

2022~2023 学年度上期期末高二年级调研考试

数学（理科）

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的渐近线方程为（ ）

- A. $y = \pm \frac{1}{4}x$ B. $y = \pm \frac{1}{2}x$ C. $y = \pm 4x$ D. $y = \pm 2x$

2. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，点 $P(4,1,9)$ 到点 $Q(2,4,3)$ 的距离为（ ）

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

3. 在一次游戏中，获奖者可以获得 5 件不同的奖品，这些奖品要从编号为 1-50 号的 50 种不同奖品中随机抽取确定，用系统抽样的方法为获奖者抽取奖品编号，则 5 件奖品的编号可以是（ ）

- A. 3, 13, 23, 33, 43 B. 11, 21, 31, 41, 50
C. 3, 6, 12, 24, 48 D. 3, 19, 21, 27, 50

4. 命题 “ $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2+1} \leq 0$ ” 的否定是（ ）

- A. $\exists m_0 \notin \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2+1} \geq 0$ B. $\exists m_0 \in \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2+1} > 0$
C. $\exists m_0 \in \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2+1} \leq 0$ D. $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2+1} > 0$

5. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，则 “ $a > b$ ” 是 “ $a + c > b + c$ ” 的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知直线 $l: Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为 0)，则下列说法中错误的是（ ）

- A. 当 $B = 0$ 时，直线 l 总与 x 轴相交
B. 当 $C = 0$ 时，直线 l 经过坐标原点 O
C. 当 $A = C = 0$ 时，直线 l 是 x 轴所在直线
D. 当 $AB \neq 0$ 时，直线 l 不可能与两坐标轴同时相交

7. 执行如图所示的程序语句，若输入 $x = 5$ ，则输出 y 的值为（ ）

```
INPUT x
IF x < 0 THEN
    y = -x + 1
ELSE
    y = -x^2 + 3
END IF
PRINT y
END
```

- A. 4 B. 7 C. -22 D. -28

8. 已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点， M 是抛物线上一点，且满足 $\angle OFM = 120^\circ$ (O 为坐标原点)，则 $|FM|$ 的值为（ ）

- A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{2}$ D. 2

9. 已知圆 $O_1: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 和直线 $l: x - y + 1 = 0$ 。若圆 O_2 与圆 O_1 关于直线 l 对称，则圆 O_2 的方程为（ ）

- A. $(x-3)^2 + y^2 = 9$ B. $x^2 + (y-3)^2 = 9$
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$

10. 已知 $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, 命题 $p: 2m^2 - 3m - 2 \leq 0$, 命题 $q: \frac{x^2}{6-m} + \frac{y^2}{2m-3} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆. 则下列命题中为假命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \vee q$ C. $\neg p \vee q$ D. $\neg p \vee \neg q$

11. 在平面直角坐标系 xOy 内, 对任意两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 定义 A, B 之间的“曼哈顿距离”为 $\|AB\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, 记到点 O 的曼哈顿距离小于或等于 1 的所有点 (x, y) 形成的平面区域为 Ω . 现向 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆内随机扔入 N 粒豆子, 每粒豆子落在圆内任何一点是等可能的, 若落在 Ω 内的豆子为 M 粒, 则下面各式的值最接近圆周率的是 ()

- A. $\frac{N}{M}$ B. $\frac{2N}{M}$ C. $\frac{3N}{M}$ D. $\frac{4N}{M}$

12. 已知有相同焦点 F_1, F_2 的椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 在第一象限的交点为 A , 若 $\triangle AOF_2$ (O 为坐标原点) 是等边三角形, 则 $\frac{ab}{mn}$ 的值为 ()

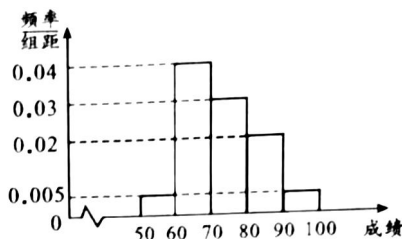
- A. $2 + \sqrt{3}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 上一点 P 到一个焦点的距离为 6, 那么点 P 到另一个焦点的距离为_____.

14. 为了解某校高三学生的数学成绩, 随机地抽查了该校 100 名高三学生的期中考试数学成绩, 得到频率分布直方图如图所示. 请根据以上信息, 估计该校高三学生数学成绩的中位数为_____. (结果保留到小数点后两位)



15. 甲, 乙两人下棋, 若两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{3}$, 甲获胜的概率是 $\frac{1}{4}$, 则乙获胜的概率是_____.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点 F_1, F_2 , 经过 F_1 斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线 l 与双曲线的左支相交于 P, Q 两点. 记 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径为 a , 则双曲线的离心率为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

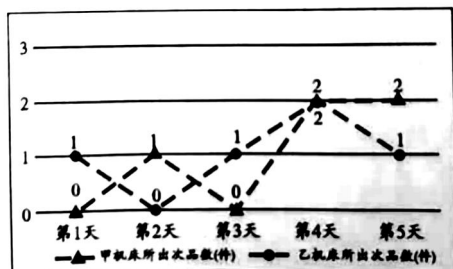
已知点 $P(-4, 2)$, 直线 $l: 3x - 4y - 5 = 0$.

