目 录

专题36 切线的条数

【方法点拨】

1. 按照过一点求切线方程的一般步骤，设切点、求斜率得切线方程、点代入，将切线的条数问题转化为方程解的个数问题；是否存在切线转化为方程有无解的问题.

2. 有时也可考虑相切为“临界状态”，利用参数的几何意义确定参数的取值范围.

【典型题示例】

例1 （2022·全国新高考Ⅰ卷·15）若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是______________.

【答案】$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

【解析】易知曲线不过原点，故 $a\neq 0$

设切点为 $\left(x_0,(x_0+a)e^{x_0}\right)$，则切线的斜率为 $f'(x_0)=(x_0+a+1)e^{x_0}$

所以切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+a+1)e^{x_0}(x-x_0)$

又因为切线过原点，所以 $-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+a+1)e^{x_0}(-x_0)$

即 $x_0{}^2+ax_0-a=0$

又因为切线有两条，故上方程有两不等实根

所以 $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a<-4$，或 $a>0$

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

例2 （2022·江苏南京一中学情调研模拟检测·8）若函数 $f\left(x\right)=\ln x$ 与函数 $g(x)=x^2+x+a(x<0)$ 有公切线，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(\ln\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$　　B. $\left(-1,+\infty\right)$

C. $\left(1,+\infty\right)$　　D. $\left(ln2,+\infty\right)$

【答案】B

【分析】由于 $g(x)=x^2+x+a$ 中要求 $x<0$，故考虑当 $x=0$ 时的公切线所对应的实数 a 的值为临界值，当 a 增大时，抛物线沿直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上移，公切线与 $g(x)=x^2+x+a$ 相切的切点左移，横坐标减小，故所求大于此时 a 的临界值.

【解析】先求当 $x=0$ 时，曲线 $g(x)=x^2+x+a$ 的切线方程

$\because g'(x)=2x+1$， $g'(0)=1$

$\therefore$ 曲线 $g(x)=x^2+x+a$ 的切线在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-a=x$，即 $y=x+a$

再求当曲线 $f(x)=\ln x$ 与直线 $y=x+a$ 相切时（即直线 $y=x+a$ 为公切线）a 的值

设曲线 $f(x)=\ln x$ 与直线 $y=x+a$ 相切时切点为 $(x_0,\ln x_0)$

则由导数的几何意义得 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}=1$，解得 $x_0=1$，切点为 $(1,0)$

将 $(1,0)$ 代入 $y=x+a$ 得 $a=-1$

$\because$ 当 a 增大时，抛物线 $g(x)=x^2+x+a$ 沿直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上移，公切线与 $g(x)=x^2+x+a$ 相切的切点左移，横坐标减小，即切点的横坐标小于 0

$\therefore$ 故所求 a 大于此时 a 的值，即 $a>-1$.

例 3　（2022 •全国甲卷 •文 20 改编）已知函数 $f(x)=x^3-x, g(x)=x^2+a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$[-1,+\infty)$

【分析一】由于 $g(x)=x^2+a$ 中 a 的几何意义为截距，故只需求出 $f(x)=x^3-x$、$g(x)=x^2+a$ 相切时 a 的值，将 $g(x)=x^2+a$ 图象往上平移，即 a 增大，即为所求.

【分析二】设出 $g(x)$ 上的切点坐标，分别由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 及切点表示出切线方程，由切线重合表示出 a，构造函数，求导求出函数值域，即可求得 a 的取值范围.

【解析一】设公切点为 $(x_0，x_0^3-x_0)$

则$\begin{cases}x_0^{\ 3}-x_0=x_0^{\ 2}+a\\3x_0^{\ 2}-1=2x_0\end{cases}$，解之得$\begin{cases}a=-1\\x_0=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\dfrac{5}{27}\\x_0=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$（不符合题意，舍去）

故 a 的取值范围为$[-1,+\infty)$.

【解析二】 $f'(x)=3x^2-1$，则 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-\left(x_1^3-x_1\right)=\left(3x_1^2-1\right)(x-x_1)$，整理得 $y=\left(3x_1^2-1\right)x-2x_1^3$，

设该切线与 $g(x)$ 切于点$\left(x_2,g(x_2)\right)$，$g'(x)=2x$，则 $g'(x_2)=2x_2$，则切线方程为 $y-\left(x_2^2+a\right)=2x_2(x-x_2)$，整理得 $y=2x_2x-x_2^2+a$，

则$\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2\\-2x_1^3=-x_2^2+a\end{cases}$，整理得 $a=x_2^2-2x_1^3=\left(\dfrac{3x_1^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2-2x_1^3=\dfrac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{4}$，

令 $h(x)=\dfrac{9}{4}x^4-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{4}$，则 $h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$，令 $h'(x)>0$，解得 $-\dfrac{1}{3}<x<0$ 或 $x>1$，

令 $h'(x)<0$，解得 $x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $0<x<1$，则 x 变化时，$h'(x),h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$	$-\dfrac{1}{3}$	$\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	$\dfrac{5}{27}$	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	-1	↗

则 $h(x)$ 的值域为$[-1,+\infty)$，故 a 的取值范围为$[-1,+\infty)$.

例 4　（2022•江苏南通期末•16）已知函数 $f(x)=2x^3-ax$，若 $a\in\mathbf{R}$ 时，直线 $y=k(x-2)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，且满足条件的 k 的值有且只有 3 个，则 a 的取值范围为_________.

【答案】$(0,8)$

【分析】利用过点$(2,0)$的曲线的切线有 3 条，构造函数，借助函数有 3 个零点求解作答.

【解析】由 $f(x)=2x^3-ax$ 求导得： $f'(x)=6x^2-a$，

设直线 $y=k(x-2)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切的切点为 $(t,2t^3-at)$，

于是得 $k=f'(t)=6t^2-a$， 且 $2t^3-at=k(t-2)$， 则 $k=2t^3$，

显然函数 $2t^3$ 在 **R** 上单调递增，因直线 $y=k(x-2)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切的 k 的值有且只有 3 个，

则有直线 $y=k(x-2)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切的切点横坐标 t 值有且只有 3 个，即方程 $a=6t^2-2t^3$ 有 3 个不等实根，

令 $g(t)=2t^3-6t^2+a$，求导得：$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$，当 $t<0$ 或 $t>2$ 时，$g'(t)>0$，

当 $0<t<2$ 时， $g'(t)<0$，

即函数 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$， $(2,+\infty)$ 上递增， 在 $(0,2)$ 上递减， 当 $t=0$ 时， $g(t)$ 取得极大值 $g(0)=a$， 当 $t=2$ 时， $g(t)$ 取得极小值 $g(2)=a-8$，

方程 $a=6t^2-2t^3$ 有 3 个不等实根，当且仅当函数 $g(t)$ 有 3 个不同的零点，因此 $\begin{cases}a>0\\a-8<0\end{cases}$，

解得 $0<a<8$，

所以 a 的取值范围为 $(0,8)$.

故答案为 $(0,8)$.

例 5　　若函数 $f(x)=x^2+1$ 的图象与曲线 C: $g(x)=2a\cdot e^x+1(a>0)$ 存在公共切线，则实数 a 的取值范围为

A. $\left(0,\dfrac{2}{e^2}\right]$　　B. $\left(0,\dfrac{4}{e^2}\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)$　　D. $\left[\dfrac{3}{e^2},+\infty\right)$

【答案】A

【分析】本道题结合存在公共切线，建立切线方程，结合待定系数法，建立等式，构造新函

数，将切线问题转化为交点问题，计算 a 的范围，即可.

【解析】设函数 $f\left(x\right)$ 的切点为 $\left(x_0,x_0{}^2+1\right)$,该切线斜率 $k=2x_0$,

所以切线方程为 $y=2x_0x-x_0{}^2+1$,

$g\left(x\right)$ 的切点为 $\left(x_1,2ae^{x_1}+1\right)$,所以切线方程为 $y=2ae^{x_1}x-2ae^{x_1}x_1+2ae^{x_1}+1$,

由于该两切线方程为同一方程，利用待定系数法，可得

$2x_0=2ae^{x_1},-x_0{}^2+1=-2ae^{x_1}x_1+2ae^{x_1}+1$,解得 $x_0=ae^{x_1},x_0=2x_1-2$

得到新方程为 $2x_1-2=ae^{x_1}$,

构造函数 $h\left(x\right)=e^x,t\left(x\right)=\dfrac{2}{a}\left(x-1\right)$ 解得 $e^x=\dfrac{2}{a}\left(x-1\right)$,表示 $h\left(x\right)$ 与 $t\left(x\right)$ 存在着共同的交点,而

$t\left(x\right)$ 过定点 $\left(1,0\right)$,得到 $h\left(x\right)$ 过 $\left(1,0\right)$ 的切线方程,设切点为 $\left(x_2,e^{x_2}\right)$,则 $y=e^{x_2}\left(x-1\right)$,该切点在

该直线上,代入,得到 $e^{x_2}=e^{x_2}\left(x_2-1\right)$,解得 $x_2=2$,

所以直线斜率为 $k=e^2$,要使得 $h\left(x\right)$ 与 $t\left(x\right)$ 存在着交点,

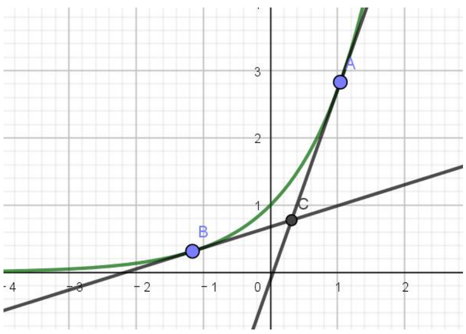
则 $k=e^2\le\dfrac{2}{a}$,结合 $a>0$,所以 a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{2}{e^2}\right]$，故选 A.

例 6 (2021・全国Ⅰ卷)若过点 $\left(a,b\right)$ 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则(　　)

A．$\mathrm{e}^b<a$　　B．$\mathrm{e}^b>a$　　C．$0<a<\mathrm{e}^b$　　D．$0<b<\mathrm{e}^a$

【答案】D

【分析】结合已知条件，利用导数的几何意义将问题转化成函数的交点问题，然后通过构造新函数，并求出新函数的单调区间以及最值，利用数形结合的方法即可求解.



【解析】设切点$\left(x_0,y_0\right)$，$y_0>0$，因为$y'=\mathrm{e}^x$，即$y'_{|x=x_0}=\mathrm{e}^{x_0}$，

则切线方程为$y-b=\mathrm{e}^{x_0}(x-a)$，

由$\begin{cases}y_0-b=\mathrm{e}^{x_0}\left(x_0-a\right)\\y_0=\mathrm{e}^{x_0}\end{cases}$得$\mathrm{e}^{x_0}\left(1-x_0+a\right)=b$，

则由题意知，关于x_0的方程$\mathrm{e}^{x_0}\left(1-x_0+a\right)=b$有两个不同的解.

设$f(x)=\mathrm{e}^x\left(1-x+a\right)$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x(1-x+a)-\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x(x-a)$，

由$f'\left(x\right)=0$得$x=a$，

所以当$x<a$时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$在$(-\infty,a)$上单调递增；

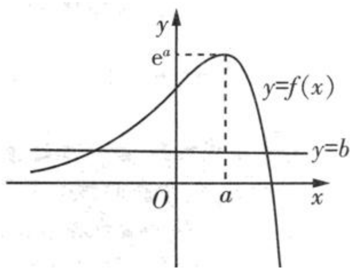
当$x>a$时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$在$(a,+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)$的最大值为$f(a)=\mathrm{e}^a\left(1-a+a\right)=\mathrm{e}^a>0$，

当$x<a$时，$a-x>0$，所以$f\left(x\right)>0$，

当$x\to-\infty$时，$f\left(x\right)\to0$；当$x\to+\infty$时，$f\left(x\right)\to-\infty$，

故$f(x)$的图像如下图所示：



故$0<b<\mathrm{e}^a$.

故选:D.

【巩固训练】

1.过定点 $P(1,e)$ 作曲线 $y=ae^{x}\left(a>0\right)$ 的切线，恰有 2 条，则实数 a 的取值范围是______.

2.若函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=x^{2}+2x+a(x<0)$ 有公切线，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(\ln\frac{1}{2e},+\infty)$　　B．$(-1,+\infty)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(-\ln 2,+\infty)$

3.若存在实数 a,b，使不等式 $2e\ln x\le ax+b\le\frac{1}{2}x^{2}+e$ 对一切正数 x 都成立（其中 e 为自然对数的底数），则实数 a 的最大值是（　　）

A．$\sqrt{e}$　　B．$2e$　　C．$2\sqrt{e}$　　D．2

4.若过点 $P(1,m)$ 可以作三条直线与曲线 $C:y=xe^{x}$ 相切，则 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{5}{e^{2}},0\right)$　　B．$\left(-\frac{5}{e^{2}},e\right)$　　C．$\left(0,+\infty\right)$　　D．$\left(-\frac{3}{e^{2}},-\frac{1}{e}\right)$

5.已知函数 $f(x)=ax^{2}$，$g(x)=lnx$，若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有两条公切线，则实数 a 的取值范围是________.

6.若曲线 C_1：$y=x^{2}$ 与曲线 C_2：$y=\frac{e^{x}}{a}(a>0)$ 存在公共切线，则实数a 的取值范围为_______.

7.已知函数 $f(x)=x^{3}+3x^{2}-1$，若过点 $P(1,m)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则实数 m 的取值范围是___________.

8.已知函数 $f(x)=x^{3}+ax$，若过点 $P(1,1)$ 只有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则实数 a 的取值范围是___________.

【答案或提示】

1.【答案】$(1,+\infty)$

【分析】设切点为(x_0, ae^{x_0})，利用导数几何意义求得切线方程为$y = ae^{x_0}(x - x_0 + 1)$，由题意知$a = \dfrac{e}{e^{x_0}(2 - x_0)}$在$x_0 \neq 2$上有两个不同解，构造$g(x) = \dfrac{e}{e^x(2 - x)}$且$x \neq 2$，利用导数研究单调性及值域，进而确定$a$的范围.

【解析】由$y' = ae^x$，若切点为(x_0, ae^{x_0})，则$y' = k = ae^{x_0} > 0$，

$\therefore$切线方程为$y = ae^{x_0}(x - x_0 + 1)$，又$P(1, e)$在切线上，

$\therefore ae^{x_0}(2 - x_0) = e$，即$a = \dfrac{e}{e^{x_0}(2 - x_0)}$在$x_0 \neq 2$上有两个不同解，

令$g(x) = \dfrac{e}{e^x(2 - x)}$，即原问题转化为$g(x)$与$y = a$有两个交点，而$g'(x) = \dfrac{e(x-1)}{e^x(2-x)^2}$，

（1）当$x > 2$时，$g'(x) > 0$，$g(x)$递增，且$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \to 0^-$，

（2）当$2 > x > 1$时，$g'(x) > 0$，$g(x)$递增；当$x < 1$时，$g'(x) < 0$，$g(x)$递减；

$\therefore g(x) \geq g(1) = 1$，又$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) \to +\infty$，$1 < x < 2$时$g(x) > 0$且$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) \to +\infty$，

$\therefore$要使$a = \dfrac{e}{e^{x_0}(2 - x_0)}$在$x_0 \neq 2$上有两个不同解，即$a \in (1, +\infty)$.

故答案为：$(1, +\infty)$

点评：

作为填空题，本着“小题小做”的策略，只需先求出点$P(1, e)$在曲线$y = ae^x\ (a > 0)$上时a的值为$a = 1$，此时，过点$P(1, e)$曲线的切线恰有一条，从形上看，当a增大时，切线就有两条，故答案为$a > 1$.

2.【答案】A

【解析】设公切线与函数$f(x) = \ln x$切于点$A(x_1, \ln x_1)(x_1 > 0)$，则切线方程为

$y - \ln x_1 = \dfrac{1}{x_1}(x - x_1)$；设公切线与函数$g(x) = x^2 + 2x + a$切于点

$B(x_2, x_2^2 + 2x_2 + a)(x_2 < 0)$，则切线方程为$y - (x_2^2 + 2x_2 + a) = 2(x_2 + 1)(x - x_2)$，

所以有$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = 2(x_2 + 1), \\ \ln x_1 - 1 = -x_2^2 + a \end{cases}$

$\because x_2<0<x_1$，$\therefore 0<\frac{1}{x_1}<2$.

又 $a=\ln x_1+\left(\frac{1}{2x_1}-1\right)^2-1=-\ln\frac{1}{x_1}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_1}-2\right)^2-1$，令 $t=\frac{1}{x_1}$，$\therefore$

$0<t<2$，$a=\frac{1}{4}t^2-t-\ln t$.

设 $h(t)=\frac{1}{4}t^2-t-\ln t(0<t<2)$，则 $h'(t)=\frac{1}{2}t-1-\frac{1}{t}=\frac{(t-1)^2-3}{2t}<0$，$\therefore h(t)$ 在(0，2)

上为减函数，则 $h(t)>h(2)=-\ln 2-1=\ln\frac{1}{2e}$，$\therefore a\in\left(\ln\frac{1}{2e},+\infty\right)$，故选 A.

3.【答案】C

【解析】存在实数 a,b，使不等式 $2e\ln x\le ax+b\le\frac{1}{2}x^2+e$ 对一切正数 x 都成立，要求 a 的最大值，临界条件即为直线 $y=ax+b$ 恰为函数 $f(x)=2e\ln x,g(x)=\frac{1}{2}x^2+e$ 的公切线.

设 $f(x)=2e\ln x$ 的切点为 $(x_1,y_1)(x_1>0)$，$f'(x)=\frac{2e}{x},\therefore a=\frac{2e}{x_1}$.

设 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+e$ 的切点为 $(x_2,y_2)(x_2>0)$，$g'(x)=x,\therefore a=x_2$,

所以 $a=\frac{2e}{x_1}=x_2,\therefore x_1x_2=2e$.

由题得 $\frac{2e\ln x_1-\frac{1}{2}{x_2}^2-e}{x_1-x_2}=a=x_2,\therefore 2\ln x_1+\frac{2e}{{x_1}^2}-3=0$.

设 $h(x_1)=2\ln x_1+\frac{2e}{{x_1}^2}-3(x_1>0)$,

所以 $h'(x_1)=\frac{2}{x_1}-\frac{4e}{{x_1}^3}=\frac{2{x_1}^2-4e}{{x_1}^3}$,

所以函数 $h(x_1)=2\ln x_1+\frac{2e}{{x_1}^2}-3$ 在 $(0,2\sqrt{e})$ 上单调递减，在 $(2\sqrt{e},+\infty)$ 单调递增.

又 $h(\sqrt{e})=2\ln\sqrt{e}+\frac{2e}{e}-3=1+2-3=0$，

当 $x_1\to+\infty$ 时，$h(x_1)=2\ln x_1+\frac{2e}{{x_1}^2}-3>0$，

所以方程另外一个零点一定大于 $2\sqrt{e}$.

所以方程小的零点为 $\sqrt{e}$，

所以 $a_{\max}=\frac{2e}{\sqrt{e}}=2\sqrt{e}$.

故选：C.

4.【答案】A

【解析】设切点为 $M\left(x_0,y_0\right)$，

$\because$ $y=xe^x$，$\therefore$ $y'=\left(x+1\right)e^x$，

$\therefore M$ 处的切线斜率 $k=\left(x_0+1\right)e^{x_0}$，则过点 P 的切线方程为

$y=\left(x_0+1\right)e^{x_0}\left(x-x_0\right)+x_0e^{x_0}$，

代入点 P 的坐标，化简得 $m=\left(-x_0^2+x_0+1\right)e^{x_0}$，

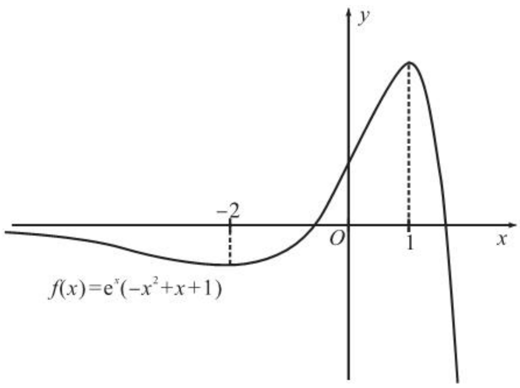
$\because$过点 $P\left(1,m\right)$ 可以作三条直线与曲线 $C:y=xe^x$ 相切，

$\therefore$方程 $m=\left(-x_0^2+x_0+1\right)e^{x_0}$ 有三个不等实根.

令 $f\left(x\right)=\left(-x^2+x+1\right)e^x$，求导得到 $f'\left(x\right)=\left(-x^2-x+2\right)e^x$，

可知 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-2\right)$ 上单调递减，在 $\left(-2,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，

如图所示，故 $f\left(-2\right)<m<0$，即 $-\frac{5}{e^2}<m<0$.



故选：A.

5.【答案】$(\frac{1}{2e}$， $+\infty)$

【解析一】根据二次函数和代数函数的性质得：

当 $f(x)>g(x)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有两条公切线，

即 $ax^2>lnx$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a>\frac{lnx}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

设 $h(x)=\frac{lnx}{x^2}$， $h'(x)=\frac{1-2lnx}{x^3}$， 令 $h'(x)=\frac{1-2lnx}{x^3}=0$， $x=\sqrt{e}$，

即 $h_{max}=h(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$， 因此， $a>\frac{1}{2e}$，

【解析二】取两个函数相切的临界条件： $\begin{cases} a{x_0}^2=lnx_0 \\ 2ax_0=\frac{1}{x_0} \end{cases}$ ， 解得 $x_0=\sqrt{e}$， $a=\frac{1}{2e}$，

由此可知，若两条曲线具有两条公切线时， $a>\frac{1}{2e}$，

故 a 的取值范围是 $(\frac{1}{2e}$， $+\infty)$.

6.【答案】$\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$

【提示】取对数转化为曲线 $y=2\ln x$ 与直线 $y=x-\ln a$ 有交点，临界状态是相切.

7. 【答案】$(-5,3)$

【解答】 设切点为$(x_0$， $x_0^3+3x_0^2-1)$

切线斜率为：$k=f'(x_0)=3x_0^2+6x_0$

$\therefore$ 切线方程为：$y-(x_0^3+3x_0^2-1)=(3x_0^2+6x_0)(x-x_0)$ ①

又切线过点 $P(1,m)$，带入①化简为：$m=-2x_0^3+6x_0-1$

令 $y=m$ 与 $h(x_0)=-2x_0^3+6x_0-1$

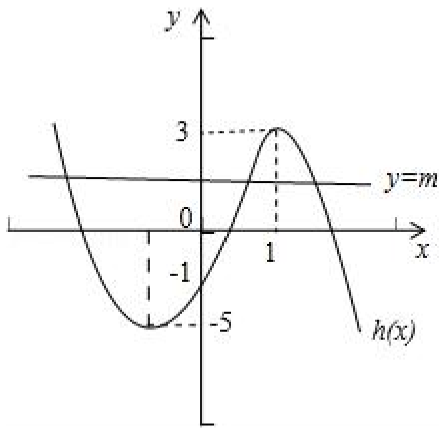
$h(-1)=-5$，h（1）$=3$，$h(0)=-1$；

$h'(x_0)=-6x_0^2+6$，令 $h'(x_0)=0\Rightarrow x_1=-1$，$x_2=1$；

$h(x_0)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 单调递减，$(-1,1)$ 上单调递增；

过点 $P(1,m)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，即存在三个 x_0，也即是 $y=m$ 与 $h(x)$ 有三个交点．

故如图所知：$-5<m<3$．



8.【答案】$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

【解析】设过点 $P(1,1)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 $(x_0$， $y_0)$，

则 $y_0=x_0{}^3+ax_0$，且切线斜率为 $f'(x_0)=3x_0{}^2+a$，

所以切线方程为 $y-y_0=(3x_0{}^2+a)(x-x_0)$．

因此$1-(x_0^3+ax_0)=(3x_0^2+a)(1-x_0)$，

整理得$2x_0^3-3x_0^2+1-a=0$.

设$g(x)=2x^3-3x^2+1-a$，

则“过点$P(1,1)$只有一条直线与曲线$y=f(x)$相切”等价于“$g(x)$只有一个零点”.

$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$.

当x变化时，$g(x)$与$g'(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$1-a$	↘	$-a$	↗

所以，$g(0)=1-a$是$g(x)$的极大值，g（1）$=-a$是$g(x)$的极小值.

当$g(x)$只有一个零点时，有$g(0)=1-a<0$或g（1）$=-a>0$，解得$a>1$或$a<0$.

因此当过点$P(1,1)$只有一条直线与曲线$y=f(x)$相切时，a的取值范围是$a>1$或$a<0$.

专题37 过曲线上一点的切线、切点弦

【方法点拨】

1.圆的切线方程常用结论

(1)过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上一点$P(x_0，y_0)$的圆的切线方程为$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

特别地，过圆$x^2+y^2=r^2$上一点$P(x_0，y_0)$的圆的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$.

(2)过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$外一点$P(x_0，y_0)$ 作圆的两条切线，则两切点所在直线方程为$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$；

特别地，过圆$x^2+y^2=r^2$外一点$P(x_0，y_0)$作圆的两条切线，则两切点所在直线方程为$x_0x+y_0y=r^2$.

说明：

（1）上述公式的记忆方法均可用“抄一代一”，即把平方项其中一个照抄，另一个将变量用已知点的相应坐标代入，将原方程作如下方法替换求出，$x^2 \to x_0x$，$y^2 \to y_0y$，$x \to \frac{x_0+x}{2}$，$y \to \frac{y_0+y}{2}$）.

（2）椭圆、抛物线也有类似结论，如过椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点$P(x_0, y_0)$且与椭圆相切的直线方程是：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，等等，不再赘述.

【典型题示例】

例 1　已知抛物线 C：$y^2=2x$，过直线上 $y=x+2$ 上一点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，则直线 AB 恒过定点__________.

【答案】$(2,1)$

【解析】设 P 点坐标为（x_0，x_0+2）

显然点 P 不在抛物线 C 上

根据切点弦的公式，“抄一代一”得直线 AB 的方程为：$(x_0+2)\,y=x_0+x$

即$(x-2y)+x_0(1-y)=0$

所以直线 AB 恒过定点$(2,1)$.

例 2　过抛物线 C：$x^2=2py$ 上点 M 作抛物线 D：$y^2=4x$ 的两条切线 l_1，l_2，切点分别为 P，Q，若△MPQ 的重心为 G(1，$\frac{3}{2}$)，则 $p=$_______.

【答案】$\frac{3}{16}$

【解析一】设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

则 l_1，l_2 的方程分别是 $y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$，$y_2y=\frac{1}{2}(x+x_2)$

由$\begin{cases} y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1) \\ y_2y=\frac{1}{2}(x+x_2) \end{cases}$解得，$\begin{cases} x=\frac{y_1y_2}{4} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$，即 $M(\frac{y_1y_2}{4},\frac{y_1+y_2}{2})$

又因为△MPQ 的重心为 G(1，$\frac{3}{2}$)

所以$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2+\frac{y_1y_2}{4}}{3}=1\\ \dfrac{y_1+y_2+\frac{y_1+y_2}{2}}{3}=\dfrac{3}{2}\\ {y_1}^2=4x_1\\ {y_2}^2=4x_2\end{cases}$，解之得$\begin{cases}y_1y_2=-3\\ y_1+y_2=3\end{cases}$，故$M(-\frac{3}{4},\frac{3}{2})$

将$M(-\frac{3}{4},\frac{3}{2})$代入 $x^2=2py$ 得 $p=\frac{3}{16}$.

【解析二】设$M(x_0,\frac{{x_0}^2}{2p})$

则 PQ 的方程为$\frac{{x_0}^2}{2p}y=2(x+x_0)$

由$\begin{cases}\dfrac{{x_0}^2}{2p}y=2(x+x_0)\\ y^2=4x\end{cases}$消 x 得 $py^2-{x_0}^2y+4px_0=0$

所以$y_1+y_2=\frac{{x_0}^2}{p}$，$y_1y_2=4x_0$（$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$）

$x_1+x_2=\frac{1}{4}\left({y_1}^2+{y_2}^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{{x_0}^4}{p^2}-8x_0\right)$

又因为△MPQ 的重心为 G(1，$\frac{3}{2}$)

所以$\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{4}\left(\frac{{x_0}^4}{p^2}-8x_0\right)+x_0}{3}=1\\ \dfrac{\frac{{x_0}^2}{p}+\frac{{x_0}^2}{2p}}{3}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，解之得$\begin{cases}p=\dfrac{3}{16}\\ x_0=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$，.

例 3　已知斜率为 k 的直线 l 过抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，且与抛物线 C 交于 A，B 两点，抛物线 C 的准线上一点 $M(-1，-1)$满足$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则$|AB|=$　　（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．5　　D．6

【答案】C

【分析】（一）本题的命题的原点是阿基米德三角形，即从圆锥曲线准线上一点向圆锥曲线引切线，则两个切点与该点所构成的三角形是以该点为直角顶点的直角三角形.

（二）将 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 直接代入坐标形式，列出关于 A，B 中点坐标的方程，再利用斜率布列一方程，得到关于 A，B 中点坐标的方程组即可.这里需要说明的是，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 转化的方法较多，如利用斜边中线等于斜边一半等，但均不如上法简单.

【解析一】易知 $p=2$，$y^2=4x$

由阿基米德三角形得 AB 为切点弦

所以 AB 方程是 $-y=2(x-1)$，即 $y=-2x+2$

代入 $y^2=4x$ 消 y 得：$x^2-3x+1=0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3$

$\therefore |AB|=x_1+x_2+p=2x_0+p=5$，答案选 C.

【解析二】易知 $p=2$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=1$，$y_1y_2=-4$，$\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1+1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2+1)$

$\because \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

$\therefore (x_1+1)(x_2+1)+(y_1+1)(y_2+1)=0$，化简得 $x_1+x_2+y_1+y_2=1$

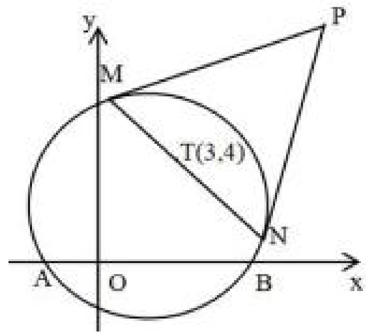
设 A、B 中点坐标为 (x_0,y_0)，则 $x_0+y_0=\dfrac{1}{2}$ ①

又由直线的斜率公式得 $k=k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{y_0}$，$k=\dfrac{y_0}{x_0-1}$

$\therefore \dfrac{2}{y_0}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，即 $y_0^2=2(x_0-1)$ ②

由①、②解得 $x_0=\dfrac{3}{2}$

$\therefore |AB|=x_1+x_2+p=2x_0+p=5$，答案选 C.



