2020年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，在选涂其它答案标号框.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x||x|<3，x\in Z\}$，$B=\{x||x|>1，x\in Z\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\varnothing$　　　　B. {–3，–2，2，3）

C. {–2，0，2}　　　　D. {–2，2}

【答案】D

【解析】

【分析】

解绝对值不等式化简集合 A,B 的表示，再根据集合交集的定义进行求解即可.

【详解】因为 $A=\left\{x\left||x|<3,x\in Z\right.\right\}=\left\{-2,-1,0,1,2\right\}$，

$B=\left\{x\left||x|>1,x\in Z\right.\right\}=\left\{x\left|x>1\text{或}x<-1,x\in Z\right.\right\}$，

所以 $A\cap B=\left\{2,-2\right\}$.

故选：D.

【点睛】本题考查绝对值不等式的解法，考查集合交集的定义，属于基础题.

2.（1–i）^{4}=（　　）

A. –4　　　　B. 4

C. –4i　　　　D. 4i

【答案】A

【解析】

【分析】

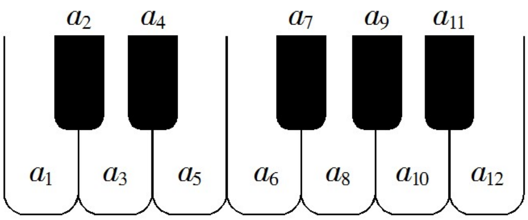
根据指数幂的运算性质，结合复数的乘方运算性质进行求解即可.

【详解】$(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(1-2i+i^2)^2=(-2i)^2=-4$.

故选：A.

【点睛】本题考查了复数的乘方运算性质，考查了数学运算能力，属于基础题.

3.如图，将钢琴上的 12 个键依次记为 a_1，a_2，…，a_{12}.设 $1\le i<j<k\le 12$．若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$，则称 a_i，a_j，a_k 为原位大三和弦；若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$，则称 a_i，a_j，a_k 为原位小三和弦．用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为（　　）



A. 5　　　　B. 8　　　　C. 10　　　　D. 15

【答案】C

【解析】

【分析】

根据原位大三和弦满足 $k-j=3, j-i=4$，原位小三和弦满足 $k-j=4, j-i=3$

从 $i=1$ 开始，利用列举法即可解出.

【详解】根据题意可知，原位大三和弦满足：$k-j=3, j-i=4$.

$\therefore i=1, j=5, k=8$；$i=2, j=6, k=9$；$i=3, j=7, k=10$；$i=4, j=8, k=11$；$i=5, j=9, k=12$.

原位小三和弦满足：$k-j=4, j-i=3$.

$\therefore i=1, j=4, k=8$；$i=2, j=5, k=9$；$i=3, j=6, k=10$；$i=4, j=7, k=11$；$i=5, j=8, k=12$.

故个数之和为 10.

故选：C.

【点睛】本题主要考查列举法的应用，以及对新定义的理解和应用，属于基础题.

4.在新冠肺炎疫情防控期间，某超市开通网上销售业务，每天能完成 1200 份订单的配货，由于订单量大幅增加，导致订单积压.为解决困难，许多志愿者踊跃报名参加配货工作.已知该超市某日积压 500 份订单未配货，预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05，志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货，为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95，则至少需要志愿者（　　）

A. 10 名　　　　B. 18 名　　　　C. 24 名　　　　D. 32 名

【答案】B

【解析】

【分析】

算出第二天订单数，除以志愿者每天能完成的订单配货数即可.

【详解】由题意，第二天新增订单数为$500+1600-1200=900$，设需要志愿者x名，

$\frac{50x}{900}\geq 0.95$，$x\geq 17.1$，故需要志愿者18名.

故选：B

【点睛】本题主要考查函数模型的简单应用，属于基础题.

5.已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，则在下列向量中，与$\vec{b}$垂直的是（　　）

A. $\vec{a}+2\vec{b}$　　　　B. $2\vec{a}+\vec{b}$　　　　C. $\vec{a}-2\vec{b}$　　　　D. $2\vec{a}-\vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据平面向量数量积的定义、运算性质，结合两平面向量垂直数量积为零这一性质逐一判断即可.

