2022年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）

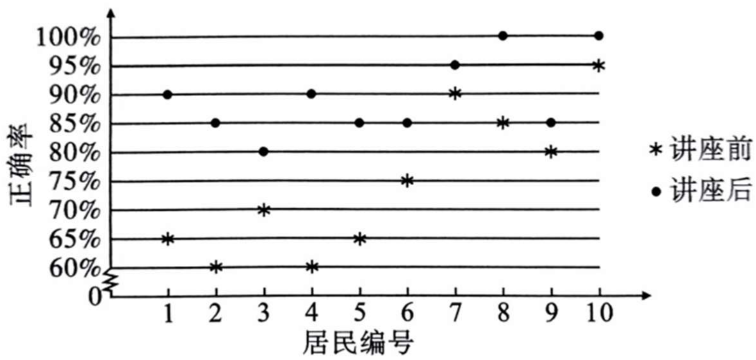
理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若$z=-1+\sqrt{3}i$，则$\frac{z}{z\bar{z}-1}=$（　　）

A．$-1+\sqrt{3}i$　　B．$-1-\sqrt{3}i$　　C．$-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$　　D．$-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i$

2．某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则（　　）

A．讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B．讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

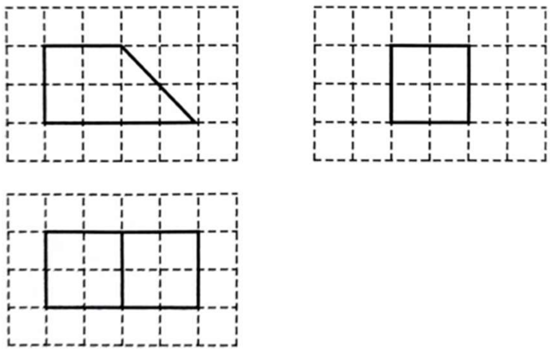
C．讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D．讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3．设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,2\},B=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（　　）

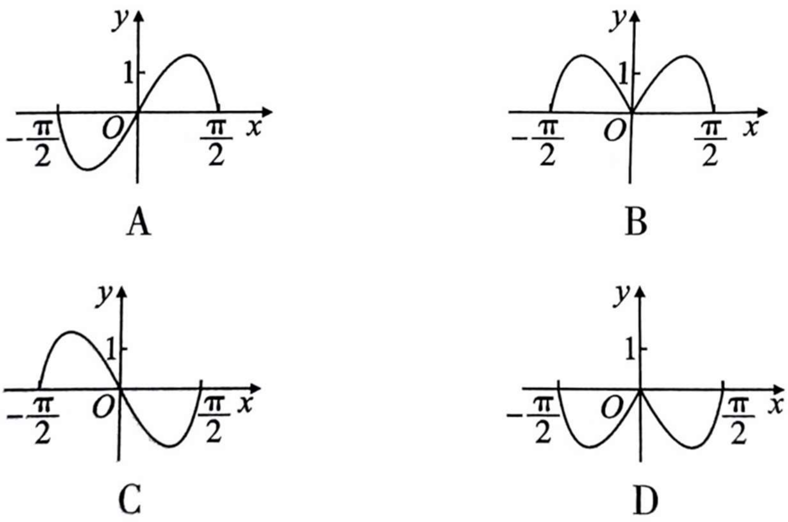
A．$\{1,3\}$　　B．$\{0,3\}$　　C．$\{-2,1\}$　　D．$\{-2,0\}$

4．如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为（　　）



A．8　　B．12　　C．16　　D．20

5．函数$y=(3^{x}-3^{-x})\cos x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的图像大致为（　　）



6．当$x=1$时，函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$取得最大值-2，则$f'(2)=$（　　）

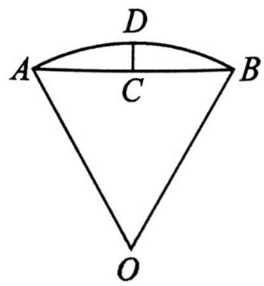
A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