例 4 在平面直角坐标系 xoy 中，已知圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=20$ 与 x 轴交于 A、B（点 A 在点 B 的左侧），圆 C 的弦 MN 过点 $T(3,4)$，分别过 M、N 作圆 C 的

切线，交点为 P，则线段 AP 的最小值为______.

【答案】$\dfrac{28\sqrt{5}}{5}$

【分析】设出点 P 坐标，根据切点弦求出点 P 轨迹方程，再利用点线距以垂线段最小求解.

【解析】设点 P 坐标为(a, b)

则切点弦 MN 的方程为：$(a-2)(x-2)+(b-2)(y-2)=20$

又因为弦 MN 过点 $T(3, 4)$，

故$(a-2)(3-2)+(b-2)(4-2)=20$，即 $a+2b-26=0$

即点 P 的轨迹方程是 $x+2y-26=0$

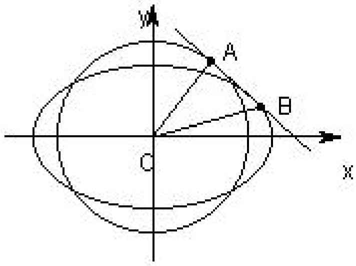
点 A（$-2,0$）到该直线的距离为 $\dfrac{28\sqrt{5}}{5}$，

因为定点到直线上任意一点间的距离中垂线段最小

所以点 A（$-2,0$）到该直线的距离 $\dfrac{28\sqrt{5}}{5}$ 即为 AP 的最小值.

例 5 如图，在平面直角坐标系 xoy 中，直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$、圆 $x^2+y^2=r^2(1<r<2)$ 都相切，切点分别是点 A、B，则当线段 AB 长度最大时，圆的半径 r 的值为___________.

【答案】$\sqrt{2}$



【分析】先设出点 B 坐标，写出直线 l 的方程，再利用直线与圆相切，圆心到直线的距离

等于 r ，布列约束等式，最后，利用勾股定理列出 AB 关于 r 的目标函数，求出最值及取得最值时 r 的值．

【解析】设点 B 坐标为 $B(2\cos\alpha,\sin\alpha)$（$\alpha\in R$）

则过点 B 的椭圆的切线，即直线 l 的方程为：$\dfrac{2\cos\alpha x}{4}+\sin\alpha y=1$，

即 $\cos\alpha x+2\sin\alpha y-2=0$

又因为直线 l 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，所以 $\dfrac{2}{\sqrt{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}}=r$，且 $OA\perp AB$

在 $Rt\triangle OAB$ 中，$AB^2=OB^2-OA^2=4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\dfrac{4}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$

$=5-[(1+3\sin^2\alpha)+\dfrac{4}{1+3\sin^2\alpha}]$

而 $(1+3\sin^2\alpha)+\dfrac{4}{1+3\sin^2\alpha}\geq 2\sqrt{(1+3\sin^2\alpha)\cdot\dfrac{4}{1+3\sin^2\alpha}}=4$，当且仅当 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，“=”成立，此时 $r=\dfrac{2}{\sqrt{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}}=\sqrt{2}$，$AB$ 的最大值为 1

所以当线段 AB 长度最大时，圆的半径 r 的值为 $\sqrt{2}$．

【巩固训练】

1.过点 $(3,1)$ 作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线,切点分别为 A，B，则直线 AB 的方程为（　　）

A．$2x+y-3=0$　　B．$2x-y-3=0$　C．$4x-y-3=0$　D．$4x+y-3=0$

2. 已知圆 $C:x^2+y^2=1$，直线 $l:x+y+2=0$，P 为直线 l 上的动点，过点 P 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则直线 AB 过定点（　　）

A．$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$(-1,-1)$　　C．$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

3.在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2+(y-3)^2=2$，点 A 是 x 轴上的一个动点，AP，AQ 分别切圆 C 于 P，Q 两点，则线段 PQ 长的取值范围为______．

4.若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点在 x 轴上，过点$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线，切点分别为 A，B，直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点，则椭圆方程是________.

5. 已知 P 为椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的一个动点，F_1、F_2 为椭圆的左、右焦点，O 为坐标原点，O 到椭圆 C 在 P 点处的切线为 d，若 $PF_1\cdot PF_2=\frac{24}{7}$，则 $d=$_____.

6. 已知点 P 在直线 $x+y=4$ 上，过点 P 作圆 $O:x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则点 $M(3,2)$ 到直线 AB 距离的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{5}$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$(x-2)^2+y^2=4$，点 A 是直线 $x-y+2=0$ 的一个动点，AP，AQ 分别切圆 C 于 P，Q 两点，则线段 PQ 长的取值范围为______.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-4,0)$，$B(0,4)$，从直线 AB 上一点圆 P 向圆 C：$x^2+y^2=4$ 引两条切线 PC、PD，切点分别是 C、D，设线段 CD 的中点为 M，则线段 AM 长的最大值为______.

【答案或提示】

1.【答案】A

【解析】将 $(3,1)$ 直接“一抄一代”得 $(3-1)(x-1)+y=1$，即 $2x+y-3=0$，选 A.

2.【答案】A

【解析】设 $P\left(x_0,-2-x_0\right)$

则直线 AB 的方程是 $x_0x-\left(2+x_0\right)y=1$，即 $x_0\left(x-y\right)-\left(2y+1\right)=0$

令 $\begin{cases}x-y=0\\2y+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$

所以直线 AB 过定点$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

3.【答案】$[\frac{2\sqrt{14}}{3},2\sqrt{2})$

【提示】设 $A\left(x_0,0\right)$

则直线 PQ 的方程是 $x_0x-3\left(y-3\right)=2$，即 $x_0x-3y+7=0$

所以直线 PQ 过定点$\left(0,\frac{7}{3}\right)$.

则 PQ 长的最小值是过$\left(0,\frac{7}{3}\right)$且平行于 x 轴的弦，易得此时 $PQ=\frac{2\sqrt{14}}{3}$，直径是其上界.

4.【答案】$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

【提示】AB 的方程是 $2x+y-2=0$，令 $x=0$，$y=2$；令 $y=0$，$x=1$.故 $c=2$，$b=1$.

5.【答案】$\frac{\sqrt{14}}{2}$

【提示】$P(\frac{4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7})$，切线方程：$\frac{\sqrt{7}}{7}x+\frac{\sqrt{7}}{7}y=1$.

6.【答案】D

【解析】设 $P(a,4-a)$，则直线 AB 的方程是 $ax+(4-a)y-4=0$，

即 $a(x-y)+4y-4=0$，当 $x=y$ 且 $4y-4=0$，即 $x=1$，$y=1$时该方程恒成立，

所以直线 AB 过定点 $N(1，1)$，

点 M 到直线 AB 距离的最大值即为点 M，N 之间的距离，$|MN|=\sqrt{5}$，

所以点 $M(3，2)$到直线 AB 距离的最大值为$\sqrt{5}$.

故选:D

7.【答案】$\left[2\sqrt{2},4\right)$

【解析】设点的坐标为 $A(x_0,x_0+2)$

则 PQ 的方程为$(x_0-2)(x-2)+(x_0+2)y=4$，

分参得 $(x+y-2)x_0+(-2x+2y)=0$

所以 $\begin{cases}x+y-2=0\\-2x+2y=0\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，直线 PQ 恒过点（1,1）

易求得过点（1,1）最短的弦长为 $2\sqrt{2}$、最长的弦长为 4（取不得）

故线段 PQ 长的取值范围为 $\left[2\sqrt{2},4\right)$.

说明：

引圆外一点 A 到圆心 O 的距离为参数，建立 PQ 与 AO 的目标函数，再利用基本不等式解决也可以.

8.【答案】$3\sqrt{2}$

【解析】设点的坐标为 $P(x_0,x_0+4)$

则 CD 的方程为 $x_0x+(x_0+4)y=4$，

分参得 $(x+y)x_0+(4y-4)=0$

所以 $\begin{cases}x+y=0\\4y-4=0\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，直线 CD 恒过点 N（－1,1）

又因为 $OM\perp CD$，

所以点 M 的轨迹是以 ON 为直径的圆（点 O 除外），故其方程是 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

所以 $AM=\sqrt{\left(-4+\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

专题 38 与圆相关的张角问题

【方法点拨】

1. 圆上两点与圆外一点的连线的夹角（圆外一点为顶点）中，以这两条直线为切线时最大.
2. 圆上一点、圆心与圆外一点连线的夹角（圆外一点为顶点）中，以这条直线为切线时最大.

【典型题示例】

例 1　设点 $M(m,1)$，若在圆 $O: x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得 $\angle OMN=30^{\circ}$，则 m 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left[-2,2\right]$　　D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

【答案】A

【分析】由圆的性质可知：圆上一点 T，与 M,O 所组成的角 $\angle OMT$，当 MT 与圆相切时，$\angle OMT$ 最大. 所以若圆上存在点 N，使得 $\angle OMN=30^{\circ}$，则 $\angle OMT\geq 30^{\circ}$. 由 $M(m,1)$ 和 $x^2+y^2=1$ 可知过 M 且与圆相切的一条直线为 $y=1$，切点 $T(0,1)$，所以在直角三角形 OMT 中，$\tan OMT=\frac{|OT|}{|TM|}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $|TM|\leq\sqrt{3}\Rightarrow -\sqrt{3}\leq m\leq\sqrt{3}$.

例 2　已知圆 O：$x^2+y^2=1$，动圆 M：$(x-a)^2+(y-a+4)^2=1$.若圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，使得 $\angle APB=60°$，则实数 a 的取值范围为________.

【答案】$\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【解析】由题意得圆心 $M(a,\ a-4)$在直线 $x-y-4=0$ 上运动，所以动圆 M 是圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，半径为 1 的圆．又因为圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，使 $\angle APB=60°$，所以 $OP=2$，即点 P 也在 $x^2+y^2=4$ 上，于是 $2-1\leq\sqrt{a^2+(a-4)^2}\leq 2+1$，即 $1\leq\sqrt{a^2+(a-4)^2}\leq 3$，解得 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$，故实数 a 的取值范围是$\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

例 3　已知圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=2$．若直线 l：$x+y+m=0$ 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，使得 $\angle APB=60°$，则 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-9)$　　B. $(-\infty,9]\cup[-1,+\infty)$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $[-9,-1]$

【答案】D

【分析】由 $\angle APB=60°$，可求得 $|PC|=2r$，求出圆心到直线的距离，只要这个距离不大于 $2r$ 即可得.

【解析】根据题意，圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=2$ 的圆心为 $(2,3)$，半径 $r=\sqrt{2}$，

过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，连接 PC，

若 $\angle APB=60°$，则 $\angle APC=30°$，又由 $CA\perp PA$，

则 $|PC|=2|CA|=2r=2\sqrt{2}$，

若直线 l：$x+y+m=0$ 上存在点 P，满足 $\angle APB=60°$，

则有 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2+3+m|}{\sqrt{1+1}}\le 2\sqrt{2}$，

解可得：$-9\le m\le -1$，即 m 的取值范围为 $[-9,-1]$，

故选：D．

【巩固训练】

1.设点 M（x_0,1），若在圆 O:$x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得∠OMN=45°，则 x_0 的取值范围是__________.

2.已知圆 $M:(x-1)^2+(y-1)^2=4$，直线 $l:x+y-6=0$, A 为直线 l 上一点，若圆 M 上存在两点 B,C，使得 $\angle BAC=60°$，则点 A 的横坐标的取值范围是___________.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C:(x+2)^2+(y-m)^2=3$．若圆 C 存在以 G 为中点的弦 AB，且 $AB=2GO$，则实数 m 的取值范围是___________.

4.已知圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与圆 $C:(x-4)^2+(y+3)^2=8$，圆 O 上至少存在一点 P，使得圆 C 上总存在两点 A、B，使得 $\angle APB$ 为钝角，则 r 的取值范围是____.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 O：$x^2+y^2=1$，圆 M：$(x+a+3)^2+(y-2a)^2=1$(a 为实数)．若圆 O 与圆 M 上分别存在点 P，Q，使得∠OQP=30°，则 a 的取值范围为_______.

6.已知圆 C：$(x-2)^2+y^2=4$，线段 EF 在直线 l：$y=x+1$ 上运动，点 P 为线段 EF 上任意一点，若圆 C 上存在两点 A，B，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 0$，则线段 EF 长度的最大值是__________.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于 M,N 两点，点 P 在圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 上运动．若 $\angle MPN$ 恒为锐角，则实数 a 的取值范围是_________.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-2,0)$，点 B 是圆 C：$(x-2)^2+y^2=4$ 上的点，点 M 是 AB 中点，若直线 $y=kx-\sqrt{5}k$ 上存在点 P，使$\angle OPM=30^{\circ}$，则实数 k 的取值范围是______.

【答案与提示】

1.【答案】 $[-1,1]$

【提示】由$|OM|\le\sqrt{2}$ 解得.

2.【答案】 [1,5]

【提示】设 $A(x_0,6-x_0)$，由$|AM|\le 4$ 解得.

3.【答案】 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

【提示】 $AB=2GO$ 即 $\angle AOB=90^\circ$，故只需$|OC|\le\sqrt{2}r=\sqrt{6}$

4.【答案】

【提示】易知 $OA\perp OB$，考察临界状态，只需过原点作圆的切线，切点弦的张角大于等于直角即可.

5.【答案】$[-\frac{6}{5}$，0]

【提示】【分析】双动点问题先转化为一点固定不动，另一点动.这里，先将 Q 固定不动，则点 P 在圆 O 运动时，当 PQ 为圆 O 的切线时，$\angle OQP$ 最大，故满足题意，需$\angle OQP\ge 30^\circ$，再将角的范围转化为 O、Q 间的距离问题，即需 $OQ\le 2$.再固定 P 不动，易得只需 $OM\le 3$ 即可，利用两点间距离公式$(a+3)^2+(2a)^2\le 9$，解得$-\frac{6}{5}\le a\le 0$.

6.【答案】$\sqrt{14}$

【解析】由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 0$ 得$\angle APB\ge 90^\circ$，从直线上的点向圆上的点连线成角，当且仅当两条线均为切线时，$\angle APB$ 才是最大的角，不妨设切线为 PM，PN，当$\angle APB\ge 90^\circ$时，$\angle$

$MPN \geq 90°$，$\sin\angle MPC = \frac{2}{PC} \geq \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $PC \leq 2\sqrt{2}$.另当过点 P，C 的直线与直线 l：$y = x+1$ 垂直时，$PC_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，以 C 为圆心，$CP = 2\sqrt{2}$为半径作圆交直线 l 于 E，F 两点，这时的线段长即为线段 EF 长度的最大值，所以 $EF_{\max} = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{14}$.

7.【答案】$(-\infty,-4)\cup(\sqrt{7}-1,+\infty)$

【错解】考虑若 $\angle MPN$ 为直角,则动圆与以 M,N 为直径的圆相外切，故两圆相离时，满足题意，所以 $\sqrt{(a+1)^2+1} > 2\sqrt{2}$，解之得：$a > \sqrt{7}-1$或$a < -\sqrt{7}-1$.

【错因】当动圆在左侧时，此时，圆与已知直线 $y = x+2$ 相交，圆上存在点与 M,N 两点连线构成的角为零角，需排除.还需动圆与直线 $y = x+2$ 相离.

8.【答案】$[-2,2]$

【提示】连结 O、M，则 $OM=\frac{1}{2}BC=1$，问题转化为"在圆 O：$x^2+y^2=1$ 存在点 M，使得直线 $y = kx - \sqrt{5}k$ 上存在点 P，使$\angle OPM=30^{O}$"，故只需当 PM 为切线时，$\angle OPM \geq 30^{O}$，故只需 $OP \leq 2$，即$\frac{\sqrt{5}k}{\sqrt{1+k^2}} \leq 2$，解得$-2 \leq k \leq 2$.

点评：

也可以用"动点转移法"求点 M 的轨迹方程是 $x^2+y^2=1$

专题 39 圆的弦被内（外）分成定比

【方法点拨】

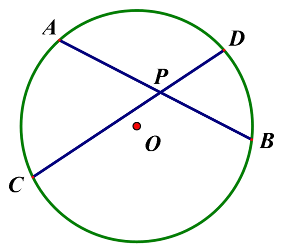
1. 利用垂径定理通过二次解直角三角形求出弦长，进而求出"弦心距"，最后利用"点线距"列方程;

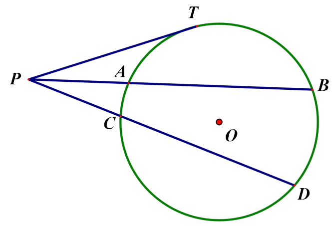
2. 利用圆幂定理(相交弦定理、切割线定理、割线定理)求出弦长，然后同上.

3. （1）相交弦定理：如下左图，圆 O 的两条弦 AB、PC 相交于圆内一点 P，则 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

（2）如下右图，PT 为圆 O 的切线，PAB、PCD 为割线，则：(1) $PT^2=PA\cdot PB$（切割线定理）; (2) $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ （割线定理）.

说明：上述三个定理可以统一为 $PA\cdot PB=PO^2-R^2$ (其中 R 是半径)，统称为圆幂定理.





【典型题示例】

例 1　　在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $M(1,0)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=5$ 交于 A,B 两点，其中 A 点在第一象限，且 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，则直线 l 的方程为______________.

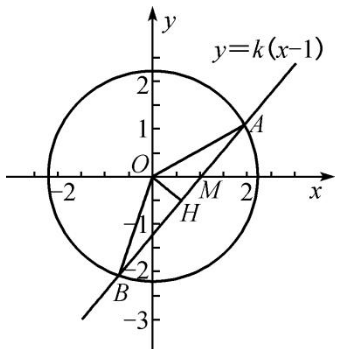
【答案】$y=x-1$

【分析】本题思路有下列几种：①利用向量坐标设点转化，点参法；②设直线方程的在 x 轴上的截距式，联立方程组；③垂径定理后二次解三角形；④相交弦定理；⑤利用”爪”型结构,得 $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$,两边平方求得 $\angle AOB$ 的余弦值.

【解法一】易知直线 l 的斜率必存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，设 $BM=2t$，$MA=t$.

如图，过原点 O 作 $OH\perp l$ 于点 H，则 $BH=\frac{3t}{2}$.



设 $OH=d$，在 Rt△OBH 中，$d^2+\left(\frac{3t}{2}\right)^2=r^2=5$.

在 Rt△OMH 中，$d^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=OM^2=1$，解得 $d^2=\frac{1}{2}$,

则 $d^2=\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{1}{2}$，解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

因为点 A 在第一象限，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，由图知 $k=1$，

所以所求的直线 l 的方程为 $y=x-1$.

【解法二】由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，设 $BM=2t$，$MA=t$

又过点 M 的直径被 M 分成两段长为 $\sqrt{5}-1$、$\sqrt{5}+1$

由相交弦定理得 $2t^2=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$，解之得 $t=\sqrt{2}$

过原点 O 作 $OH\perp l$ 于点 H，

在 Rt△OBH 中，$d^2+\left(\frac{3t}{2}\right)^2=r^2=5$，解得 $d^2=\frac{1}{2}$，（下同解法一，略）.

【解法三】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{BM}=(1-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-1,y_1)$.

因为 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以 $\begin{cases}1-x_2=2\ \ x_1-1\ \ ,\\-y_2=2y_1.\end{cases}$

当直线 AB 的斜率不存在时，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$，不符合题意.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

联立 $\begin{cases}y=k\ \ x-1\ \ ,\\x^2+y^2=5,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)y^2+2ky-4k^2=0$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2k}{1+k^2},\\y_1\cdot y_2=\frac{-4k^2}{1+k^2},\\-y_2=2y_1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}y_1=\frac{2k}{1+k^2},\\y_2=\frac{-4k}{1+k^2},\end{cases}$ 所以 $y_1\cdot y_2=\frac{-8k^2}{1+k^2\ \ {}^2}=\frac{-4k^2}{1+k^2}$，即 $k^2=1$.又点 A 在第一象限，

所以 $k=1$，即直线 AB 的方程为 $y=x-1$.

【解法四】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{BM}=(1-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-1,y_1)$.

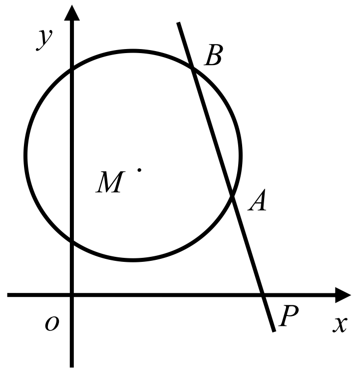
因为 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以 $\begin{cases}1-x_2=2\ \ x_1-1\ \ ,\\-y_2=2y_1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2=2x_1-3,\\-y_2=2y_1.\end{cases}$

又 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2=5,\\x_2^2+y_2^2=5,\end{cases}$ 代入可得 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2=5,\\\ \ 2x_1-3\ \ {}^2+4y_1^2=5,\end{cases}$ 解得 $x_1=2$，代入可得 $y_1=\pm1$.又点 A 在第一象限，故 $A(2,1)$，由点 A 和点 M 的坐标可得直线 AB 的方程为 $y=x-1$.

点评：

上述各种解法中，以解法一、解法二最简、最优.

例 2　　已知圆 M：$(x-1)^2+(y-3)^2=4$，过 x 轴上的点 $P(a,0)$ 存在一直线与圆 M 相交，交点为 A、B，且满足 $PA=BA$，则点 P 的横坐标 a 的取值范围为________.



【答案】$1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$

【解法一】取 AB 中点 C，连接 MC、MP，

设 $AB=2m$，则 $\begin{cases} MC^2+m^2=r^2 \\ MC^2+(3m)^2=MP^2 \end{cases}$，相减得 $MP^2=8m^2+r^2=8m^2+4$，

$\because 0<m\le r$　$\therefore MP^2=8m^2+4\le 36$，即 $(a-1)^2+3^2\le 36$

$\therefore 1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$

【解法二】由圆幂定理得：$PA\cdot PB=PM^2-R^2$

设 $AB=2m$，代人上式得：$8m^2=\left[(a-1)^2+9\right]-4$，即 $8m^2=(a-1)^2+5$

$\because 0<m\le 2$　　$\therefore 0<(a-1)^2+5\le 32$

$\therefore 1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$

【解法三】（利用圆中最长弦为直径，得出 PA 范围，而 PA 的两个端点都在动，以静制动，然后再将 PA 范围转化为 PM 范围问题）

因为 $PA=BA$，所以 PA 的最大值为 2，故 PM 的最大值为 4（下略）.

【巩固训练】

1．在平面直角坐标系 xOy 中，设直线 $y=-x+2$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 交于 A、B 两点，O 为

坐标原点，若圆上一点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，则 $r=$__________.

2.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(0,1)$ 在圆 C： $x^2+y^2+2mx-2y+m^2-4m+1=0$ 内，若存在过点 P 的直线交圆 C 于 A、B 两点，且△PBC 的面积是△PAC 的面积的 2 倍，则实数 m 的取值范围为______________.

3.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C:(x+2)^2+(y-m)^2=3$．若圆 C 存在以 G 为中点的弦 AB，且 $AB=2GO$，则实数 m 的取值范围是____________.

4.已知直线 $y=ax+3$ 与圆 $x^2+y^2+2x-8=0$ 相交于 A,B 两点，点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $y=2x$ 上且 $PA=PB$，则 x_0 的取值范围为____________.

【答案与提示】

1.【答案】 $\sqrt{10}$

【解法一】遇线性表示想求模，将向量问题实数化.

$$\overrightarrow{OC}^2=\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)^2=\frac{25}{16}\overrightarrow{OA}^2+2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{9}{16}\overrightarrow{OB}^2,$$

即 $r^2=\frac{25}{16}r^2+\frac{15}{8}r^2\cos\angle AOB+\frac{9}{16}r^2$，整理化简得 $\cos\angle AOB=-\frac{3}{5}$.

过点 O 作 AB 的垂线交 AB 于 D，

则 $\cos\angle AOB=2\cos^2\angle AOD-1=-\frac{3}{5}$，得 $\cos^2\angle AOD=\frac{1}{5}$.

又圆心到直线的距离 $OD=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $\cos^2\angle AOD=\frac{1}{5}=\frac{OD^2}{r^2}=\frac{2}{r^2}$， $r=\sqrt{10}$.

【解法二】注意到线性表示时的系数和为 2，联想“三点共线”.

由 $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，即 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

得 A、B、D 三点共线（其中 D 是 AB 的中点），且 $AD:BD=3:5$，

设 $AD=3x$， $BD=5x$

思路一：垂径定理后二次解三角形，$\begin{cases}\left(\dfrac{r}{2}\right)^2=x^2+\sqrt{2}^2\\ r^2=(4x)^2+\sqrt{2}^2\end{cases}$，解之得 $r=\sqrt{10}$.

思路二：相交弦定理，$\begin{cases}3x\cdot 5x=\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{3r}{2}\\ r^2=(4x)^2+\sqrt{2}^2\end{cases}$，解之得 $r=\sqrt{10}$.

2.【答案】$\left[\dfrac{4}{9},4\right)$

【提示】由于△*PBC* 与△*PAC* 同高，故 *PB*=2*PA*.

3.【答案】 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

【简析】易知 $OA\perp OB$，考察临界状态，只需过原点作圆的切线，切点弦的张角大于等于直角即可.

4.【答案】 $(-1,0)\cup(0,2)$

【提示】直接利用勾股定理转化.

专题 40 定线段张定角

【方法点拨】

当已知中出现三角形一边及其对角均为定值，即“定线段张定角”时，应考虑其中的隐圆.

【典型题示例】

例 1 在△*ABC* 中，角 *A*、*B*、*C* 所对的边分别为 *a*、*b*、*c*，已知 $3a=3b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，若点 *M* 为 *AC* 中点，且 $b=\sqrt{3}$，则中线 *BM* 的最大值是______________.

【答案】$\frac{3}{2}$

【分析】易求得 $B=\frac{\pi}{3}$，问题转化为在一三角形中，已知一边及其对角，求这边上中线的最大值.可以使用中线长定理、基本不等式解决（解析一），作为填空题，利用隐圆，当中线就是该边上的高时最大则更简捷.

【解析一】由射影定理得 $3(b\cos C+c\cos B)=3b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，

化简得 $3c\cos B=\sqrt{3}c\sin B$，又因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$ ，

$B\in(0，\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

在△ABM 和△BCM 中，由余弦定理得:

$c^2=BM^2+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}BM\cos\angle BMA$，$a^2=BM^2+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}BM\cos\angle BMC$

两式相加得 $BM^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{3}{4}$.

又由余弦定理 $a^2+c^2-3=ac\leqslant\frac{a^2+c^2}{2}$，所以$\frac{1}{2}(a^2+c^2)\leqslant 3$，

即 $a^2+c^2\leqslant 6$，$BM^2\leqslant\frac{9}{4}$，

所以 BM 最大值为$\frac{3}{2}$，当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$时等号成立.

【解析二】由射影定理得 $3(b\cos C+c\cos B)=3b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，

化简得 $3c\cos B=\sqrt{3}c\sin B$，又因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$ ，

$B\in(0，\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

在△ABC 中，$b=\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{3}$，故点 B 的轨迹是以 $AC=\sqrt{3}$为弦，所对角 $B=\frac{\pi}{3}$的弧

由平面几何知识得，当 AC 边上的中线 BM 就是 AC 边上的高，即当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$时，BM 最大值为$\frac{3}{2}$.

例 2　设向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，$\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，则$\left|\vec{c}\right|$的最大值等于（　　）

A. 1　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

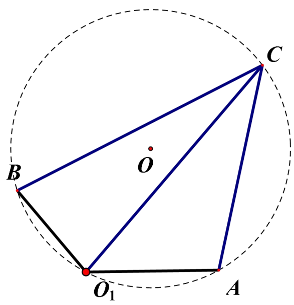
【答案】D

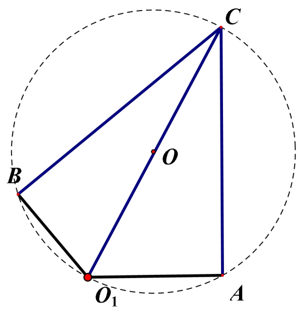
【分析】向量是自由向量，故可将其移至同一起点考虑．由$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$易知

$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，且其终点间选段长为$\sqrt{3}$，由$\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle=\dfrac{\pi}{3}$知向量$\vec{c}$的终点与$\vec{a},\vec{b}$的终点连线“定线段张定角”，其轨迹是圆弧.

【解析】由$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=-\dfrac{1}{2}$, 得$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$

如下左图, 设$\overrightarrow{O_1A}=\vec{a}$, $\overrightarrow{O_1B}=\vec{b}$，$\overrightarrow{O_1C}=\vec{c}$





则$\angle ACB=\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle$，$AB=\sqrt{3}$

故点C的轨迹是以AB为弦，所对圆周角为$\dfrac{\pi}{3}$的两段弧（端点A、B除外），该圆的半径为1

如上右图，当O_1C过圆心O，即为直径时，$\left|\overrightarrow{O_1C}\right|$最大，此时$\left|\overrightarrow{O_1C}\right|=2$

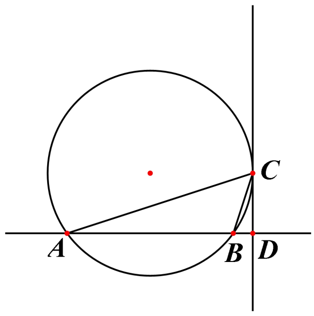
所以$\left|\vec{c}\right|$的最大值等于2，故选D.

例 3　已知ΔABC三个内角A,B,C的对应边分别为a,b,c，且$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=2$，当$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$取得最大值时，$\dfrac{b}{a}$的值为__________.

【答案】$2+\sqrt{3}$

【分析】发现隐圆后，问题的难点在于如何对 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 取得最大值作转化，这里，直接使用数量积的定义. 由于 $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle BAC=2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC$，故当 $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC$ 最大，即 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影最大时， $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 取得最大值，从“形”上看，此时过点 C 的圆的切线与 AB 垂直.

【解析】 如图所示，



在直径为 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ 的圆中，弦 AB 固定，点 C 在圆上运动，满足题中的 ΔABC，结合数量积的定义可得，当点 C 位于图中的位置时， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 取到最大值，

此时 $BC=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$， $AC=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$，

故 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{AC^2}{BC^2}=7+2\sqrt{3}$，所以 $\frac{b}{a}=2+\sqrt{3}$.

【巩固训练】

1.在 $\triangle ABC$ 中，点 M 是边 BC 中点， $A=\frac{\pi}{3}$， $a=\sqrt{3}$，则 AM 的最大值为_______.

2.在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2$， $3b\sin C-5c\sin B\cos A=0$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_______.

3.在 $\triangle ABC$ 中， $c=5$， $a=5\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})$，点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 OG 的最小值为_______.

4.在$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$，点D在边BC上，且$BD=2DC$，则AD的最大值为______.

5. 锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin C-\sqrt{2}\sin B}{\sin A+\sin B}$，且$a=\sqrt{2}$，

则$\triangle ABC$面积的取值范围是_______.

