

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理科）

参考答案（仅供参考）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A 2. A 3. C 4. D 5. B 6. B 7. A 8. D 9. C 10. D 11. C 12. D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{3}{10}$

14. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ 或 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$ 或

$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25}$;

15. 3

16. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

三、解答题：共 0 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.

（1）

证明：因为 $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$,

所以 $\sin C \sin A \cos B - \sin C \sin B \cos A = \sin B \sin C \cos A - \sin B \sin A \cos C$,

所以 $ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 2bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

即 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} - (b^2 + c^2 - a^2) = -\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$,

所以 $2a^2 = b^2 + c^2$;

（2）

解：因为 $a = 5, \cos A = \frac{25}{31}$,

由（1）得 $b^2 + c^2 = 50$,

由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

则 $50 - \frac{50}{31}bc = 25$,

所以 $bc = \frac{31}{2}$,



$$\text{故}(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=50+31=81,$$

所以 $b+c=9$,

所以 $\square ABC$ 的周长为 $a+b+c=14$.

18.

(1)

因为 $AD=CD$, E 为 AC 的中点, 所以 $AC \perp DE$;

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中, 因为 $AD=CD, \angle ADB=\angle CDB, DB=DB$,

所以 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, 所以 $AB=CB$, 又因为 E 为 AC 的中点, 所以 $AC \perp BE$;

又因为 $DE, BE \subset$ 平面 BED , $DE \cap BE = E$, 所以 $AC \perp$ 平面 BED ,

因为 $AC \subset$ 平面 ACD , 所以平面 $BED \perp$ 平面 ACD .

(2)

连接 EF , 由 (1) 知, $AC \perp$ 平面 BED , 因为 $EF \subset$ 平面 BED ,

所以 $AC \perp EF$, 所以 $S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} AC \cdot EF$,

当 $EF \perp BD$ 时, EF 最小, 即 $\triangle AFC$ 的面积最小.

因为 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, 所以 $CB=AB=2$,

又因为 $\angle ACB=60^\circ$, 所以 $\square ABC$ 是等边三角形,

因为 E 为 AC 的中点, 所以 $AE=EC=1$, $BE=\sqrt{3}$,

因为 $AD \perp CD$, 所以 $DE = \frac{1}{2} AC = 1$,

在 $\square DEB$ 中, $DE^2 + BE^2 = BD^2$, 所以 $BE \perp DE$.

以 E 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,

则 $A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), D(0,0,1)$, 所以 $\overrightarrow{AD}=(-1,0,1), \overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,

设平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

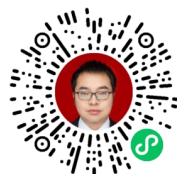
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}, \text{取 } y = \sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{n} = (3, \sqrt{3}, 3),$$

又因为 $C(-1,0,0), F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$, 所以 $\overrightarrow{CF} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$,

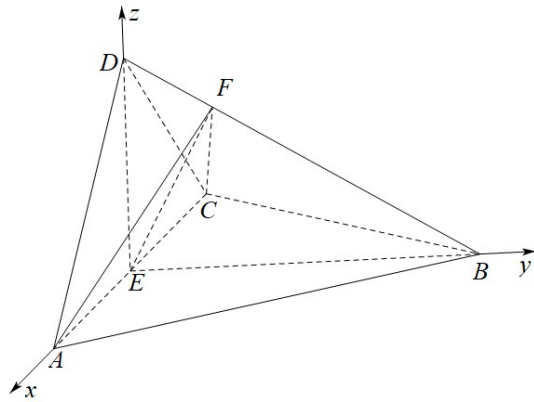
$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CF} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{CF}|} = \frac{6}{\sqrt{21} \times \sqrt{\frac{7}{4}}} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

设 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值为 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{所以 } \sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CF} \rangle \right| = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$



所以 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.



19.

(1)

样本中 10 棵这种树木的根部横截面积的平均值 $\bar{x} = \frac{0.6}{10} = 0.06$

样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 $\bar{y} = \frac{3.9}{10} = 0.39$

据此可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为 0.06m^2 ,

平均一棵的材积量为 0.39m^3

(2)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2\right)}}$$

$$= \frac{0.2474 - 10 \times 0.06 \times 0.39}{\sqrt{(0.038 - 10 \times 0.06^2)(1.6158 - 10 \times 0.39^2)}} = \frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}} \approx \frac{0.0134}{0.01377} \approx 0.97$$

则 $r \approx 0.97$

(3)

设该林区这种树木的总材积量的估计值为 $Y\text{m}^3$,

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比,

可得 $\frac{0.06}{0.39} = \frac{186}{Y}$, 解之得 $Y = 1209\text{m}^3$.