【详解】由已知可得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^{\circ}=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

A：因为$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^{2}=\frac{1}{2}+2\times 1=\frac{5}{2}\neq 0$，所以本选项不符合题意；

B：因为$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{2}=2\times\frac{1}{2}+1=2\neq 0$，所以本选项不符合题意；

C：因为$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^{2}=\frac{1}{2}-2\times 1=-\frac{3}{2}\neq 0$，所以本选项不符合题意；

D：因为$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^{2}=2\times\frac{1}{2}-1=0$，所以本选项符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查了平面向量数量积的定义和运算性质，考查了两平面向量数量积为零则这两个平面向量互相垂直这一性质，考查了数学运算能力.

6.记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=24$，则$\frac{S_n}{a_n}=$（　　）

A. 2^n-1　　　　B. $2-2^{1-n}$　　　　C. $2-2^{n-1}$　　　　D. $2^{1-n}-1$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据等比数列的通项公式，可以得到方程组，解方程组求出首项和公比，最后利用等比数列的通

n项和公式进行求解即可.

【详解】设等比数列的公比为q，

由$a_5-a_3=12,a_6-a_4=24$可得：$\begin{cases}a_1q^4-a_1q^2=12\\a_1q^5-a_1q^3=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=2\\a_1=1\end{cases}$，

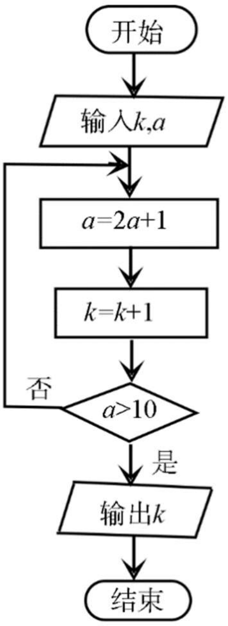
所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1},S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

因此$\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$.

故选：B.

【点睛】本题考查了等比数列的通项公式的基本量计算，考查了等比数列前n项和公式的应用，考查了数学运算能力.

7.执行右面的程序框图，若输入的k=0，a=0，则输出的k为（　　）



A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】

由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出的k值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，即可求得答案.

【详解】由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出的k值

模拟程序的运行过程

$k=0,\quad a=0$

第 1 次循环，$a=2\times 0+1=1$,$k=0+1=1$，$1>10$ 为否

第 2 次循环，$a=2\times 1+1=3$,$k=1+1=2$，$3>10$ 为否

第 3 次循环，$a=2\times 3+1=7$,$k=2+1=3$，$7>10$ 为否

第 4 次循环，$a=2\times 7+1=15$,$k=3+1=4$，$15>10$ 为是

退出循环

输出 $k=4$.

故选：C.

【点睛】本题考查求循环框图的输出值，解题关键是掌握模拟循环语句运行的计算方法，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

8.若过点（2，1）的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】

由题意可知圆心在第一象限，设圆心的坐标为 $(a,a),a>0$，可得圆的半径为 a，写出圆的标准方程，利用点 $(2,1)$ 在圆上，求得实数 a 的值，利用点到直线的距离公式可求出圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离.

【详解】由于圆上的点 $(2,1)$ 在第一象限，若圆心不在第一象限，

则圆与至少与一条坐标轴相交，不合乎题意，所以圆心必在第一象限，

设圆心的坐标为 (a,a)，则圆的半径为 a，

圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$.

由题意可得 $(2-a)^2+(1-a)^2=a^2$，

可得 $a^2-6a+5=0$，解得 $a=1$ 或 $a=5$，

所以圆心的坐标为 $(1,1)$ 或 $(5,5)$，

圆心 $(1,1)$ 到直线 $2x-y-3=0$ 的距离均为 $d_1=\frac{|2\times 1-1-3|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

圆心 $(5,5)$ 到直线 $2x-y-3=0$ 的距离均为 $d_2=\dfrac{|2\times5-5-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离均为 $d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；

所以，圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：B.

【点睛】本题考查圆心到直线距离的计算，求出圆的方程是解题的关键，考查计算能力，属于中等题.

9.设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D,E 两点，若 $\triangle ODE$ 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为（　　）

A. 4　　　　B. 8　　　　C. 16　　　　D. 32

【答案】B

【解析】

【分析】

因为 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，可得双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，与直线 $x=a$ 联立方程求得 D，E 两点坐标，即可求得 $|ED|$，根据 $\triangle ODE$ 的面积为 8，可得 ab 值，根据 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$，结合均值不等式，即可求得答案.

【详解】$\because$ $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

$\because$ 直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点

不妨设 D 为在第一象限，E 在第四象限

联立 $\begin{cases}x=a\\ y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$

故 $D(a,b)$

联立 $\begin{cases}x=a\\ y=-\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=a\\ y=-b\end{cases}$

故 $E(a,-b)$

$\therefore |ED|=2b$

$\therefore$ □ODE 面积为：$S_{\triangle ODE}=\dfrac{1}{2}a\times 2b=ab=8$

$\because$ 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

$\therefore$ 其焦距为 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{16}=8$

当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 取等号

$\therefore$ C 的焦距的最小值：8

故选：B.

