

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（全国乙卷）

数 学（理科）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 M 满足 $C_U M = \{1, 3\}$ ，则 ()

- A. $2 \in M$ B. $3 \in M$ C. $4 \notin M$ D. $5 \notin M$

2. 已知 $z = 1 - 2i$ ，且 $z + a\bar{z} + b = 0$ ，其中 a, b 为实数，则 ()

- A. $a = 1, b = -2$ B. $a = -1, b = 2$
C. $a = 1, b = 2$ D. $a = -1, b = -2$

3. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = \sqrt{3}, |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| = 3$ ，则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列 $\{b_n\}$ ： $b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$ ， $b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$ ， $b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}$ ， \dots ，依此类推，

$$b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}, \quad \dots, \text{依此类推,}$$

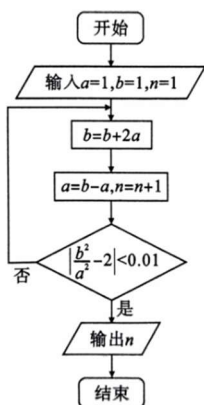
其中 $\alpha_k \in \mathbf{N}^* (k = 1, 2, \dots)$ 。则 ()

- A. $b_1 < b_5$ B. $b_3 < b_8$ C. $b_6 < b_2$ D. $b_4 < b_7$

5. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3, 0)$ ，若 $|AF| = |BF|$ ，则 $|AB| =$ ()

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

6. 执行下边的程序框图，输出的 $n =$ ()



A . 3 B . 4 C . 5 D . 6

7 . 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则 ()

- A . 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1 B . 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD
C . 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC D . 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1C_1D

8 . 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168, $a_2 - a_5 = 42$, 则 $a_6 =$ ()

A . 14 B . 12 C . 6 D . 3

9 . 已知球 O 的半径为 1, 四棱锥的顶点为 O , 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为 ()

A . $\frac{1}{3}$ B . $\frac{1}{2}$ C . $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D . $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10 . 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘, 各盘比赛结果相互独立 . 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3 , 且 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p , 则 ()

- A . p 与该棋手和甲、乙、丙的此赛次序无关
B . 该棋手在第二盘与甲比赛, p 最大
C . 该棋手在第二盘与乙比赛, p 最大
D . 该棋手在第二盘与丙比赛, p 最大

11 . 双曲线 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 C 的实轴为直径的圆记为 D , 过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为 ()

A . $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B . $\frac{3}{2}$ C . $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D . $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 R , 且 $f(x) + g(2 - x) = 5$,

$g(x) - f(x - 4) = 7$. 若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 则

$$\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$$

A . -21 B . -22 C . -23 D . -24

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分 .

13 . 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为_____ .



14. 过四点 $(0,0), (4,0), (-1,1), (4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为_____.

15. 记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T , 若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 ω 的最小值为_____.

16. 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点. 若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A).$$

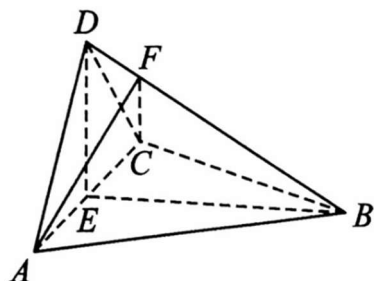
(1) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$;

(2) 若 $a = 5, \cos A = \frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分) 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp CD, AD = CD, \angle ADB = \angle BDC$, E 为 AC 的中点.

(1) 证明: 平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AB = BD = 2, \angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.



19 . (12 分) 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山 . 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位: m^2) 和材积量 (单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

- (1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;
- (2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);
- (3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186m^2 . 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比 . 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值 .

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377$.



20 . (12 分) 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过

$A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ 两点 .

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点 .

21 . (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围 .



(二) 选考题，共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ (t 为参数)．以坐

标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + m = 0.$$

- (1) 写出 l 的直角坐标方程；
- (2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围．

23．[选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$ ，证明：

- (1) $abc \leq \frac{1}{9}$ ；
- (2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$ ．