6. 在锐角$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2c-\sqrt{3}b=2a\cos B$，

若$a=\sqrt{3}$，则$\sqrt{3}b-c$的取值范围是_______.

7. 在锐角三角形ABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，已知$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$，且$a=\sqrt{3}$，则b^2+c^2的取值范围是____________.

【答案或提示】

1.【答案】$\dfrac{3}{2}$

【提示】同例1，AM是高时最大.

2.【答案】2

【提示】是等腰三角形时面积最大.

3.【答案】$\dfrac{10-5\sqrt{2}}{6}$

【提示】求得$C=\dfrac{\pi}{4}$，以AB中点M为坐标原点建系，求得点G的的轨迹为圆.

4.【答案】$\sqrt{3}+1$

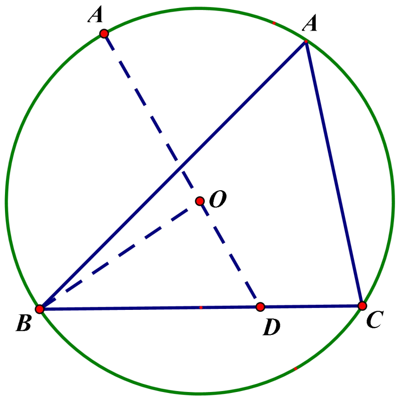
【分析】发现隐圆，利用平几知识、余弦定理求出最大值.

【解析】$\because A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$

$\therefore$根据正弦定理，$\triangle ABC$外接圆的直径$2R=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{3}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，如图，当$AD$过圆心时最大.

连结OB，在$\triangle OBD$中，$\angle OBD=30°$，由余弦定理得：$OD=1$

所以 $AD=\sqrt{3}+1$ 即为所求最大值.



5.【答案】$(1,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}]$

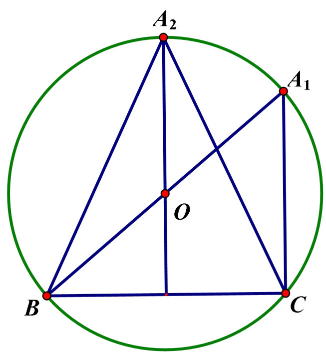
【解析】根据正弦定理，$\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin C-\sqrt{2}\sin B}{\sin A+\sin B}$ 可化为 $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{c-\sqrt{2}b}{a+b}$

整理得：$a^2-b^2=c^2-\sqrt{2}bc$

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $A=\dfrac{\pi}{4}$

由正弦定理得 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=2$ （其中 R 为△ABC 外接圆半径）

如图，下同例 2，求出临界值.



6.【答案】$\left(\sqrt{7},\sqrt{21}\right)$.

【提示】因为 $2c-\sqrt{3}b=2a\cos B$， 得 $A=60°$

求出临界状态的值立得 $\sqrt{3}b-c\in\left(\sqrt{7},\sqrt{21}\right)$.

7.【答案】$\left(21,6\sqrt{3}+12\right]$.

【分析】易求得 $A=\dfrac{\pi}{6}$，点 A 的轨迹是以 $BC=\sqrt{3}$为弦，所对角 $A=\dfrac{\pi}{3}$的弧，在点 A 的运动过程中，b^2+c^2 先增后减，故当 $b=c$ 时，达到最大值，而下界是三角形 ABC 是直角三角形，即 AC（或 AC）为直径.

【解析】由 $\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$ 及正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A$,

因为 C 为锐角，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\sin A=\cos A$

因为 A 为锐角，所以 $\cos A\neq 0$，所以 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.

点 A 的轨迹是以 $BC=\sqrt{3}$为弦，所对角 $A=\dfrac{\pi}{3}$的弧，

在点 A 的运动过程中，b^2+c^2 先增后减，

故当 $b=c$ 时，b^2+c^2 取得最大值，此时 $b=c=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$，$\left(b^2+c^2\right)_{\max}=6\sqrt{3}+12$

又因为 ABC 为锐角三角形，当 AC（或 AC）为直径时，$b^2+c^2=3^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=21$

所以 b^2+c^2 的取值范围为 $\left(21,6\sqrt{3}+12\right]$.

专题 41 与过定点的直线相关的最值

【方法点拨】

1. 选择直线方程的适当形式，若设为截距式，实质是引入了双元；若设为斜截式，则是引入了单元.无论那种形式，都有注意参数的范围.
2. 当求线段被定点分成两条线段之积的最值时，转化为向量的数量积的坐标形式求解较简单，也可引入角为变量，建立关于角的目标函数，利用三角函数的有界性求解.

【典型题示例】

例 1 已知直线 l 过定点 $P\left(-2,1\right)$，且交 x 轴负半轴于点 A、交 y 轴正半轴于点 B，点 O 为坐标原点，则 $\left|OA\right|+\left|OB\right|$ 取得最小值时直线 l 的方程为____________.

【答案】$x-2y+4=0$

【解析一】设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（其中 $a<0,b>0$）

∵直线 l 过点 $P\left(-2,1\right)$，∴ $-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

∵ $|OA|+|OB|=b-a$，

∴ $|OA|+|OB|=b-a=\left(b-a\right)\left(-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=3+\frac{-a}{b}+\frac{2b}{-a}\geq 3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $a=-\sqrt{2}-2$，$b=1+\sqrt{2}$ 时取等号，所以直线 l 的方程为 $x-\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}=0$.

【解析二】设直线 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$（其中 $k>0$）

令 $x=0$，$y=2k+1$；令 $y=0$，$x=-\frac{1}{k}-2$

∵ $|OA|+|OB|=\left|2k+1\right|+\left|-\frac{1}{k}-2\right|=2k+\frac{1}{k}+3\geq 3+2\sqrt{2}$，

∴当且仅当 $2k=\frac{1}{k}$，即 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，所以直线 l 的方程为 $x-\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}=0$.

例 2 已知直线 l 过定点 $P\left(-2,1\right)$，且交 x 轴负半轴于点 A、交 y 轴正半轴于点 B，则 $\left|PA\right|\cdot\left|PB\right|$ 取得最小值时直线 l 的方程为____________.

【答案】$x-y+3=0$

【解析一】（截距式+向量+基本不等式中的“1”的代换）

设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（其中 $a<0,b>0$）

∵直线 l 过点 $P\left(-2,1\right)$，∴ $-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，

∵ A，P，B 三点共线，

∴

$$|PA|\cdot|PB|=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=(-2-a,1)\cdot(2,b-1)=-2a+b-5$$

$$=(-2a+b)\left(-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)-5=-\frac{2b}{a}-\frac{2a}{b}+4+1-5=-\frac{2b}{a}-\frac{2a}{b}\geq 4,$$

当且仅当 $a=-3$，$b=3$ 时取等号，所以直线 l 的方程为 $x-y+3=0$．

【解析二】（斜截式+向量+基本不等式）

设直线 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$（其中 $k>0$）

令 $x=0$，$y=2k+1$；令 $y=0$，$x=-\frac{1}{k}-2$

∴ $\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{1}{k},-1\right)$，$\overrightarrow{PB}=(2,2k)$

∵ A，P，B 三点共线，

∴ $|PA|\cdot|PB|=-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\left(-\frac{1}{k},-1\right)\cdot(2,2k)=\frac{2}{k}+2k\geq 4$，

当且仅当 $\frac{2}{k}=2k$，即 $k=1$ 时取等号，所以直线 l 的方程为 $x-y+3=0$．

【解析三】（作垂线，利用直角三角形边角关系，三角函数有界性）

过点 P 分别向 x 轴、y 轴作垂线，设 $\angle BAO=\alpha$（其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）

则 $|PA|=\frac{1}{\sin\alpha}$，$|PB|=\frac{2}{\cos\alpha}$

∴ $|PA||PB|=\frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{4}{\sin 2\alpha}\geq 4$

当且仅当 $\sin 2\alpha=1$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时取等号，此时直线的斜率为 1

∴直线 l 的方程为 $x-y+3=0$．

例 3　已知直线 l 过点 $M(2,1)$，且分别与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴交于 A，B 两点，O 为原点，当△AOB 面积最小时，则直线 l 的方程是___________．

【答案】$x+2y-4=0$

【解析一】设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$（其中 $k<0$）

则可得 $A\left(\frac{2k-1}{k},\ 0\right)$，$B(0,1-2k)$.

$\because S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k-1}{k}\cdot(1-2k)=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{k}-4k\right)\geq\frac{1}{2}\left[4+2\sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right)\cdot(-4k)}\right]=4$

当且仅当 $-\frac{1}{k}=-4k$，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$\triangle AOB$ 面积有最小值为 4，

此时，直线 l 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-4=0$.

【解析二】设所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,\ b>0)$，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$.

又 $\because \frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geq2\sqrt{\frac{2}{ab}}\Rightarrow\frac{1}{2}ab\geq4$，

当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$，即 $a=4$，$b=2$ 时，$\triangle AOB$ 面积 $S=\frac{1}{2}ab$ 有最小值为 4.

此时，直线 l 的方程是 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，即 $x+2y-4=0$.

【解析三】过点 P 分别向 x 轴、y 轴作垂线，垂足分别是 C、D

设 $\angle BAO=\alpha$（其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）

则 $|PC|=\frac{1}{\tan\alpha}$，$|PD|=2\tan\alpha$

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PAC}+2=\frac{1}{2\tan\alpha}+2\tan\alpha+2\geq2\sqrt{\frac{1}{2\tan\alpha}\cdot2\tan\alpha}+2=4$

当且仅当 $\frac{1}{2\tan\alpha}=2\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 时取等号，此时直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 直线 l 的方程是 $x+2y-4=0$.

例 4　已知直线 $l: y=k(x-2)+3$，且 l 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点．若使 ΔAOB 的面积为 m 的直线 l 共有四条，则正实数 m 的取值范围是________.

【答案】$m>12$

【分析】由于直线 $l: y=k(x-2)+3$ 过定点（2,3），故直线 l 与第二、四象限围成的 ΔAOB 的面积可以取任意实数，换言之，当 m 给定一正实数时，直线 l 与第二、四围成的面积为 m 的直线有且仅有两条，故只需考虑 l 与第一象限围成的 ΔAOB 的面积为 m 的直线有两条即可，由于 l 与第一象限围成的 ΔAOB 的面积有最小值，根据对称性，大于该最小值的直

线有两条，故问题转化为求 l 与第一象限围成的 ΔAOB 的面积的最小值.

【解析一】∵ 直线 $y=k(x-2)+3$ 与 x 轴，y 轴交点的坐标分别是 $A(2-\frac{3}{k}$，$0)$，$B(0,3-2k)$.

∴ $S_{\vartriangle}=\frac{1}{2}\times|2-\frac{3}{k}|\times|3-2k|=\frac{1}{2}\times\frac{(2k-3)^2}{|k|}$.

当 $k>0$ 时， $S_{\vartriangle}=\frac{1}{2}\times\frac{4k^2-12k+9}{k}=\frac{1}{2}\times(4k+\frac{9}{k}-12)$，

$\because 4k+\frac{9}{k}\quad 2\sqrt{4\times9}=12$， 当且仅当 $k=\frac{3}{2}$ 时取等号.

$\therefore$ 当 $S_{\vartriangle}=m>0$ 时， 在 $k>0$ 时， k 有两值；

当 $k<0$ 时， $S_{\vartriangle}=\frac{1}{2}\times\frac{(2k-3)^2}{|k|}=\frac{1}{2}\times\frac{4k^2-12k+9}{-k}=\frac{1}{2}\times[(-4k+\frac{9}{-k})+12]$，

$\because -4k+\frac{9}{-k}\quad 2\sqrt{4\times9}=12$. 当且仅当 $k=-\frac{3}{2}$ 时取等号.

$\therefore$ 当 $m=0$ 时，仅有一条直线使 ΔAOB 的面积为 m；

当 $0<m<12$ 时，仅有两条直线使 ΔAOB 的面积为 m；

当 $m=12$ 时，仅有三条直线使 ΔAOB 的面积为 m；

当 $m>12$ 时，仅有四条直线使 ΔAOB 的面积为 m.

故答案是： $m>12$.

【解析二】直线 $l:y=k(x-2)+3$ 过定点（2,3），

先求直线 l 与第一象限围成的 ΔAOB 的面积的最小值，则所求 m 大于该最小值时，满足题意

∵ $A(2-\frac{3}{k}$， $0)$， $B(0,3-2k)$（ $k>0$ ）

∴ $S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times|2-\frac{3}{k}|\times|3-2k|=\frac{1}{2}\times\frac{(2k-3)^2}{|k|}=\frac{1}{2}\times(4k+\frac{9}{k}-12)\quad\frac{1}{2}\times(2\sqrt{4k\cdot\frac{9}{k}}-12)=12$

当且仅当 $4k=\frac{9}{k}$，即 $k=\frac{3}{2}$ 时取等号

∴当 $m>12$ 时，仅有四条直线使 ΔAOB 的面积为 m．

故答案是：$m>12$．

【巩固训练】

1. 直线 $(m+n)x+(2m-n)y-m+2n=0$ （$m,n\in R$ 且 m,n 不同时为 0）经过定点_________.

2.过点 $P(-2，3)$且与两坐标轴围成的三角形面积为 12 的直线共有_________条.

3.已知直线 l 过点 $M(2,1)$，且与 x 轴、y 轴的正半轴分别相交于 A，B 两点，O 为坐标原点，则当$|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|$取得最小值时，直线 l 的方程为________.

4.已知直线 l：$kx-y+1+2k=0(k\in\mathbf{R})$，若直线 l 交 x 轴负半轴于 A，交 y 轴正半轴于 B，$\triangle AOB$ 的面积为 S(O 为坐标原点)，则 S 取得最小值时直线 l 的方程是_______.

5. 一直线过点 $A(2,2)$ 且与 x 轴、y 轴的正半轴分别相交于 B、C 两点，O 为坐标原点．则 $|OB|+|OC|-|BC|$ 的最大值为 ___________.

6.已知直线 $(2m+1)x+(1-m)y-3(1+m)=0$，$m\in(-\frac{1}{2},1)$ 与两坐标轴分别交于 A、B 两点．当 ΔOAB 的面积取最小值时 (O 为坐标原点），则 m 的值为

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

7.（多选题）已知直线 l_1：$ax-y+1=0$，l_2：$x+ay+1=0$，$a\in\mathbf{R}$，以下结论正确的是(　　)

A．不论 a 为何值时，l_1 与 l_2 都互相垂直

B．当 a 变化时，l_1 与 l_2 分别经过定点 $A(0,1)$和 $B(-1,0)$

C．不论 a 为何值时，l_1 与 l_2 都关于直线 $x+y=0$ 对称

D．如果 l_1 与 l_2 交于点 M，则$|MO|$的最大值是$\sqrt{2}$

【答案或提示】

1. 【答案】$\left(-1,1\right)$

【解析】直线过定点，则意味着定点坐标使得参数“失去作用”——即无论参数取何值，不会影响表达式的值，能够达到此功效的只有让参数与“0”相乘，所以考虑将已知直线进行变形，将含 m 的项与含 n 的项分别归为一组，可得：$m\left(x+2y-1\right)+n\left(x-y+2\right)=0$，

若要让 m,n “失去作用”，则 $\begin{cases}x+2y-1=0\\x-y+2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，即定点为 $\left(-1,1\right)$.

2.【分析一】直接设点斜式或截距式求出.

【解析一】设过点 $P(-2，3)$且与两坐标轴围成的三角形面积为 12 的直线的斜率为 k，则有直线的方程为 $y-3=k(x+2)$，即 $kx-y+2k+3=0$，它与坐标轴的交点分别为 $M(0，2k+3)$、$N\left(-2-\frac{3}{k}，0\right)$. 再由 $12=\frac{1}{2}OM\cdot ON=\frac{1}{2}|2k+3|\times|-2-\frac{3}{k}|$，可得$|4k+\frac{9}{k}+12|=24$，即 $4k+\frac{9}{k}+12=24$，或 $4k+\frac{9}{k}+12=-24$．解得 $k=\frac{3}{2}$或 $k=\frac{-9-6\sqrt{2}}{2}$或 $k=\frac{-9+6\sqrt{2}}{2}$，故满足条件的直线有 3 条.

【分析二】求出与 x 轴负方向、y 轴正方向所围成三角形面积的最小值，若大于 12，满足条件的直线有二条；若小于 12，满足条件的直线有四条；若大于 12，满足条件的直线有三条.

3.【答案】$x+y-3=0$

【解析】设 $A(a,0)$，$B(0，b)$，则 $a>0$，$b>0$，

直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$.

$|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|=-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-(a-2，-1)\cdot(-2，b-1)=2(a-2)+b-1=2a+b-5$

$=(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)-5=\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 4$，

当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，此时直线 l 的方程为 $x+y-3=0$.

4.【答案】$x-2y+4=0$

【解析】由题意可知 $k\neq 0$，再由 l 的方程，得 $A\left(-\frac{1+2k}{k}，0\right)$，$B(0,1+2k)$.

依题意得$\begin{cases}-\frac{1+2k}{k}<0,\\1+2k>0,\end{cases}$ 解得 $k>0$.

$\because S=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1+2k}{k}\right|\cdot|1+2k|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2k)^2}{k}=\frac{1}{2}\left[4k+\frac{1}{k}+4\right]\geqslant\frac{1}{2}\times(2\times2+4)=4$,

“=” 成立的条件是 $k>0$ 且 $4k=\frac{1}{k}$，即 $k=\frac{1}{2}$，

$\therefore S_{\min}=4$，此时直线 l 的方程为 $x-2y+4=0$.

5. 【答案】$8-4\sqrt{2}$

【解析】设 $B(b,0)$，$C\ (0,c)$，$b>0$，$c>0$，

则直线方程的截距式为 $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$，

由 $A(2,2)$ 在直线上可得：$\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1$，即 $bc=2c+2b$，

因为 $1=\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\quad 2\sqrt{\frac{4}{bc}}$，所以 $bc\quad 24$，当且仅当 $b=4$，$c=6$ 时取等号，

所以 $|OB|+|OC|-|BC|=b+c-\sqrt{b^2+c^2}=\frac{(b+c+\sqrt{b^2+c^2})(b+c-\sqrt{b^2+c^2})}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}$

$$=\frac{2bc}{b+c+\sqrt{(b+c)^2-2bc}}=\frac{2bc}{\frac{bc}{2}+\sqrt{\frac{(bc)^2}{4}-2bc}}$$

$$=\frac{4bc}{bc+\sqrt{(bc)^2-8bc}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{8}{bc}}}\quad\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=8-4\sqrt{2}.$$

故答案为：$8-4\sqrt{2}$.

6.【答案】C

【解析】由直线 $(2m+1)x+(1-m)y-3(1+m)=0$，$m\in(-\frac{1}{2},1)$，

可得 $A(\frac{3(1+m)}{2m+1},0)$，$B(0,\frac{3(1+m)}{1-m})$.

$\therefore$ 当 ΔOAB 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{3(1+m)}{2m+1}\times\frac{3(1+m)}{1-m}=\frac{9}{2}\times\frac{1+2m+m^2}{-2m^2+m+1}$，

令 $1+m=t\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，$\therefore S=\frac{9}{2}\times\frac{t^2}{-2t^2+5t-2}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{-2(\frac{1}{t}-\frac{5}{4})^2+\frac{9}{8}}$，

$\therefore$ 当 $t=\frac{4}{5}$，即 $m=-\frac{1}{5}$ 时，S 取得最小值.

故选 C.

7.【答案】 ABD

【解析】　对于 A，$a\times1+(-1)\times a=0$ 恒成立，l_1 与 l_2 互相垂直恒成立，故 A 正确；

对于 B，直线 l_1：$ax-y+1=0$，当 a 变化时，$x=0$，$y=1$ 恒成立，

所以 l_1 恒过定点 $A(0,1)$；

l_2：$x+ay+1=0$，当 a 变化时，$x=-1$，$y=0$ 恒成立，

所以 l_2 恒过定点 $B(-1,0)$，故 B 正确.

对于 C，在 l_1 上任取点$(x，ax+1)$，

关于直线 $x+y=0$ 对称的点的坐标为$(-ax-1，-x)$，

代入 l_2：$x+ay+1=0$，则左边不等于 0，故 C 不正确；

对于 D，联立$\begin{cases}ax-y+1=0,\\x+ay+1=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{-a-1}{a^2+1},\\y=\dfrac{-a+1}{a^2+1},\end{cases}$

即 $M\left(\dfrac{-a-1}{a^2+1},\ \dfrac{-a+1}{a^2+1}\right)$，

所以$|MO|=\sqrt{\left(\dfrac{-a-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{-a+1}{a^2+1}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{a^2+1}}\le\sqrt{2}$，

所以$|MO|$的最大值是$\sqrt{2}$，故 D 正确.故选 ABD.

专题 42 阿波罗尼斯圆

【方法点拨】

一般地，平面内到两个定点距离之比为常数 $\lambda(\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆，此圆被叫做“啊波罗尼斯圆”（又称之为圆的第二定义）.

说明：

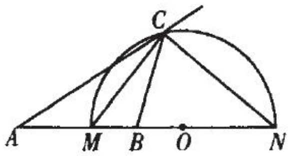
（1） 不妨设 $A(-a,0)$ ，$B(a,0)$，$AP=\lambda BP(a>0,\lambda>0,\lambda\neq1)$，再设 $P(x,y)$，则有 $\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\lambda\sqrt{(x-a)^2+y^2}$，化简得：$\left(x-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}a\right)^2+y^2=\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda^2-1}a\right)^2$，

轨迹为圆心$\left(\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}a,0\right)$，半径为$\left|\dfrac{2\lambda}{\lambda^2-1}a\right|$的圆.

（2） 满足上面条件的啊波罗尼斯圆的直径的两端是按照定比λ内分AB和外分AB所得的两个分点（如图，有$\dfrac{|AM|}{|BM|}=\dfrac{|AN|}{|BN|}=\lambda$）.

（3）设P是圆上的一点（不与M、N重合），则PM、PN是三角形PAB的内、外角平分线，$PM\perp PN$.

（4）逆向运用：给定圆O和定点A（A不在圆O上且不与O重合），则一定存在唯一一个定值λ和一个定点B，使得对于圆O上的任意一点P都有$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\lambda$.



【典型题示例】

例 1　满足条件$AB=2$，$AC=\sqrt{2}BC$的$\triangle ABC$的面积的最大值为________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】已知三角形的一边长及另两边的关系欲求面积的最大值，一种思路是利用面积公式、余弦定理建立关于某一边的目标函数，最后利用基本不等式求解；二是紧紧抓住条件“$AC=\sqrt{2}BC$”，符合 “啊园”，建系求出第三个顶点C的轨迹，挖出“隐圆”，当点C到直线AB距离最大，即为半径时，$\triangle ABC$的面积最大为$2\sqrt{2}$.

【解析一】设 BC＝x，则 AC＝$\sqrt{2}x$ ，

根据面积公式得$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times BC\sin B=x\sqrt{1-\cos^2 B}$，

根据余弦定理得$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\times BC}=\dfrac{4+x^2-2x^2}{4x}=\dfrac{4-x^2}{4x}$，

代入上式得$S_{\Delta ABC}=x\sqrt{1-\left(\dfrac{4-x^2}{4x}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{128-\left(x^2-12\right)^2}{16}}$

由三角形三边关系有$\begin{cases}\sqrt{2}x+x>2\\x+2>\sqrt{2}x\end{cases}$解得$2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2$，

故当$x^2=12, x=2\sqrt{3}$时$S_{\Delta ABC}$取最大值$\sqrt{\frac{128}{16}}=2\sqrt{2}$

【解析二】以 AB 所在的直线为 x 轴，它的中垂线为 y 轴建立直角坐标系，

则 A（$-1,0$），B（$1,0$），设 C（x,y）

由 $AC=\sqrt{2}BC$，即 $AC^2=2BC^2$

所以（$x+1$）$^2+y^2=2[$（$x-1$）$^2+y^2]$，化简得$(x-3)^2+y^2=8$

故点 C 的轨迹方程为$(x-3)^2+y^2=8(y\neq 0)$，

当点 C 到直线 AB 距离最大，即为半径时，△ABC 的面积最大为 $2\sqrt{2}$.

例 2　已知等腰三角形腰上的中线为$\sqrt{3}$，则该三角形面积的最大值为________.

【答案】2

【分析】本题解法较多，但各种解法中，以利用“啊圆”为最简，注意到中线上三角形两边之比为 2：1，符合啊波罗尼斯圆定理，挖出“隐圆”，易求得最大值为 2.

【解析一】如图 1，ΔABC 中，$AB=AC$，$AD=DC$，$BD=\sqrt{3}$.

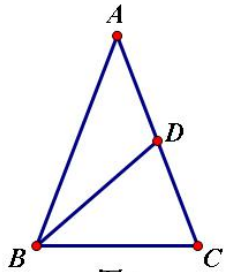


图1

设$AD=CD=m$，则$AB=2m$，

在ΔABD中，$\cos\angle ADB=\frac{3+m^2-4m^2}{2\sqrt{3}m}$，

在ΔBDC中，$\cos\angle CDB=\frac{3+m^2-BC^2}{2\sqrt{3}m}$，

由$\cos\angle ADB+\cos\angle CDB=0$可得，$BC^2=6-2m^2$，

所以$\cos A=\frac{5m^2-3}{4m^2}$，则$\sin A=\frac{\sqrt{-9m^4+30m^2-9}}{4m^2}$，

故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{-9m^4+30m^2-9}}{2}=\dfrac{\sqrt{-9\left(m^2-\dfrac{5}{3}\right)^2+16}}{2}$，

易知当 $m^2=\dfrac{5}{3}$ 时，面积的最大值是 2.

点评：避免求边 BC，优化此解法，考虑 ΔABD 中，有 $\cos A=\dfrac{5m^2-3}{4m^2}$，而 $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta ABD}$，同样可解.

【解析二】以 BD 中点 O 为原点，BD 所在直线为 x 轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系，设 $A(x,y)$，则 $AB=2AD$，即

$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=4\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2\right],$$

整理得，$\left(x-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{3}$，即有 $|y|\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，所以

$S_{\Delta ABC}=BD\times|y|=\sqrt{3}|y|\le 2$.

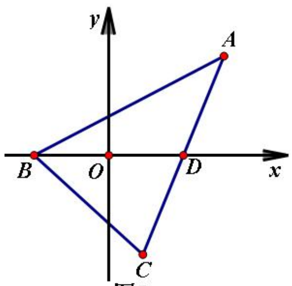


图2

【解析三】以 BC 中点 O 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立如图 3 所示的平面直角坐标系，设 $C(m,0)$，$B(-m,0)$，$A(0,n)$，则 $D\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)$，

所以 $BD^2=\left(\dfrac{3m}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2=3$，而 $S_{\Delta ABC}=mn=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3m}{2}\cdot\dfrac{n}{2}\le\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{3m}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2}{2}=2$，

当且仅当 $n=3m$ 时，取等.

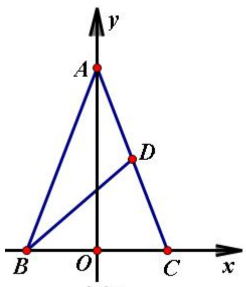


图3

【解析四】如图 4，作 $AO\perp BC$ 于点 O，交 BD 于点 G，则 G 为 ΔABC 的重心，

则有 $BG=CG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $S_{\Delta ABC}=3S_{\Delta BGC}=3\times\frac{1}{2}BG\cdot CG\sin\angle BGC=2\sin\angle BGC\le 2$，当 $\angle BGC=\frac{\pi}{2}$ 时，取等.

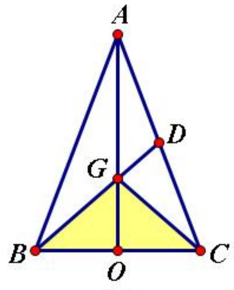


图4

例 3 已知圆 $O:x^2+y^2=1$ 和点 $A(-2,0)$，若定点 $B(b,0)$ $(b\ne -2)$ 和常数 λ 满足：对圆 O 上任意一点 M，都有 $|MB|=\lambda|MA|$，则 （1） $b=$________；（2） $\lambda=$________.

【答案】（1） $b=-\frac{1}{2}$；（2） $\lambda=\frac{1}{2}$.

【分析】其实质是啊圆的逆用，设出点的坐标，恒成立问题转化为与点的坐标无关，即分子为零.

【解答】设 $M(x,y)$，则 $x^2+y^2=1, y^2=1-x^2$，

$$\lambda^2=\frac{|MB|^2}{|MA|^2}=\frac{(x-b)^2+y^2}{(x+2)^2+y^2}=\frac{x^2-2bx+b^2+1-x^2}{x^2+4x+4+1-x^2}=\frac{b^2+1-2bx}{5+4x}=-\frac{b}{2}+\frac{b^2+\frac{5}{2}b+1}{5+4x},$$

所以 λ 为常数，所以 $b^2+\frac{5}{2}b+1=0$，

解得 $b=-\frac{1}{2}$ 或 $b=-2$（舍去），所以 $\lambda^2=-\frac{b}{2}=\frac{1}{4}$.

例 4 已知圆 C：$x^2+y^2=9$，点 $A(-5,0)$，在直线 OA 上(O 为坐标原点)，存在定点 B(不同于点 A)满足：对于圆 C 上任一点 P，都有 $\frac{PB}{PA}$ 为一常数，则点 B 的坐标为__________.

【答案】$\left(-\frac{9}{5},\ 0\right)$

【分析】本题的实质是“逆用啊圆”.

【解析一】假设存在这样的点 $B(t,0)$.

当点 P 为圆 C 与 x 轴的左交点$(-3,0)$时，$\frac{PB}{PA}=\frac{|t+3|}{2}$;

当点 P 为圆 C 与 x 轴的右交点(3,0)时，$\frac{PB}{PA}=\frac{|t-3|}{8}$.

依题意，$\frac{|t+3|}{2}=\frac{|t-3|}{8}$，解得 $t=-\frac{9}{5}$或 $t=-5$(舍去).

下面证明点 $B\left(-\frac{9}{5},\ 0\right)$对于圆 C 上任一点 P，都有$\frac{PB}{PA}$为一常数.

设 $P(x,\ y)$，则 $y^2=9-x^2$，

所以$\frac{PB^2}{PA^2}=\frac{\left(x+\frac{9}{5}\right)^2+y^2}{(x+5)^2+y^2}=\frac{x^2+\frac{18}{5}x+9-x^2+\frac{81}{25}}{x^2+10x+25+9-x^2}=\frac{\frac{18}{25}\cdot(5x+17)}{2\cdot(5x+17)}=\frac{9}{25}$.

从而$\frac{PB}{PA}=\frac{3}{5}$为常数.