【点睛】本题主要考查了求双曲线焦距的最值问题，解题关键是掌握双曲线渐近线的定义和均值不等式求最值方法，在使用均值不等式求最值时，要检验等号是否成立，考查了分析能力和计算能力，属于中档题.

10.设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$，则 $f(x)$（　　）

A. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$单调递增　　B. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$单调递减

C. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$单调递增　　D. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$单调递减

【答案】A

【解析】

【分析】

根据函数的解析式可知函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，利用定义可得出函数 $f(x)$ 为奇函数，

再根据函数的单调性法则，即可解出.

【详解】因为函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ 定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，其关于原点对称，而 $f(-x)=-f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

又因为函数 $y=x^3$ 在 $(0,+?\ )$ 上单调递增，在 $(-?\ ,0)$ 上单调递增，

而 $y=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$ 在 $(0,+?\ )$ 上单调递减，在 $(-?\ ,0)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ 在 $(0,+?\ )$ 上单调递增，在 $(-?\ ,0)$ 上单调递增.

故选：A.

【点睛】本题主要考查利用函数的解析式研究函数的性质，属于基础题.

11.已知△ABC是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，且其顶点都在球 O 的球面上.若球 O 的表面积为 16 π，则 O 到平面 ABC 的距离为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. 1　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

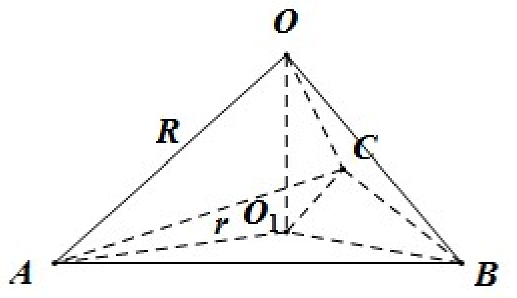
【答案】C

【解析】

【分析】

根据球O的表面积和△ABC的面积可求得球O的半径R和△ABC外接圆半径r，由球的性质可知所求距离$d=\sqrt{R^2-r^2}$.

【详解】



设球O的半径为R，则$4\pi R^2=16\pi$，解得：$R=2$.

设△ABC外接圆半径为r，边长为a，

∵△ABC是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，

$\therefore \frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，解得：$a=3$，$\therefore r=\frac{2}{3}\times\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{2}{3}\times\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$，

∴球心O到平面ABC的距离$d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{4-3}=1$.

故选：C.

【点睛】本题考查球的相关问题的求解，涉及到球的表面积公式和三角形面积公式的应用；解题关键是明确球的性质，即球心和三角形外接圆圆心的连线必垂直于三角形所在平面.

12.若$2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则（　　）

A. $\ln(y-x+1)>0$　　B. $\ln(y-x+1)<0$　　C. $\ln|x-y|>0$　　D. $\ln|x-y|<0$

【答案】A

【解析】

【分析】

将不等式变为$2^{x}-3^{-x}<2^{y}-3^{-y}$，根据$f\left(t\right)=2^{t}-3^{-t}$的单调性知$x<y$，以此去判断各个选项中真数与1的大小关系，进而得到结果.

【详解】由$2^{x}-2^{y}<3^{-x}-3^{-y}$得：$2^{x}-3^{-x}<2^{y}-3^{-y}$，

令$f\left(t\right)=2^{t}-3^{-t}$，

$\because y=2^{x}$为R上的增函数，$y=3^{-x}$为R上的减函数，$\therefore f\left(t\right)$为$R$上的增函数，

$\therefore x<y$，

Q $y-x>0$，$\therefore y-x+1>1$，$\therefore \ln\left(y-x+1\right)>0$，则 A 正确，B 错误；

Q $\left|x-y\right|$与1的大小不确定，故 CD 无法确定.

故选：A.

【点睛】本题考查对数式的大小的判断问题，解题关键是能够通过构造函数的方式，利用函数的单调性得到x,y的大小关系，考查了转化与化归的数学思想.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.若$\sin x=-\dfrac{2}{3}$，则$\cos 2x=$__________.

【答案】$\dfrac{1}{9}$

【解析】

【分析】

直接利用余弦的二倍角公式进行运算求解即可.

