2020年普通高等学校招生全国统一考试数学

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合 $A=\{x|1\le x\le 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{x|2<x\le 3\}$　　B. $\{x|2\le x\le 3\}$　　C. $\{x|1\le x<4\}$　　D. $\{x|1<x<4\}$

2.$\frac{2-i}{1+2i}=$（　　）

A. 1　　B. −1　　C. i　　D. −i

3.6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去1个场馆，甲场馆安排1名，乙场馆安排2名，丙场馆安排3名，则不同的安排方法共有（　　）

A. 120种　　B. 90种　　C. 60种　　D. 30种

4.日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间．把地球看成一个球(球心记为 O)，地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面.在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬40°，则晷针与点 A 处的水平面所成角为（　　）

A．20°　　B．40°　　C．50°　　D．90°

5.某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有96%的学生喜欢足球或游泳，60%的学生喜欢足球，82%的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是（　　）

A. 62%　　B. 56%　　C. 46%　　D. 42%

6.基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t(单位:天)的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$.有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$.据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为($\ln 2\approx 0.69$) （　　）

A. 1.2 天　　B. 1.8 天

C. 2.5 天　　D. 3.5 天

7.已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范用是

（　　）

A. $(-2,6)$　　B. $(-6,2)$

C. $(-2,4)$　　D. $(-4,6)$

8.若定义在R的奇函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geq 0$的 x 的取值范围是（　　）

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D. $[-1,0]\cup[1,3]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9.已知曲线$C: mx^2+ny^2=1$.（　　）

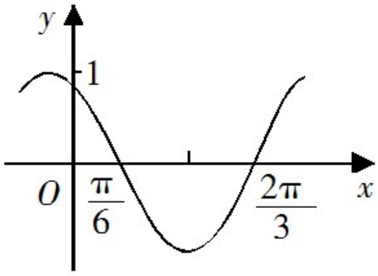
A. 若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B. 若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为$\sqrt{n}$

C. 若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D. 若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

10.下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图像，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ （　　）



A. $\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　　B. $\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$

C. $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　　D. $\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

11.已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则（　　）

A. $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$　　　**B.** $2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geq-2$　　　**D.** $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$

12.信息熵是信息论中的一个重要概念.设随机变量 X 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,n$，且$P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$.（　　）

A. 若 $n=1$，则 $H(X)=0$

B. 若 $n=2$，则 $H(X)$随着p_1的增大而增大

C. 若$p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $H(X)$随着 n 的增大而增大

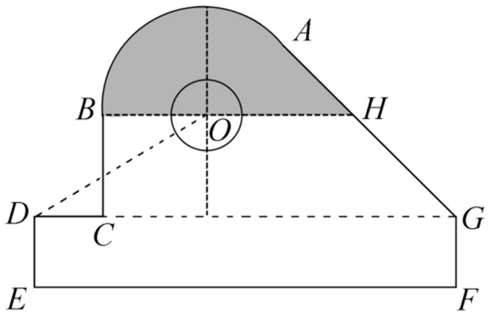
D. 若 $n=2m$，随机变量 Y 所有可能的取值为$1,2,\cdots,m$，且$P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}(j=1,2,\cdots,m)$，则 $H(X)\leq H(Y)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

14.将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的前 n 项和为________.

15.某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的截面如图所示．O为圆孔及轮廓圆弧AB所在圆的圆心，A是圆弧AB与直线AG的切点，B是圆弧AB与直线BC的切点，四边形$DEFG$为矩形，$BC\perp DG$，垂足为C，$\tan\angle ODC=\frac{3}{5}$，$BH\parallel DG$，$EF=12$ cm，$DE=2$ cm，A到直线DE和EF的距离均为 7 cm，圆孔半径为 1 cm，则图中阴影部分的面积为________cm^2.



16.已知直四棱柱$ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$的棱长均为 2，$\angle BAD=60°$．以D_1为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面BCC_1B_1的交线长为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.在①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求c的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\frac{\pi}{6}$，________?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20, a_3=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记b_m为$\{a_n\}$在区间$(0,m](m\in N^*)$中的项的个数，求数列$\{b_m\}$的前100项和S_{100}.

19.为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了100天空气中的$PM2.5$和SO_2浓度（单位：$\mu g/m^3$），得下表：

SO_2 / $PM2.5$	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

（1）估计事件“该市一天空气中$PM2.5$浓度不超过75，且SO_2浓度不超过150”的概率；

（2）根据所给数据，完成下面的2×2列联表：

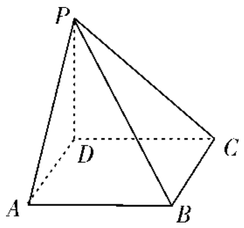
SO_2 / $PM2.5$	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

（3）根据（2）中的列联表，判断是否有99%的把握认为该市一天空气中$PM2.5$ 浓度与SO_2浓度有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20.如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$底面 $ABCD$．设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.



（1）证明：$l\perp$平面 PDC;

（2）已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值．

21.已知函数$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当$a=e$时，求曲线 $y=f$（x）在点（1，f（1））处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 f（x）≥ 1，求 a的取值范围．

22.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 A（2，1）.

（1）求 C 的方程：

（2）点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足．证明：存在定点 Q，使得$|DQ|$为定值．