

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）

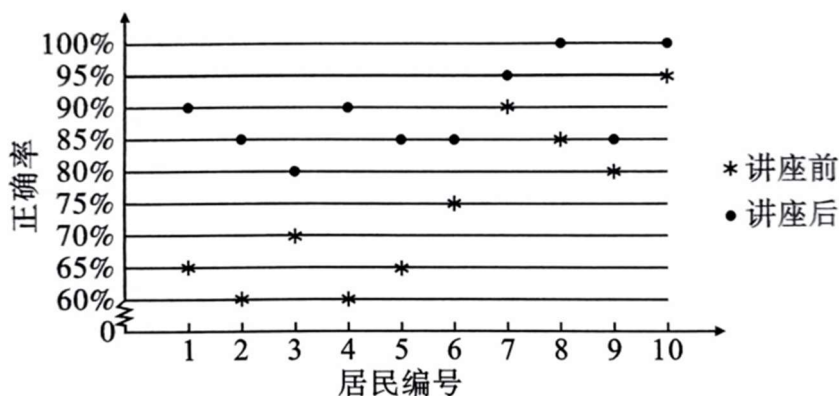
数学（文科）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid 0 \leq x < \frac{5}{2}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 2\}$

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果, 随机抽取 10 位社区居民, 让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷, 这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图:



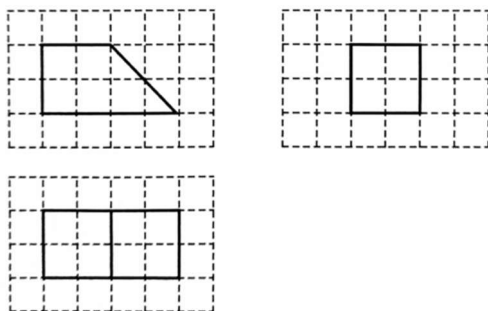
则 ()

- A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%
 B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%
 C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差
 D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3. 若 $z = 1 + i$. 则 $|iz + 3\bar{z}| =$ ()

- A. $4\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 如图, 网格纸上绘制的是一个多面体的三视图, 网格小正方形的边长为 1, 则该多面体的体积为 ()



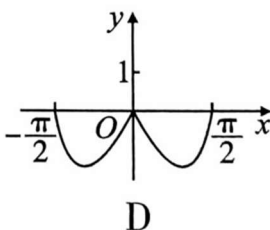
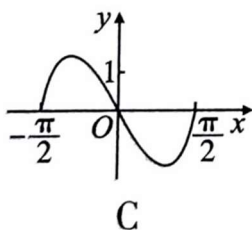
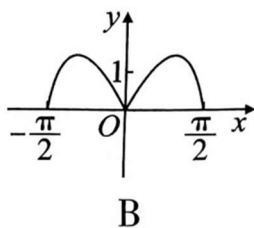
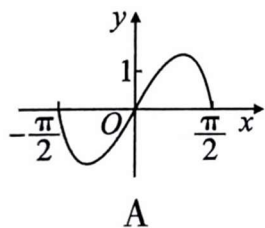
- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20



5. 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C , 若 C 关于 y 轴对称, 则 ω 的最小值是 ()
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张, 则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的概率为 ()
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 函数 $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图像大致为 ()



8. 当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 , 则 $f'(2) =$ ()
- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

9. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° , 则 ()
- A. $AB = 2AD$ B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°
C. $AC = CB_1$ D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

10. 甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为 2π , 侧面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$, 体积分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$. 若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$, 则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} =$ ()
- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{3}$, A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点, B 为 C 的上顶点. 若 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$, 则 C 的方程为 ()
- A. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

12. 已知 $9^m = 10$, $a = 10^m - 11$, $b = 8^m - 9$, 则 ()
- A. $a > 0 > b$ B. $a > b > 0$ C. $b > a > 0$ D. $b > 0 > a$



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (m, 3)$, $\mathbf{b} = (1, m + 1)$. 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $m =$ _____.

14. 设点 M 在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上, 点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 均在 $\odot M$ 上, 则 $\odot M$ 的方程为_____.

15. 记双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 e , 写出满足条件“直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点”的 e 的一个值_____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$, $CD = 2BD$. 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分) 甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营，为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

- (1) 根据上表，分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率；
(2) 能否有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635



18 . (12 分) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 . 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

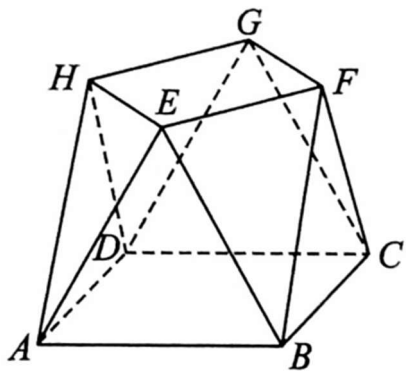
(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值 .

19 . (12 分) 小明同学参加综合实践活动, 设计了一个封闭的包装盒, 包装盒如图所示: 底面 $ABCD$ 是边长为 8 (单位: cm) 的正方形, $\triangle EAB, \triangle FBC, \triangle GCD, \triangle HDA$ 均为正三角形, 且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直 .

(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$;

(2) 求该包装盒的容积 (不计包装盒材料的厚度) .



- 20 . (12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y = g(x)$ 的切线 .
- (1) 若 $x_1 = -1$, 求 a .
- (2) 求 a 的取值范围 .

- 21 . (12 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(p, 0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点 . 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF| = 3$.
- (1) 求 C 的方程:
- (2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β . 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程 .



(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22 . [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C_2 的参

数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{2+s}{6} \\ y = -\sqrt{s} \end{cases}$ (s 为参数) .

(1) 写出 C_1 的普通方程；

(2) 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $2 \cos \theta - \sin \theta = 0$ ，求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标，及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标 .

23 . [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 均为正数，且 $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$ ，证明：

(1) $a + b + 2c \leq 3$

(2) 若 $b = 2c$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

