2022 年普通高等学校招生全国统一考试（全国乙卷）

文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．集合$\boldsymbol{M}=\{2,4,6,8,10\},\boldsymbol{N}=\{x|-1<x<6\}$，则$\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{N}=$（　　）

A．$\{2,4\}$　　B．$\{2,4,6\}$　　C．$\{2,4,6,8\}$　　D．$\{2,4,6,8,10\}$

2．设$(1+2i)a+b=2i$，其中a,b为实数，则（　　）

A．$a=1,b=-1$　　B．$a=1,b=1$

C．$a=-1,b=1$　　D．$a=-1,b=-1$

3．已知向量$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4)$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

4．分别统计了甲、乙两位同学 16 周的各周课外体育运动时长（单位：h），得如下茎叶图：

甲		乙
6 1	5.	
8 5 3 0	6.	3
7 5 3 2	7.	4 6
6 4 2 1	8.	1 2 2 5 6 6 6 6
4 2	9.	0 2 3 8
	10.	1

则下列结论中错误的是（　　）

A．甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 7.4

B．乙同学周课外体育运动时长的样本平均数大于 8

C．甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.4

D．乙同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.6

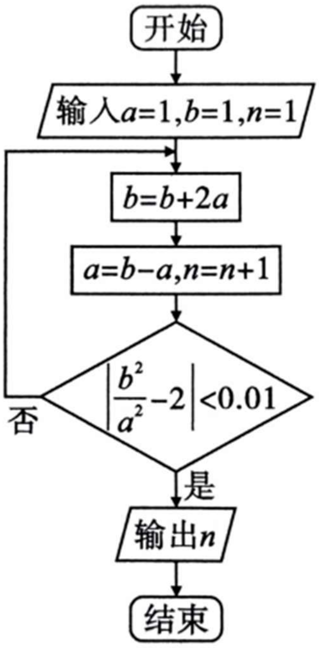
5．若 x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 2,\\ x+2y\leqslant 4,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=2x-y$的最大值是（　　）

A．-2　　B．4　　C．8　　D．12

6．设 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 $|AB|=$（　　）

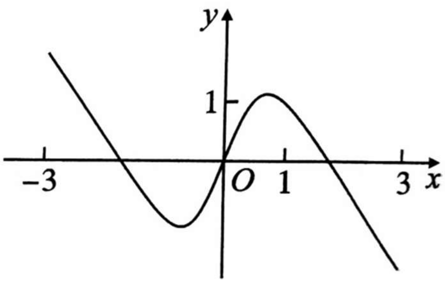
A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$3\sqrt{2}$

7．执行右边的程序框图，输出的 $n=$（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．6

8．右图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3,3]$ 的大致图像，则该函数是（　　）



A．$y=\frac{-x^3+3x}{x^2+1}$　　B．$y=\frac{x^3-x}{x^2+1}$　　C．$y=\frac{2x\cos x}{x^2+1}$　　D．$y=\frac{2\sin x}{x^2+1}$

9．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 AB,BC 的中点，则（　　）

A．平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　　B．平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C．平面 $B_1EF\parallel$ 平面 A_1AC　　D．平面 $B_1EF\parallel$ 平面 A_1C_1D

10．已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$（　　）

A．14　　B．12　　C．6　　D．3

11．函数$f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$在区间$[0,2\pi]$的最小值、最大值分别为（　　）

A．$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$　　B．$-\frac{3\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$　　C．$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}+2$　　D．$-\frac{3\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}+2$

12．已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若$2S_3=3S_2+6$，则公差$d=$________.

14．从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为________.

15．过四点$(0,0),(4,0),(-1,1),(4,2)$中的三点的一个圆的方程为_______.

