2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

1.已知集合 $A=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{N}^*,y\geq x\}$，$B=\{(x,y)|x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　　）

A. 2　　**B.** 3　　**C.** 4　　**D.** 6

2.复数 $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ 的虚部是（　　）

A. $-\dfrac{3}{10}$　　**B.** $-\dfrac{1}{10}$　　**C.** $\dfrac{1}{10}$　　**D.** $\dfrac{3}{10}$

3.在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 $\sum\limits_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是（　　）

A. $p_1=p_4=0.1,p_2=p_3=0.4$　　**B.** $p_1=p_4=0.4,p_2=p_3=0.1$

C. $p_1=p_4=0.2,p_2=p_3=0.3$　　**D.** $p_1=p_4=0.3,p_2=p_3=0.2$

4.***Logistic*** 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 ***Logistic*** 模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数．当 $I(t^*)=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为（　　）（$\ln19\approx3$）

A. 60　　**B.** 63　　**C.** 66　　**D.** 69

5.设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$　　**B.** $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$　　**C.** $(1,0)$　　**D.** $(2,0)$

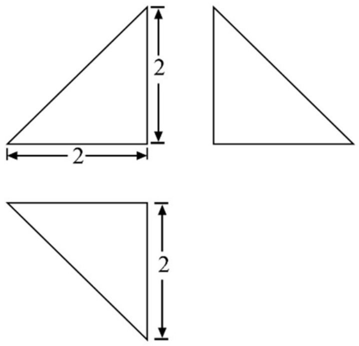
6.已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=$（　　）

A. $-\dfrac{31}{35}$　　**B.** $-\dfrac{19}{35}$　　**C.** $\dfrac{17}{35}$　　**D.** $\dfrac{19}{35}$

7.在△ABC中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

8.下图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是（　　）



A. $6+4\sqrt{2}$　　B. $4+4\sqrt{2}$　　C. $6+2\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

9.已知 $2\tan\theta-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=7$，则 $\tan\theta=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10.若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为（　　）

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\frac{1}{2}$

C. $y=\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

11.设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$．P 是 C 上一点，且 $F_1P\perp F_2P$．若△PF_1F_2 的面积为 4，则 $a=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

12.已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$．设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a$

二、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分.

13.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1, \end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值为__________.

14. $(x^2+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是__________（用数字作答）.

15.已知圆锥的底面半径为 **1**，母线长为 **3**，则该圆锥内半径最大的球的体积为__________.

16.关于函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

①$f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

②$f(x)$ 的图像关于原点对称.

③$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称.

④$f(x)$ 的最小值为 **2**.

其中所有真命题的序号是__________.

三、解答题：共 **70** 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 **17~21** 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 **22**、**23** 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 **60** 分.

17.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

（**1**）计算 a_2，a_3，猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明；

（**2**）求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

锻炼人次 空气质量等级	[0，200]	(200，400]	(400，600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1，2，3，4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

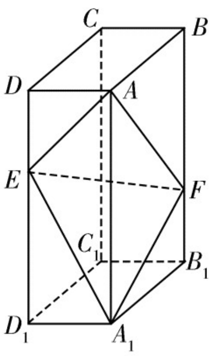
（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”．根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次≤400	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别在棱DD_1,BB_1上，且$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$.



（**1**）证明：点C_1在平面AEF内；

（**2**）若$AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角$A-EF-A_1$的正弦值.

20.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点.

（**1**）求C的方程；

（**2**）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积.

21.设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点($\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{2})$)处的切线与 y 轴垂直.

（1）求 b.

（2）若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 **1** 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 **1**.

（二）选考题：共 **10** 分.请考生在第 **22**、**23** 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

22.在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$

（t 为参数且 $t\neq 1$），C 与坐标轴交于 A、B 两点.

（1）求 $|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程.

[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

23.设 a，b，$c\in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$.

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用 $\max\{a，b，c\}$表示 a，b，c 中的最大值，证明：$\max\{a，b，c\}\geq\sqrt[3]{4}$.