(I) 求经过点 P 且与直线 l 平行的直线的方程;

(II) 求经过点 P 且与直线 l 垂直的直线的方程.

18. (本小题满分 12 分)

甲, 乙两台机床同时生产一种零件, 统计 5 天中两台机床每天所出的次品件数, 数据如下图:



(I) 判断哪台机床的性能更稳定, 请说明理由;

(II) 从甲机床这五天的数据中任意抽取两天的数据, 求至多有一天的次品数超过 1 件的概率.

19. (本小题满分 12 分)

已知圆 $A: x^2 + y^2 - 6x = 0$ 与直线 $x = \frac{3}{2}$ 相交于 M, N 两点.

(I) 求 $|MN|$ 的长;

(II) 设圆 C 经过点 M, N 及 $B(2, 2)$. 若点 P 在圆 C 上, 点 Q 在圆 A 上, 求 $|PQ|$ 的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

某工厂统计 2022 年销售网点数量与售卖出的产品件数的数据如下表:

销售网点数 x (单位: 个)	17	19	20	21	23
售卖出的产品件数 y (单位: 万件)	21	22	25	27	30

假定该工厂销售网点的个数与售卖出的产品件数呈线性相关关系.

(I) 求 2022 年售卖出的产品件数 y (单位: 万件) 关于销售网点数 x (单位: 个) 的线性回归方程;

(II) 根据 (I) 中求出的线性回归方程, 预测 2022 年该工厂建立 40 个销售网点时售卖出的产品件数.

参考公式: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设经过右焦点 F_2 的两条互相垂直的直线分别与椭圆 E 相交于 A, B 两点和 C, D 两点. 求四边形 $ACBD$ 的面积的最小值.

22. (本小题满分 12 分)

已知点 $F(1, 0)$, 经过 y 轴右侧一动点 A 作 y 轴的垂线, 垂足为 M , 且 $|AF| - |AM| = 1$. 记动点 A 的轨迹为曲线 C .

(I) 求曲线 C 的方程;

(II) 设经过点 $B(-1, 0)$ 的直线与曲线 C 相交于 P, Q 两点, 经过点 $D(1, t) (t \in (0, 2))$, 且 t 为常数) 的直线 PD 与曲线 C 的另一个交点为 N , 求证: 直线 QN 恒过定点.

2022~2023 学年度上期期末高二年级调研考试

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:每小题 5 分,共 60 分.

1. D; 2. C; 3. A; 4. B; 5. C; 6. D; 7. C; 8. A; 9. B; 10. B; 11. B; 12. A.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 14; 14. 71.67; 15. $\frac{5}{12}$; 16. $1 + \sqrt{2}$ 或 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由题意,可得与直线 l 平行的直线的斜率为 $k = \frac{3}{4}$2 分

\therefore 经过点 P 且与直线 l 平行的直线的点斜式方程为 $y - 2 = \frac{3}{4}(x + 4)$.

化为一般式,得 $3x - 4y + 20 = 0$5 分

(II)由题意,可得与直线 l 垂直的直线斜率为 $k = -\frac{4}{3}$7 分

\therefore 经过点 P 且与直线 l 垂直的直线的点斜式方程为 $y - 2 = -\frac{4}{3}(x + 4)$.

化为一般式,得 $4x + 3y + 10 = 0$10 分

18. 解:(I)由题,得 $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{0+1+0+2+2}{5} = 1$, $\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1+0+1+2+1}{5} = 1$1 分

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5}[(0-1)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2] = 0.8,$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{5}[(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 + (1-1)^2] = 0.4. \quad \text{.....3 分}$$

$$\because \bar{x}_{\text{甲}} = \bar{x}_{\text{乙}}, s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2,$$

\therefore 乙机床的性能更稳定.5 分

(II)根据题意,甲机床这五天所出次品数量超过 1 件的是第 4 天,第 5 天.

记第 1 天,第 2 天,第 3 天的数据分别为 A_1, A_2, A_3 , 第 4 天,第 5 天的数据分别为 B_1, B_2 .

则所抽数据的所有可能结果为: $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, B_1), (A_1, B_2),$

$(A_2, A_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (B_1, B_2)$, 共计 10 种.8 分

抽出的数据至多有一天超过 1 件的结果为: $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_1), (A_3, B_2)$, 共计 9 种.11 分

\therefore 至多有一天的次品数超过 1 件的概率为 $\frac{9}{10}$12 分

19. 解:(I) 由
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0, \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{解得 } M(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}), N(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}). \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore |MN| = 3\sqrt{3}$5 分

(II) 设圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

\because 圆 C 经过点 M, N 及 $B(2, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{9}{4} + \frac{27}{4} + \frac{3D}{2} - \frac{3\sqrt{3}E}{2} + F = 0, \\ \frac{9}{4} + \frac{27}{4} + \frac{3D}{2} + \frac{3\sqrt{3}E}{2} + F = 0, \\ 4 + 4 + 2D + 2E + F = 0. \end{cases}$$

解得 $D = 2, E = 0, F = -12$.