【解析二】假设存在这样的点 $B(t,0)$，使得$\frac{PB}{PA}$为常数λ，则 $PB^2=\lambda^2PA^2$，

所以$(x-t)^2+y^2=\lambda^2[(x+5)^2+y^2]$，

将 $y^2=9-x^2$ 代入，得 $x^2-2xt+t^2+9-x^2=\lambda^2(x^2+10x+25+9-x^2)$，

即 $2(5\lambda^2+t)x+34\lambda^2-t^2-9=0$ 对 $x\in[-3,3]$恒成立，

所以$\begin{cases}5\lambda^2+t=0,\\34\lambda^2-t^2-9=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\lambda=\frac{3}{5},\\t=-\frac{9}{5}\end{cases}$ 或$\begin{cases}\lambda=1,\\t=-5\end{cases}$ (舍去).

故存在点 $B\left(-\frac{9}{5},\ 0\right)$对于圆 C 上任一点 P，都有$\frac{PB}{PA}$为常数$\frac{3}{5}$.

例 5　啊波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、啊基米德并称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，啊波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是：已知动点 M 与两定点 A，B 的距离之比为$\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$，那么点 M 的轨迹就是啊波罗尼斯圆，简称啊氏圆．已知在平面直角坐标系中，圆$O:x^2+y^2=4$、点$A(-1,0)$和点$B(0,1)$，M 为圆 O 上的动点，则$2|MA|+|MB|$的最小值为_________.

【答案】 $\sqrt{17}$

【分析】逆用“啊圆”，将$2|MA|$中系数 2 去掉化为“一条线段”， 从而将$2|MA|+|MB|$化为两条线段的和，再利用“三点共线”求解.

【解析】因为啊圆的圆心、两定点共线，且在该直线上的直径的端点分别是两定点构成线段

分成定比的内外分点

所以另一定点必在 x 轴上，且 $(-2,0)$ 内分该点与 $A(-1,0)$ 连结的线段的比为 2

故该点的坐标为 $(-4,0)$

设 $C(-4,0)$，则圆 $O:x^2+y^2=4$ 上任意一动点 M 都满足 $|MC|=2|MA|$

所以 $2|MA|+|MB|=|MC|+|MB|$

又因为 $|MC|+|MB|\geq|BC|=\sqrt{17}$，当且仅当 M、B、C 共线时，等号成立

所以 $2|MA|+|MB|$ 的最小值为 $\sqrt{17}$.

点评：

1. 已知两定点、啊圆的圆心三点共线；
2. 啊圆的在已知两定点所在直线上的直径的两端点，分别是两定点构成线段分成定比的内、外分点.

例 6 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名. 他发现：“平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆”. 后来, 人们将这个圆以他的名字命名, 称为阿波罗尼斯圆, 简称阿氏圆在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-2,0),B(4,0)$, 点 P满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$. 设点 P 的轨迹为 C, 下列结论正确的是（ ）

A. C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=9$

B. 在 x 轴上存在异于 A,B 的两定点 D,E, 使得 $\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{1}{2}$

C. 当 A,B,P 三点不共线时, 射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线

D. 在 C 上存在点 M, 使得 $|MO|=2|MA|$

【答案】BC

【分析】通过设出点 P 坐标，利用 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$ 即可得到轨迹方程，找出两点 D,E 即可判断 B

的正误，设出 M 点坐标，利用 $|MO|=2|MA|$ 与圆的方程表达式解出就存在，解不出就不存在.

【解析】设点 $P(x,y)$，则 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}$，化简整理得 $x^2+y^2+8x=0$，即 $(x+4)^2+y^2=16$，故 A 错误；

根据对称性可知，当 $D(-6,0),E(-12,0)$，时，$\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C 选项，$\cos\angle APO=\frac{AP^2+PO^2-AO^2}{2AP\cdot PO}$，$\cos\angle BPO=\frac{BP^2+PO^2-BO^2}{2BP\cdot PO}$，要证 PO 为角平分线，只需证明 $\cos\angle APO=\cos\angle BPO$，即证

$\frac{AP^2+PO^2-AO^2}{2AP\cdot PO}=\frac{BP^2+PO^2-BO^2}{2BP\cdot PO}$，化简整理即证 $PO^2=2AP^2-8$，设 $P(x,y)$，

则 $PO^2=x^2+y^2$，

$2AP^2-8=2x^2+8x+2y^2=(x^2+8x+y^2)+(x^2+y^2)=x^2+y^2$，则证

$\cos\angle APO=\cos\angle BPO$，故 C 正确；

对于 D 选项，设 $M(x_0,y_0)$，由 $|MO|=2|MA|$ 可得 $\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}=\sqrt{(x_0+2)^2+{y_0}^2}$，整理得 $3{x_0}^2+3{y_0}^2+16x_0+16=0$，而点 M 在圆上，故满足 $x^2+y^2+8x=0$，联立解得 $x_0=2$，y_0 无实数解，于是 D 错误.故答案为 BC.

【巩固训练】

1.（多选题）在平面直角坐标系中，三点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,7)$，动点 P 满足 $PA=\sqrt{2}PB$，则

A.点 P 的轨迹方程为 $(x-3)^2+y^2=8$　　　　B.$\triangle PAB$ 面积最大时 $PA=2\sqrt{6}$

C.$\angle PAB$ 最大时，$PA=2\sqrt{6}$　　　　D.P 到直线 AC 距离最小值为 $\frac{4\sqrt{2}}{5}$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,0),B(4,0)$.若直线 $x-y+m=0$ 上存在点 P，使得 $PA=\frac{1}{2}PB$,则实数 m 的取值范围是________

3. 已知圆 O：$x^2+y^2=1$ 和点 $A(-2,0)$，若定点 $B(b,0)(b\neq-2)$和常数λ满足：对圆 O 上任意一点 M，都有 $MB=\lambda MA$，则(1)$b=$________；　(2)$\lambda=$________.

4. 在△ ABC 中，$|AB|=2,|AC|=k|BC|(k>1)$，则当△ ABC 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$时，$k=$_____.

5.点 P 是圆 C：$x^2+y^2=1$ 上动点，已知 $A(-1,2)$，$B(2,0)$，则 $PA+\frac{1}{2}PB$ 的最小值为________.

6. 啊波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、啊基米德并称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，主要研究成果集中在他的代表作《圆锥曲线》一书，啊波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是：已知动点 M 与两定点 Q、P 的距离之比$\frac{|MQ|}{|MP|}=\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$，那么点 M 的轨迹就是啊波罗尼斯圆．已知动点 M 的轨迹是啊波罗尼斯圆，其方程为$x^2+y^2=1$，定点Q为x轴上一点，$P(-\frac{1}{2},0)$且$\lambda=2$，若点$B(1,1)$，则$2|MP|+|MB|$的最小值为(　)

A. $\sqrt{6}$　　　B. $\sqrt{7}$　　　C. $\sqrt{10}$　　　D. $\sqrt{11}$

7. 已知 $A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(t,0)$，点 D 是直线 AC 上的动点，若 $AD\le 2BD$ 恒成立，则最小正整数 t 的值为________.

8.在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90°$，$AB=2$，$AD=1$.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，则 $CB+\frac{1}{2}CD$ 的最小值为_________.

9.已知 $(x-1)^2+y^2=4$,则 $\frac{1}{2}\sqrt{4+2x-2y}+\sqrt{7-2x}$ 的最小值是__________.

【答案或提示】

1. 【答案】ABD

【解析】由题意可设 $P(x,y)$，

由 $PA=\sqrt{2}PB$，可得 $PA^2=2PB^2$，

即 $(x+1)^2+y^2=2\left[(x+1)^2+y^2\right]$，化简可得 $(x-3)^2+y^2=8$，故选项 A 正确；

对于选项 B，$|AB|=2$，且点 P 到直线 AB 的距离的最大值为圆 $(x-3)^2+y^2=8$ 的半径 r，

即为 $2\sqrt{2}$，所有 $\triangle PAB$ 面积最大为 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，此时 $P\left(3,2\sqrt{2}\right)$，所以

$PA=\sqrt{(3+1)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{6}$，故选项 B 正确；

对于选项 C，$\angle PAB$ 最大时，为过点 A 作圆 $(x-3)^2+y^2=8$ 的切点，求得切点不为

$\left(3,\pm2\sqrt{2}\right)$，则 $PA\neq2\sqrt{6}$，故选项 C 错误；

对于选项 D，直线 AC 的方程为 $7x-y+7=0$，则圆心 $(3,0)$ 到直线 AC 的距离为

$\frac{7\times3+7}{\sqrt{7^2+1}}=\frac{14\sqrt{2}}{5}$，所以点 P 到直线 AC 距离最小值为 $\frac{14\sqrt{2}}{5}-2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{5}$，故选项 D

正确；

故选 ABD.

2. 【答案】$\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$.

【解法一】设满足条件 $PB=2PA$ 的 P 点坐标为(x,y)，则$(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2$，化简得

$x^2+y^2=4$．要使直线 $x-y+m=0$ 有交点，则 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}\leq2$．即 $-2\sqrt{2}\leq m\leq2\sqrt{2}$．

【解法二】设直线 $x-y+m=0$ 有一点$(x,x+m)$满足 $PA=2PB$，

则$(x-4)^2+(x+m)^2=4(x-1)^2+4(x+m)^2$．

整理得 $2x^2+2mx+m^2-4=0$　(*)

方程(*)有解，则$\triangle=4m^2-8(m^2-4)\geq0$，

解之得：$-2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$.

3. 【答案】 (1)$-\frac{1}{2}$ (2)$\frac{1}{2}$

【解析】 (1)因为点 M 为圆 O 上任意一点，所以不妨取圆 O 与 x 轴的两个交点$(-1,0)$和$(1,0)$.

当 M 点取$(-1,0)$时，由 $MB=\lambda MA$，得$|b+1|=\lambda$；

当 M 点取$(1,0)$时，由 $MB=\lambda MA$，得$|b-1|=3\lambda$.

消去λ，得$|b-1|=3|b+1|$.

两边平方，化简得 $2b^2+5b+2=0$，

解得 $b=-\frac{1}{2}$或 $b=-2$(舍去).

(2)由$|b+1|=\lambda$，得$\lambda=\frac{1}{2}$.

4. 【答案】$\sqrt{2}$

【分析】本题考查轨迹方程的求解，以及新定义，直线与圆的位置关系的应用，属于较难题. 根据条件得到点 C 的轨迹方程$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2+2(k^2+1)x+k^2-1=0$，作图，可得当点 C 到 AB 的距离 d 等于其所在圆半径 r 时，面积最大，通过面积求得 r，进而得到 k.

【解析】如图，不妨设 $A(1,0)$，$B(-1,0)$，$C(x,y)$，

则$|AC|=k|BC|$，可化为$(x-1)^2+y^2=k^2[(x+1)^2+y^2]$，

整理可得$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2+2(k^2+1)x+k^2-1=0$，

即$(x+\frac{k^2+1}{k^2-1})^2+y^2=(\frac{k^2+1}{k^2-1})^2-1$，圆心$(-\frac{k^2+1}{k^2-1},0)$，$r^2=(\frac{k^2+1}{k^2-1})^2-1$，

由图可知当点 C 到 AB(x 轴)距离最大时，$\triangle ABC$ 的面积最大，

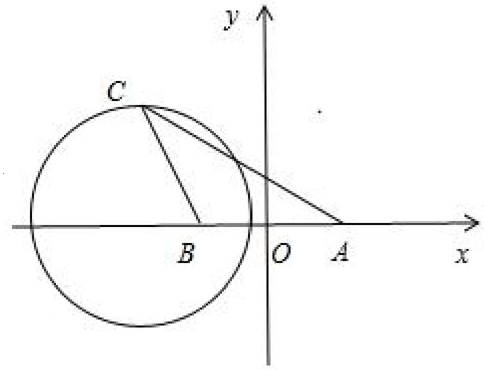
即当点 C 到 AB 的距离 d 等于半径 r 时，面积最大，

$\therefore\triangle ABC$ 面积的最大值是$\frac{1}{2}\times 2r=2\sqrt{2}$，解得 $r=2\sqrt{2}$，

故有$(\frac{k^2+1}{k^2-1})^2-1=(2\sqrt{2})^2$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$，$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $k>1$，所以 $k=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.



5.【答案】$\frac{5}{2}$

【提示】已知动点轨迹为圆，将$\frac{1}{2}PB$转化为 P 到一个定点的距离，即求动点到两个定点距离之和.

6.【答案】C

【分析】令 $2|MP|=|MQ|$，则 $2|MP|+|MB|=|MQ|+|MB|$，由啊波罗尼斯圆的定义及已知可求得点 Q 的坐标，进而利用图象得解.

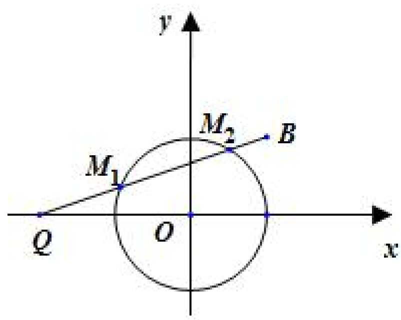
本题以啊波罗尼斯圆为背景，考查学生在陌生环境下灵活运用知识的能力，考查创新意识，逻辑推理能力及运算求解能力，考查数形结合思想，属于拔高题.

【解析】由题意可得圆$x^2+y^2=1$是关于 P，Q 的啊波罗尼斯圆，且$\lambda=2$，则$\frac{|MQ|}{|MP|}=2$，

设点 Q 的坐标为(m,n)，则$\frac{\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+y^2}}=2$，

整理得，$x^2+y^2+\frac{4+2m}{3}x+\frac{2n}{3}y+\frac{1-m^2-n^2}{3}=0$，

由已知该圆的方程为$x^2+y^2=1$，则$\begin{cases}4+2m=0\\2n=0\\\frac{1-m^2-n^2}{3}=-1\end{cases}$，



解得$\begin{cases}m=-2\\n=0\end{cases}$，

$\therefore$点 Q 的坐标为$(-2,0)$，

$\therefore 2|MP|+|MB|=|MQ|+|MB|$，

由图象可知，当点 M 位于M_1或M_2时取得最小值，且最小值为$|QB|=\sqrt{(-2-1)^2+1}=\sqrt{10}$.

故选：C.

7. 【答案】4

【解析】直线 AC 的方程为 $\frac{x}{t}+y=1$ 即 $x+ty-t=0$，设 $D(x,y)$

$\because AD\le 2BD$ 即 $AD^2\le 4BD^2$

$\therefore x^2+(y-1)^2\le 4[(x-1)^2++y^2]$

$(x-\frac{4}{3})^2+(y+\frac{1}{3})^2\ge\frac{8}{9}$ 表示圆外区域及圆周上的点

直线 $x+ty-t=0$ 与圆 $(x-\frac{4}{3})^2+(y+\frac{1}{3})^2=\frac{8}{9}$ 相离或相切

所以 $\frac{|\frac{4}{3}-\frac{1}{3}t-t|}{\sqrt{1+t^2}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{3}$，化简得 $t^2-4t+1\ge 0$

解得 $t\ge 2+\sqrt{3}$ 或 $t\le 2-\sqrt{3}$

$\therefore$ 正整数 t 的值的值为 4.

8.【答案】$\frac{\sqrt{26}}{2}$

【提示】已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 可化为：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}^2$，故 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3$，点 C 的轨迹是圆；所求 $CB+\frac{1}{2}CD$ 中含系数不同，需化一，由于 $CB+\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}(2CB+CD)$，故应构造出 $\frac{1}{2}CD$ 或 $2CB$，这里所求圆的圆心在直线 AB 上，故需在直线 AB 上寻求一点 E，使 $CE=2CB$，将 $2CB$ 化为一条线段，逆用“啊波罗尼斯圆”即可.

9.【答案】$\frac{\sqrt{26}}{2}$

【提示】为使所求具有几何意义，利用已知 $(x-1)^2+y^2=4$ 进行常数代换，

$$\frac{1}{2}\sqrt{4+2x-2y}+\sqrt{7-2y}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}+2\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right).$$

专题43 相关点法确定圆的轨迹

【方法点拨】

1. 双动点、一显一隐：已知条件中有两个动点，一个动点的轨迹明显易求，另一个隐藏极深难求.
2. 建立关联：即建立双动点的关系，最好以向量的形式出现，从而便于使用坐标形式.
3. 消显现隐：利用显动点的轨迹方程，通过代入，从而求出隐动点的轨迹方程.

【典型题示例】

例1 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A（3，4），B，C 是圆 O：$x^2+y^2=4$ 上的两动点，且 $BC=2\sqrt{3}$，若圆 O 上存在一点 P 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{OP}$（$m>0$），则正数 m 的取值范围是____________.

【答案】[4，6]

【分析】BC 是定长弦，动中取静，直接取 BC 的中点为 D，易求出点 D 的轨迹方程是 $x^2+y^2=1$，再求另一动点 P 的轨迹方程，利用 m 的几何意义求出其取值范围.

【解析】设 BC 的中点为 D，则 $OD=1$，故点 D 的轨迹方程是 $x^2+y^2=1$

∵D 为 BC 的中点

∴ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

∴ $2\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{OP}$

设 $D(x,y)$，$P(x_0,y_0)$

∴ $2(x-3,y-4)=m(x_0,y_0)$，故有 $\begin{cases}2x-6=mx\\2y-8=my_0\end{cases}$

又∵ $P(x_0,y_0)$ 在圆 O 上

∴ $x_0{}^2+y_0{}^2=4$，故有 $(x-3)^2+(y-4)^2=m^2$

这里 m 的几何意义是点 $D(x,y)$ 到点 A（3,4）的距离

又∵点 D 的轨迹方程是 $x^2+y^2=1$

∴点 $D(x,y)$ 到点 A（3,4）距离的最大值是 6，最小值是 4

∴ m 的取值范围是[4，6].

例 2　已知 AB 是圆 O：$x^2+y^2=2$ 的一条弦，且 $AB=\sqrt{6}$，M 是 AB 的中点，若动点 $P(t，t+2)$，$Q(m，-2)$，使得四边形 $PMOQ$ 为平行四边形，则实数 m 的最大值是____________.

【答案】-3

【解析】易得点 M 的轨迹方程是 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

∵四边形 $PMOQ$ 为平行四边形

∴ $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{QP}$

设 $M(x_0,y_0)$　　∴ $(x_0,y_0)=(t-m,t+4)$，

又∵ $M(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 上

∴ $(t-m)^2+(t+4)^2=\frac{1}{2}$，可看作动点 (t,t) 与动点 $(m,-4)$ 距离的平方是 $\frac{1}{2}$

∴实数 m 的最大值是 -3.

例 3　在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2+(y-1)^2=1$ 及点 $A(\sqrt{3},0)$，设点 P 圆 C 上的一动点，在△ACP 中，若∠ACP 的平分线与 AP 相交于 $Q(m，n)$，则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的取值范围是____________.

【答案】$\left[\frac{\sqrt{7}-2}{3},\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right]$

【解析】由角平分线性质定理得 $\frac{AQ}{QP}=\frac{AC}{CP}=2$　　∴ $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QP}$

设 $P(x_0,y_0)$　　∴ $(m-\sqrt{3},n)=2(x_0-m,y_0-n)$，故有 $\begin{cases}x_0=\dfrac{3m-\sqrt{3}}{2}\\y_0=\dfrac{3n}{2}\end{cases}$

又∵ $P(x_0,y_0)$ 在圆 C 上

∴ $\left(\frac{3m-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3n}{2}-1\right)^2=1$，即 $\left(m-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(n-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

故点 Q 的轨迹是以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$ 为圆心 $\frac{2}{3}$ 为半径的圆

∵ $\sqrt{m^2+n^2}$ 的几何意义是点 Q 到坐标原点的距离

∴ $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最大值、最小值分别是 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}$、$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

故 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{7}-2}{3},\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right]$.

【巩固训练】

1.若点 A 在圆 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 上运动，点 B 在 y 轴上运动，定点 $P(3,2)$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为___________.

2.在平面直角坐标系 xOy 中，已知 A，B 为圆 C：$(x+4)^2+(y-a)^2=16$ 上两个动点，且 $AB=2\sqrt{11}$．若直线 l：$y=2x$ 上存在唯一的一个点 P，使得 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}$，则实数 a 的值为_______.

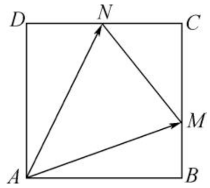
3.已知 ΔABC 是边长为 3 的等边三角形，点 P 是以 A 为圆心的单位圆上一动点，点 Q 满足 $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $|\overrightarrow{BQ}|$ 的最小值是_____________.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2,2)$，E、F 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 上的两动点，且 $EF=2\sqrt{3}$，若圆 C 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{CP},m>0$，则 m 的取值范围为________.

5.已知点 D 为圆 O：$x^2+y^2=4$ 的弦 MN 的中点，点 A 的坐标为(1，0)，且 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=1$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$ 的最小值为_____________.

6.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A,B 分别为 x 轴，y 轴上一点，且 $AB=2$，若点 $P(2,\sqrt{5})$，则 $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{OP}\right|$ 的取值范围是__________.

7.如图，在边长为 2 的正方形 ABCD 中，M，N 分别是边 BC，CD 上的两个动点，且 BM＋DN＝MN，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值是________.



8.在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l_1：$kx-y+2=0$ 与直线 l_2：$x+ky-2=0$ 相交于点 P，则当实数 k 变化时，点 P 到直线 $x-y-4=0$ 的距离的最大值为_______.

9.已知 A，B 是圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 上的动点，$AB=\sqrt{3}$，P 是圆 C_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上的动点，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的取值范围是_______.

10.设定点 $M(-3,4)$，动点 N 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，以 OM、ON 为两边作平行四边形 $MONP$，则点 P 的轨迹是_______.

【答案或提示】

1. 【答案】3

【解析】设 AB 的中点为 $Q(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(0,y_2)$

则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$，所以 $\begin{cases} x_1=2x \\ y_1=2y-y_2 \end{cases}$

∵点 A 在圆 C 上

∴ $(2x-1)^2+(2y-y_2+2)^2=4$，即 $(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{y_2}{2}+1)^2=1$

它表示以 $C'(\dfrac{1}{2},\dfrac{y_2}{2}-1)$ 为圆心，1 为半径的圆

∴ $PQ_{\min}=PC'_{\min}-1=\dfrac{3}{2}$

∵ Q 为 AB 的中点

∴ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PQ}$

故 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 3.

2.【答案】2 或-18

【解析一】设 AB 的中点为 $M(x_0，y_0)$，$P(x，y)$，

则由 $AB=2\sqrt{11}$，得 $CM=\sqrt{16-11}=\sqrt{5}$，即点 M 的轨迹为$(x_0+4)^2+(y_0-a)^2=5$.

又因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，

即$(x_0-x，y_0-y)=\left(-2，\frac{a}{2}\right)$，

从而$\begin{cases}x_0=x-2，\\ y_0=y+\frac{a}{2}，\end{cases}$ 则动点 P 的轨迹方程为$(x+2)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=5$，

又因为直线 l 上存在唯一的一个点 P，所以直线 l 和动点 P 的轨迹(圆)相切，

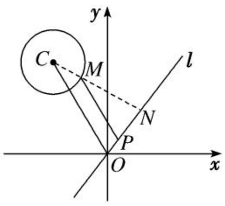
则$\frac{\left|-4-\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\sqrt{5}$，解得 $a=2$ 或 $a=-18$.

【解析二】由题意，圆心 C 到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{16-11}=\sqrt{5}$，

则 AB 中点 M 的轨迹方程为$(x+4)^2+(y-a)^2=5$.

由 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}$，得 $2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{PM}\,/\!/\,\overrightarrow{OC}$.

如图，



连结 CM 并延长交 l 于点 N，则 $CN=2CM=2\sqrt{5}$.

故问题转化为直线 l 上存在唯一的一个点 N，使得 $CN=2\sqrt{5}$，所以点 C 到直线 l 的距离为$\frac{\left|2\left(-4-\frac{a}{2}\right)\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=2\sqrt{5}$，解得 $a=2$ 或 $a=-18$.

3.【答案】$\sqrt{7}-\frac{2}{3}$

【解析】以点 A 为坐标原点，AB 为 x 轴正半轴，使得 C 落在第一象限，建立平面直角坐标系

设 $P(x_0,y_0)$，$Q(x,y)$

则由 $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 得：$\begin{cases}x=\frac{2}{3}x_0+\frac{1}{2}\\ y=\frac{2}{3}y_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，故$\begin{cases}x_0=\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\\ y_0=\frac{3}{2}y-\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

∵点 P 在单位圆上

$\therefore \left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{2}y-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=1$

即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{4}{9}$，点 Q 的轨迹是以 $D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 为圆心，$\frac{2}{3}$ 为半径的圆

又 $BD=\sqrt{7}$，所以 $|\overrightarrow{BQ}|$ 的最小值是 $\sqrt{7}-\frac{2}{3}$.

4.【答案】$\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right]$

【分析】取 EF 中点为 M，连接 AM，得到 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AM}$，由 $\boldsymbol{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{CP},m>0}$ 得到 $m=|\overrightarrow{AM}|$，再由 E、F 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 上的两动点，且 $EF=2\sqrt{3}$，得到

$|CM|=1$，设 $M(x,y)$，求出点 M 的轨迹，再由点与圆位置关系，求出 $|\overrightarrow{AM}|$ 的取值范围，即可求出结果.

【解析】取 EF 中点为 M，连接 AM，

则 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AM}$，

又圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 上存在点 P，使得 $\boldsymbol{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{CP},m>0}$，

所以 $2\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{CP}$，

因此 $2|\overrightarrow{AM}|=m|\overrightarrow{CP}|=2m$，即 $m=|\overrightarrow{AM}|$；

因为 E、F 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 上的两动点，且 $EF=2\sqrt{3}$，

所以 $|CM|=\sqrt{2^2-\left(\frac{EF}{2}\right)^2}=1$，设 $M(x,y)$，

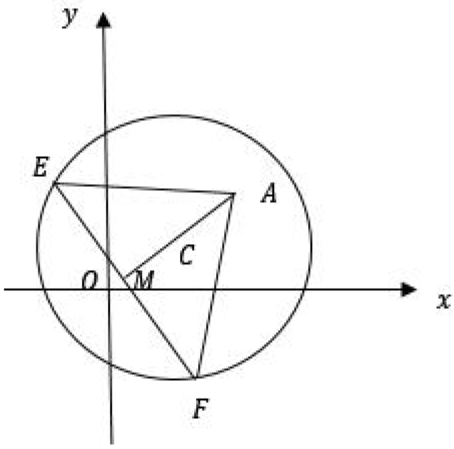
则 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=1$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 即为动点 M 的轨迹；

所以 $|\overrightarrow{AM}|$ 表示圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上的点与定点 $A(2,2)$ 之间的距离，

因此 $|AC|-1\le|\overrightarrow{AM}|\le|AC|+1$，即 $\sqrt{2}-1\le|\overrightarrow{AM}|\le\sqrt{2}+1$.

即 $\sqrt{2}-1\le m\le\sqrt{2}+1$.

故答案为：$\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right]$



5.【答案】-1

【解析】∵

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=AD^2-DM^2=AD^2-(OM^2-OD^2)=AD^2-(4-OD^2)=1$$

∴ $AD^2+OD^2=5$，

设 $D(x,y)$，则 $\left[(x-1)^2+y^2\right]+\left(x^2+y^2\right)=5$，即 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$

设 $D(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos\alpha,\frac{3}{2}\sin\alpha)$（其中 $\alpha\in R$）

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos\alpha$

所以 $[\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}]_{\min}=-1$（当 $\cos\alpha=-1$ 时，“=”成立）.

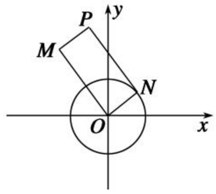
6.【答案】$[7,11]$

7.【答案】$8\sqrt{2}-8$

8.【答案】$3\sqrt{2}$

9.【答案】$[7,13]$

10.【答案】圆：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$，除去两点$\left(-\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$和$\left(-\frac{21}{5},\ \frac{28}{5}\right)$



【解析】如图所示，设 $P(x，y)$，$N(x_0，y_0)$，则线段 OP 的中点坐标为$\left(\frac{x}{2}，\frac{y}{2}\right)$，线段 MN 的中点坐标为$\left(\frac{x_0-3}{2}，\frac{y_0+4}{2}\right)$. 由于平行四边形的对角线互相平分，

故$\dfrac{x}{2}=\dfrac{x_0-3}{2}$，$\dfrac{y}{2}=\dfrac{y_0+4}{2}$．从而$\begin{cases}x_0=x+3\\y_0=y-4\end{cases}$．

$N(x+3，y-4)$在圆上，故$(x+3)^2+(y-4)^2=4$．

因此所求轨迹为圆：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$，

但应除去两点$\left(-\dfrac{9}{5}，\dfrac{12}{5}\right)$和$\left(-\dfrac{21}{5}，\dfrac{28}{5}\right)$(点 P 在直线 OM 上的情况)．

专题 44 有关圆幂定理型压轴题

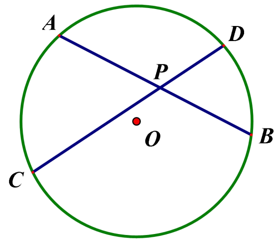
【方法点拨】

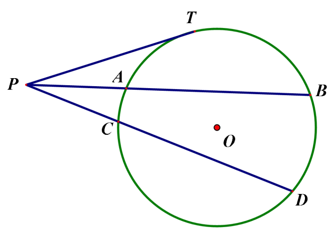
1.相交弦定理：如下左图，圆 O 的两条弦 AB、PC 相交于圆内一点 P，则 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

2. 切割线定理:如下右图，PT 为圆 O 的切线，PAB、PCD 为割线，则 $PT^2=PA\cdot PB$ ();

3.割线定理：如下右图，PAB、PCD 为圆 O 的割线，则 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

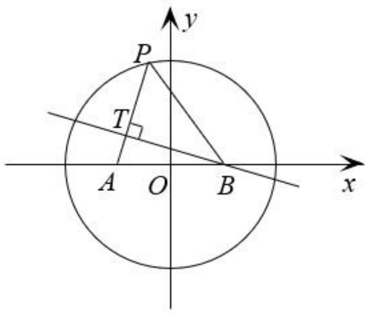
说明：上述三个定理可以统一为 $PA\cdot PB=PO^2-R^2$ (其中 R 是半径)，统称为圆幂定理.





【典型题示例】

例 1 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-1,0)$，点 P 是圆 O：$x^2+y^2=4$ 上的任意一点，过点 $B(1,0)$ 作直线 BT 垂直于 AP，垂足为 T，则 $2PA+3PT$ 的最小值是__________.



【答案】$6\sqrt{2}$

【分析】从题中已知寻求 PA、PT 间的关系是突破口，也是难点，思路一是从中线长定理入手，二是直接使用圆幂定理.