则该林区这种树木的总材积量估计为 1209m^3

20.

(1)

解: 设椭圆 E 的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1$, 过 $A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$,

$$\text{则 } \begin{cases} 4n = 1 \\ \frac{9}{4}m + n = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{4},$$



所以椭圆 E 的方程为: $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$.

(2)

$A(0, -2), B(\frac{3}{2}, -1)$, 所以 $AB: y + 2 = \frac{2}{3}x$,

①若过点 $P(1, -2)$ 的直线斜率不存在, 直线 $x = 1$. 代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$,

可得 $M(1, \frac{2\sqrt{6}}{3}), N(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$, 代入 AB 方程 $y = \frac{2}{3}x - 2$, 可得

$T(\sqrt{6} + 3, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, 由 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$ 得到 $H(2\sqrt{6} + 5, \frac{2\sqrt{6}}{3})$. 求得 HN 方程:

$y = (2 - \frac{2\sqrt{6}}{3})x - 2$, 过点 $(0, -2)$.

②若过点 $P(1, -2)$ 的直线斜率存在, 设 $kx - y - (k + 2) = 0, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} kx - y - (k + 2) = 0 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{得 } (3k^2 + 4)x^2 - 6k(2 + k)x + 3k(k + 4) = 0,$$

$$\text{可得} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6k(2 + k)}{3k^2 + 4} \\ x_1 x_2 = \frac{3k(4 + k)}{3k^2 + 4} \end{cases}, \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-8(2 + k)}{3k^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{4(4 + 4k - 2k^2)}{3k^2 + 4} \end{cases},$$

$$\text{且 } x_1 y_2 + x_2 y_1 = \frac{-24k}{3k^2 + 4} (*)$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = y_1 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}, \text{可得 } T(\frac{3y_1}{2} + 3, y_1), H(3y_1 + 6 - x_1, y_1).$$

$$\text{可求得此时 } HN: y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{3y_1 + 6 - x_1 - x_2} (x - x_2),$$

将 $(0, -2)$, 代入整理得 $2(x_1 + x_2) - 6(y_1 + y_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 3y_1 y_2 - 12 = 0$,

将 $(*)$ 代入, 得 $24k + 12k^2 + 96 + 48k - 24k - 48 - 48k + 24k^2 - 36k^2 - 48 = 0$,

显然成立,

综上, 可得直线 HN 过定点 $(0, -2)$.

21.

(1)

$f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$

当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln(1 + x) + \frac{x}{e^x}, f(0) = 0$, 所以切点为 $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{e^x}, f'(0) = 2, \text{所以切线斜率为 } 2$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 2x$



(2)

$$f(x) = \ln(1+x) + \frac{ax}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{a(1-x)}{e^x} = \frac{e^x + a(1-x^2)}{(1+x)e^x}$$

$$\text{设 } g(x) = e^x + a(1-x^2)$$

1° 若 $a > 0$, 当 $x \in (-1, 0)$, $g(x) = e^x + a(1-x^2) > 0$, 即 $f'(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, $f(x) < f(0) = 0$

故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上没有零点, 不合题意

2° 若 $-1 \leq a < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$, 则 $g'(x) = e^x - 2ax > 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增所以 $g(x) > g(0) = 1+a > 0$, 即 $f'(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) > f(0) = 0$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, 不合题意

3° 若 $a < -1$

(1) 当 $x \in (0, +\infty)$, 则 $g'(x) = e^x - 2ax > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$$g(0) = 1+a < 0, g(1) = e > 0$$

所以存在 $m \in (0, 1)$, 使得 $g(m) = 0$, 即 $f'(m) = 0$

当 $x \in (0, m)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减

当 $x \in (m, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增

所以

$$\text{当 } x \in (0, m), f(x) < f(0) = 0$$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$$