经检验得圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$9 分

\therefore 圆 C 与圆 A 的圆心间的距离为 $|CA| = |3 - (-1)| = 4$10 分

$\therefore |PQ| \leq |CA| + 3 + \sqrt{13} = 7 + \sqrt{13}$.

$\therefore |PQ|$ 的最大值是 $7 + \sqrt{13}$12 分

20. 解:(I) 由题得 $\bar{x} = \frac{17+19+20+21+23}{5} = 20, \bar{y} = \frac{21+22+25+27+30}{5} = 25$1 分

$\therefore \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 32, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 20$,3 分

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = 1.6, \hat{a} = \bar{y} - \frac{8}{5}\bar{x} = 25 - \frac{8}{5} \times 20 = -7. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 1.6x - 7$8 分

(II) 当 $x = 40$ 时, $\hat{y} = 1.6 \times 40 - 7 = 57$.

\therefore 当销售网点达到 40 个时, 预测该工厂售卖出的产品件数为 57 万件.12 分

21. 解: (I) 由题意, 可得
$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \quad (\text{其中 } c \text{ 为半焦距})$$

解得 $a=2, b=1$3 分

\therefore 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$5 分

(II) ①当直线 AB 的斜率不存在或为 0 时,

$$S_{ACBD} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = 2. \quad \text{.....6 分}$$

②当直线 AB 的斜率存在且不为 0 时, 设直线 $AB: y = k(x - \sqrt{3})$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 则直线 $CD: y = -\frac{1}{k}(x - \sqrt{3})$.

由 $\begin{cases} y = k(x - \sqrt{3}), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 y , 得 $(1 + 4k^2)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0$7 分

$$\Delta = (-8\sqrt{3}k^2)^2 - 4(1 + 4k^2)(12k^2 - 4) = 16(1 + k^2) > 0.$$

则 $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2}$8 分

$$\begin{aligned} \therefore |AB| &= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2}} \\ &= \frac{4(1 + k^2)}{1 + 4k^2}. \end{aligned}$$

同理, 可得 $|CD| = \frac{4(1 + (-\frac{1}{k})^2)}{1 + 4(-\frac{1}{k})^2} = \frac{4(k^2 + 1)}{k^2 + 4}$9 分

$$\therefore S_{ACBD} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = 8 \cdot \frac{(1 + k^2)}{1 + 4k^2} \cdot \frac{(k^2 + 1)}{k^2 + 4}. \quad \text{.....10 分}$$

$$\because (1 + 4k^2)(k^2 + 4) \leq \left[\frac{(1 + 4k^2) + (k^2 + 4)}{2} \right]^2 = \frac{25(k^2 + 1)^2}{4},$$

$$\therefore S_{ACBD} \geq 8 \cdot \frac{(1 + k^2)^2}{25(1 + k^2)^2} = \frac{32}{25}. \quad \text{当且仅当 } k = \pm 1 \text{ 时, 等号成立.} \quad \text{.....11 分}$$

\therefore 综上, 四边形 $ACBD$ 的面积的最小值为 $\frac{32}{25}$12 分

22. 解: (I) 设 $A(x, y)$, $M(0, y)$.

$$\because |AF| - |AM| = 1, \therefore \sqrt{(x-1)^2 + y^2} - |x| = 1. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{化简, 得 } y^2 = 4x (x > 0). \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $N(x_3, y_3)$.

$$\therefore k_{PQ} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } PQ \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{4}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

\because 点 $B(-1, 0)$ 在直线 PQ 上,

$$\therefore -y_1 = \frac{4}{y_1 + y_2}(-1 - x_1). \text{ 解得 } y_1 y_2 = 4. \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{同理, 可得直线 } PN \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{4}{y_1 + y_3}(x - x_1).$$

又 $D(1, t)$ 在直线 PN 上,

$$\therefore t - y_1 = \frac{4}{y_1 + y_3}(1 - x_1), \text{ 易得 } y_1 \neq t. \text{ 解得 } y_2 + y_3 = \frac{(y_1 + y_3)t}{y_1}. \quad \dots \textcircled{2} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } QN \text{ 的方程为 } y - y_2 = \frac{4}{y_2 + y_3}(x - x_2), \text{ 即 } (y_2 + y_3)y = 4x + y_2 y_3. \quad \dots \textcircled{3}$$

将②式代入③式, 化简可得 $(y_1 + y_3)ty = 4y_1 x + y_1 y_2 y_3$.

$$\text{又 } y_1 y_2 = 4.$$

$$\therefore (y_1 + y_3)ty = 4y_1 x + 4y_3. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即 } (y_1 + y_3)(ty - 4) = 4y_1(x - 1). \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } QN \text{ 恒过定点 } (1, \frac{4}{t}). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$