

# 2022 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

## 数学参考答案（仅供参考）

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. D 2. B 3. A 4. C 5. C 6. C 7. D 8. B 9. B 10. D

### 第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

12. -3

13. ①. 1 ②.  $-\sqrt{2}$

14. ①. 0（答案不唯一） ②. 1

15. ①③④

三、解答题共 6 小愿，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (1)  $\frac{\pi}{6}$

(2)  $6+6\sqrt{3}$

17. (1) 取  $AB$  的中点为  $K$ ，连接  $MK, NK$ ，

由三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  可得四边形  $ABB_1A_1$  为平行四边形，

而  $B_1M = MA_1, BK = KA$ ，则  $MK \parallel BB_1$ ，

而  $MK \not\subset$  平面  $CBB_1C_1$ ， $BB_1 \subset$  平面  $CBB_1C_1$ ，故  $MK \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ ，

而  $CN = NA, BK = KA$ ，则  $NK \parallel BC$ ，同理可得  $NK \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ ，

而  $NK \cap MK = K, NK, MK \subset$  平面  $MKN$ ，

故平面  $MKN \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ ，而  $MN \subset$  平面  $MKN$ ，故  $MN \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ ，

(2) 因为侧面  $CBB_1C_1$  为正方形，故  $CB \perp BB_1$ ，

而  $CB \subset$  平面  $CBB_1C_1$ ，平面  $CBB_1C_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ，



平面  $CBB_1C_1 \cap$  平面  $ABB_1A_1 = BB_1$ ，故  $CB \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ，

因为  $NK \parallel BC$ ，故  $NK \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ，

因为  $AB \subset$  平面  $ABB_1A_1$ ，故  $NK \perp AB$ ，

若选①，则  $AB \perp MN$ ，而  $NK \perp AB$ ， $NK \cap MN = N$ ，

故  $AB \perp$  平面  $MNK$ ，而  $MK \subset$  平面  $MNK$ ，故  $AB \perp MK$ ，

所以  $AB \perp BB_1$ ，而  $CB \perp BB_1$ ， $CB \cap AB = B$ ，故  $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ ，

故可建立如图所示的空间直角坐标系，则  $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$ ，

故  $\overrightarrow{BA} = (0,2,0), \overrightarrow{BN} = (1,1,0), \overrightarrow{BM} = (0,1,2)$ ，

设平面  $BNM$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{从而} \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = -1, \text{ 则 } \vec{n} = (-2, 2, -1),$$

设直线  $AB$  与平面  $BNM$  所成的角为  $\theta$ ，则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}.$$

若选②，因为  $NK \parallel BC$ ，故  $NK \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ，而  $KM \subset$  平面  $MKN$ ，

故  $NK \perp KM$ ，而  $B_1M = BK = 1, NK = 1$ ，故  $B_1M = NK$ ，

而  $B_1B = MK = 2$ ， $MB = MN$ ，故  $\square BB_1M \cong \square MKN$ ，

所以  $\angle BB_1M = \angle MKN = 90^\circ$ ，故  $A_1B_1 \perp BB_1$ ，

而  $CB \perp BB_1$ ， $CB \cap AB = B$ ，故  $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ ，

故可建立如图所示的空间直角坐标系，则  $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$ ，

故  $\overrightarrow{BA} = (0,2,0), \overrightarrow{BN} = (1,1,0), \overrightarrow{BM} = (0,1,2)$ ，

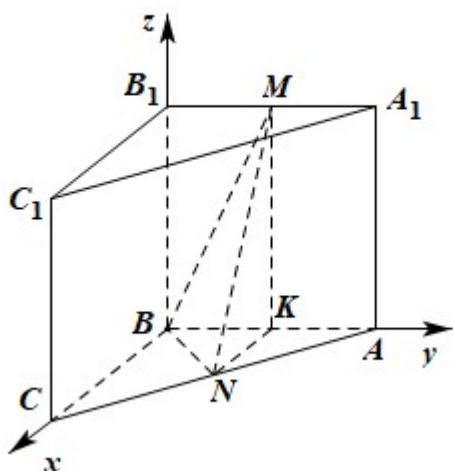
设平面  $BNM$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{从而} \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = -1, \text{ 则 } \vec{n} = (-2, 2, -1),$$

设直线  $AB$  与平面  $BNM$  所成的角为  $\theta$ ，则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}.$$





18. (1) 0.4      (2)  $\frac{7}{5}$

(3) 丙

19. (1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2)  $k = -4$

20. (1)  $y = x$

(2)  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增.