【详解】$\cos 2x=1-2\sin^{2}x=1-2\times(-\dfrac{2}{3})^{2}=1-\dfrac{8}{9}=\dfrac{1}{9}$.

故答案为：$\dfrac{1}{9}$.

【点睛】本题考查了余弦的二倍角公式的应用，属于基础题.

14.记S_n为等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和．若$a_1=-2$，$a_2+a_6=2$，则$S_{10}=$__________.

【答案】25

【解析】

【分析】

因为$\left\{a_n\right\}$是等差数列，根据已知条件$a_2+a_6=2$，求出公差，根据等差数列前n项和，即可求得答案.

【详解】$\because$ $\left\{a_n\right\}$是等差数列，且$a_1=-2$，$a_2+a_6=2$

设$\{a_n\}$等差数列的公差d

根据等差数列通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$

可得$a_1+d+a_1+5d=2$

即：$-2+d+(-2)+5d=2$

整理可得：$6d=6$

解得：$d=1$

$\because$ 根据等差数列前n项和公式：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d, n\in N^*$

可得：$S_{10}=10(-2)+\dfrac{10\times(10-1)}{2}=-20+45=25$

$\therefore S_{10}=25$.

故答案为：25.

【点睛】本题主要考查了求等差数列的前n项和，解题关键是掌握等差数列的前n项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

15.若x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geq -1,\\ x-y\geq -1,\\ 2x-y\leq 1,\end{cases}$则$z=x+2y$的最大值是__________.

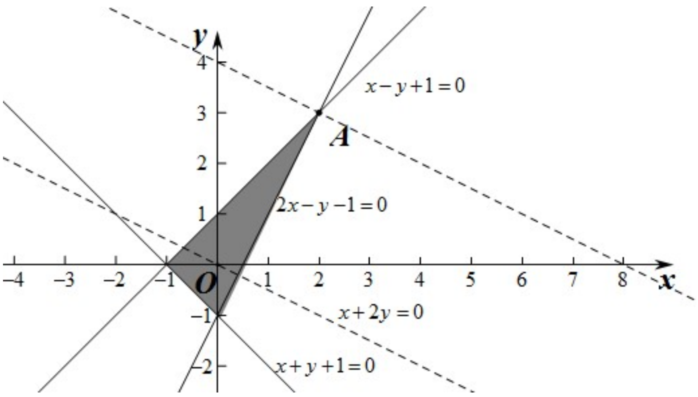
【答案】8

【解析】

【分析】

在平面直角坐标系内画出不等式组表示的平面区域，然后平移直线$y=-\dfrac{1}{2}x$，在平面区域内找到一点使得直线$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z$在纵轴上的截距最大，求出点的坐标代入目标函数中即可.

【详解】不等式组表示的平面区域为下图所示：



平移直线 $y=-\frac{1}{2}x$，当直线经过点 A 时，直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 在纵轴上的截距最大，

此时点 A 的坐标是方程组 $\begin{cases}x-y=-1\\2x-y=1\end{cases}$ 的解，解得：$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，

因此 $z=x+2y$ 的最大值为：$2+2\times3=8$.

故答案为：8.

【点睛】本题考查了线性规划的应用，考查了数形结合思想，考查数学运算能力.

16.设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内.

p_2：过空间中任意三点有且仅有一个平面.

p_3：若空间两条直线不相交，则这两条直线平行.

p_4：若直线 $l\subset$ 平面 α，直线 $m\perp$ 平面 α，则 $m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是__________.

① $p_1\wedge p_4$ ② $p_1\wedge p_2$ ③ $\neg p_2\vee p_3$ ④ $\neg p_3\vee\neg p_4$

【答案】①③④

【解析】

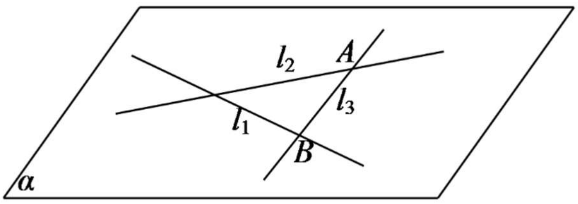
【分析】

利用两交线直线确定一个平面可判断命题 p_1 的真假；利用三点共线可判断命题 p_2 的真假；利用异面直线可判断命题 p_3 的真假，利用线面垂直的定义可判断命题 p_4 的真假.再利用复合命题的真假可得出结论.

