2022年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知全集$U=\{x|-3<x<3\}$，集合$A=\{x|-2<x\leq 1\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A．$(-2,1]$　　B．$(-3,-2)\cup[1,3)$　　C．$[-2,1)$　　D．$(-3,-2]\cup(1,3)$

2．若复数z满足$i\cdot z=3-4i$，则$|z|=$（　　）

A．1　　B．5　　C．7　　D．25

3．若直线$2x+y-1=0$是圆$(x-a)^2+y^2=1$的一条对称轴，则$a=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．-1

4．已知函数$f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则对任意实数x，有（　　）

A．$f(-x)+f(x)=0$　　B．$f(-x)-f(x)=0$

C．$f(-x)+f(x)=1$　　D．$f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

5．已知函数$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，则（　　）

A．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减　　B．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$上单调递增

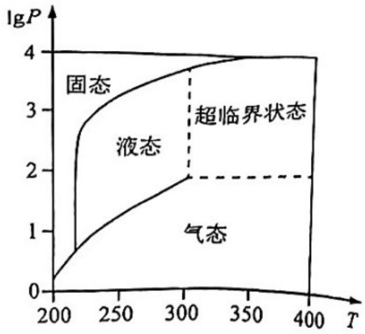
C．$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减　　D．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$上单调递增

6．设$\{a_n\}$是公差不为0的无穷等差数列，则"$\{a_n\}$为递增数列"是"存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$"的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．在北京冬奥会上，国家速滑馆"冰丝带"使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献．如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与T和$\lg P$的关系，其中T表示温度，单位是K；P表示压强，单位是bar．下列结论中正确的是（　　）



A. 当$T=220$，$P=1026$时，二氧化碳处于液态

B. 当$T=270$，$P=128$时，二氧化碳处于气态

C. 当$T=300$，$P=9987$时，二氧化碳处于超临界状态

D. 当$T=360$，$P=729$时，二氧化碳处于超临界状态

8．若$(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$a_0+a_2+a_4=$（　　）

A．40　　B．41　　C．-40　　D．-41

9．已知正三棱锥$P-ABC$的六条棱长均为 6，S是$\triangle ABC$及其内部的点构成的集合．设集合$T=\{Q\in S|PQ\le 5\}$，则 T表示的区域的面积为（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．π　　C．2π　　D．3π

10．在$\triangle ABC$中，$AC=3, BC=4, \angle C=90°$．P为$\triangle ABC$所在平面内的动点且$PC=1$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是（　　）

A．$[-5,3]$　　B．$[-3,5]$　　C．$[-6,4]$　　D．$[-4,6]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．函数$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$的定义域是__________.

12．已知双曲线$y^2+\frac{x^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则$m=$___________.

13．若函数$f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$的一个零点为$\frac{\pi}{3}$，则$A=$_________；$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=$_________.

14．设函数$f(x)=\begin{cases}ax+1, & x<a,\\ (x-2)^2, & x\ge a.\end{cases}$若$f(x)$存在最小值，则 a 的一个取值为_________；a 的最大值为____________.

15．已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和S_n满足

$a_n \cdot S_n = 9(n = 1,2,\cdots)$．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$的第 2 项小于 3；　　②$\{a_n\}$为等比数列；

③$\{a_n\}$为递减数列；　　④$\{a_n\}$中存在小于$\frac{1}{100}$的项．

其中所有正确结论的序号是__________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（本小题 13 分）

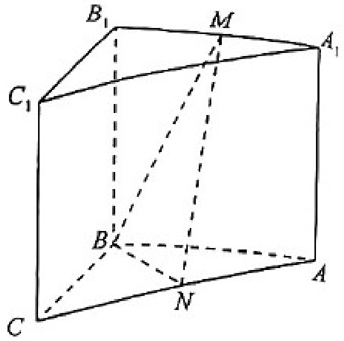
在$\triangle ABC$中，$\sin 2C = \sqrt{3}\sin C$．

（I）求$\angle C$；

（II）若$b = 6$，且$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长．

17．（本小题 14 分）

如图，在三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1为正方形，平面$BCC_1B_1 \perp$平面ABB_1A_1，$AB = BC = 2$，M，N分别为A_1B_1，AC的中点．



（I）求证：$MN \parallel$平面BCC_1B_1；

（II）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值．

条件①：$AB \perp MN$；

条件②：$BM = MN$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

18.（本小题 13 分）

在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到$9.50m$以上（含$9.50m$）的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，9.35，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16．

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立．

（I）估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

（II）设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 EX；

（III）在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

19.（本小题 15 分）

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(0,1)$，焦距为$2\sqrt{3}$.

（I）求椭圆 E 的方程；

（II）过点$P(-2,1)$作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当$|MN|=2$时，求 k 的值．

20.（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=e^{x}\ln(1+x)$.

（I）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（II）设$g(x)=f'(x)$，讨论函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性；

（III）证明：对任意的$s,t\in(0,+\infty)$，有$f(s+t)>f(s)+f(t)$.

21.（本小题 15 分）

已知$Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$为有穷整数数列.给定正整数 m,若对任意的$n\in\{1,2,\cdots,m\}$，在 Q 中存在$a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+j}(j\geq 0)$，使得$a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为$m-$连续可表数列.

（I）判断$Q:2,1,4$是否为$5-$连续可表数列？是否为$6-$连续可表数列？说明理由；

（II）若$Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$为$8-$连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

（III）若$Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$为$20-$连续可表数列，且$a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k\geq 7$.