【解法一】由中线长公式可得 $PO=\frac{1}{2}\sqrt{2(PA^2+PB^2)-AB^2}$，则 $PA^2+PB^2=10$

$\cos P=\frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}$，则 $\cos P=\frac{3}{PA\cdot PB}$

在 $Rt\Delta PBT$ 中，$PT=PB\cos P$，即 $PT=\frac{3}{PA}$

所以 $2PA+3PT=2PA+\frac{9}{PA}\geq 2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$（当且仅当 $PA=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时取等）

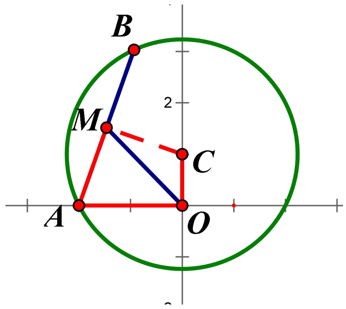
【解法二】∵$BT\perp AP$，∴点 T 的轨迹是圆，其方程是：$x^2+y^2=1$，

过点 P 作该圆的切线 PC，C 为切点，则 $PC=\sqrt{3}$，由切割线定理得：$PC^2=PA\cdot PT=3$

所以 $2PA+3PT=2PA+\frac{9}{PA}\geq 2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$（当且仅当 $PA=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时取等）.

点评：解法二中，先运用定直线张直角，得到隐圆，然后运用切割线定理得出定值，最后再使用基本不等式予以解决，思路简洁、解法明快.在有关解析几何的题目中，首先考虑相关的几何性质是解决这类问题的首选方向.

例 2　在平面直角坐标系 xOy 中，已知⊙C：$x^2+(y-1)^2=5$，A 为⊙C 与 x 负半轴的交点，过 A 作⊙C 的弦 AB，记线段 AB 的中点为 M. 若 $OA=OM$，则直线 AB 的斜率为________.



【答案】2

【分析】看到“弦的中点”想到作“弦心距”，得到 $CM\perp AB$，故 $\angle CMA+\angle AOC=180^\circ$，所以 A、O、C、M 四点共圆，AC 为直径.在该外接圆中，使用正弦定理求出 $\sin A$ 即可.

【解析】连结 C、M，则 $CM\perp AB$，

在四边形 $AOCM$ 中，$\angle CMA+\angle AOC=180^\circ$，故 A、O、C、M 四点共圆，且 AC 为直径.

$x^2+(y-1)^2=5$ 中，令 $y=0$，得 $x=\pm2$，A（-2，0），$AC=\sqrt{5}$即为△AOM 外接圆的直径，

在△AOM 中，由正弦定理得：$\frac{OM}{\sin A}=\sqrt{5}$，而 $OA=OM=2$，

所以 $\sin A=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $\tan A=2$.

故直线 AB 的斜率为 2.

例 3　在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $M(1,0)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=5$ 交于 A,B 两点，其中 A 点在第一象限，且 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，则直线 l 的方程为____________.

【答案】$y=x-1$

【分析】本题思路有下列几种：①利用向量坐标设点转化，点参法；②设直线方程的在 x 轴上的截距式，联立方程组；③垂径定理后二次解三角形；④相交弦定理；⑤利用”爪”型结构，得 $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，两边平方求得 $\angle AOB$ 的余弦值.

【解法一】：易知直线 l 的斜率必存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

由$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，设 $BM=2t$，$MA=t$.

如图，过原点 O 作 $OH\perp l$ 于点 H，则 $BH=\frac{3t}{2}$.

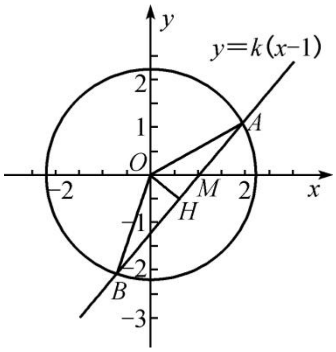
设 $OH=d$，在 Rt△OBH 中，$d^2+\left(\frac{3t}{2}\right)^2=r^2=5$.

在 Rt△OMH 中，$d^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=OM^2=1$，解得 $d^2=\frac{1}{2}$，

则 $d^2=\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{1}{2}$，解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

因为点 A 在第一象限，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，由图知 $k=1$，

所以所求的直线 l 的方程为 $y=x-1$.



【解法二】由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，设 $BM=2t$，$MA=t$

又过点 M 的直径被 M 分成两段长为 $\sqrt{5}-1$、$\sqrt{5}+1$

由相交弦定理得 $2t^2=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$，解之得 $t=\sqrt{2}$

过原点 O 作 $OH\perp l$ 于点 H，

在 Rt△OBH 中，$d^2+\left(\frac{3t}{2}\right)^2=r^2=5$，解得 $d^2=\frac{1}{2}$，（下同解法一，略）.

【解法三】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{BM}=(1-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-1,y_1)$.

因为 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以 $\begin{cases}1-x_2=2(x_1-1),\\ -y_2=2y_1.\end{cases}$

当直线 AB 的斜率不存在时，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$，不符合题意.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2+y^2=5, \end{cases}$ 得 $(1+k^2)y^2+2ky-4k^2=0$，则 $\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-2k}{1+k^2}, \\ y_1\cdot y_2=\dfrac{-4k^2}{1+k^2}, \\ -y_2=2y_1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} y_1=\dfrac{2k}{1+k^2}, \\ y_2=\dfrac{-4k}{1+k^2}, \end{cases}$ 所以 $y_1\cdot y_2=\dfrac{-8k^2}{(1+k^2)^2}=\dfrac{-4k^2}{1+k^2}$，即 $k^2=1$.又点 A 在第一象限，

所以 $k=1$，即直线 AB 的方程为 $y=x-1$.

【解法四】设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $\overrightarrow{BM}=(1-x_2，-y_2)$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-1，y_1)$.

因为 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以 $\begin{cases} 1-x_2=2(x_1-1), \\ -y_2=2y_1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x_2=2x_1-3, \\ -y_2=2y_1. \end{cases}$

又 $\begin{cases} x_1^2+y_1^2=5, \\ x_2^2+y_2^2=5, \end{cases}$ 代入可得 $\begin{cases} x_1^2+y_1^2=5, \\ (2x_1-3)^2+4y_1^2=5, \end{cases}$ 解得 $x_1=2$，代入可得 $y_1=\pm1$.又点 A 在第一象限，故 $A(2,1)$，由点 A 和点 M 的坐标可得直线 AB 的方程为 $y=x-1$.

点评：

上述各种解法中，以解法一、解法二最简、最优.

【巩固训练】

1. 在平面直角坐标系 xoy 中，M 是直线 $x=3$ 上的动点，以 M 为圆心的圆 M，若圆 M 截 x 轴所得的弦长恒为 4，过点 O 作圆 M 的一条切线，切点为 P，则点 P 到直线 $2x+y-10=0$ 距离的最大值为________.

2.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C：$(x-m)^2+y^2=r^2$ (m＞0)．已知过原点 O 且相互垂直的两条直线 l_1 和 l_2，其中 l_1 与圆 C 相交于 A，B 两点，l_2 与圆 C 相切于点 D．若 AB＝OD，则直线 l_1 的斜率为_______.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，设直线 $y=-x+2$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 交于 A、B 两点，O 为坐标原点，若圆上一点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，则 $r=$__________.

4.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(0,1)$ 在圆 C：$x^2+y^2+2mx-2y+m^2-4m+1=0$ 内，

若存在过点 P 的直线交圆 C 于 A、B 两点，且△PBC 的面积是△PAC 的面积的 2 倍，则实数 m 的取值范围为______________.

5.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C:(x+2)^2+(y-m)^2=3$．若圆 C 存在以 G 为中点的弦 AB，且 $AB=2GO$，则实数 m 的取值范围是____________.

6.已知直线 $y=ax+3$ 与圆 $x^2+y^2+2x-8=0$ 相交于 A,B 两点，点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在直线 $y=2x$ 上且 $PA=PB$，则 x_0 的取值范围为____________.

【答案与提示】

1.【答案】 $3\sqrt{5}$

2.【答案】 $\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析一】作 $CE\perp AB$ 于点 E，则 $CE^2=BC^2-BE^2=BC^2-\dfrac{1}{4}AB^2=BC^2-\dfrac{1}{4}OD^2$

$$=r^2-\frac{1}{4}(m^2-r^2)=\frac{5r^2-m^2}{4},$$

由 OECD 是矩形，知 CE²＝OD²，∴ $\dfrac{5r^2-m^2}{4}=m^2-r^2$，化简得 $\dfrac{r}{m}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

即 $\cos\angle OCD=\dfrac{CD}{OC}=\dfrac{r}{m}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\angle COB=\tan\angle OCD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴直线 l_1 的斜率为 $\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

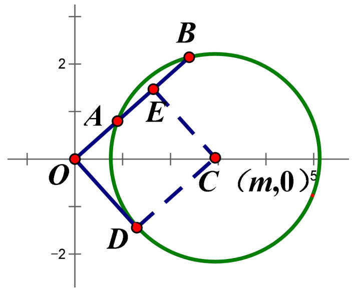
【解析二】作 $CE\perp AB$ 于点 E，则 $OECD$ 是矩形

设 $OD=t(t>0)$，则由切割线定理 $OD^2=OA\times OB$ 得 $t^2=(r-\dfrac{t}{2})(r+\dfrac{t}{2})$，即 $r^2=\dfrac{5}{4}t^2$（※）

又 $m^2=t^2+r^2$，将（※）代人得 $m^2=\dfrac{9}{4}r^2$，即 $\dfrac{r}{m}=\dfrac{2}{3}$

$Rt\Delta COE$， $\sin\angle COE=\frac{r}{m}=\frac{2}{3}$

∴直线 l_1 的斜率为 $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



3.【答案】: $\sqrt{10}$

【解法一】遇线性表示想求模，将向量问题实数化.

$$\overrightarrow{OC}^2=\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)^2=\frac{25}{16}\overrightarrow{OA}^2+2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{9}{16}\overrightarrow{OB}^2,$$

即 $r^2=\frac{25}{16}r^2+\frac{15}{8}r^2\cos\angle AOB+\frac{9}{16}r^2$，整理化简得 $\cos\angle AOB=-\frac{3}{5}$.

过点 O 作 AB 的垂线交 AB 于 D，

则 $\cos\angle AOB=2\cos^2\angle AOD-1=-\frac{3}{5}$，得 $\cos^2\angle AOD=\frac{1}{5}$.

又圆心到直线的距离 $OD=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $\cos^2\angle AOD=\frac{1}{5}=\frac{OD^2}{r^2}=\frac{2}{r^2}$， $r=\sqrt{10}$.

【解法二】注意到线性表示时的系数和为 2，联想“三点共线”.

由 $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，即 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

得 A、B、D 三点共线（其中 D 是 AB 的中点），且 $AD:BD=3:5$，

设 $AD=3x$， $BD=5x$

思路一：垂径定理后二次解三角形，$\begin{cases}\left(\frac{r}{2}\right)^2=x^2+\sqrt{2}^2\\ r^2=(4x)^2+\sqrt{2}^2\end{cases}$，解之得 $r=\sqrt{10}$.

思路二：相交弦定理，$\begin{cases}3x\cdot 5x=\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{3r}{2}\\ r^2=(4x)^2+\sqrt{2}^2\end{cases}$，解之得 $r=\sqrt{10}$．

4.【答案】$\left[\dfrac{4}{9},4\right)$

5.【答案】 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

【提示】易知 $OA\perp OB$，考察临界状态，只需过原点作圆的切线，切点弦的张角大于等于直角即可.

6.【答案】 $(-1,0)\cup(0,2)$

专题 45 利用方程同解求圆的方程

【方法点拨】

当圆与另一曲线（如抛物线）有两个公共点求圆的方程时，可考虑将曲线方程分别与直线方程联立消元，根据函数与方程的关系，则两方程同解，故可利用系数成比例求解圆的方程.

【典型题示例】

例 1 （多选题）已知二次函数 $y=x^2-2x+m\,(m\neq 0)$ 交 x 轴于 A，B 两点（A，B 不重合），交 y 轴于 C 点.圆 M 过 A，B，C 三点.下列说法正确的是（　　）

①圆心 M 在直线 $x=1$ 上；　　②m 的取值范围是 $(0,1)$；

③圆 M 半径的最小值为 1；　　④存在定点 N，使得圆 M 恒过点 N.

A．①　　B．②　　C．③　　D．④

【答案】AD

【解析】①因为二次函数 $y=x^2-2x+m\,(m\neq 0)$ 的对称轴是 $x=1$，且 A，B 两点关于

$x=1$对称，所以圆心M在直线$x=1$上，故正确；

②因为二次函数$y=x^2-2x+m(m\neq 0)$交x轴于A，B两点，所以$\Delta=4-4m>0$ 解得

$m<1$且$m\neq 0$，故错误；

③设圆M的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，（#）

令$y=0$，则$x^2+Dx+F=0$

则x_A,x_B为方程$x^2+Dx+F=0$的两个根

$\because$ $y=x^2-2x+m(m\neq 0)$与x轴交于A，B两点

$\therefore$ x_A,x_B为方程$x^2-2x+m=0$的两个根

故方程$x^2+Dx+F=0$与方程$y=x^2-2x+m(m\neq 0)$的根相同

$\therefore$ $D=-2$，$F=m$，代入（#）$x^2+y^2-2x+Ey+m=0$

又$\because$ $C(0,m)$在圆上

$\therefore$ $m^2+mE+m=0$，解得$E=-m-1$

所以所求圆的方程为$x^2+y^2-2x-(m+1)y+m=0$.

即$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{m+1}{2}\right)^2=\dfrac{m^2-2m+5}{4}$

故$r^2=\dfrac{m^2-2m+5}{4}=\dfrac{(m-1)^2+4}{4}$，因为$m<1$且$m\neq 0$，所以$r>1$，故错误；

④圆M的方程为$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{m+1}{2}\right)^2=\dfrac{(m-1)^2+4}{4}$，即

$x^2-2x+y^2-y-m(y-1)=0$，则圆M恒过定点$N(0,1)$，故正确；故选：AD.

例 2　（多选题）在平面直角坐标系xOy中，设二次函数$f(x)=x^2(x\in R)$的图象与直线$l:y=x+m(m\neq 0)$有两个不同的交点A,B，经过A,B,O三点的圆记为圆C.下列结论正确的是（　　）

A. $m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq 0$

B. 当 $m=\log_2 3$ 时，$\angle AOB$ 为钝角

C. 圆 C：$x^2+y^2-mx-(2+m)y=0$（$m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq 0$）

D. 圆 C 过定点 $(-1,1)$

【解析】对于 A，联立 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+m \end{cases}$，消 y 可得 $x^2-x-m=0$，

二次函数与直线有两个交点，则 $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-m)>0$，

解得 $m>-\frac{1}{4}$，又 $m\neq 0$，故 A 正确；

对于 B，联立消 y 可得 $x^2-x-m=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=-m$，

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(x_1+m)(x_2+m)=2x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2=m^2-m$

当 $m=\log_2 3$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\log_2 3(\log_2 3-1)>0$，

所以 $\angle AOB$ 为锐角，故 B 错误；

对于 C，设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$（因为圆 C 过 O，故 $F=0$），

由 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+m \end{cases}$，消 y 可得 $x^2-x-m=0$，故 x_A,x_B 为方程 $x^2-x-m=0$ 的两个根

由 $\begin{cases} x^2+y^2+Dx+Ey=0 \\ y=x+m \end{cases}$，消 y 可得 $x^2+(x+m)^2+Dx+E(x+m)=0$

即 $2x^2+(2m+D+E)x+(m^2+mE)=0$

故 x_A,x_B 为方程 $2x^2+(2m+D+E)x+(m^2+mE)=0$ 的两个根

所以 $2x^2+(2m+D+E)x+(m^2+mE)=0$ 与 $x^2-x-m=0$ 为同一方程

故有 $\begin{cases} 2m+D+E=-2 \\ m^2+mE=-2m \end{cases}$，解得 $\begin{cases} D=-m \\ E=-m-2 \end{cases}$

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-mx-(2+m)y=0$（$m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq0$，故 C 正确；

对于 D，由 C：$x^2+y^2-mx-(2+m)y=0$（$m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq0$），

整理可得 $x^2+y^2-m(x+y)-2y=0$，方程过定点

则 $\begin{cases}x+y=0\\x^2+y^2-2y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，所以圆 C 过定点 $(-1,1)$，故 D 正确；

故选：ACD.

【巩固训练】

1.在平面直角坐标系中，经过三点 $(0,0),(1,1)(2,0)$ 的圆的方程为__________.

2.在平面直角坐标系 xOy 中，记二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$（$x\in\mathbf{R}$）与两坐标轴有三个交点．经过三个交点的圆记为 C，则圆 C 经过定点________（其坐标与 b 的无关）．

3.已知圆 C 过点 $A(4,2)$，$B(1,3)$，它与 x 轴的交点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，与 y 轴的交点为 $(0,y_1)$，$(0,y_2)$，且 $x_1+x_2+y_1+y_2=6$，则圆 C 的标准方程为______________.

4. 已知曲线 $y=x^2+x-2020$ 与 x 轴交于 M,N 两点，与 y 轴交于 $P(0,-2020)$ 点，则过 M,N,P 外接圆的方程为（　　）

A．$x^2+y^2+x-2019y-2020=0$　　　*B*．$x^2+y^2+x-2021y-2020=0$

C．$x^2+y^2+x+2019y-2020=0$　　　*D*．$x^2+y^2+x+2021y-2020=0$

【答案或提示】

1.【答案】$x^2+y^2-2x=0$

【解析】设所求圆的一般式方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

令 $y=0$，得 $x^2+Dx+F=0$，

则 0,2 是方程 $x^2+Dx+F=0$ 的两个根，所以 $\begin{cases}0+2=-D\\0\times2=F\end{cases}$，$\begin{cases}D=-2\\F=0\end{cases}$

所以圆的一般方程为 $x^2+y^2-2x+F=0$

将 $(0,0)$ 代入，得 $F=0$，所以圆的一般方程为 $x^2+y^2-2x=0$.

2.【答案】$(0,1),(-2,0)$

【解析】设所求圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

令 y =0 得 $x^2+Dx+F=0$ 这与 $x^2+2x+b=0$ 是同一个方程，故 D=2，F=b .

令 x =0 得 $y^2+Ey=0$，此方程有一个根为 b，代入得出 E=—b—1.

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2+2x-(b+1)y+b=0$.

分离参数得：$x^2+y^2+2x-y+b(1-y)=0$　（*）

令 x =0，得抛物线与 y 轴交点是（0，b）；

令 $f(x)=x^2+2x+b=0$，由题意 b≠0 且 Δ >0，解得 b<1 且 b≠0.

为使（*）式对所有满足 $b<1(b\neq0)$ 的 b 都成立，必须有，结合（*）式得

$\begin{cases}x^2+y^2+2x-y=0\\1-y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$

经检验知，点 $(0,1),(-2,0)$ 均在圆 C 上，因此圆 C 过定点.

3.【答案】$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

【解析】设圆 C 的一般式方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

令 $y=0$，得 $x^2+Dx+F=0$，所以 $x_1+x_2=-D$，

令 $x=0$，得 $y^2+Ey+F=0$，所以 $y_1+y_2=-E$，

所以有 $x_1+x_2+y_1+y_2=-(D+E)=6$，所以 $D+E=-6$，①

又圆 C 过点 $A(4,2)$，$B(1,3)$，所以 $4^2+2^2+4D+2E+F=0$，②

$1^2+3^2+D+3E+F=0$，③，

由①②③得 $D=-4$， $E=-2$， $F=0$，

所以圆 C 的一般式方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$，标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

4. 【答案】A

【解析】设 $\triangle MNP$ 外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$， （#）

令 $y=0$，则 $x^2+Dx+F=0$

则 x_M,x_N 为方程 $x^2+Dx+F=0$ 的两个根

∵ $y=x^2+x-2020$ 与 x 轴交于 M,N 两点

∴ x_M,x_N 为方程 $x^2+x-2020=0$ 的两个根

故方程 $x^2+Dx+F=0$ 与方程 $x^2+x-2020=0$ 的根相同

∴ $D=1$， $F=-2020$，代入（#） $x^2+y^2+x+Ey-2020=0$

又∵ $P(0,-2020)$ 在圆上

∴ $(-2020)^2-2020E-2020=0$，解得 $E=2019$

所以所求圆的方程为 $x^2+y^2+x-2019y-2020=0$.

专题 46 圆的切线系、圆系的综合应用

【方法点拨】

1.直线方程 $(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r$ (其中 a,b,r 均为实常数，且 $r>0$， $\theta\in R$) 的几何意义是，以 $\left(a,b\right)$ 为圆心 r 为半径圆的切线系.

事实上，为"动中寻静"使所求值与 θ 无关，只需求点 $\left(a,b\right)$ 到直线的距离 d，有 $d=\dfrac{|(a-a)\cos\theta+(b-b)\sin\theta-r|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=r$，即直线是圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 全体切线组成

的集合，它可以看作过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上任意一点 $\left(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta\right)$ 的切线.

2.当圆心坐标含参时，应考虑消参，探求圆心的轨迹.

【典型题示例】

例 1 已知圆 $M:(x-1-\cos\theta)^2+(y-2-\sin\theta)^2=1$，直线 $l:kx-y-k+2=0$，下面五个命题，其中正确的是

A．对任意实数 k 与 θ，直线 l 和圆 M 有公共点 ；

B．对任意实数 k 与 θ，直线 l 与圆 M 都相离；

C．存在实数 k 与 θ，直线 l 和圆 M 相离；

D．对任意实数 k，必存在实数 θ，使得直线 l 与圆 M 相切；

E．对任意实数 θ，必存在实数 k，使得直线 l 与圆 M 相切.

【答案】AD

【分析】对于圆 M 动圆心，定半径 $r=1$，圆心为 $M(1+\cos\theta,2+\sin\theta)$，故其轨迹是以（1,2）为圆心，半径 $r=1$ 的圆. 直线 $l:kx-y-k+2=0$ 过定点（1,2）.

【解析】AB 选项，由题意知圆 M 的圆心为 $M(1+\cos\theta,2+\sin\theta)$，半径为 $r=1$，直线 l 的方程可以写作 $y=k(x-1)+2$，过定点 $A(1,2)$，因为点 A 在圆上，所以直线 l 与圆相切或相交，任意实数 k 与 θ，直线 l 和圆 M 有公共点， A 正确， B 错误；

C 选项，由以上分析知不存在实数 k 与 θ，直线 l 和圆 M 相离， C 错误；

D 选项，当直线 l 与圆 M 相切时，点 A 恰好为直线 l 与圆 M 的切点，故直线 AM 与直线 l 垂直，①当 $k=0$ 时，直线 AM 与 x 轴垂直，则 $1+\cos\theta=1$，即 $\cos\theta=0$，解得 $\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，存在 θ，使得直线 l 与圆 M 相切；

②当 $k\neq0$ 时，若直线 AM 与直线 l 垂直，则 $\cos\theta\neq0$，

直线 AM 的斜率为 $K_{AM}=\dfrac{2+\sin\theta-2}{1+\cos\theta-1}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$，

所以 $k_{AM}\cdot k=-1$，即 $\tan\theta=-\dfrac{1}{k}$，

此时对任意的 $k\neq0$，均存在实数，使得 $\tan\theta=-\dfrac{1}{k}$，则直线 AM 与直线 l 垂直，

综上所述，对任意实数 k，必存在实数 θ，使得直线 l 与圆 M 相切，D 正确.

E 选项，点 $M(1+\cos\theta, 2+\sin\theta)$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|k\cos\theta-\sin\theta|}{\sqrt{k^2+1}}$，

令 $\theta=0$，当 $k=0$ 时，$d=0$；

当 $k\neq0$ 时，$d=\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，即此时 $d<1$ 恒成立，

直线 l 与圆 M 必相交，故此时不存在实数 k，使得直线 l 与圆 M 相切，E 错误.

故选 AD.

例 2　设直线系 $M: x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta<2\pi)$. 下列四个命题中正确的是（　）

A．存在一个圆与所有直线相交；

B．存在一个圆与所有直线不相交；

C．存在一个圆与所有直线相切；

D．M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

【答案】ABC

【解析】因为 $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$

所以点 $P(0,2)$ 到 M 中每条直线的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$ 即 M 为圆

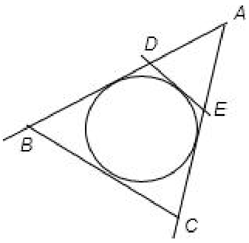
$C: x^2+(y-2)^2=1$ 的全体切线组成的集合，所以存在圆心在 $(0,2)$，半径大于 1 的圆与 M 中所有直线相交, A 正确

也存在圆心在 $(0,2)$，半径小于 1 的圆与 M 中所有直线均不相交，B 正确

也存在圆心在 $(0,2)$ 半径等于 1 的圆与 M 中所有直线相切，C 正确

故 ABC 正确

因为 M 中的直线与以 $(0,2)$ 为圆心，半径为 1 的圆相切,所以 M 中的直线所能围成的正三角形面积不都相等，如图 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 均为等边三角形而面积不等,



故 D 错误，答案选 ABC.

例 3　（多选题）设有一组圆 C_k：$(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4,(k\in N^*)$. 下命题中真命题是（　　　　）.

A.存在一条定直线与所有的圆均相切；　　B.存在一条定直线与所有的圆均相交；

C.存在一条定直线与所有的圆均不相交；　　D.所有的圆均不经过原点.

【答案】BD

【解析】根据题意得：圆心坐标为（$k-1,3k$），

圆心在直线 $y=3(x+1)$ 上，故存在直线 $y=3(x+1)$ 与所有圆都相交，选项②正确；

考虑两圆的位置关系：

圆 k：圆心 $(k-1,3k)$，半径为 $\sqrt{2}k^2$，

圆 $k+1$：圆心 $(k-1+1,3(k+1))$，即 $(k,3k+3)$，半径为 $\sqrt{2}(k+1)^2$，

两圆的圆心距 $d=\sqrt{(k-k+1)^2+(3k-3k-3)^2}=\sqrt{10}$，

两圆的半径之差 $R-r=\sqrt{2}(k+1)^2-\sqrt{2}k^2=2\sqrt{2}k+\sqrt{2}$，

任取 $k=1$ 或 2 时，（$R-r>d$），C_k 含于 C_{k+1} 之中，选项①错误；

若 k 取无穷大，则可以认为所有直线都与圆相交，选项③错误，

将 $(0,0)$ 带入圆的方程,则有 $(-k+1)^2+9k^2=2k^4$，即 $10k^2-2k+1=2k^4$（$k\in\mathbf{N}^*$），

因为左边为奇数，右边为偶数，故不存在 k 使上式成立，即所有圆不过原点，选项④正确。

故答案为：BD.

【巩固训练】

1.已知动直线$l: x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$与圆$C_1: x^2+y^2=2$相交于$A$，$B$两点，圆$C_2: x^2+y^2=1$.下列说法：①$l$与$C_2$有且只有一个公共点；②线段$AB$的长度为定值；③线段$AB$的中点轨迹为$C_2$.其中正确的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2.（多选题）设直线系$M: x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1\,(0\le\theta\le 2\pi)$,对于下列四个命题：

A． M 中所有直线均经过一个定点；

B．存在定点P不在M 中的任一条直线上；

C．对于任意整数$n(n\ge 3)$，存在正n边形,其所有边均在M 中的直线上；

D． M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

其中真命题是（　　）

3.（多选题）关于下列命题，正确的是（　　）

A．若点$(2,1)$在圆$x^2+y^2+kx+2y+k^2-15=0$外，则$k>2$或$k<-4$；

B．已知圆M：$(x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$与直线$y=kx$，对于任意的$\theta\in R$，总存在$k\in \mathbf{R}$使直线与圆恒相切；

C．已知圆M：$\left(x+\cos\theta\right)^2+\left(y-\sin\theta\right)^2=1$与直线$y=kx$，对于任意的$k\in\mathbf{R}$，总存在$\theta\in R$使直线与圆恒相切；

D．已知点$P\left(x,y\right)$是直线$2x+y+4=0$上一动点，PA、PB是圆C：$x^2+y^2-2y=1$的两条切线，A、B是切点，则四边形$PACB$的面积的最小值为$\sqrt{6}$.

4.（多选题）圆$C_1: (x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2=1$与圆$C_2: x^2+y^2=1$，下列说法正确的是（　　）

A．对于任意的θ，圆C_1与圆C_2始终相切；

B．对于任意的θ，圆C_1与圆C_2始终有四条公切线；

C．当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，圆C_1被直线$l:\sqrt{3}x-y-1=0$截得的弦长为$\sqrt{3}$；

D．P，Q分别为圆C_1与圆C_2上的动点，则$|PQ|$的最大值为4.

5.（多选题）设有一组圆$C_k:(x-k)^2+(y-k)^2=4(k\in R)$，下列命题正确的是（　　）.

A．不论k如何变化，圆心C始终在一条直线上；

B．所有圆C_k均不经过点$(3,0)$；

C．经过点$(2,2)$的圆C_k有且只有一个；

D．所有圆的面积均为4π.

6．已知圆O：$x^2+y^2=5$，直线l：$x\cos\theta+y\sin\theta=1$（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）.设圆$O$上到直线$l$的距离等于1的点的个数为$k$，则$k=$________.

7．当θ取遍所有值时，直线$x\cos\theta+y\sin\theta=4+\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$所围成的图形面积为__________.

8．已知$a\cos\theta+a^2\sin\theta-2=0$，$b\cos\theta+b^2\sin\theta-2=0$（$a\neq b$），对任意$a,b\in R$，经过两点$(a,a^2)$、$(b,b^2)$的直线与一定圆相切，则该圆的方程为____________.

9．在直角坐标系xOy中，已知直线$l:x\cdot\cos\theta+y\cdot\sin\theta=1$，当$\theta$变化时，动直线始终没有经过点$P$．定点$Q$的坐标$(-2,0)$，则$|PQ|$的取值范围为（　　）.

A. $[0,2]$　　B. $(0,2)$　　C. $[1,3]$　　D. $(1,3)$

【答案或提示】

1.【答案】D

【分析】求出圆心到直线的距离后结合两圆的半径可判断各项的正误，从而可得正确的选项.

【解析】原点到直线l的距离$d=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=1$，

因为圆 C_2 的半径为 1 且原点为其圆心，∴直线 l 与圆 C_2 相切，故①正确；

原点为圆 C_1 的圆心，故 $|AB|=2\sqrt{2-1}=2$，∴线段 AB 的长度为定值，故②正确；

设 AB 的中点为 M，则 $|OM|=d=1$，故线段 AB 的中点轨迹为 C_2，故③正确.

故选：D.

2.【答案】BC

【解析】因为 $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$ 所以点 $P(0,2)$ 到 M 中每条直线的距离

$$d=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$$

即 M 为圆 $C:x^2+(y-2)^2=1$ 的全体切线组成的集合,从而 M 中存在两条平行直线,所以 A 错误

又因为 $(0,2)$ 点不存在任何直线上,所以 B 正确

对任意 $n\geq 3$,存在正 n 边形使其内切圆为圆 C,故 C 正确

M 中边能组成两个大小不同的正三角形 ABC 和 AEF,故 D 错误,

故命题中正确的序号是 B,C.

