

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）

理科数学

参考答案（仅供参考）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. C 2. B 3. D 4. B 5. A 6. B 7. D 8. B 9. C 10. A 11. C 12. A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 11

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. $\frac{6}{35}$

16. $\sqrt{3}-1$

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. （1）解：因为 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$ ，即 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$ ①，

当 $n \geq 2$ 时， $2S_{n-1} + (n-1)^2 = 2(n-1)a_{n-1} + (n-1)$ ②，

①-②得， $2S_n + n^2 - 2S_{n-1} - (n-1)^2 = 2na_n + n - 2(n-1)a_{n-1} - (n-1)$ ，

即 $2a_n + 2n - 1 = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 1$ ，

即 $2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1)$ ，所以 $a_n - a_{n-1} = 1$ ， $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ ，

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

（2）-78.

18. （1）证明：在四边形 $ABCD$ 中，作 $DE \perp AB$ 于 E ， $CF \perp AB$ 于 F ，



因为 $CD \parallel AB$, $AD = CD = CB = 1$, $AB = 2$,

所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,

所以 $AE = BF = \frac{1}{2}$,

故 $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BD = \sqrt{DE^2 + BE^2} = \sqrt{3}$,

所以 $AD^2 + BD^2 = AB^2$,

所以 $AD \perp BD$,

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp BD$,

又 $PD \cap AD = D$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAD ,

又因 $PA \subset$ 平面 PAD ,

所以 $BD \perp PA$;

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19. (1) 0.6;

(2) 分布列见解析, $E(X) = 13$.

【解析】依题可知, X 的可能取值为 0, 10, 20, 30, 所以,

$$P(X=0) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16,$$

$$P(X=10) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 = 0.44,$$

$$P(X=20) = 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.34,$$

$$P(X=30) = 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.06.$$

即 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

期望 $E(X) = 0 \times 0.16 + 10 \times 0.44 + 20 \times 0.34 + 30 \times 0.06 = 13$.



20. (1) $y^2 = 4x$;

(2) $AB: x = \sqrt{2}y + 4$.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.

(1) $(-\infty, e+1]$

(2) 由题知, $f(x)$ 一个零点小于 1, 一个零点大于 1

不妨设 $x_1 < 1 < x_2$

要证 $x_1 x_2 < 1$, 即证 $x_1 < \frac{1}{x_2}$

因为 $x_1, \frac{1}{x_2} \in (0, 1)$, 即证 $f(x_1) > f\left(\frac{1}{x_2}\right)$

因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 即证 $f(x_2) > f\left(\frac{1}{x_2}\right)$

即证 $\frac{e^x}{x} - \ln x + x - xe^{\frac{1}{x}} - \ln x - \frac{1}{x} > 0, x \in (1, +\infty)$

即证 $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} - 2\left[\ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] > 0$

下面证明 $x > 1$ 时, $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} > 0, \ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) < 0$

设 $g(x) = \frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}}, x > 1$,

则 $g'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x - \left(e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x - e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{x-1}{x}\left(\frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}\right)$

设 $\varphi(x) = \frac{e^x}{x} (x > 1), \varphi'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x = \frac{x-1}{x^2}e^x > 0$

所以 $\varphi(x) > \varphi(1) = e$, 而 $e^{\frac{1}{x}} < e$



所以 $\frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}} > 0$, 所以 $g'(x) > 0$

所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增

即 $g(x) > g(1) = 0$, 所以 $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} > 0$

令 $h(x) = \ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 1$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2x - x^2 - 1}{2x^2} = \frac{-(x-1)^2}{2x^2} < 0$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减

即 $h(x) < h(1) = 0$, 所以 $\ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) < 0$;

综上, $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} - 2\left[\ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] > 0$, 所以 $x_1 x_2 < 1$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. (1) $y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$;

(2) C_3, C_1 的交点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 2)$, C_3, C_2 的交点坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, -1\right), (-1, -2)$.

[选修 4-5: 不等式选讲]

23. (1) 证明: 由柯西不等式有 $\left[a^2 + b^2 + (2c)^2\right](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + 2c)^2$,

所以 $a + b + 2c \leq 3$,

当且仅当 $a = b = 2c = 1$ 时, 取等号,

所以 $a + b + 2c \leq 3$;

(2) 证明: 因为 $b = 2c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 由 (1) 得 $a + b + 2c = a + 4c \leq 3$,

即 $0 < a + 4c \leq 3$, 所以 $\frac{1}{a + 4c} \geq \frac{1}{3}$,



由权方和不等式知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{4c} \geq \frac{(1+2)^2}{a+4c} = \frac{9}{a+4c} \geq 3$,

当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{2}{4c}$, 即 $a=1$, $c=\frac{1}{2}$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$