16．若$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$是奇函数，则 $a=$_____，$b=$______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）记$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

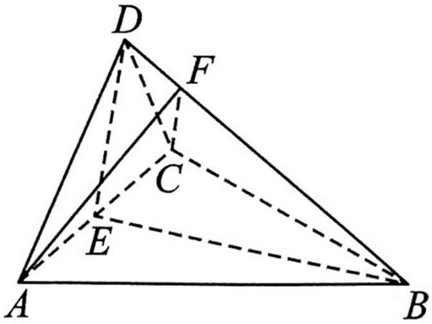
（1）若$A=2B$，求 C；

（2）证明：$2a^2=b^2+c^2$.

18.（12 分）如图，四面体$\boldsymbol{ABCD}$中，$\boldsymbol{AD}\perp\boldsymbol{CD},\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{CD},\angle\boldsymbol{ADB}=\angle\boldsymbol{BDC}$，$E$为$AC$的中点.

（1）证明：平面$\boldsymbol{BED}\perp$平面 ACD .

（2）设$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{2},\angle\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{60°}$，点 F在 BD上，当$\triangle\ \boldsymbol{AFC}$的面积最小时，求三棱锥$\boldsymbol{F}-\boldsymbol{ABC}$的体积.



19.（12 分）某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=0.038$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=1.6158$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=0.2474$.

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0.01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186m^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值．

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sqrt{1.896}\approx 1.377$.

20．（12 分）已知函数$f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x$.

（1）当 $a=0$ 时，求$f(x)$的最大值；

（2）若 $f(x)$ 恰有一个零点，求 a 的取值范围.

21．（12 分）已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$两点.

（1）求 E的方程；

（2）设过点$P(1,-2)$的直线交 E于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，证明：直线 HN 过定点.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑。按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系xOy中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos 2t, \\ y=2\sin t \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线l的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+m=0$.

（1）写出 l 的直角坐标方程；

（2）若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围．

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知 a，b，c 都是正数，且$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

（1）$abc\le\frac{1}{9}$;

（2）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（全国乙卷）

文科数学

参考答案（仅供参考）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. A　2. A　3. D　4. C　5. C　6. B　7. B　8. A　9. A　10. D　11. D　12. C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2

14. $\frac{3}{10}$

15. $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$ 或 $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$；

16. ①. $-\frac{1}{2}$；　　②. $\ln 2$.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17. （1）$\frac{5\pi}{8}$；

（2）由 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$ 可得，

$\sin C(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=\sin B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$，再由正弦定理可得，

$ac\cos B-bc\cos A=bc\cos A-ab\cos C$，然后根据余弦定理可知，

$\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)-\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$，化简得：

$2a^2=b^2+c^2$，故原等式成立.

18. 【小问 1 详解】

由于 $AD=CD$，E 是 AC 的中点，所以 $AC\perp DE$.

由于$\begin{cases}AD=CD\\BD=BD\\\angle ADB=\angle CDB\end{cases}$，所以$\triangle ADB\cong\triangle CDB$，

所以$AB=CB$，故$AC\perp BD$，

由于$DE\cap BD=D$，DE,BD Ì 平面BED，

所以$AC\perp$平面BED，

由于$AC\subset$平面ACD，所以平面$BED\perp$平面ACD.

【小问 2 详解】

依题意$AB=BD=BC=2$，$\angle ACB=60^\circ$，三角形ABC是等边三角形，

所以$AC=2,AE=CE=1,BE=\sqrt{3}$，

由于$AD=CD,AD\perp CD$，所以三角形ACD是等腰直角三角形，所以$DE=1$.

$DE^2+BE^2=BD^2$，所以$DE\perp BE$，

由于$AC\cap BE=E$，$AC,BE\subset$平面ABC，所以$DE\perp$平面ABC.

由于$\triangle ADB\cong\triangle CDB$，所以$\angle FBA=\angle FBC$，

由于$\begin{cases}BF=BF\\\angle FBA=\angle FBC\\AB=CB\end{cases}$，所以$\triangle FBA\cong\triangle FBC$，

所以$AF=CF$，所以$EF\perp AC$，

由于$S_{\triangle AFC}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot EF$，所以当$EF$最短时，三角形$AFC$的面积最小值.