3.【答案】ACD

【解析】$x^2+y^2+kx+2y+k^2-15=0$ 的圆心 $\left(-\frac{k}{2},-1\right)$，半径 $\frac{1}{2}\sqrt{64-3k^2}$，则

$\sqrt{\left(2+\frac{k}{2}\right)^2+(1+1)^2}>\frac{1}{2}\sqrt{64-3k^2}$，所以 $k>2$ 或 $k<-4$，故 A 正确；

已知圆 M：$(x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$ 的圆心 $(-\cos\theta,\sin\theta)$，半径 1，

圆心 M 到直线 $y=kx$ 的距离 $d=\left|\frac{k\cos\theta+\sin\theta}{\sqrt{1+k^2}}\right|=\left|\frac{k\cos\theta}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+k^2}}\right|$,

当 $\sin\theta=0$ 时 $\cos\theta=\pm1, d=|\frac{k\cos\theta}{\sqrt{1+k^2}}|\leq|\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}|<1$，即此时不存在 $k\in\mathbf{R}$ 使直线与圆相切，因此 B 错误；

对于任意的$k\in\mathbf{R}$，令$\cos\theta=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}},\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，则$d=1$，即对于任意的$k\in\mathbf{R}$，

总存在$\theta\in R$使直线与圆相切，故 C 正确.

$C(0,1)$，半径$r=\sqrt{2}$，圆心$C(0,1)$到直线$2x+y+4=0$的距离$d=\dfrac{5}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，即

$|PC|$的最小值$\sqrt{5}$，由$|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}$，所以$(|PA|)_{\min}=\sqrt{3}$，

四边形$PACB$的面积最小值$2\left(S_{\mathrm{Rt}\triangle PAC}\right)_{\min}=2\times\dfrac{1}{2}\times(|PA|)_{\min}\times r=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$，

故 D 正确.故选：ACD.

4. 【答案】ACD

【分析】动圆圆心为$C_1(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2=4$，故其轨迹是以（0,0）为圆心，2 为半径的圆，结合形，求出圆心距，判断两圆位置关系可判断 AB，求出圆心C_1到直线的距离，由勾股定理求得弦长判断 C，由两圆心距离可判断 D.

【解析】由已知$C_1(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$C_2(0,0)$，$|C_1C_2|=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=2$等于两圆半径之和，两圆始终相切，A 正确，B 错误；

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$C_1(\sqrt{3},1)$，C_1到已知直线l的距离为$d=\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1-1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$，则弦长为

$2\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，C 正确；

由于$|C_1C_2|=2$，$\therefore|PQ|_{\max}=|C_1C_2|+1+1=4$，$P,C_1,C_2,Q$共线时最大值．D 正确．

故选：ACD．

5. 【答案】ABD

【解析】圆心坐标为(k,k)，在直线$y=x$上，A 正确；

令$(3-k)^2+(0-k)^2=4$，化简得$2k^2-6k+5=0$，

$\because\Delta=36-40=-4<0$，$\therefore 2k^2-6k+5=0$，无实数根，$\therefore$B 正确；

由$(2-k)^2+(2-k)^2=4$，化简得$k^2-4k+2=0$，

$\because \Delta=16-8=8>0$，有两不等实根，$\therefore$经过点$(2,2)$的圆C_k有两个，C错误；

由圆的半径为2，得圆的面积为4π，D正确．故选：ABD．

6. 【答案】4

【解析】圆心O到直线l的距离为$d=1$，所以圆的半径$r=\sqrt{5}$，且$r-d=\sqrt{5}-1>1$，所以圆O上在直线l的两侧各有两个点到直线l的距离等于1.

7.【答案】16π

【解析】直线$x\cos\theta+y\sin\theta=4+\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$方程可化为

$(\cos\theta-1)x+(\sin\theta-1)y=4$

故点（1,1）到该直线的距离$d=\frac{\left|\cos\theta+\sin\theta-4-\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\right|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=4$

∴直线是与以点（1,1）为圆心，4为半径的圆相切的直线系

故直线所围成的图形面积为16π.

8.【答案】$x^2+y^2=4$

【解析】$\because a\cos\theta+a^2\sin\theta-2=0$，$b\cos\theta+b^2\sin\theta-2=0$

$\therefore (a,a^2)$、(b,b^2)都在直线$\cos\theta x+\sin\theta y-2=0$，

故经过两点(a,a^2)、(b,b^2)的直线是$\cos\theta x+\sin\theta y-2=0$

∴点（0,0）到该直线的距离$d=\frac{|2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2$

故所求圆的方程为$x^2+y^2=4$.

9.【答案】D

【分析】根据原点到直线l的距离为1，结合题意可得点P在单位圆内，即可求解.

【解析】因为原点到直线l的距离为$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$，

所以动直线 l 所围成的图形为单位圆，

又动直线始终没有经过点 P，所以点 P 在该单位圆内，

$\because |OQ|=2$，$\therefore |OQ|-1<|PQ|<|OQ|+1$，

即 $|PQ|$ 的取值范围为 $(1,3)$.

故选：D.

专题 47 抛物线过焦点的弦

【方法点拨】

设 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的弦，若 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，α 为弦 AB 的倾斜角，则：

(1) $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$.

(2) $|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$（其中点 A 在 x 轴上侧，点 B 在 x 轴下侧）.

(3) 弦长 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$.

(4) $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$.

(5) 以弦 AB 为直径的圆与准线相切.

【典型题示例】

例 1 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到其准线的距离为 4，圆 $M:(x-2)^2+y^2=1$，过 F 的直线 l 与抛物线 C 和圆 M 从上到下依次交于 A，P，Q，B 四点，则 $|AP|+4|BQ|$ 的最小值为________.

【答案】13

【分析】易知 $p=4$，圆心 $M(2,0)$ 即为焦点 F，故 $AP+4BQ=AF+4BF-5$，再利用抛物线的定义，进一步转化为 $AP+4BQ=x_A+4x_B+5$，利用 $x_Ax_B=4$、基本不等式即可.

【解析】易知 $p=4$，圆心 $M(2,0)$ 即为焦点 F

所以 $AP+4BQ=(AF-1)+4(BF-1)=AF+4BF-5$

根据抛物线的定义 $AF=x_A+\frac{p}{2}=x_A+2$，$BF=x_B+\frac{p}{2}=x_B+2$

所以 $AP+4BQ=(x_A+2)+4(x_B+2)-5=x_A+4x_B+5$

又 $x_Ax_B=\frac{p^2}{4}=4$

所以 $AP+4BQ=x_A+4x_B+5\geq 2\sqrt{x_A\cdot 4x_B}+5=13$，当且仅当 $x_A=4x_B$，即 $\begin{cases}x_A=4\\x_B=1\end{cases}$ 时等号成立，此时直线 l 的方程是 $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$

所以 $|AP|+4|BQ|$ 的最小值为 13.

例 2　已知斜率为 k 的直线 l 过抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，且与抛物线 C 交于 A，B 两点，抛物线 C 的准线上一点 $M(-1,-1)$ 满足 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 $|AB|=$　（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．5　　D．6

【答案】C

【分析】将 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 直接代入坐标形式，列出关于 A，B 中点坐标的方程，再利用斜率布列一方程，得到关于 A，B 中点坐标的方程组即可.这里需要说明的是，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 转化的方法较多，如利用斜边中线等于斜边一半等，但均不如上法简单.

【解析】易知 $p=2$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=1$，$y_1y_2=-4$，$\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1+1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2+1)$

∵ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

∴ $(x_1+1)(x_2+1)+(y_1+1)(y_2+1)=0$，化简得 $x_1+x_2+y_1+y_2=1$

设 A、B 中点坐标为（x_0，y_0），则 $x_0+y_0=\frac{1}{2}$　　①

又由直线的斜率公式得 $k=k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1{}^2}{4}-\dfrac{y_2{}^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{y_0}$， $k=\dfrac{y_0}{x_0-1}$

$\therefore \dfrac{2}{y_0}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，即 $y_0{}^2=2(x_0-1)$　　②

由①、②解得 $x_0=\dfrac{3}{2}$

$\therefore |AB|=x_1+x_2+p=2x_0+p=5$，答案选 C.

点评：

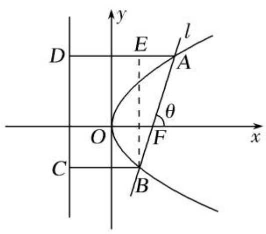
本题的命题的原点是阿基米德三角形，即从圆锥曲线准线上一点向圆锥曲线引切线，则两个切点与该点所构成的三角形是以该点为直角顶点的直角三角形.以此为切入点解决此题，方法则更简洁.

例 3　过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，若 $|AF|=2|BF|$，则 $|AB|$ 等于(　　)

A.4　　B.$\dfrac{9}{2}$　　C.5　　D.6

【答案】B

【解析】　由对称性不妨设点 A 在 x 轴的上方，如图设 A，B 在准线上的射影分别为 D，C，作 $BE\perp AD$ 于 E，



设 $|BF|=m$，直线 l 的倾斜角为 θ，则 $|AB|=3m$，

由抛物线的定义知 $|AD|=|AF|=2m$，$|BC|=|BF|=m$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|AE|}{|AB|}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \sin^2\theta=\dfrac{8}{9}$.

又 $y^2=4x$，知 $2p=4$，故利用弦长公式 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}=\dfrac{9}{2}$.

例 4　已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F.过点 $(2,0)$ 的直线 l 与抛物线分别交于 A, B 两点，则 $|AF|+4|BF|$ 的最小值为__________.

【答案】 13

【解析】 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 由抛物线的定义，知 $|AF|=x_1+1$， $|BF|=x_2+1$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=2$，则 $|AF|+4|BF|=3+4\times 3=15$.

当直线 l 的斜率存在时，直线 l 的方程可设为 $y=k(x-2)(k\neq 0)$.

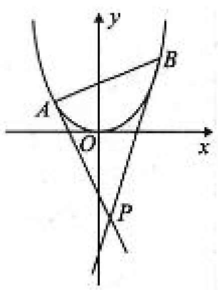
联立得方程组 $\begin{cases} y+k=(x-2) \\ y^2=4x \end{cases}$，整理，得 $k^2x^2-(4k^2+4)+4k^2=0$.

由根与系数的关系可得 $x_1x_2=4$.

所以 $|AF|+4|BF|=x_1+1+4(x_2+1)$ $=x_1+4x_2+5$ $\geq 2\sqrt{4x_1x_2}+5=13$ (当且仅当 $x_1=4x_2=4$ 时等号成立).

所以 $|AF|+4|BF|$ 的最小值为 13.

例 5　阿基米德(公元前 287 年—公元前 212 年)是古希腊伟大的物理学家、数学家、天文学家.他研究抛物线的求积法，得出著名的阿基米德定理，并享有“数学之神”的称号.抛物线的弦与过弦的端点的抛物线的两条切线所围成的三角形被称为阿基米德三角形.如图，$\triangledown PAB$ 为阿基米德三角形.抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上有两个不同的点，即 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，以点 A,B 为切点的抛物线的切线 PA,PB 相交于点 P.给出以下结论，其中正确的有__________(填序号).



①点 P 的坐标是 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{2p}\right)$；

②$\triangle PAB$ 的边 AB 所在的直线方程为 $(x_1+x_2)x-2py-x_1x_2=0$；

③$\triangle PAB$ 的面积为 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{8p}$；

④$\triangle PAB$ 的边 AB 上的中线与 y 轴平行(或重合).

【答案】①②④

【解析】由题意，点 A 处的切线方程为 $y-\dfrac{x_1^2}{2p}=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1)$，点 B 处的切线方程为 $y-\dfrac{x_2^2}{2p}=\dfrac{x_2}{p}(x-x_2)$.联立这两个方程并消去 y，得 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.将 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 代入点 A 处的切线方程，得 $y=\dfrac{x_1^2}{2p}+\dfrac{x_1}{p}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)=\dfrac{x_1x_2}{2p}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{2p}\right)$，故①④正确.设直线 AB 的斜率为 k_{AB}，则 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\dfrac{x_2^2}{2p}-\dfrac{x_1^2}{2p}}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}$，故直线 AB 的方程为 $y-\dfrac{x_1^2}{2p}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}(x-x_1)$.化简，得 $(x_1+x_2)x-2py-x_1x_2=0$，故②正确.由①②可得点 P 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{\left|(x_1+x_2)\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}-2p\cdot\dfrac{x_1x_2}{2p}-x_1x_2\right|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}$，

$|AB|=\sqrt{1+\left(\dfrac{x_1+x_2}{2p}\right)^2}\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}{2p}\cdot|x_1-x_2|$，故

$S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}{2p}\cdot|x_1-x_2|\cdot\dfrac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}=\dfrac{|x_1-x_2|^3}{8p}$，故③错误.因此正确的是①②④.

例 6　已知 F 是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，A，B 在抛物线上，且 ΔABF 的重心坐标为

$(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则 $\frac{||FA|-|FB||}{|AB|}=$______.

【答案】$\frac{\sqrt{17}}{17}$

【解析】设点 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,焦点 F(1,0),

因为 ΔABF 的重心坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,

由重心坐标公式可得 $\frac{x_A+x_B+1}{3}=\frac{1}{2}$, $\frac{y_A+y_B+0}{3}=\frac{1}{3}$,

即 $x_A+x_B=\frac{1}{2}$， $y_A+y_B=1$ ，

由抛物线的定义可得 $|FA|-|FB|=x_A+1-(x_B+1)=x_A-x_B=\frac{y_A^2-y_B^2}{4}$,

由点在抛物线上可得 $\begin{cases}y_A^2=4x_A\\y_B^2=4x_B\end{cases}$， 作差 $y_A^2-y_B^2=4x_A-4x_B$,

化简得 $k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{4}{y_A+y_B}=4$,

代入弦长公式得|AB|= $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|y_A-y_B\right|=\frac{\sqrt{17}}{4}\left|y_A-y_B\right|$,

则 $\frac{\left||FA|-|FB|\right|}{|AB|}=\frac{\left|\frac{y_A^2-y_B^2}{4}\right|}{\frac{\sqrt{17}}{4}\left|y_A-y_B\right|}=\frac{|y_A+y_B|}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

【巩固训练】

1.设 F 为抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 30°的直线交 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点，则△OAB 的面积为(　　)

A.$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B.$\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C.$\frac{63}{32}$　　D.$\frac{9}{4}$

2.（多选题）已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点 F 到准线的距离为 2，过点 F 的直线与抛物线交于 P，Q 两点，M 为线段 PQ 的中点，O 为坐标原点，则下列结论正确的是(　　)

A.抛物线 C 的准线方程为 $y=-1$

B.线段 PQ 的长度最小为 4

C.点 M 的坐标可能为(3，2)

D.$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-3$ 恒成立

3.已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，分别过 A，B 作准线 l 的垂线，垂足分别为 P，Q.若$|AF|=3|BF|$，则$|PQ|=$________.

4.已知抛物线 C 的焦点为 F，过 F 的直线与抛物线 C 交于 A，B 两点，若 $\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=2$，则符合条件的抛物线 C 的一个方程为_________.

5.过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 作直线交抛物线于 A,B 两点，若 $\left|AB\right|=\frac{25}{12},\left|AF\right|<\left|BF\right|$,则 $\left|AF\right|$=________.

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A,B 两点，若 $|AF|=3$，则 $|BF|$ =______.

7．直线 l 过抛物线 C：$y^2=12x$ 的焦点，且与抛物线 C 交于 A，B 两点，若弦 AB 的长为 16，则直线 l 的倾斜角等于________.

8．过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，若$|AF|=2|BF|$，则$|AB|$等于________.

【答案或提示】

1.【答案】D

【解析一】　由已知得焦点坐标为 $F\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$，因此直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$，即 $4x-4\sqrt{3}y-3=0$.

与抛物线方程联立，化简得 $4y^2-12\sqrt{3}y-9=0$，

故$|y_A-y_B|=\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=6$.

因此 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF||y_A-y_B|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times6=\frac{9}{4}$.

【解析二】　由 $2p=3$，及$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$

得$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{3}{\sin^2 30°}=12$.

原点到直线 AB 的距离 $d=|OF|\cdot\sin 30°=\frac{3}{8}$，

故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times12\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$.

2.【答案】　BCD

【解析】因为焦点 F 到准线的距离为 2，所以抛物线 C 的焦点为 $F(1，0)$，准线方程为 $x=-1$，A 错误.

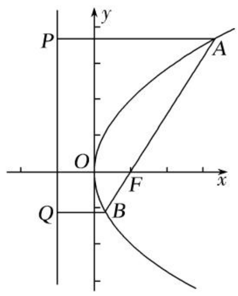
当线段 PQ 垂直于 x 轴时长度最小，此时$|PQ|=4$，B 正确.

设 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，直线 PQ 的方程为 $x=my+1$.联立得方程组$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1.\end{cases}$消去 x 并整理，得 $y^2-4my-4=0$，$\varDelta=16m^2+16>0$，则 $y_1+y_2=4m$，所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，所以 $M(2m^2+1，2m)$.当 $m=1$ 时，可得 $M(3，2)$，C 正确.

可得 $y_1y_2=-4$，$x_1x_2=(my_1+1)(my_2+1)=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=1$，所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=-3$，D 正确.故选 BCD.

3.【答案】 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

【解析】$F(1，0)$，不妨设 A 在第一象限，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，



由$|AF|=3|BF|$得 $y_1=-3y_2$①

设 l_{AB}：$y=k(x-1)$与抛物线方程联立得

$ky^2-4y-4k=0$，$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}$，

$y_1\cdot y_2=-4$，②

结合①②解得 $y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$|PQ|=|y_1-y_2|=|-3y_2-y_2|=-4y_2=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

4.【答案】满足焦准距为 1 即可，如 $y^2=2x$.

【解析】由公式$\dfrac{1}{AF}+\dfrac{1}{BF}=\dfrac{2}{p}$得$\dfrac{2}{p}=2$，解得 $p=1$，满足焦准距为 1 即可，如 $y^2=2x$ 等.

5.【答案】$\dfrac{5}{6}$

【解析一】设 $AF=m$，$BF=n$，则有$\begin{cases} m+n=\dfrac{25}{12} \\ \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{P} \\ p=1 \end{cases}$，解得 $m=\dfrac{5}{6}$或$\mathrm{m}=\dfrac{5}{4}$（舍）.

【解析二】抛物线 $y^2=2x$ 的焦点坐标为$(\dfrac{1}{2},0)$，准线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$

设 A，B 的坐标分别为 $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$，则 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}=\frac{1}{4}$

设 $|AF|=m,|BF|=n$，则 $x_1=m-\frac{1}{2},x_2=n-\frac{1}{2}$

所以有 $\begin{cases}(m-\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})=\frac{1}{4} \\ m+n=\frac{25}{12}\end{cases}$，

解得 $m=\frac{5}{6}$ 或 $n=\frac{5}{4}$，所以 $|AF|=\frac{5}{6}$.

6.【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】直接由 $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{2}{p}$ 立得（其中 m，n 是焦点弦被焦点所分得的两线段长，p 就是焦准距）.

7.【答案】$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

【解析】因为 $p=6$，则$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{12}{\sin^2\alpha}=16$，

$\therefore \sin^2\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

8.【答案】$\frac{9}{2}$

【解析】因为$|AF|=2|BF|$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{2|BF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{3}{2|BF|}=\frac{2}{p}=1$，解得$|BF|=\frac{3}{2}$，$|AF|=3$，

故$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{9}{2}$.

专题48 椭圆、双曲线的焦点弦被焦点分成定比

【方法点拨】

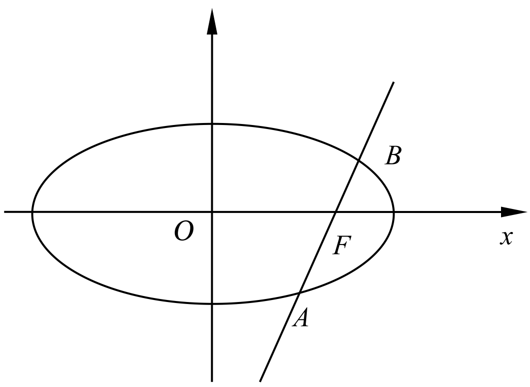
1. 设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，过$F$的直线$l$与椭圆相交于$A$、$B$两点，直线$l$的倾斜角为$\theta$，且$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$，则$e$、$\theta$、$\lambda$间满足$|e\cos\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.

2. 长短弦公式:如下图,长弦$AF=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$,短弦$BF=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$（其中$p$是焦参数，即焦点到对应准线的距离，$\theta$是直线$l$与$x$轴的夹角，而非倾斜角）.

说明：

（1）公式1的推导使用椭圆的第二定义，不必记忆，要有“遇过将焦半径转化为到准线距离”的意识即可.

（2）双曲线也有类似结论.



【典型题示例】

例1 已知椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，AB为椭圆过右焦点F的弦，则$|AF|+2|FB|$的最小值为_______.

【答案】$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$

【解析】由 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $a=2$， $c=\sqrt{3}$，则椭圆的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，右准线方程为 $l:x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

如图，过 A 作 $AM\perp l$ 于 M，则 $\dfrac{|AF|}{|AM|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，①

设 AB 的倾斜角为 θ，

则 $|AM|=|CF|-|AF|\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}-|AF|\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-|AF|\cos\theta$，②

联立①②，可得 $|AF|=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$，同理可得 $|BF|=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$，

$$\therefore |AF|+2|BF|=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}+\frac{2}{2-\sqrt{3}\cos\theta}=\frac{2-\sqrt{3}\cos\theta+4+2\sqrt{3}\cos\theta}{4-3cos^2\theta}$$

$$=\frac{6+\sqrt{3}\cos\theta}{4-3cos^2\theta}.$$

令 $\cos\theta=t$， $t\in[-1，1]$，

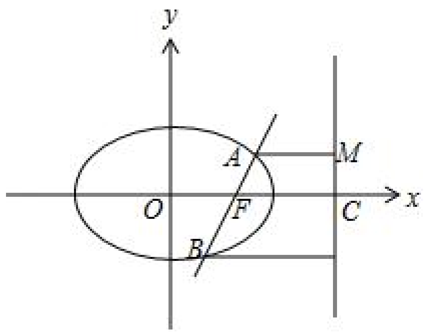
$$\therefore |AF|+2|FB|=\frac{6+\sqrt{3}t}{4-3t^2}=\frac{6+\sqrt{3}t}{-(6+\sqrt{3}t)^2+12(6+\sqrt{3}t)-32}=\frac{1}{-(6+\sqrt{3}t)-\dfrac{32}{6+\sqrt{3}t}+12}.$$

$$\frac{1}{-2\sqrt{(6+\sqrt{3}t)\bullet\dfrac{32}{6+\sqrt{3}t}}+12}=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}.$$

当且仅当 $6+\sqrt{3}t=\dfrac{32}{6+\sqrt{3}t}$，即 $t=\dfrac{4\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{3}$ 时上式取等号.

$\therefore |AF|+2|FB|$的最小值为$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

故答案为：$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$.



例 2　（**2021·江苏南京盐城二调·7**）已知双曲线C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$作倾斜角为$\theta$的直线$l$交双曲线$C$的右支于$A$，$B$两点，其中点$A$在第一象限，且$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$.若$|AB|=|AF_1|$，则双曲线$C$的离心率为

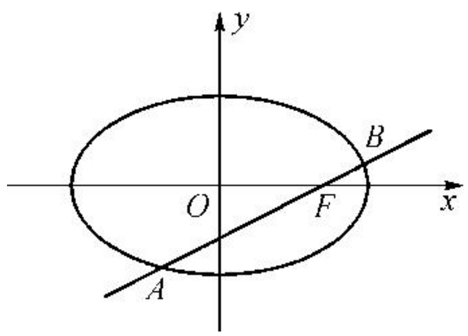
A．4　　B．$\sqrt{15}$　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．2

【答案】D

【解析】$AF_2=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$，$BF_2=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$，

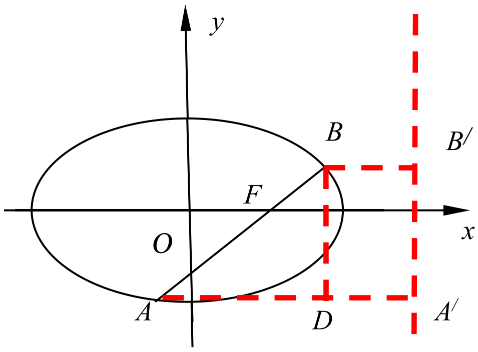
$AB=AF_2+BF_2=AF_1=2a+AF_2\Rightarrow BF_2=2a\Rightarrow \dfrac{b^2}{a+\frac{1}{4}c}=2a\Rightarrow e^2-\dfrac{1}{2}e-3=0\Rightarrow e=2$.

例 3　已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，与过右焦点$F$且斜率为$k(k>0)$的直线相交于$A$，$B$两点．若$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则$k=$________.



【答案】$\sqrt{2}$

【解析】如右图，设 l 为椭圆的右准线，过 A、B



分别向 l 作垂线 AA'、BB'，A'、B'分别是垂足，过 B 作 AA'垂线 BD，D 是垂足

设 $BF=t$ ，$AF=3t$

则 $BB'=\dfrac{t}{e}$， $AA'=\dfrac{3t}{e}$

$Rt\triangle ABD$ 中， $AD=\dfrac{2t}{e}, AB=4t$

故 $\cos\theta=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

又 $k>0$，所以 $k=\tan\theta=\sqrt{2}$.

【巩固训练】

1. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A，B 两点．若$|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的离心率为________.

2.已知 F 是椭圆 C 的一个焦点，B 是短轴的一个端点，线段 BF 的延长线交 C 于点 D，且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则 C 的离心率为________.

3. 已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A，B 两点．设 $|FA|>|FB|$，则 $|FA|$ 与 $|FB|$ 的比值等于________.

4.已知 F_1，F_2 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点，若 E 上存在不同两点 A，B，使得 $\overrightarrow{F_1A}=\sqrt{3}\overrightarrow{F_2B}$，则该椭圆的离心率的取值范围为(　　)

A．$(\sqrt{3}-1$，$1)$　　B．$(0,\sqrt{3}-1)$　　C．$(2-\sqrt{3}$，$1)$　　D．$(0,2-\sqrt{3})$

5.设 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，过点 F 且斜率为 -1 的直线 l 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AF}$，则双曲线 C 的离心率 e 等于(　　)

A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{\sqrt{34}}{3}$

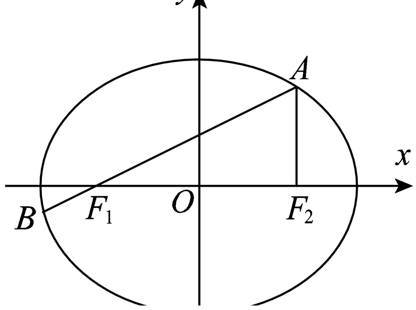
6.设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A、B 两点，若 $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{FB}$，则 C 的离心率为__________.

7.抛物线 $y^2=4x$，直线 l 经过抛物线的焦点 F，与抛物线交于 A、B 两点，若 $\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BF}$，则 $\triangle OAB$（O 为坐标原点）的面积为______.

【答案与提示】

1.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】如右图，设直线 AB 的倾斜角为 θ



则 $Rt\triangle AF_1F_2$，$F_1F_2=2c, AF_1=\dfrac{b^2}{a}$

所以 $\cos\theta=\dfrac{2c}{\sqrt{4c^2+\dfrac{b^4}{a^2}}}$

由$|AF_1|=3|F_1B|$、长短弦公式得：$\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}=\dfrac{3ep}{1+e\cos\theta}$，化简得：$2e\cos\theta=1$

代入得：$\dfrac{4ec}{\sqrt{4c^2+\dfrac{b^4}{a^2}}}=1$，即 $4e=\sqrt{4+\dfrac{b^4}{a^2c^2}}=\sqrt{4+\left(\dfrac{a^2-c^2}{ac}\right)^2}=\sqrt{4+\left(\dfrac{1}{e}-e\right)^2}$

解之得：$e^2=\dfrac{1}{3}$（负值已舍），所以 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3.【答案】$3+2\sqrt{2}$

4.【答案】C

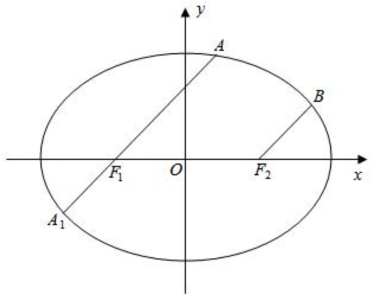
【解析】延长 AF_1 交椭圆于 A_1，根据椭圆的对称性，则 $\overrightarrow{F_2B}=\overrightarrow{A_1F_1}$，$\overrightarrow{F_1A}=\sqrt{3}\overrightarrow{A_1F_1}$，

由 $\overrightarrow{F_1A}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，且 $|\overrightarrow{F_1A}|=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，$|\overrightarrow{A_1F_1}|=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$，

由 $\overrightarrow{A_1F_1}=\overrightarrow{F_2B}$，所以 $\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}=\dfrac{\lambda ep}{1+e\cos\theta}$，整理得 $e\cos\theta=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}$，其中 $\theta\in[0,\ 2\pi)$，

由 A，B 不重合，所以 $\theta\neq 0$，

$e\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}<e$，解得 $e>2-\sqrt{3}$，所以，椭圆的离心率的取值范围 $(2-\sqrt{3},\ 1)$.



5.【答案】D

【解析】设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$，

则过点 F 且斜率为 -1 的直线 l 的方程为 $y=-(x-c)$，渐近线方程是 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

由 $\begin{cases} y=c-x \\ y=-\dfrac{b}{a}x \end{cases}$，得 $B\left(\dfrac{ac}{a-b},-\dfrac{bc}{a-b}\right)$，

由 $\begin{cases} y=c-x \\ y=\dfrac{b}{a}x \end{cases}$，得 $A\left(\dfrac{ac}{a+b},\dfrac{bc}{a+b}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2abc}{a^2-b^2},-\dfrac{2abc}{a^2-b^2}\right)$， $\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{bc}{a+b},-\dfrac{bc}{a+b}\right)$.

由 $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AF}$，得 $\left(\dfrac{2abc}{a^2-b^2},-\dfrac{2abc}{a^2-b^2}\right)=-3\left(\dfrac{bc}{a+b},-\dfrac{bc}{a+b}\right)$，

则 $\dfrac{2abc}{a^2-b^2}=-3\cdot\dfrac{bc}{a+b}$， 即 $b=\dfrac{5}{3}a$，

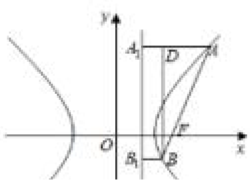
则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{34}}{3}a$， 则 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$， 故选 D.