7．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为$30°$，则（　　）

A．$AB=2AD$　　B．AB与平面AB_1C_1D所成的角为$30°$

C．$AC=CB_1$　　D．B_1D与平面BB_1C_1C所成的角为$45°$

8．沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图，$\overset{\frown}{AB}$是以 O 为圆心，OA 为半径的圆弧，C 是 AB 的中点，D 在$\overset{\frown}{AB}$上，$CD \perp AB$．“会圆术”给出$\overset{\frown}{AB}$的弧长的近似值 s 的计算公式：$s = AB + \frac{CD^2}{OA}$．当$OA = 2, \angle AOB = 60°$时，$s =$（　　）



A．$\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$

9．甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$．若$\frac{S_{甲}}{S_{乙}} = 2$，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}} =$（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$\frac{5\sqrt{10}}{4}$

10．椭圆$C:\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$的左顶点为 A，点 P，Q 均在 C 上，且关于 y 轴对称．若直线AP, AQ的斜率之积为$\frac{1}{4}$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

11．设函数$f(x) = sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$在区间$(0,\pi)$恰有三个极值点、两个零点，则$\omega$的取值范围是（　　）

A．$[\frac{5}{3},\frac{13}{6})$　　B．$[\frac{5}{3},\frac{19}{6})$　　C．$(\frac{13}{6},\frac{8}{3}]$　　D．$(\frac{13}{6},\frac{19}{6}]$

12．已知$a = \frac{31}{32}, b = cos\frac{1}{4}, c = 4\,sin\frac{1}{4}$，则（　　）

A．$c > b > a$　　B．$b > a > c$　　C．$a > b > c$　　D．$a > c > b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设向量a, b的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$，且$|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 3$，则$(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} =$________．

14．若双曲线$y^2 - \frac{x^2}{m^2} = 1(m > 0)$的渐近线与圆$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$相切，则$m =$________．

15. 从正方体的 8 个顶点中任选 4 个，则这 4 个点在同一个平面的概率为_______ .

16．已知$\triangle ABC$中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^{\circ}, AD=2, CD=2BD$．当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$_______ .

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．(12 分)

记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和．已知$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$．

（1）证明：$\{a_n\}$是等差数列；

（2）若a_4, a_7, a_9成等比数列，求S_n的最小值．

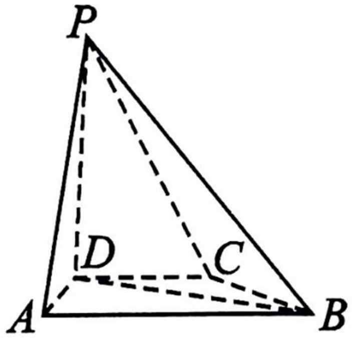
18．(12 分)

在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD, CD\parallel AB, AD=DC=CB=1,$

$AB=2, DP=\sqrt{3}$．

（1）证明：$BD\perp PA$;

（2）求PD与平面PAB所成的角的正弦值．



19．(12 分)

甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局．三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军．已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为$0.5, 0.4, 0.8$, 各项目的比赛结果相互独立．

（1）求甲学校获得冠军的概率;

（2）用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望．

20．(12 分)

设抛物线$C: y^2 = 2px(p > 0)$的焦点为F，点$D(p, 0)$，过F的直线交C于M, N两点．当直线MD垂直于x轴时，$|MF| = 3$．

(1) 求 C的方程;

(2) 设直线MD, ND与C的另一个交点分别为A, B, 记直线MN, AB的倾斜角分别为α, β．当$\alpha - \beta$取得最大值时，求直线AB的方程．

21．(12 分)

已知函数$f(x) = \frac{e^x}{x} - ln\,x + x - a$．

(I) 若$f(x) \geq 0$，求 a 的取值范围;

(2) 证明：若$f(x)$有两个零点x_1, x_2，则$x_1 x_2 < 1$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases} x=\frac{2+t}{6}, \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线C_2的参数方程为$\begin{cases} x=-\frac{2+s}{6}, \\ y=-\sqrt{s} \end{cases}$（$s$ 为参数）．

（1）写出C_1的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_3的极坐标方程为$2\cos\theta-\sin\theta=0$，求C_3与C_1交点的直角坐标，及C_3与C_2交点的直角坐标．

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知 a,b,c 均为正数，且$a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

（1）$a+b+2c\le 3$；

（2）若$b=2c$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge 3$

选择题填空题答案

1. C	2. B	3. D	4. B
5. A	6. B	7. D	8. B
9. C	10. A	11. C	12. A

13. 11　　14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. $\frac{6}{35}$　　16. $\sqrt{3}-1$