【详解】对于命题 p_1，可设 l_1 与 l_2 相交，这两条直线确定的平面为 α；

若 l_3 与 l_1 相交，则交点 A 在平面 α 内，

同理，l_3 与 l_2 的交点 B 也在平面 α 内，



所以，$AB\subset\alpha$，即 $l_3\subset\alpha$，命题 p_1 为真命题；

对于命题 p_2，若三点共线，则过这三个点的平面有无数个，

命题 p_2 为假命题；

对于命题 p_3，空间中两条直线相交、平行或异面，

命题 p_3 为假命题；

对于命题 p_4，若直线 $m \perp$ 平面 α，

则 m 垂直于平面 α 内所有直线，

$\because$ 直线 $l \subset$ 平面 α，$\therefore$ 直线 $m \perp$ 直线 l，

命题 p_4 为真命题.

综上可知，p_1，p_4 为真命题，p_2，p_3 为假命题，

$p_1 \wedge p_4$ 为真命题，$p_1 \wedge p_2$ 为假命题，

$\neg p_2 \vee p_3$ 为真命题，$\neg p_3 \vee \neg p_4$ 为真命题.

故答案为：①③④.

【点睛】本题考查复合命题的真假，同时也考查了空间中线面关系有关命题真假的判断，考查推理能力，属于中等题.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos^2(\frac{\pi}{2}+A)+\cos A=\frac{5}{4}$.

（1）求 A；

（2）若 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，证明：△ABC 是直角三角形.

【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$；（2）证明见解析

【解析】

【分析】

（1）根据诱导公式和同角三角函数平方关系，$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$ 可化为 $1-\cos^2 A+\cos A=\frac{5}{4}$，

即可解出；

（2）根据余弦定理可得 $b^2+c^2-a^2=bc$，将 $b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 代入可找到 a,b,c 关系，

再根据勾股定理或正弦定理即可证出.

【详解】（1）因为 $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\dfrac{5}{4}$，所以 $\sin^2 A+\cos A=\dfrac{5}{4}$，

即 $1-\cos^2 A+\cos A=\dfrac{5}{4}$，

解得 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，又 $0<A<\pi$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

即 $b^2+c^2-a^2=bc$ ①，

又 $b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ ②， 将②代入①得，$b^2+c^2-3(b-c)^2=bc$，

即 $2b^2+2c^2-5bc=0$，而 $b>c$，解得 $b=2c$，

所以 $a=\sqrt{3}c$，

故 $b^2=a^2+c^2$，

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

【点睛】本题主要考查诱导公式和平方关系的应用，利用勾股定理或正弦定理，余弦定理判断三角形的形状，属于基础题.

18.某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加.为调查该地区某种野生动物的数量，将其分成面积相近的 200 个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区，调查得到样本数据(x_i，y_i)(i=1，2，…，20)，其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积(单位：公顷)和这种野生动物的数量，并计算得 $\sum_{i=1}^{20}x_i=60$，$\sum_{i=1}^{20}y_i=1200$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80$，$\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000$，

$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800$.

（1）求该地区这种野生动物数量的估计值（这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物

均数乘以地块数)；

（2）求样本(x_i，y_i)(i=1，2，…，20)的相关系数（精确到 0.01）；

（3）根据现有统计资料，各地块间植物覆盖面积差异很大.为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法，并说明理由.

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$， $\sqrt{2}\approx$**1.414**.

【答案】（1）12000；（2）0.94；（3）详见解析

【解析】

【分析】

（1）利用野生动物数量的估计值等于样区野生动物平均数乘以地块数，代入数据即可；

（2）利用公式 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}$ 计算即可；

（3）各地块间植物覆盖面积差异较大，为提高样本数据的代表性，应采用分层抽样.

【详解】（1）样区野生动物平均数为 $\dfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=\dfrac{1}{20}\times1200=60$，

地块数为 200，该地区这种野生动物的估计值为 $200\times60=12000$

（2）样本 (x_i,y_i) (i=1，2，…，20)的相关系数为

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9000}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94$$

（3）由（2）知各样区的这种野生动物的数量与植物覆盖面积有很强的正相关性，

由于各地块间植物覆盖面积差异很大，从俄各地块间这种野生动物的数量差异很大，

采用分层抽样的方法较好地保持了样本结构与总体结构得以执行，提高了样本的代表性，

从而可以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计.

【点睛】本题主要考查平均数的估计值、相关系数的计算以及抽样方法的选取，考查学生数学运算能力，是一道容易题.

19.已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合，C_1 的中心与 C_2 的顶点重合．过 F 且与 x 轴重直的直线交 C_1 于 A，B 两点，交 C_2 于 C，D 两点，且$|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.