6.【答案】 $\dfrac{6}{5}$

【解析】由 $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{FB}$ 可得 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，设 $|\overrightarrow{AF}|=4m,|\overrightarrow{BF}|=m$，

过 A,B 分别做准线的垂线，垂足为 A_1,B_1，由双曲线定义得 $|AA_1|=\dfrac{4m}{e}$， $|BB_1|=\dfrac{m}{e}$，过 B

做 BD 垂直于 AA_1 垂足 D，



因为 AB 斜率为 $\sqrt{3}$，所以在 ΔABD 中，$\angle BAD=60^{\circ}$，可得 $|AD|=\frac{1}{2}|AB|$，

即 $\frac{4m}{e}-\frac{m}{e}=\frac{3m}{e}=\frac{5m}{2}$，解得 $e=\frac{6}{5}$，C 的离心率为 $\frac{6}{5}$，故答案为 $\frac{6}{5}$.

7.【答案】$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】由题意可知：$AF=3BF$，

结合焦半径公式有：$\frac{p}{1-\cos\alpha}=\frac{3p}{1+\cos\alpha}$，解得：$\cos\alpha=\frac{1}{2},\alpha=\frac{\pi}{3}$，

故直线 AB 的方程为：$y=\sqrt{3}(x-1)$，与抛物线方程联立可得：$3y^2-4\sqrt{3}y-12=0$，

则 $|y_1-y_2|=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-4\times(-4)}=\frac{8}{\sqrt{3}}$，

故△ OAB 的面积 $S=\frac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

专题 49 与圆锥曲线相关的线段和（差）的最值

【方法点拨】

1. 动点 P 到两个定点 A、B 距离之和的最小值为 $|AB|$，当且仅当 P、A、B 三点共线时成立，即 $|PA|+|PB|\geqslant|AB|$；
2. $-|AB|\leqslant|PA|-|PB|\leqslant|AB|$.

【典型题示例】

例 1 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为，P 为双曲线左支上一点，点 $A(0,\sqrt{2})$，则△APF 周长的最小值为(　　)

A. $4+\sqrt{2}$　　B. $4(1+\sqrt{2})$　C. $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$　　D. $\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】利用定义转化为 $PF'+PA+4+2\sqrt{2}$（其中 F' 为双曲线的左焦点），再利用 $PF'+PA\geq AF'$，当且仅当 P、A、F' 三点共线成立.

【解析】$AF=2\sqrt{2}$，$\triangle APF$ 的周长为 $l=PF+PA+AF=PF+PA+2\sqrt{2}$

设 F' 为双曲线的左焦点，则由双曲线定义得 $PF=PF'+4$，故 $l=PF'+PA+4+2\sqrt{2}$

又 $PF'+PA\geq AF'=2\sqrt{2}$，当且仅当 P、A、F' 三点共线成立

所以 $l\geq 4+4\sqrt{2}=4(1+\sqrt{2})$，故$\triangle APF$ 周长的最小值为 $4(1+\sqrt{2})$.

例 2　阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德并称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是：已知动点 M 与两定点 A，B 的距离之比为 $\lambda(\lambda>0,\lambda\neq 1)$，那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆．已知在平面直角坐标系中，圆 $O:x^2+y^2=4$、点 $A(-1,0)$ 和点 $B(0,1)$，M 为圆 O 上的动点，则 $2|MA|+|MB|$ 的最小值为_________.

【答案】$\sqrt{17}$

【分析】逆用“啊圆”，将 $2|MA|$ 中系数 2 去掉化为“一条线段”，从而将 $2|MA|+|MB|$ 化为两条线段的和，再利用“三点共线”求解.

【解析】因为啊圆的圆心、两定点共线，且在该直线上的直径的端点分别是两定点构成线段分成定比的内外分点

所以另一定点必在 x 轴上，且 $(-2,0)$ 内分该点与 $A(-1,0)$ 连结的线段的比为 2

故该点的坐标为 $(-4,0)$

设 $C(-4,0)$，则圆 $O:x^2+y^2=4$ 上任意一动点 M 都满足 $|MC|=2|MA|$

所以 $2|MA|+|MB|=|MC|+|MB|$

又因为 $|MC|+|MB|\geq|BC|=\sqrt{17}$，当且仅当 M、B、C 共线时，等号成立

所以 $2|MA|+|MB|$ 的最小值为 $\sqrt{17}$.

点评：

3. 已知两定点、啊圆的圆心三点共线；

4. 啊圆的在已知两定点所在直线上的直径的两端点，分别是两定点构成线段分成定比的内、外分点.

例 3 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 的直线 l 于 C 交于 A，B 两点，则$|AF|+4|BF|$取得最小值时，$|AB|$=(　　)

$A.\frac{9}{2}$　　　　$B.\frac{7}{2}$　　　　$C.\frac{5}{2}$　　　　$D.\frac{3}{2}$

【答案】A

【分析】将$|AF|+4|BF|$利用定义转化为到准线的距离，$|AF|+4|BF|=x_1+4x_2+5$，抓住 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}=1$ 为定值，运用基本不等式解决.

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

则由抛物线定义得$|AF|=x_1+1$，$|BF|=x_2+1$

故$|AF|+4|BF|=x_1+4x_2+5$，

又因为 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}=1$

根据基本不等式有 $|AF|+4|BF|=x_1+4x_2+5\geq 2\sqrt{x_1\cdot 4x_2}+5=9$，当且仅当 $x_1=4x_2$，即 $\begin{cases}x_1=2\\x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时，等号成立

故$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2=\frac{9}{2}$.

例 4 已知 M 为抛物线 $C:y^2=4x$ 上一点，过抛物线 C 的焦点 F 作直线 $x+(m-1)y=5-2m$ 的垂线，垂足为 N，则$|MF|+|MN|$的最小值为

A. $2\sqrt{2}-3$　　　　B. $2\sqrt{2}-2$　　　　C. $2+\sqrt{2}$　　　　D. $3-\sqrt{2}$

【答案】D

【分析】本题的关键点有二，一是利用抛物线的定义将$|MF|$转化为点 M 到准线 $x=-1$ 的

距离，这也是遇到抛物线上的点到焦点的距离、到准线的距离的一种基本思路；二是发现 N 在一个“隐圆”上，即利用定线段张直角确定隐圆，最终将所求转化为圆上的动点到直线上点的距离最小来解决.

【解析】由题可得抛物线焦点 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，

过点 M 作 MD 与准线垂直，交于点 D，

直线 $x+(m-1)y=5-2m$ 整理得 $m(y+2)=y-x+5$，

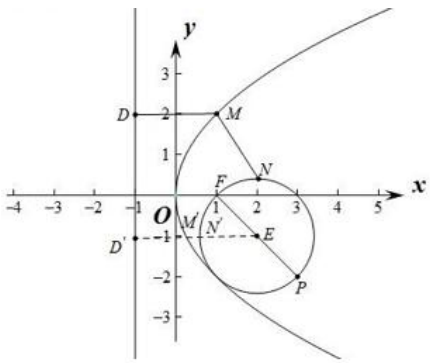
联立 $\begin{cases} y+2=0 \\ y-x+5=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$，即该直线过定点 $(3,-2)$，

设 $P(3,-2)$，连接 FP，取 FP 中点 E，则 $E(2,-1)$，$|EP|=\sqrt{2}$，

若 $FN\perp l$，则 N 在以 FP 为直径的圆上，该圆方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$，

又由 $|MF|=|MD|$，得 $|MF|+|MN|=|MD|+|MN|$，

如图，$|MD|+|MN|$ 的最小值为圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$ 上的点到准线的距离的最小值，



过点 E 作 ED' 与准线 $x=-1$ 垂直并交于点 D'，与圆 E 交于点 N'，与抛物线交于点 M’，

则 $|D'N'|$ 即为 $|MD|+|MN|$ 的最小值，

即 $|MD|+|MN|$ 的最小值为 $|ED'|-r=3-\sqrt{2}$.

故选 D.

例 5　已知点 $A(4,4)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，F 是抛物线的焦点，点 P 为直线 $x=-1$ 上的动点，我们可以通过找对称点的方法求解两条线段之和的最小值，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为（　　）

A. 8　　　　B. $2\sqrt{13}$　　　　C. $2+\sqrt{41}$　　　　D. $\sqrt{65}$

【答案】D

【分析】由题意，知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，直线 $x=-1$ 是抛物线 $y^2=4x$ 的准线，设 $F(1,0)$ 关于直线 $x=-1$ 的对称点 $F'(-3,0)$，$|PA|+|PF|=|PA|+|PF'|$，利用两点之间线段最短，可知 $|PA|+|PF|$ 的最小值等于 $|AF'|$，再利用两点之间的距离即可求解.

【解析】由题意，知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，直线 $x=-1$ 是抛物线 $y^2=4x$ 的准线，

点 $A(4,4)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，点 P 为直线 $x=-1$ 上的动点，

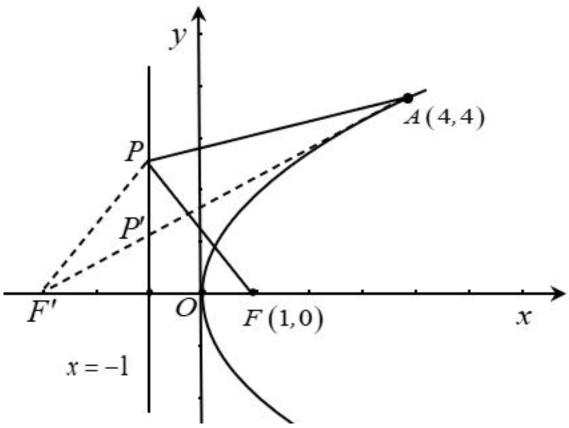
设 $F(1,0)$ 关于直线 $x=-1$ 的对称点 $F'(-3,0)$，作图如下，

利用对称性质知：$|PF|=|PF'|$，则 $|PA|+|PF|=|PA|+|PF'|\geq|AF'|$

即点 P 在 P' 位置时，$|PA|+|PF|$ 的值最小，等于 $|AF'|$，

利用两点之间距离知 $|AF'|=\sqrt{(-3-4)^2+4^2}=\sqrt{65}$，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为 $\sqrt{65}$

故选：D.



点评：

本题考查利用对称求最短距离，“两点之间线段最短”，是解决最短距离问题的依据，在实际问题中，常常碰到求不在一条直线上的两条或三条线段和的最小值问题，解决这类问题，可借助轴对称的性质，将不在同一直线上的线段转化为两点之间的距离问题.

【巩固训练】

1.已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的左焦点为$F$，点$M$在椭圆$C$上，点$N$在圆$E$：$\left(x-2\right)^2+y^2=1$上，则$\left|MF\right|+\left|MN\right|$的最小值为（　　）

A．4　　　　B．5　　　　C．7　　　　D．8

2.已知F是双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$的左焦点，$A(1,4)$，$P$是双曲线右支上的一动点，则$|PF|+|PA|$的最小值为________.

3.设P是抛物线$y^2=4x$上的一个动点，F是抛物线的焦点．若$B(3,2)$，则$|PB|+|PF|$的最小值为________.

4.设P是抛物线$y^2=4x$上的一个动点，F是抛物线的焦点．若$B(3,4)$，则$|PB|+|PF|$的最小值为________.

5.设P是抛物线$y^2=4x$上的一个动点，F是抛物线的焦点．若$B(3,2)$，点P到点$A(-1,1)$的距离与点P到直线$x=-1$的距离之和的最小值为________.

6.已知F是椭圆$5x^2+9y^2=45$的左焦点，P是此椭圆上的动点，$A(1,1)$是一定点，则$|PA|+|PF|$的最大值为________，最小值为________.

7.已知直线$l_1:4x-3y+6=0$和直线$l_2:x=-1$，抛物线$y^2=4x$上一动点P到直线l_1和直线l_2的距离和得最小值为________.

8. 已知A（3，﹣1），B（5，﹣2），点P在直线$x+y=0$上，若使$|PA|+|PB|$取最小值，则点P的坐标是（　　）

A．$\left(1,-1\right)$　　　B．$\left(-1,1\right)$　　　C．$\left(-2,2\right)$　　　D．$(\dfrac{13}{5},-\dfrac{13}{5})$

9. 已知$A(2,0)$，$B(6,0)$，$|BM|=2$，点N在抛物线$y^2=8x$上，则$|MN|+\dfrac{1}{2}|MA|$的最小值为

A．6　　　　B．$2\sqrt{5}$　　　　C．5　　　　D．$2\sqrt{6}$

10. 已知点$P(t，t)$，$t\in$R，点M是圆$x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$上的动点，点N是圆$(x-2)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$上的

动点，则$|PN|-|PM|$的最大值是(　　)

A．$\sqrt{5}-1$　　　B．2　　　C．3　　　D．$\sqrt{5}$

11. 已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上一个动点，Q 为圆 $x^2+(y-4)^2=1$ 上一个动点，那么点 P 到点 Q 的距离与点 P 到抛物线的准线距离之和最小值是____________.

【答案或提示】

1.【答案】 B

【解析】易知圆心 E 为椭圆的右焦点，且 $a=3,b=\sqrt{5},c=2$，

由椭圆的定义知：$|MF|+|ME|=2a=6$，所以$|MF|=6-|ME|$，

所以$|MF|+|MN|=6-|ME|+|MN|=6-\left(|ME|-|MN|\right)$，

要求$|MF|+|MN|$的最小值，只需求$|ME|-|MN|$的最大值，显然M,N,E三点共线时$|ME|-|MN|$取最大值，且最大值为1，所以$|MF|+|MN|$的最小值为$6-1=5$.

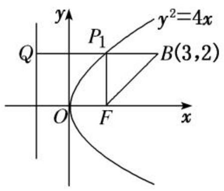
故选：B.

2.【答案】9

【解析】因为 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，所以 $F(-4,0)$，设其右焦点为 $H(4,0)$，则由双曲线的定义可得$|PF|+|PA|=2a+|PH|+|PA|\geq 2a+|AH|=4+\sqrt{(4-1)^2+(0-4)^2}=4+5=9$.

3.【答案】4

【解析】如图，过点 B 作 BQ 垂直准线于点 Q，交抛物线于点 P_1，



则$|P_1Q|=|P_1F|$.

则有$|PB|+|PF|\geq|P_1B|+|P_1Q|=|BQ|=4$，

即$|PB|+|PF|$的最小值为 4.

4.【答案】2 $2\sqrt{5}$

【解析】由题意可知点 $B(3,4)$在抛物线的外部．

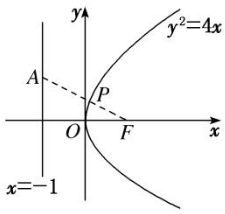
∵$|PB|+|PF|$的最小值即为 B，F 两点间的距离，$F(1,0)$，

∴$|PB|+|PF|\geq|BF|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

即$|PB|+|PF|$的最小值为 $2\sqrt{5}$．

5.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】如图，易知抛物线的焦点为 $F(1，0)$，准线是 $x=-1$，



由抛物线的定义知点 P 到直线 $x=-1$ 的距离等于点 P 到点 F 的距离．于是，问题转化为在抛物线上求一点 P，使点 P 到点 $A(-1,1)$的距离与点 P 到点 $F(1,0)$的距离之和最小，显然，连接 AF 与抛物线相交的点即为满足题意的点，此时最小值为 $\sqrt{[1-(-1)]^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$．

点评：

与抛物线有关的最值问题，一般情况下都与抛物线的定义有关．“看到准线想焦点，看到焦点想准线”，这是解决与过抛物线焦点的弦有关问题的重要途径．

6.【答案】$6+\sqrt{2}$　$6-\sqrt{2}$

【解析】椭圆方程化为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，

设 F_1 是椭圆的右焦点，则 $F_1(2,0)$，

∴$|AF_1|=\sqrt{2}$，∴$|PA|+|PF|=|PA|-|PF_1|+6$，

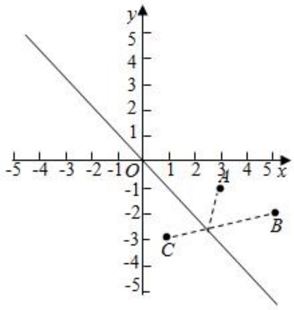
又$-|AF_1|\leq|PA|-|PF_1|\leq|AF_1|$(当 P，A，F_1 共线时等号成立)，

∴$6-\sqrt{2}\leq|PA|+|PF|\leq6+\sqrt{2}$．

7.【答案】2

8.【分析】求出 A 关于直线 l：$x+y=0$ 的对称点为 C，则 P 为直线 BC 与直线 l 的交点时，满足条件，进而得到答案．

【解析】如下图所示：



点 A（3，－1），关于直线 l：$x+y=0$ 的对称点为 C（1，－3）点，

由 BC 的方程为：$\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{1}$，即 $x-4y-13=0$，

可得直线 BC 与直线 l 的交点坐标为：（$\frac{13}{5}$，－$\frac{13}{5}$），

即 P 点坐标为：（$\frac{13}{5}$，－$\frac{13}{5}$）时，$|PA|+|PB|$最小．

故选：D．

9.【答案】D

【解析】根据题意，设 $M(x,y)$，$N(x_0$，$y_0)$，

$|BM|=2$，即 $(x-6)^2+y^2=4$，同时点 N 在抛物线 $y^2=8x$ 上，则有 $y_0^2=8x_0$，

则 $\frac{1}{2}|MA|=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}[(x-2)^2+y^2]+\frac{3}{4}[(x-6)^2+y^2-4]}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$，

设 $C(5,0)$，因为 $|MN|+|CM|\quad|CN|$．

所以 $|MN|+\frac{1}{2}|MA|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{(x-5)^2+y^2}\quad\sqrt{(x_0-5)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-5)^2+8x_0}=\sqrt{(x_0-1)^2+24}\quad 2\sqrt{6}$，当且仅当 $x_0=1$ 且 C，M，N 三点共时等号成立．

故 $|MN|+\frac{1}{2}|MA|$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$；

故选 D．

10.【答案】2

【解析】易知圆 $x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$的圆心为 $A(0,1)$，圆 $(x-2)^2+y^2=\frac{1}{4}$的圆心为 $B(2,0)$，$P(t，t)$在直线 $y=x$ 上，$A(0,1)$关于直线 $y=x$ 的对称点为 $A'(1,0)$，则 $|PN|-|PM|\le\left(|PB|+\frac{1}{2}\right)-\left(|PA|-\frac{1}{2}\right)$

$=|PB|-|PA|+1=|PB|-|PA'|+1\le|A'B|+1=2$.(此时$|PN|$最大，$|PM|$最小)

故选 B.

11. 【答案】$\sqrt{17}-1$

【提示】通过数形结合，转化为点 Q 到焦点 F 的距离最小值.

专题 50 圆锥曲线的最值

【方法点拨】

综合运用函数知识、向量、基本不等式等求解圆锥曲线中的最值问题.

【典型题示例】

例 1 已知 $Q(0,3)$，P 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点，则 $|PQ|$ 的最小值为__________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

【分析】直接设点 P 的坐标 $P\left(x_0,x_0^{\ 2}\right)$，转化为 $x_0^{\ 2}$ 的二次函数即可解决.

【解析】设点 P 的坐标 $P\left(x_0,x_0^{\ 2}\right)$

则 $|PQ|^2=x_0^{\ 2}+\left(x_0^{\ 2}-3\right)^2=x_0^{\ 4}-5x_0^{\ 2}+9=\left(x_0^{\ 2}-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\ge\dfrac{11}{4}$

当且仅当 $x_0^{\ 2}=\dfrac{5}{2}$，即当点 P 的坐标 $P\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{5}{2}\right)$时，$|PQ|$ 取得最小值为 $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

例 2 已知点 M（0，4），点 P 在曲线 $x^2=8y$ 上运动，点 Q 在圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 上运动，则 $\dfrac{|PM|^2}{|PQ|}$ 的最小值是（　　）.

A. $\sqrt{3}$　　　　B. $\sqrt{5}$　　　　C.4　　　　D.6

【答案】C

【分析】因为$|PQ|\le|PF|+1$，故$\dfrac{|PM|^2}{|PQ|}\ge\dfrac{|PM|^2}{|PF|+1}$，再使用定义将$|PF|$转化为到准线的距离，设出点坐标，使用基本不等式求解.

【解析】因为$|PQ|\le|PF|+1$，故$\dfrac{|PM|^2}{|PQ|}\ge\dfrac{|PM|^2}{|PF|+1}$

设$P(x_0,\dfrac{x_0^{\ 2}}{8})$，则$|PF|=\dfrac{x_0^{\ 2}}{8}+2$

所以$\dfrac{|PM|^2}{|PQ|}\ge\dfrac{x_0^{\ 2}+(\dfrac{x_0^{\ 2}}{8}-4)^2}{\dfrac{x_0^{\ 2}}{8}+3}$

设$\dfrac{x_0^{\ 2}}{8}+3=t(t\ge3)$，则$\dfrac{|PM|^2}{|PQ|}\ge\dfrac{8(t-3)+(t-7)^2}{t}=t+\dfrac{25}{t}-6\ge2\sqrt{t\times\dfrac{25}{t}}-6=4$

当且仅当$t=5$，等号成立

所以$\dfrac{|PM|^2}{|PQ|}$的最小值是 4.

例 3 已知点P在椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$上运动，点$Q$在圆$(x-1)^2+y^2=\dfrac{5}{8}$上运动，则$|PQ|$的最小值为（　　）

A. 2　　　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　　　C. $2-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

【答案】D

【分析】先求出点P到圆心$A(1,0)$的距离的最小值，然后减去圆的半径可得答案

【解析】设点$P(x,y)$，则$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$，得$y^2=3-\dfrac{x^2}{3}$，

圆$(x-1)^2+y^2=\dfrac{5}{8}$的圆心$A(1,0)$，半径为$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

则$|AP|^2=(x-1)^2+y^2=x^2-2x+1+3-\dfrac{x^2}{3}=\dfrac{2}{3}x^2-2x+4,x\in[-3,3]$，

令$h(x)=\dfrac{2}{3}x^2-2x+4,x\in[-3,3]$，对称轴为$x=\dfrac{3}{2}$，

所以当$x=\dfrac{3}{2}$时，$h(x)$取得最小值$h\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2\times\dfrac{3}{2}+4=\dfrac{5}{2}$，

所以$|AP|$的最小值为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

所以$|PQ|$的最小值为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{4}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

故选：D.

例 4　已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线与x轴的交点为A，点P是抛物线上的动点，则当$\frac{|PF|}{|PA|}$的值最小时，$\triangle PAF$的内切圆半径为(　)

A. $2-\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

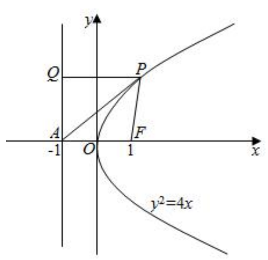
【答案】A

【分析】本题考查了抛物线的性质，直线与圆锥曲线的位置关系．设P到准线的距离为PQ，根据抛物线的性质可知$\frac{|PF|}{|PA|}=\frac{|PQ|}{|PA|}=\sin\angle PAQ$.从而当$\angle PAQ$最小，即$AP$与抛物线相切时，$\frac{|PF|}{|PA|}$的值最小．求出抛物线过$A$点的切线方程得出$P$点坐标，代入面积公式得出面积．

【解析】抛物线的准线方程为$x=-1$.

设P到准线的距离为$|PQ|$，则$|PQ|=|PF|$.

$\therefore\frac{|PF|}{|PA|}=\frac{|PQ|}{|PA|}=\sin\angle PAQ$.



$\therefore$当 PA 与抛物线$y^2=4x$ 相切时，$\angle PAQ$ 最小，即$\frac{|PF|}{|PA|}$取得最小值.

设过 A 点的直线 $y=kx+k$ 与抛物线相切$(k\neq 0)$，代入抛物线方程得$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$，

$\therefore \Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm 1$.

即$x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，把 $x=1$ 代入$y^2=4x$ 得 $y=\pm 2$.

$\therefore P(1,2)$或 $P(1,-2)$.

$\therefore S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}|AF|\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

所以 $AP=2\sqrt{2},AF=2,PF=2$，设$\triangle PAF$ 的内切圆半径为 r

所以$\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+2+2)r=2$，所以 $r=2-\sqrt{2}$.

故选 A.

例 5 已知 A、B 是圆C_1：$x^2+y^2=10$ 上的动点，$AB=4\sqrt{2}$，P 是圆C_2：$(x-6)^2+(y-8)^2=1$ 上的动点，则$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$的取值范围是__________.

【答案】[28,52]

【分析】本题的关键是将所求$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}$转化为一个向量，这里设$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}=4\overrightarrow{PE}$（想一想，这里为什么将系数确定为 4，而非其它数？其主要目的在于利用三点共线，使点 E 在线段 AB 上，这是遇到两向量和、差的模的常用的策略，其目的仍是化繁为简、合二为一），从而由$|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$化简得 $4|\overrightarrow{PE}|$，进一步可求得$|C_1E|=2$，故 E 点的轨迹为圆，最终转化成两圆上的点间的距离问题即可求解.

【解析】设$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}=4\overrightarrow{PE}$，则$\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{PE}$，取 AB 中点为 D，再取 BD 中点为 E，

则由$|AB|=4\sqrt{2}$，得$|C_1D|=\sqrt{10-8}=\sqrt{2}$，$|DE|=\sqrt{2}$，

所以$|C_1E|=2$，即 E 点的轨迹方程为$x^2+y^2=4$.

$|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PB}|=|2\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{PB}|=2|\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PB}|=4|\overrightarrow{PE}|$.

由于 P 点在圆 C_2：$(x-6)^2+(y-8)^2=1$ 上，

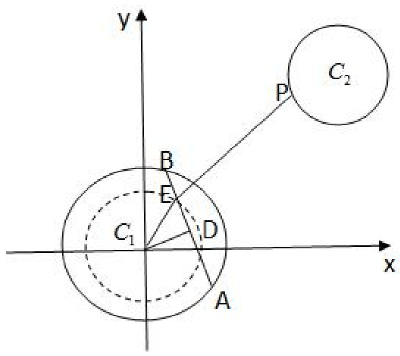
所以$|C_1C_2|=10$，

所以$|C_1C_2|-1-2\leq|PE|\leq|C_1C_2|+1+2$，

即$|PE|\in[7,13]$，

所以$|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|=4|\overrightarrow{PE}|\in[28,52]$.

故答案为$[28,52]$.



【巩固训练】

1.面直角坐标系 xOy 中，设定点 $A(a,a)$，P 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）图象上一动点，

若点 P，A 之间的最短距离为 $2\sqrt{2}$，则满足条件的实数 a 的所有值为________.

2. 抛物线$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 A 是抛物线上的动点，设点 $B(-2,0)$，当$\frac{|AF|}{|AB|}$取得最小值时，则(　)

A. AB 的斜率为$\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$；　　　　B. $|AF|=4$

C. ΔABF 外接圆的面积为 8π；　　　　D. ΔABF 内切圆的面积为$(24-16\sqrt{2})\pi$

3. 已知F_1，F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，P 为双曲线左支上任一点，若$\frac{PF_2^2}{PF_1}$的最小值为 $8a$，则双曲线的离心率的取值范围为________.

4. 过抛物线$y^2=4x$ 焦点的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，与圆$(x-1)^2+y^2=r^2$ 交于 C，D 两点，若有三条直线满足 $AC=BD$，则 r 的取值范围为_________.

【答案或提示】

1.【答案】-1 或 $\sqrt{10}$

【提示】设点，转化为函数解决.

2.【答案】BCD

【分析】由题意利用抛物线的定义可得$\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\sin\angle ABC$，当$\frac{|AF|}{|AB|}$取得最小值时，$AB$ 与抛物线相切，再联立直线与抛物线方程，由此可得$|AB|$，$|BF|$，$|AF|$的值，即可分析各选项.

【解析】由题意，过点 A 作准线的垂线，垂足为 C，点 B 即为抛物线的准线与 x 轴的交点，

由抛物线的定义可得$\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\sin\angle ABC$，

当$\frac{|AF|}{|AB|}$取得最小值时，即 $\sin\angle ABC$ 取得最小值，也即$\angle ABC$ 取得最小值，此时 AB 与抛物线相切，

设 AB 的方程为 $y=k(x+2)$，则$\begin{cases} y^2=8x \\ y=k(x+2) \end{cases}(*)$，

消去 y 可得$k^2x^2+(4k^2-8)x+4k^2=0$，

则$\Delta=(4k^2-8)^2-4k^2\cdot 4k^2=0$，

解得 $k=\pm 1$，不妨设 $k=1$，代入$(*)$中解得点 A 的坐标为$(2,4)$，

可得$\triangle ABF$ 为等腰直角三角形，

$|AB|=\sqrt{[2-(-2)]^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$，$|BF|=|AF|=4$，

设$\triangle ABF$ 外接圆的半径为 R，由直角三角形的性质可知，$R=2\sqrt{2}$，

所以ΔABF 外接圆的面积为$\pi\times\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi$，

设$\triangle ABF$ 内切圆的半径为 r，则$\frac{1}{2}(|AB|\cdot r+|AF|\cdot r+|BF|\cdot r)=\frac{1}{2}\times 4\times 4$，

解得 $r=\frac{16}{4\sqrt{2}+8}=4-2\sqrt{2}$，

当 $k=-1$，结果仍有 $r=\frac{16}{4\sqrt{2}+8}=4-2\sqrt{2}$，

$\therefore\triangle ABF$ 的内切圆的面积为 $S=\pi\times(4-2\sqrt{2})^2=(24-16\sqrt{2})\pi$.

故选 BCD.

3.【答案】$(1,3]$

【分析】由双曲线的定义得 $PF_2-PF_1=2a$，又$\frac{PF_2^2}{PF_1}$的最小值为 8，则$\frac{PF_2^2}{PF_1}=\frac{(PF_1+2a)^2}{PF_1}=PF_1+\frac{4a^2}{PF_1}+4a$，再利用基本不等式即可得 $PF_1+\frac{4a^2}{PF_1}+4a\geqslant 2\sqrt{PF_1\cdot\frac{4a^2}{PF_1}}+4a=8a$，其中 $PF_1=2a$ 时等号成立，再设 $P(x,y)(x\leq-a)$，则由双曲线第二定义，$PF_1=\left(-x-\frac{a^2}{c}\right)e=-ex-a\geq c-a$，又 $2a\geq c-a$，$e=\frac{c}{a}\leq 3$，又因为 $e>1$，即可求解离心率的取值范围.

【解析】因为 $PF_2-PF_1=2a$，

所以$\frac{PF_2^2}{PF_1}=\frac{(PF_1+2a)^2}{PF_1}=PF_1+\frac{4a^2}{PF_1}+4a\geq 2\sqrt{PF_1\cdot\frac{4a^2}{PF_1}}+4a=8a$，（＊）

其中 $PF_1=2a$ 时等号成立.