所以 $f(x)$ 在 $(m, +\infty)$ 上有唯一零点

又 $(0, m)$ 没有零点, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点

$$(2) \text{ 当 } x \in (-1, 0), g(x) = e^x + a(1-x^2)$$

$$\text{设 } h(x) = g'(x) = e^x - 2ax$$

$$h'(x) = e^x - 2a > 0$$

所以 $g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递增

$$g'(-1) = \frac{1}{e} + 2a < 0, g'(0) = 1 > 0$$

所以存在 $n \in (-1, 0)$, 使得 $g'(n) = 0$

当 $x \in (-1, n)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减

当 $x \in (n, 0)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(x) < g(0) = 1+a < 0$

$$\text{又 } g(-1) = \frac{1}{e} > 0$$

所以存在 $t \in (-1, n)$, 使得 $g(t) = 0$, 即 $f'(t) = 0$



当 $x \in (-1, t)$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (t, 0)$, $f(x)$ 单调递减

有 $x \rightarrow -1, f(x) \rightarrow -\infty$

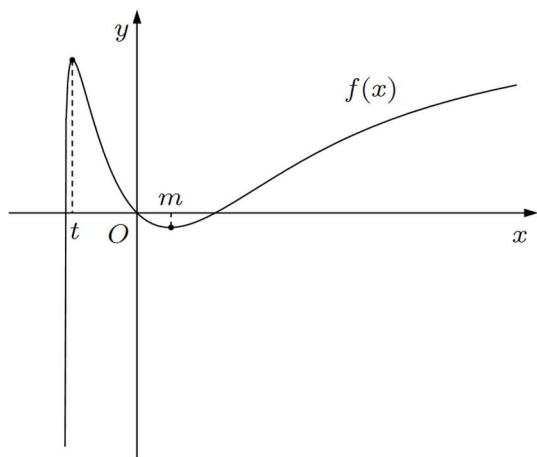
而 $f(0) = 0$, 所以当 $x \in (t, 0)$, $f(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, t)$ 上有唯一零点, $(t, 0)$ 上无零点

即 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上有唯一零点

所以 $a < -1$, 符合题意

所以若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围为 $(-\infty, -1)$



(二) 选考题, 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22.

(1)

因为 $l: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + m = 0$, 所以 $\frac{1}{2}\rho \cdot \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cdot \cos \theta + m = 0$,

又因为 $\rho \cdot \sin \theta = y, \rho \cdot \cos \theta = x$, 所以化简为 $\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x + m = 0$,

整理得 l 的直角坐标方程: $\sqrt{3}x + y + 2m = 0$

(2)

联立 l 与 C 的方程, 即将 $x = \sqrt{3} \cos 2t, y = 2 \sin t$ 代入

$\sqrt{3}x + y + 2m = 0$ 中, 可得 $3 \cos 2t + 2 \sin t + 2m = 0$,

所以 $3(1 - 2 \sin^2 t) + 2 \sin t + 2m = 0$,

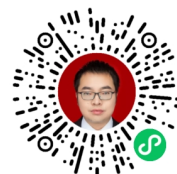
化简为 $-6 \sin^2 t + 2 \sin t + 3 + 2m = 0$,

要使 l 与 C 有公共点, 则 $2m = 6 \sin^2 t - 2 \sin t - 3$ 有解,

令 $\sin t = a$, 则 $a \in [-1, 1]$, 令 $f(a) = 6a^2 - 2a - 3, (-1 \leq a \leq 1)$,

对称轴为 $a = \frac{1}{6}$, 开口向上,

所以 $f(a)_{\max} = f(-1) = 6 + 2 - 3 = 5$,



$$f(a)_{\min} = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} - 3 = -\frac{19}{6},$$

$$\text{所以 } -\frac{19}{6} \leq 2m \leq 5$$

$$m \text{ 的取值范围为 } -\frac{19}{12} \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

[选修 4-5: 不等式选讲]

23.

(1)

证明: 因为 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 则 $a^{\frac{3}{2}} > 0$, $b^{\frac{3}{2}} > 0$, $c^{\frac{3}{2}} > 0$,

$$\text{所以 } \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot c^{\frac{3}{2}}},$$

即 $(abc)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{3}$, 所以 $abc \leq \frac{1}{9}$, 当且仅当 $a^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{3}{2}} = c^{\frac{3}{2}}$, 即 $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ 时取等号.

(2)

证明: 因为 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$,

$$\text{所以 } b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}, \quad a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\text{所以 } \frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}, \quad \frac{b}{a+c} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}, \quad \frac{c}{a+b} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} = \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当 $a = b = c$ 时取等号.

扫码关注下面公众号, 可获取更多数学干货.