（1）求 C_1 的离心率；

（2）若 C_1 的四个顶点到 C_2 的准线距离之和为 12，求 C_1 与 C_2 的标准方程.

【答案】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）C_1：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，$C_2$：　$y^2=8x$.

【解析】

【分析】

（1）根据题意求出 C_2 的方程，结合椭圆和抛物线的对称性不妨设 A,C 在第一象限，运用代入法求出 A,B,C,D 点的纵坐标，根据$|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$，结合椭圆离心率的公式进行求解即可；

（2）由（1）可以得到椭圆的标准方程，确定椭圆的四个顶点坐标，再确定抛物线的准线方程，最后结合已知进行求解即可；

【详解】解：（1）因为椭圆 C_1 的右焦点坐标为：$F(\mathrm{c},0)$,所以抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4cx$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

不妨设 A,C 在第一象限，因为椭圆 C_1 的方程为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

所以当 $x=c$ 时，有 $\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，因此 A,B 的纵坐标分别为$\dfrac{b^2}{a}$，$-\dfrac{b^2}{a}$；

又因为抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4cx$，所以当 $x=c$ 时，有 $y^2=4c\cdot c\Rightarrow y=\pm 2c$，

所以 C,D 的纵坐标分别为 $2c$，$-2c$，故$|AB|=\dfrac{2b^2}{a}$，$|CD|=4c$.

由$|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$得 $4c=\dfrac{8b^2}{3a}$，即 $3\cdot\dfrac{c}{a}=2-2(\dfrac{c}{a})^2$，解得 $\dfrac{c}{a}=-2$（舍去），$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

所以 C_1 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

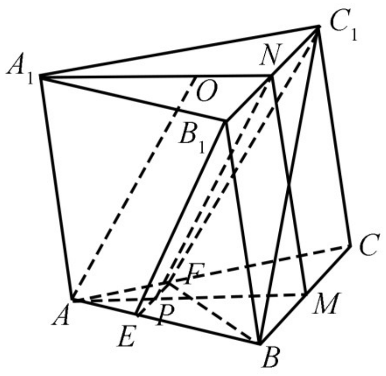
（2）由（1）知 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，故 $C_1:\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，所以 C_1 的四个顶点坐标分别为 $(2c,0)$，$(-2c,0)$，$(0,\sqrt{3}c)$，$(0,-\sqrt{3}c)$，C_2 的准线为 $x=-c$.

由已知得 $3c+c+c+c=12$，即 $c=2$.

所以 C_1 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，$C_2$ 的标准方程为 $y^2=8x$.

【点睛】本题考查了求椭圆的离心率，考查了求椭圆和抛物线的标准方程，考查了椭圆的四个顶点的坐标以及抛物线的准线方程，考查了数学运算能力.

20.如图，已知三棱柱 $ABC\text{–}A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点．过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E，交 AC 于 F.



（1）证明：$AA_1//MN$，且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F；

（2）设 O 为△$A_1B_1C_1$ 的中心，若 $AO=AB=6$，$AO//$平面 EB_1C_1F，且∠$MPN=\dfrac{\pi}{3}$，求四棱锥 $B\text{–}EB_1C_1F$ 的体积.

【答案】（1）证明见解析；（2）24.

【解析】

【分析】

（1）由 M,N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，$MN//CC_1$，根据条件可得 $AA_1//BB_1$，可证 $MN//AA_1$，要证平面 $EB_1C_1F\perp$ 平面 A_1AMN，只需证明 $EF\perp$ 平面 A_1AMN 即可；

（2）根据已知条件求得 $S_{四边形EB_1C_1F}$ 和 M 到 PN 的距离，根据椎体体积公式，即可求得 $V_{B-EB_1C_1F}$.

【详解】（1）$\because M,N$ 分别为 BC，B_1C_1 的中点，

$\therefore MN//BB_1$

又 $AA_1//BB_1$

$\therefore MN//AA_1$

在等边□ABC 中，M 为 BC 中点，则 $BC\perp AM$

又$\because$ 侧面BB_1C_1C为矩形，

$\therefore BC\perp BB_1$

$\because MN//BB_1$

$MN\perp BC$

由$MN\cap AM=M$，$MN,AM\subset$平面A_1AMN

$\therefore BC\perp$平面A_1AMN

又$\because$ $B_1C_1//BC$，且$B_1C_1\not\subset$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，