(3) 解: 原不等式等价于  $f(s+t) - f(s) > f(t) - f(0)$ ,

令  $m(x) = f(x+t) - f(x)$ ,  $(x, t > 0)$ ,

即证  $m(x) > m(0)$ ,

$\because m(x) = f(x+t) - f(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) - e^x \ln(1+x)$ ,

$$m'(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) + \frac{e^{x+t}}{1+x+t} - e^x \ln(1+x) - \frac{e^x}{1+x} = g(x+t) - g(x),$$

由 (2) 知  $g(x) = f'(x) = e^x (\ln(1+x) + \frac{1}{1+x})$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore g(x+t) > g(x)$ ,

$\therefore m'(x) > 0$

$\therefore m(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $x, t > 0$ ,



$\therefore m(x) > m(0)$ , 所以命题得证.

21. (1) 是5-连续可表数列; 不是6-连续可表数列.

(2) 若  $k \leq 3$ , 设为  $Q: a, b, c$ , 则至多  $a+b, b+c, a+b+c, a, b, c$ , 6个数字, 没有8个, 矛盾;

当  $k=4$  时, 数列  $Q: 1, 4, 1, 2$ , 满足  $a_1=1, a_4=2, a_3+a_4=3, a_2=4, a_1+a_2=5$ ,

$a_1+a_2+a_3=6, a_2+a_3+a_4=7, a_1+a_2+a_3+a_4=8, \therefore k_{\min}=4$ .

(3)  $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ , 若  $i=j$  最多有  $k$  种, 若  $i \neq j$ , 最多有  $C_k^2$  种, 所以最多有  $k + C_k^2 = \frac{k(k+1)}{2}$  种,

若  $k \leq 5$ , 则  $a_1, a_2, \dots, a_k$  至多可表  $\frac{5(5+1)}{2} = 15$  个数, 矛盾,

从而若  $k < 7$ , 则  $k=6$ ,  $a, b, c, d, e, f$  至多可表  $\frac{6(6+1)}{2} = 21$  个数,

而  $a+b+c+d+e+f < 20$ , 所以其中有负的, 从而  $a, b, c, d, e, f$  可表 1~20 及那个负数 (恰 21 个), 这表明  $a \sim f$  中仅一个负的, 没有 0, 且这个负的在  $a \sim f$  中绝对值最小, 同时  $a \sim f$  中没有两数相同, 设那个负数为  $-m (m \geq 1)$ ,

则所有数之和  $\geq m+1+m+2+\dots+m+5-m=4m+15, 4m+15 \leq 19 \Rightarrow m=1$ ,

$\therefore \{a, b, c, d, e, f\} = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 再考虑排序, 排序中不能有和相同, 否则不足 20 个,

$\therefore 1 = -1 + 2$  (仅一种方式),

$\therefore -1$  与 2 相邻,

若  $-1$  不在两端, 则 "x, -1, 2, \_\_, \_\_, \_\_" 形式,

若  $x=6$ , 则  $5=6+(-1)$  (有 2 种结果相同, 方式矛盾),

$\therefore x \neq 6$ , 同理  $x \neq 5, 4, 3$ , 故  $-1$  在一端, 不妨为 "-1, 2, A, B, C, D" 形式,

若  $A=3$ , 则  $5=2+3$  (有 2 种结果相同, 矛盾),  $A=4$  同理不行,

$A=5$ , 则  $6=-1+2+5$  (有 2 种结果相同, 矛盾), 从而  $A=6$ ,

由于  $7=-1+2+6$ , 由表法唯一知 3, 4 不相邻,

故只能  $-1, 2, 6, 3, 5, 4$ , ①或  $-1, 2, 6, 4, 5, 3$ , ②

这 2 种情形,

对①:  $9=6+3=5+4$ , 矛盾,

对②:  $8=2+6=5+3$ , 也矛盾, 综上  $k \neq 6$

$\therefore k \geq 7$ .

