$，

而 $S(-b)=\mathrm{e}^{-b}>0$， $S(b)=\mathrm{e}^b-2b$，

设 $u(b)=\mathrm{e}^b-2b$，其中 $b>1$，则 $u'(b)=\mathrm{e}^b-2>0$，

故 $u(b)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，故 $u(b)>u(1)=\mathrm{e}-2>0$，

故 $S(b)>0$，故 $S(x)=\mathrm{e}^{x}-x-b$ 有两个不同的零点，即 $\mathrm{e}^{x}-x=b$ 的解的个数为 2.

设 $T(x)=x-\ln x-b$，$T'(x)=\dfrac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$T'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$T'(x)>0$，

故 $T(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $T(x)_{\min}=T(1)=1-b<0$，

而 $T(\mathrm{e}^{-b})=\mathrm{e}^{-b}>0$，$T(\mathrm{e}^{b})=\mathrm{e}^{b}-2b>0$，

$T(x)=x-\ln x-b$ 有两个不同的零点即 $x-\ln x=b$ 的解的个数为 2.

当 $b=1$，由（1）讨论可得 $x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^{x}-x=b$ 仅有一个零点，

当 $b<1$ 时，由（1）讨论可得 $x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^{x}-x=b$ 均无零点，

故若存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 有三个不同的交点，

则 $b>1$.

设 $h(x)=\mathrm{e}^{x}+\ln x-2x$，其中 $x>0$，故 $h'(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x}-2$，

设 $s(x)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，$x>0$，则 $s'(x)=\mathrm{e}^{x}-1>0$，

故 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，故 $s(x)>s(0)=0$ 即 $\mathrm{e}^{x}>x+1$，

所以 $h'(x)>x+\dfrac{1}{x}-1\geq 2-1>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

而 $h(1)=\mathrm{e}-2>0$，$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{3}}}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<\mathrm{e}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点 x_0，$\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}}<x_0<1$ 且：

当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<0$ 即 $\mathrm{e}^{x}-x<x-\ln x$ 即 $f(x)<g(x)$，

当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$ 即 $\mathrm{e}^{x}-x>x-\ln x$ 即 $f(x)>g(x)$，

因此若存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 有三个不同的交点，

故 $b=f(x_0)=g(x_0)>1$，

此时 $\mathrm{e}^{x}-x=b$ 有两个不同的零点 $x_1,x_0(x_1<0<x_0)$，

此时 $x-\ln x=b$ 有两个不同的零点 $x_0,x_4(0<x_0<1<x_4)$，

故 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$，$\mathrm{e}^{x_0}-x_0=b$，$x_4-\ln x_4-b=0$，$x_0-\ln x_0-b=0$

所以 $x_4-b=\ln x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}=x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}-\left(x_4-b\right)-b=0$，

故 x_4-b 为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解，同理 x_0-b 也为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解

又 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$ 可化为 $\mathrm{e}^{x_1}=x_1+b$ 即 $x_1-\ln\left(x_1+b\right)=0$ 即 $\left(x_1+b\right)-\ln\left(x_1+b\right)-b=0$，

故 x_1+b 为方程 $x-\ln x=b$ 的解，同理 x_0+b 也为方程 $x-\ln x=b$ 的解，

所以 $\left\{x_1,x_0\right\}=\left\{x_0-b,x_4-b\right\}$，而 $b>1$，

故 $\begin{cases}x_0=x_4-b\\x_1=x_0-b\end{cases}$ 即 $x_1+x_4=2x_0$.