$\therefore B_1C_1//$平面ABC

又$\because$ $B_1C_1\subset$平面EB_1C_1F，且平面$EB_1C_1F\cap$平面$ABC=EF$

$\therefore B_1C_1//EF$

$\therefore EF//BC$

又$\because BC\perp$平面A_1AMN

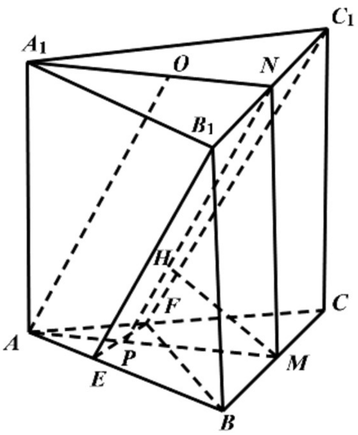
$\therefore EF\perp$平面A_1AMN

$\because EF\subset$平面EB_1C_1F

$\therefore$平面$EB_1C_1F\perp$平面A_1AMN

（2）过M作PN垂线，交点为H，

画出图形，如图



$\because$ $AO//$平面EB_1C_1F

$AO \subset$ 平面 A_1AMN，平面 $A_1AMN \cap$ 平面 $EB_1C_1F = NP$

$\therefore AO // NP$

又$\because NO // AP$

$\therefore AO = NP = 6$

$\because O$ 为$\triangle A_1B_1C_1$ 的中心.

$\therefore ON = \dfrac{1}{3}A_1C_1\sin 60^\circ = \dfrac{1}{3}\times 6\times\sin 60^\circ = \sqrt{3}$

故：$ON = AP = \sqrt{3}$，则 $AM = 3AP = 3\sqrt{3}$，

$\because$ 平面 $EB_1C_1F \perp$ 平面 A_1AMN，平面 $EB_1C_1F \cap$ 平面 $A_1AMN = NP$，

$MH \subset$ 平面 A_1AMN

$\therefore MH \perp$ 平面 EB_1C_1F

又$\because$ 在等边□ABC 中 $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AP}{AM}$

即 $EF = \dfrac{AP\cdot BC}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}\times 6}{3\sqrt{3}} = 2$

由（1）知，四边形 EB_1C_1F 为梯形

$\therefore$ 四边形 EB_1C_1F 的面积为：$S_{\text{四边形}EB_1C_1F} = \dfrac{EF + B_1C_1}{2}\cdot NP = \dfrac{2+6}{2}\times 6 = 24$

$\therefore V_{B-EB_1C_1F} = \dfrac{1}{3}S_{\text{四边形}EB_1C_1F}\cdot h$，

h 为 M 到 PN 的距离 $MH = 2\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ = 3$，

$\therefore V = \dfrac{1}{3}\times 24\times 3 = 24$.

【点睛】本题主要考查了证明线线平行和面面垂直，及其求四棱锥的体积，解题关键是掌握面面垂直转为求证线面垂直的证法和棱锥的体积公式，考查了分析能力和空间想象能力，属于中档题.

21.已知函数 $f(x) = 2\ln x + 1$.

（1）若 $f(x) \le 2x + c$，求 c 的取值范围；

（2）设 $a > 0$ 时，讨论函数 $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 的单调性.

【答案】（1）$c \geq -1$；（2）$g(x)$ 在区间 $(0,a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，没有递增区间

【解析】

【分析】

（1）不等式 $f(x) \leq 2x+c$ 转化为 $f(x)-2x-c \leq 0$，构造新函数，利用导数求出新函数的最大值，进而进行求解即可；

（2）对函数 $g(x)$ 求导，把导函数 $g'(x)$ 的分子构成一个新函数 $m(x)$，再求导得到 $m'(x)$，根据 $m'(x)$ 的正负，判断 $m(x)$ 的单调性，进而确定 $g'(x)$ 的正负性，最后求出函数 $g(x)$ 的单调性.

【详解】（1）函数 $f(x)$ 的定义域为：$(0,+\infty)$

$f(x) \leq 2x+c \Rightarrow f(x)-2x-c \leq 0 \Rightarrow 2\ln x+1-2x-c \leq 0(*)$，

设 $h(x)=2\ln x+1-2x-c(x>0)$，则有 $h'(x)=\dfrac{2}{x}-2=\dfrac{2(1-x)}{x}$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0, h(x)$ 单调递减，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0, h(x)$ 单调递增，