过E作$EF\perp BD$，垂足为F，

在$\mathrm{Rt}\triangle BED$中，$\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot DE=\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot EF$，解得$EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$DF=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2},BF=2-DF=\dfrac{3}{2}$，

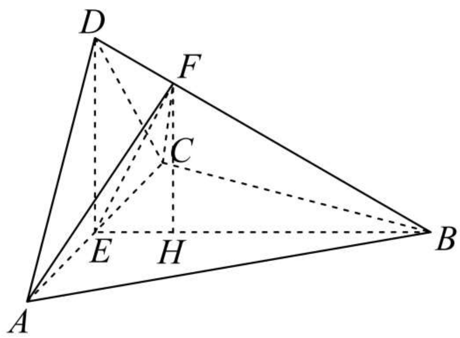
所以$\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{3}{4}$.

过F作$FH\perp BE$，垂足为H，则$FH//DE$，所以$FH\perp$平面ABC，且

$\dfrac{FH}{DE}=\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{3}{4}$，

所以$FH=\dfrac{3}{4}$，

所以$V_{F-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot FH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



19. （1）$0.06\mathrm{m}^2$；$0.39\mathrm{m}^3$

（2）0.97

（3）$1209\mathrm{m}^3$

20. （1）-1

（2）$\left(0,+\infty\right)$

21. （1）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

（2）$(0,-2)$

【小问 1 详解】

解：设椭圆 E 的方程为$mx^2+ny^2=1$，过$A\left(0,-2\right),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$，

则$\begin{cases}4n=1\\ \frac{9}{4}m+n=1\end{cases}$，解得$m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{1}{4}$，

所以椭圆 E 的方程为：$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

$A(0,-2),B(\frac{3}{2},-1)$，所以$AB:y+2=\frac{2}{3}x$，

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率不存在，直线 $x=1$.代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得 $M(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$N(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，代入 AB 方程 $y=\frac{2}{3}x-2$，可得

$T(\sqrt{6}+3,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$ 得到 $H(2\sqrt{6}+5,\frac{2\sqrt{6}}{3})$.求得 HN 方程：

$y=(2-\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$，过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率存在，设 $kx-y-(k+2)=0,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases} kx-y-(k+2)=0 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

可得 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4} \\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4} \end{cases}$，$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4} \\ y_2y_2=\frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4} \end{cases}$，

且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}(*)$

联立 $\begin{cases} y=y_1 \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$，可得 $T(\frac{3y_1}{2}+3,y_1),H(3y_1+6-x_1,y_1)$.

可求得此时 $HN:y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将 $(0,-2)$，代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将 $(*)$ 代入，得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$,

显然成立，

综上，可得直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

【点睛】求定点、定值问题常见的方法有两种：

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

（二）选考题：共 **10** 分．请考生在第 **22**、**23** 题中选定一题作答，并用 **2B** 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑．按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分．

[选修 4—4：坐标系与参数方程]

22. （1）$\sqrt{3}x+y+2m=0$

（2）$-\dfrac{19}{12}\le m\le\dfrac{5}{2}$

[选修 4—5：不等式选讲]

23. 【小问 1 详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，则$a^{\frac{3}{2}}>0$，$b^{\frac{3}{2}}>0$，$c^{\frac{3}{2}}>0$，

所以$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\ge\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}$，

即$\left(abc\right)^{\frac{1}{2}}\le\dfrac{1}{3}$，所以$abc\le\dfrac{1}{9}$，当且仅当$a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$，即$a=b=c=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$时取等号．

【小问 2 详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以$b+c\ge2\sqrt{bc}$，$a+c\ge2\sqrt{ac}$，$a+b\ge2\sqrt{ab}$，

所以$\dfrac{a}{b+c}\le\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{b}{a+c}\le\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}=\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{c}{a+b}\le\dfrac{c}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当$a=b=c$时取等号．