所以当 $x=1$ 时，函数 $h(x)$ 有最大值，

即 $h(x)_{\max}=h(1)=2\ln 1+1-2\times 1-c=-1-c$，

要想不等式 $(*)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

只需 $h(x)_{\max} \leq 0 \Rightarrow -1-c \leq 0 \Rightarrow c \geq -1$；

（2）$g(x)=\dfrac{2\ln x+1-(2\ln a-1)}{x-a}=\dfrac{2(\ln x-\ln a)}{x-a}(x>0$ 且 $x \neq a)$

因此 $g'(x)=\dfrac{2(x-a-x\ln x+x\ln a)}{x(x-a)^2}$，设 $m(x)=2(x-a-x\ln x+x\ln a)$，

则有 $m'(x)=2(\ln a-\ln x)$，

当 $x>a$ 时，$\ln x>\ln a$，所以 $m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，因此有 $m(x)<m(a)=0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减；

当 $0<x<a$ 时，$\ln x<\ln a$，所以 $m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，因此有 $m(x)<m(a)=0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，没有递增区间.

【点睛】本题考查了利用导数研究不等式恒成立问题，以及利用导数判断含参函数的单调性，考查了数学运算能力，是中档题.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑．按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分．

[选修 4—4：坐标系与参数方程]

22.已知曲线 C_1，C_2 的参数方程分别为 C_1：$\begin{cases} x=4\cos^2\theta, \\ y=4\sin^2\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），C_2：$\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t}, \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$（$t$ 为参数）.

（1）将 C_1，C_2 的参数方程化为普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.设 C_1，C_2 的交点为 P，求圆心在极轴上，且经过极点和 P 的圆的极坐标方程.

【答案】（1）$C_1: x+y=4$；$C_2: x^2-y^2=4$；（2）$\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$.

【解析】

【分析】

（1）分别消去参数 θ 和 t 即可得到所求普通方程；

（2）两方程联立求得点 P，求得所求圆的直角坐标方程后，根据直角坐标与极坐标的互化即可得到所求极坐标方程.

【详解】（1）由 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 得 C_1 的普通方程为：$x+y=4$；

由 $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$ 得：$\begin{cases} x^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2 \\ y^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2 \end{cases}$，两式作差可得 C_2 的普通方程为：$x^2-y^2=4$.

（2）由 $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$ 得：$\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$，即 $P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$；

设所求圆圆心的直角坐标为 $(a,0)$，其中 $a>0$，

则 $\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(0-\dfrac{3}{2}\right)^2=a^2$，解得：$a=\dfrac{17}{10}$，$\therefore$ 所求圆的半径 $r=\dfrac{17}{10}$，

$\therefore$ 所求圆的直角坐标方程为：$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2+y^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2$，即 $x^2+y^2=\frac{17}{5}x$，

$\therefore$ 所求圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$.

【点睛】本题考查极坐标与参数方程的综合应用问题，涉及到参数方程化普通方程、直角坐标方程化极坐标方程等知识，属于常考题型.

[选修 4—5：不等式选讲]

23.已知函数 $f(x)=\left|x-a^2\right|+|x-2a+1|$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集；

（2）若 $f(x)\geqslant 4$，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$\left\{x\middle|x\leq\frac{3}{2}\text{ 或 }x\geq\frac{11}{2}\right\}$；（2）$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

【解析】

【分析】

（1）分别在 $x\leq 3$、$3<x<4$ 和 $x\geq 4$ 三种情况下解不等式求得结果；

（2）利用绝对值三角不等式可得到 $f(x)\geq(a-1)^2$，由此构造不等式求得结果.

【详解】（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-4|+|x-3|$.

当 $x\leq 3$ 时，$f(x)=4-x+3-x=7-2x\geq 4$，解得：$x\leqslant\frac{3}{2}$；

当 $3<x<4$ 时，$f(x)=4-x+x-3=1\geq 4$，无解；

当 $x\geq 4$ 时，$f(x)=x-4+x-3=2x-7\geq 4$，解得：$x\geq\frac{11}{2}$；

综上所述：$f(x)\geq 4$ 的解集为 $\left\{x\middle|x\leq\frac{3}{2}\text{ 或 }x\geq\frac{11}{2}\right\}$.

（2）$f(x)=\left|x-a^2\right|+|x-2a+1|\geq\left|\left(x-a^2\right)-(x-2a+1)\right|=\left|-a^2+2a-1\right|=(a-1)^2$（当且仅当 $2a-1\leq x\leq a^2$ 时取等号），

$\therefore(a-1)^2\geq 4$，解得：$a\leq -1$ 或 $a\geq 3$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

【点睛】本题考查绝对值不等式的求解、利用绝对值三角不等式求解最值的问题，属于常考题