又设 $P(x,y)(x\leq-a)$，则由第二定义，得 $PF_1=\left(-x-\frac{a^2}{c}\right)e=-ex-a\geq c-a$.

要使(＊)式中等号成立，则必须 $2a\geq c-a$，所以 $e=\frac{c}{a}\leq 3$，

又因为 $e>1$，所以 $1<e\leq 3$.

4.【答案】$(2,+\infty)$

【分析】求得抛物线的焦点，讨论直线 l 的斜率不存在，可得 A，B，C，D，满足题意；当直线的斜率存在，设直线 l 方程 $y=k(x-1).A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线方程和抛物线方程，运用韦达定理和抛物线的定义，讨论当四点顺序为 A、C、D、B 时，当四点顺序为 A、C、B、D 时，考虑是否存在与直线 $x=1$ 对称的直线，即可得到所求范围.

【解析】抛物线$y^2=4x$ 焦点为$(1,0)$，

(1)当直线 $l\perp x$ 轴时，直线 l：$x=1$ 与抛物线交于 $A(1,2)$、$B(1,-2)$，

与圆$(x-1)^2+y^2=r^2$交于 $C(1,r)$，$D(1,-r)$，满足$|AC|=|BD|$.

(2)当直线 l 不与 x 轴垂直时，设直线 l 方程 $y=k(x-1).A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$，化简得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

由韦达定理$x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$，由抛物线得定义，过焦点 F 的线段$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2=4+\frac{4}{k^2}$，

当四点顺序为 A、C、D、B 时，$\because |AC| = |BD|$，

$\therefore AB$ 的中点为焦点 $F(1,0)$，这样的不与 x 轴垂直的直线不存在；

当四点顺序为 A、C、B、D 时，

$\because |AC| = |BD|$，

$\therefore |AB| = |CD|$，

又$\because |CD| = 2r$，

$\therefore 4 + \frac{4}{k^2} = 2r$，即$\frac{2}{k^2} = r - 2$，

当 $r > 2$ 时存在互为相反数的两斜率 k，即存在关于 $x = 1$ 对称的两条直线.

综上，当 $r \in (2, +\infty)$时有三条满足条件的直线.

故答案为$(2, +\infty)$.

专题 51 数列的性质

【方法点拨】

1. 数列是定义在正整数集或其有限子集上的函数，数列的函数性主要涉及数列的单调性（判断数列的增减性和确定数列中最大（小）项，求数列最值等）等；

2. 数列中的恒成立问题较函数中恒成立问题更难，但方法是想通的，一般都要分离参数，一般都要转化为研究单调性，但由于数列定义域是离散型变量，不连续，这给研究数列的单调性带来了难度，其一般解决方法是作差或作商.

【典型题示例】

例 1 若不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>a-7$ 对一切正整数 n 都成立，则正整数 a 的最大值为________.

【答案】8

【分析】要求正整数 a 的最大值，应先求 a 的取值范围，关键是求出代数式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots$

$+\frac{1}{3n+1}$的最小值，可将其视为关于 n 的函数，通过单调性求解.

【解析】令 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,

对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}=\frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)}>0$,

所以 $f(n)$ 在 $\mathbf{N}^*$ 上是增函数.

又 $f(1)=\frac{13}{12}$，对一切正整数 n，$f(n)>a-7$ 都成立的充要条件是 $\frac{13}{12}>a-7$,

所以 $a<\frac{97}{12}$，故所求正整数 a 的最大值是 8.

点评：

本题是构造函数法解题的很好的例证．如果对数列求和，那就会误入歧途．本题构造函数 $f(n)$，通过单调性求其最小值解决了不等式恒成立的问题．利用函数思想解题必须从不等式或等式中构造出函数关系并研究其性质，才能使解题思路灵活变通.

例 2　　已知常数 $\lambda\geq 0$，设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,满足：$a_1=1$，$S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}S_n+\left(\lambda\cdot 3^n+1\right)a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）．若 $a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是_______.

【答案】$\lambda>\frac{1}{3}$

【分析】已知条件 $S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}S_n+\left(\lambda\cdot 3^n+1\right)a_{n+1}$ 中含“项、和”，需抓住特征，实施消和.

【解析】$\because$ $S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}S_n+\left(\lambda\cdot 3^n+1\right)a_{n+1}$　　$a_n>0$ ，

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\lambda\cdot 3^n+1$$

则 $\frac{S_2}{a_2}-\frac{S_1}{a_1}=\lambda\cdot 3+1$，$\frac{S_3}{a_3}-\frac{S_2}{a_2}=\lambda\cdot 3^2+1$，$\cdots$ $\frac{S_n}{a_n}-\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}=\lambda\cdot 3^{n-1}+1\left(n\geq 2\right)$

相加，得 $\dfrac{S_n}{a_n}-1=\lambda\left(3+3^2+\cdots 3^{n-1}\right)+n-1$

则 $S_n=\left(\lambda\dfrac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n\left(n\geq 2\right)$

上式对 $n=1$ 也成立，

$\therefore S_n=\left(\lambda\dfrac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n\left(n\geq N^*\right)$. ③

$\therefore S_n=\left(\lambda\dfrac{3^{n+1}-3}{2}+n+1\right)\cdot a_{n+1}\left(n\geq N^*\right)$. ④

④－③，得 $a_{n+1}=\left(\lambda\dfrac{3^{n+1}-3}{2}+n+1\right)\cdot a_{n+1}-\left(\lambda\dfrac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n$

即 $\left(\lambda\dfrac{3^{n+1}-3}{2}+n\right)\cdot a_{n+1}=\left(\lambda\dfrac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n$

$\because \lambda\geq 0$，$\therefore \lambda\dfrac{3^{n+1}-3}{2}+n>0,\lambda\dfrac{3^n-3}{2}+n>0$.

$\because a_{n+1}<\dfrac{1}{2}a_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

$\therefore \lambda\dfrac{3^n-3}{2}+n<\dfrac{1}{2}(\lambda\dfrac{3^{n+1}-3}{2}+n)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

即 $\lambda>\dfrac{2n}{3^n+3}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

记 $b_n=\dfrac{2n}{3^n+3}$，则 $b_n-b_{n+1}=\dfrac{2n}{3^n+3}-\dfrac{2n+2}{3^{n+1}+3}=\dfrac{(4n-2)\cdot 3^n-6}{\left(3^n+3\right)\left(3^{n+1}+3\right)}$

当 $n=1$ 时，$b_n-b_{n+1}=0$；

当 $n\geq 2$ 时，$b_n-b_{n+1}>0$

$\therefore$ $b_1=b_2=\dfrac{1}{3}$ 是 $\{b_n\}$ 中的最大项.

综上所述，λ 的取值范围是 $\lambda>\dfrac{1}{3}$.

例 3　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$，则 $a_{2023}=$

A．0　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【分析】通过“列数”，发现其周期性求解.

【解析】$a_1=0$，$a_2=\dfrac{a_1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_1+1}=-\sqrt{3}, a_2=-\sqrt{3}$，$a_3=\dfrac{a_2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_2+1}=\sqrt{3}$，

$a_3=\sqrt{3}$，$a_4=\dfrac{a_3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_3+1}=0,\cdots$ 由上述可知，数列 $\{a_n\}$ 是每三项一次循环的数列，

则有 $a_{2023}=a_1=0$ 故选 A.

【巩固训练】

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，则在数列 $a_n=\dfrac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}(n\in N^*)$ 则数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项中最小项为第______项，最大项为第____项.

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1000$，公比 $q=\dfrac{1}{2}$，设 $p_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n(n\in N^*)$，则 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n,\cdots(n\in N^*)$ 中第______项最大.

3. 已知 $a_n=\dfrac{n}{n^2+20}(n\in N^*)$，则在数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第______项.

4. 若不等式 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}>a-7$ 对一切正整数 n 都成立，则正整数 a 的最大值为________.

5. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}\sqrt{\dfrac{1}{a_n^2}+4}=1$，记 $S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，若 $S_{2n+1}-S_n\le\dfrac{m}{30}$ 对

任意$n\in N^*$恒成立，则正整数m的最小值为____________.

6．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n(\lambda-n)-6$，若数列$\{a_n\}$单调递减，则λ的取值范围是

A．$(-\infty, 2)$　　B．$(-\infty, 3)$　　C．$(-\infty, 4)$　　D．$(-\infty, 5)$

7．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和S_n满足$S_n=2a_n-1$.若对任意正整数n都有$\lambda S_{n+1}-S_n<0$恒成立，则实数λ的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　C．$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$　　D．$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$

8.已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1\right]$,则数列$\left\{a_n\right\}$中的最小项为(　　).

A．a_1　　B．a_2　　C．a_3　　D．a_4

9.已知数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=a$，$a_{n+1}=\frac{5a_n-8}{a_n-1}\left(n\in N^*\right)$,若对任意的正整数$n$,都有$a_n>3$,则实数$a$的取值范围（　　）

A．$\left(0,3\right)$　　B．$\left(3,+\infty\right)$　　C．$\left[3,4\right)$　　D．$\left[4,+\infty\right)$

10．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{3\left(n+1\right)a_n}{n}\left(n\in N^*\right)$，若$\exists n\in N^*$，使得$a_n-3k\cdot 4^n>0$成立，则实数$k$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$　　B．$\left(-\infty,0\right]$　　C．$\left(-\infty,\frac{3}{8}\right)$　　D．$\left(-\infty,\frac{27}{64}\right)$

11.数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}(n\ge 2,n\in N^*)$，那么$a_{2019}=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．-3

12.在数列$\left\{a_n\right\}$中，若$a_1=1,a_2=2$，并有$a_n=a_{n+1}a_{n-1}$对$n>1$且$n\in N^*$恒成立；则$a_{2020}+a_{2021}=$__________________.

13.设数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=2$，且对任意正整数n，总有$\left(a_{n+1}-1\right)\left(1-a_n\right)=2a_n$成立，则数列

$\{a_n\}$的前 2019 项的乘积为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　B．1　　　C．2　　　D．.3

【答案与提示】

1.【答案】8、9

【提示】$a_n=\frac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}=\frac{\sqrt{80}-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}+1$，类比一次分式函数性质.

2.【答案】10

【提示】$a_n=1000\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$\frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n=1000\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，令$\frac{p_n}{p_{n-1}}=1000\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\geq 1$

解得$n\geq 11$.

3.【答案】 4、5

【提示】$a_n=\frac{n}{n^2+20}=\frac{1}{n+\frac{20}{n}}$，利用对勾函数性质.

4.【答案】8

【分析】 要求正整数 a 的最大值，应先求 a 的取值范围，关键是求出代数式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}$的最小值，可将其视为关于 n 的函数，通过单调性求解.

【解析】令 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{2}{3\quad n+1\quad 3n+2\quad 3n+4}>0$，

所以 $f(n)$在 $\mathbf{N}^*$上是增函数.

又$f(1)=\frac{13}{12}$，对一切正整数 n，$f(n)>a-7$ 都成立的充要条件是$\frac{13}{12}>a-7$，

所以 $a<\frac{97}{12}$，故所求正整数 a 的最大值是 8.

5.【答案】10

【提示】$a_{n+1}\sqrt{\frac{1}{a_n^{\ 2}}+4}=1$ 得 $\frac{1}{a_{n+1}^{\ 2}}-\frac{1}{a_n^{\ 2}}=4$，$\frac{1}{a_n^{\ 2}}=4n-3$，$a_n^{\ 2}=\frac{1}{4n-3}$，

$S_{2n+1}-S_n=a_{n+1}^{\ 2}+a_{n+2}^{\ 2}+\cdots+a_{2n+1}^{\ 2}=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+5}+\cdots+\frac{1}{8n+1}$，仿上题求最大值.

6.【答案】A

【解析】$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n-1}(2\lambda-2n-1),n\ge 2$，$a_1=3\lambda-9$，

因为$\{a_n\}$单调递减，所以$a_n-a_{n-1}<0,(n\ge 2)$，

所以$a_n-a_{n-1}=3^{n-2}\cdot 4(\lambda-n-1)<0,n\ge 3$，且$a_2-a_1=3\lambda-6<0$，

所以只需$\lambda-n-1<0$，$n\ge 3$，且$\lambda<2$，

所以$\lambda<2$，故选 A.

7.【答案】C

【解析】当$n=1$时，$S_1=2a_1-1$，即$a_1=2a_1-1$，得$a_1=1$；

当$n\ge 2$时，由$S_n=2a_n-1$，得$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，两式相减得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，得

$a_n=2a_{n-1}$，$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，所以，数列$\{a_n\}$为等比数列，且首项为$1$，公比为$2$，

$\therefore a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$.$\therefore S_n=2a_n-1=2\times 2^{n-1}-1=2^n-1$，

由$\lambda S_{n+1}-S_n<0$，得$\lambda<\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)-\frac{1}{2}}{2^{n+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{n+1}-1)}$，

所以，数列$\left\{\frac{S_n}{S_{n+1}}\right\}$单调递增，其最小项为$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2-1}{2^2-1}=\frac{1}{3}$，所以，$\lambda<\frac{1}{3}$，

因此，实数λ的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$，故选 C.

8.【答案】C

【解析】因为$a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1\right]\le 0$, $(n\in N^{+})$

所以$-a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]\ge 0$,

所以$-a_n\le\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

当且仅当$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\Rightarrow n=\log_{\frac{3}{4}}\frac{1}{2}+1$取"=".

又因为$3<\log_{\frac{3}{4}}\frac{1}{2}+1<4$.

当$n=3$时, $a_3=\left(\frac{3}{4}\right)^2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\right]=-\frac{63}{256}$.

当$n=4$时, $a_4=\left(\frac{3}{4}\right)^3\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3-1\right]=-\frac{999}{4096}$.

所以数列$\{a_n\}$中的最小项为a_3.故选：C.

9.【答案】B

【解析】$\because a_{n+1}=\frac{5a_n-8}{a_n-1}=\frac{5(a_n-1)-3}{a_n-1}=5-\frac{3}{a_n-1}(a_n>3)$，

又$y=5-\frac{3}{x-1}$在区间$(3,+\infty)$上单调递增,

$\therefore a_{n+1}>a_n>\ldots>a_1=a>3$， $\therefore$实数a的取值范围$(3,+\infty)$，故选：B.

10.【答案】D

【解析】$\because a_{n+1}=\frac{3(n+1)a_n}{n}(n\in N^{*})$, $\therefore\frac{a_{n+1}}{n+1}=3\frac{a_n}{n}$,

记 $b_n=\frac{a_n}{n}$,则 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=3$, $q=3$ 的等比数列,

$\therefore b_n=3^n$, $\therefore a_n=n\cdot 3^n$,

$\because \exists n\in N^*$, $a_n-3k\cdot 4^n>0$,

等价于 $\exists n\in N^*$， $3k<n\left(\frac{3}{4}\right)^n$， 即 $3k<\left(n\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)_{\max}$

令 $c_n=n\left(\frac{3}{4}\right)^n$,则 $c_{n+1}-c_n=(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-n\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\frac{3-n}{4}$

$\therefore n<3$ 时, $c_{n+1}>c_n$; $n\geq 4$ 时, $c_{n+1}<c_n$.

$\therefore c_1<c_2<c_3=c_4>c_5>c_6\cdots$,

$\therefore \left(n\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)_{\max}=c_3=c_4=\frac{81}{64}$.

$\therefore k<\frac{27}{64}$, $\therefore$ 实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{27}{64}\right)$,故选：D

11.【答案】B

【解析】由题意，得 $a_3=2$， $a_4=-1$， $a_5=-3$， $a_6=-2$， $a_7=1$，…，由此发现数列 $\{a_n\}$ 是以 6 为周期的数列，又 $2019=336\times 6+3$，所以 $a_{2019}=a_3=2$，故正确答案为 B.

12.【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】由条件 $a_n=a_{n+1}a_{n-1}$ 及 $a_{n+1}=a_{n+2}a_n$，得 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}$，

即 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n-1}}$（$n>1$ 且 $n\in N^*$），则 $a_{n+6}=\frac{1}{a_{n+3}}=a_n\left(n\in N^*\right)$，从而知 6 是数列 $\{a_n\}$ 的一个周期；

由 $a_1=1, a_2=2$， 及 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$， 得 $a_3=2, a_4=1, a_5=a_6=\frac{1}{2}$；故

$a_{2020}+a_{2021}=a_4+a_5=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$·故答案为：$\frac{3}{2}$.

另解：由 $a_1=1,a_2=2$，又 $a_n=a_{n+1}a_{n-1}$ 即 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 对 $n>1$ 且 $n\in N^*$，可得

$a_3=2,a_4=1,a_5=a_6=\frac{1}{2},a_7=1,a_8=2,\cdots,$ 从而知 6 是数列 $\{a_n\}$ 的一个周期；

故 $a_{2020}+a_{2021}=a_4+a_5=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.故答案为：$\frac{3}{2}$

13.【答案】D

【解析】由题意可得：$a_{n+1}=1+\frac{2a_n}{1-a_n}$，故：$a_1=2$，$a_2=1+\frac{2a_1}{1-a_1}=-3$，

$a_3=1+\frac{2a_2}{1-a_2}=-\frac{1}{2}$，

$a_4=1+\frac{2a_3}{1-a_3}=\frac{1}{3}$，$a_5=1+\frac{2a_4}{1-a_4}=2=a_1$，据此可得数列 $\{a_n\}$ 是周期为 $T=4$ 的周期数列，

注意到 $2019MOD4=3$，且：$a_1a_2a_3a_4=1$，故数列 $\{a_n\}$ 的前 2019 项的乘积为：

$2\times(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$.

故选 D.

专题 52 数列通项结构的应用

【方法点拨】

1.数列 $\{a_n\}$ 是等差数列⇔$a_n=pn+q$(p，q 为常数).

2. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列⇔$S_n=An^2+Bn$(A，B 为常数).

3. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列，且其首项为 a_1，公差为 $\{a_n\}$ 公差的 $\frac{1}{2}$.

4.两个等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n、T_n之间的关系为$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

5. 两个等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n、T_n，若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{An+B}{Cn+D}$，则

$$\frac{a_n}{b_m}=\frac{A(2n-1)+B}{C(2m-1)+D}.$$

【典型题示例】

例 1　S_n是公差为 2 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若数列$\{\sqrt{S_n+1}\}$也是等差数列，则 $a_1=$__________.

【答案】-1或 3

【分析】用特殊值法，也可直接抓住等差数列的结构特征解题.

【解析一】（特殊值法）由题意$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+(a_1-1)n$，

∵数列$\{\sqrt{S_n+1}\}$是等差数列

∴ $2\sqrt{S_2+1}=\sqrt{S_1+1}+\sqrt{S_3+1}$，$2\sqrt{2a_1+3}=\sqrt{a_1+1}+\sqrt{3a_1+7}$，

解得$a_1=-1$或$a_1=3$，

$a_1=-1$时，$\sqrt{S_n+1}=\sqrt{n^2-2n+1}=n-1$，$a_1=3$时，$\sqrt{S_n+1}=\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$，

均为n的一次函数，数列$\{\sqrt{S_n+1}\}$是等差数列，

故a_1的值为－1 或 3.

【解析一】（特殊值法）由题意$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+(a_1-1)n$，

∵数列$\{\sqrt{S_n+1}\}$是等差数列

∴ $\sqrt{S_n}=\sqrt{n^2+(a_1-1)n+1}$必为关于 n 的一次式，即$n^2+(a_1-1)n+1$是完全平方式

∴ $(a_1-1)^2-4=0$

解之得 $a_1=-1$ 或 $a_1=3$（下同解法一）.

例 2　已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 $q(q>1)$ 的等比数列，且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\sqrt{S_n+2}$ 也为等比数列，则 $q=$___________.

【答案】2

【解析】因为 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 $q(q>1)$ 的等比数列.

所以 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{2-2q^n}{1-q}=\dfrac{-2q^n}{1-q}+\dfrac{2}{1-q}$.

$$S_n+2=\frac{-2q^n}{1-q}+\frac{2}{1-q}+2$$

$\sqrt{S_n+2}$ 为等比数列，则 $\{S_n+2\}$ 也为等比数列.

所以 $\dfrac{2}{1-q}+2=0$，即 $q=2$.

点评：等比数列通项的结构特征是：$a_n=Aq^n(A、q\neq 0)$.

例 3　已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n，且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$，则使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是_____________.

【答案】5

【解析】根据等差数列前 n 项和的公式不难得到：

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n}=\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}=\frac{7n+19}{n+1}\qquad (*)$$

（*）式是一个关于 n 的一次齐次分式，遇到此类问题的最基本的求解策略是“部分分式”——即将该分式逆用通分，将它转化为分子为常数，只有分母中含有变量 n

因为 $\dfrac{7n+19}{n+1}=\dfrac{7(n+1)+12}{n+1}=7+\dfrac{12}{n+1}$

所以，要求使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数n，只需$n+1$为12的不小于2的正约数

所以$n+1=2,3,4,6,12$

例 4　已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=-2\ 014$，$\frac{S_{2\ 014}}{2\ 014}-\frac{S_{2\ 008}}{2\ 008}=6$，则$S_{2\ 020}$等于________.

【答案】2 020

【解析】由等差数列的性质可得$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列，设其公差为$d$，

则$\frac{S_{2\ 014}}{2\ 014}-\frac{S_{2\ 008}}{2\ 008}=6d=6$，$\therefore d=1$，且首项为$\frac{S_1}{1}=-2\ 014$.

故$\frac{S_{2\ 016}}{2\ 016}=\frac{S_1}{1}+2\ 015d=-2\ 014+2\ 015=1$，

$\therefore S_{2\ 020}=1\times 2\ 020=2\ 020$.

【巩固训练】

1.记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，已知$a_1=2$，且数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$也为等差数列，则$a_{13}$=____________.

2. 已知公差大于零的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_3\cdot a_4=117$，$a_2+a_5=22$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{S_n}{n+c}$（其中$c\neq 0$），若$\{b_n\}$为等差数列，则c的值等于________.

3. 设等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若对任意自然数n都有$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3^n+1}{4}$，

则$\frac{a_3}{b_3}$的值为________.

4. 设S_n，T_n分别是等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和，已知$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{4n-2}$，$n\in N^*$，则

$\frac{a_{10}}{b_3+b_{18}}+\frac{a_{11}}{b_6+b_{15}}=$_______.

5.已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_7=7$，$S_{15}=75$，则数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$的前20项和为____.

6. 已知数列的$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$\{a_n\}$和$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$都是等差数列，则$\dfrac{S_{n+10}}{a_n}$的最小值是_____.

【答案与提示】

1.【答案】50

【解析】设该等差数列的公差为d，

则由等差数列求和公式得$S_n=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+(2-\dfrac{d}{2})n$.

又因为数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$为等差数列，$2-\dfrac{d}{2}=0$，故$d=4$.

所以$a_{13}=a_1+12d=50$.

2.【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$d>0$，由等差数列的性质，得$a_2+a_5=a_3+a_4=22$，

所以a_3，a_4是关于x的方程$x^2-22x+117=0$的解，所以$a_3=9$，$a_4=13$，易知$a_1=1$，$d=4$，故通项为$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$.

所以$b_n=\dfrac{S_n}{n+c}=\dfrac{2n^2-n}{n+c}$.

法一 （特殊值法）所以$b_1=\dfrac{1}{1+c}$，$b_2=\dfrac{6}{2+c}$，$b_3=\dfrac{15}{3+c}(c\neq0)$.

令$2b_2=b_1+b_3$，解得$c=-\dfrac{1}{2}$.

当$c=-\dfrac{1}{2}$时，$b_n=\dfrac{2n^2-n}{n-\dfrac{1}{2}}=2n$，

当$n\geq2$时，$b_n-b_{n-1}=2$.

故当 $c=-\frac{1}{2}$时，数列$\{b_n\}$为等差数列.

法二　由 $b_n=\frac{S_n}{n+c}=\frac{\frac{n(1+4n-3)}{2}}{n+c}=\frac{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n+c}$,

∵$c\neq 0$，∴可令 $c=-\frac{1}{2}$，得到 $b_n=2n$.

∵$b_{n+1}-b_n=2(n+1)-2n=2(n\in\mathbf{N}^*)$,

∴数列$\{b_n\}$是公差为 2 的等差数列.

即存在一个非零常数 $c=-\frac{1}{2}$，使数列$\{b_n\}$也为等差数列.

3.【答案】9

【解析】联想等比数列的前 n 项和的结构特征，可知：$S_n=\frac{a_1(1-9^n)}{1-9}$，$T_n=\frac{b_1(1-3^n)}{1-3}$，

且 $a_1=b_1$　　　　所以 $\frac{a_3}{b_3}=(\frac{9}{3})^2=9$.

4.【答案】$\frac{41}{78}$

【提示】因为 $b_3+b_{18}=b_6+b_{15}$，所以 $\frac{a_{10}}{b_3+b_{18}}+\frac{a_{11}}{b_6+b_{15}}=\frac{a_{10}+a_{11}}{b_6+b_{15}}=\frac{a_{10}+a_{11}}{b_{10}+b_{11}}=\frac{S_{20}}{T_{20}}$.

5.【答案】55

【解析】由等差数列的性质得 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列，设 $b_n=\frac{S_n}{n}$，其公差为 d

且 $b_7=\frac{S_7}{7}=1$，$b_{15}=\frac{S_{15}}{15}=5$，所以 $d=\frac{1}{2}$，$b_1=-2$

所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 20 项和即为 $\{b_n\}$ 的前 20 项和，故为 $20\times(-2)+\frac{20\times 19}{2}\times\frac{1}{2}=55$.

6.【答案】21

【解析】设该等差数列的公差为 d，

则由等差数列求和公式得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

又因为数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$为等差数列，$a_1-\frac{d}{2}=0$，故$d=2a_1$.

所以$\frac{S_{n+10}}{a_n}=\frac{(n+10)^2a_1}{(2n-1)a_1}=\frac{1}{4}[(2n-1)+\frac{21^2}{2n-1}]+\frac{21}{2}\geq 21$，

当且仅当$n=10$时，“=”成立.

所以$\frac{S_{n+10}}{a_n}$的最小值是21.

专题53 数列奇偶项问题

【方法点拨】

定义　在数列$\{a_n\}$中，若任意$n\in N^*$，存在$t\in N^*$且$t\geq 2$，都有$a_{n+t}-a_n=d$（d为常数），则称数列$\{a_n\}$是“隔项成等差”数列.

类型1　$a_n+a_{n+1}+\cdots a_{n+t}=An+B$：

由$\begin{cases}a_n+a_{n+1}+\cdots a_{n+t}=An+B\\ a_{n-1}+a_n+\cdots a_{n+t-1}=An-A+B\end{cases}$，两式相减得$a_{n+t}-a_{n-1}=A(n\geq 2)$，这就得到“隔项成等差”数列$\{a_n\}$，特别的，当$A=0$时，数列$\{a_n\}$为周期数列.

类型2　$S_n+S_{n+1}+\cdots S_{n+t}=An^2+Bn+C$：

由$\begin{cases}S_n+S_{n+1}+\cdots S_{n+t}=An^2+Bn+C\\ S_{n-1}+S_n+\cdots S_{n+t-1}=A(n-1)^2+B(n-1)+C\end{cases}$，两式相减得$a_n+a_{n+1}+\cdots a_{n+t}=2An-A+B(n\geq 2)$，这样，类型2就转化为类型1了，所不同的是不包含首项a_1.

类型3　$a_{n+1}+(-1)^n a_n=An+B$：

对 n 赋值，有 $\begin{cases} a_{2n+1}+a_{2n}=2An+B \\ a_{2n}-a_{2n-1}=2An-A+B \\ a_{2n+2}-a_{2n-1}=2An+A+B \end{cases}$，通过加减可得 $\begin{cases} a_{2n+1}+a_{2n-1}=A \\ a_{2n}+a_{2n+2}=4An+A+2B \end{cases}$，

从而 $a_{2n-2}+a_{2n}=4An-3A+2B$，所以 $a_{2n+2}-a_{2n}=4A$，这就得到“隔项成等差”数列.

【典型题示例】

例 1　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=11-n+(-1)^n$，且 $0<a_6<1$．记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则当 S_n 取最大值时 n 为(　　)

A．11　　B．12　　C．11 或 13　　D．12 或 13

【答案】C

【解析】设 $a_1=t$，由 $a_{n+1}+a_n=11-n+(-1)^n$，

可得 $a_2=9-t$，$a_3=1+t$，$a_4=6-t$，$a_5=2+t$，$a_6=3-t$，$a_7=3+t$，$a_8=-t$，…，

$0<a_6<1$ 可得 $0<3-t<1$，可得 $2<t<3$，

则数列 $\{a_n\}$ 的奇数项为首项为 t，公差为 1 的等差数列；偶数项为首项为 $9-t$，公差为 -3 的等差数列，

且每隔两项的和为 9，7，5，3，1，-1，…，为递减，

可得 $S_{10}=9=5+7+5+3+1=25$，$S_{11}=25+a_{11}=30+t$，$S_{12}=25-1=24$，$S_{13}=24+a_{13}=24+6+t=30+t$，$S_{14}=24-3=21$，…，

则当 S_n 取最大值时 $n=11$ 或 13.

例 2　设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $4S_n=2a_n-n^2+7n\left(n\in N^*\right)$，则 $a_{11}=$ ________.

【答案】-2

【解析】由 $4S_n=2a_n-n^2+7n\left(n\in N^*\right)$ 得，$4S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)^2+7(n-1)(n\ge 2)$

两式相减得，$4S_n-4S_{n-1}=2a_n-n^2+7n-2a_{n-1}+(n-1)^2-7(n-1)(n\ge 2)$

即 $a_n+a_{n-1}=-n+4(n\ge 2)$，所以 $a_{n-1}+a_{n-2}=-n+5(n\ge 3)$

两式相减得，$a_n-a_{n-2}=-1(n\ge 3)$

又将 $n=1$ 代入 $4S_n=2a_n-n^2+7n\left(n\in N^*\right)$ 得，$a_1=3$

所以 $a_{11}=a_1+5\times(-1)=-2$.

例 3 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，前 16 项和为 540，则 $a_1=$ ______.

【答案】7

【分析】对 n 为奇偶数分类讨论，分别得出奇数项、偶数项的递推关系，由奇数项递推公式将奇数项用 a_1 表示，由偶数项递推公式得出偶数项的和，建立 a_1 方程，求解即可得出结论.

【解析】$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，

当 n 为奇数时，$a_{n+2}=a_n+3n-1$；当 n 为偶数时，$a_{n+2}+a_n=3n-1$.

设数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，

$S_{16}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{16}$

$=a_1+a_3+a_5\cdots+a_{15}+(a_2+a_4)+\cdots(a_{14}+a_{16})$

$=a_1+(a_1+2)+(a_1+10)+(a_1+24)+(a_1+44)+(a_1+70)$

$+(a_1+102)+(a_1+140)+(5+17+29+41)$

$=8a_1+392+92=8a_1+484=540$，

$\therefore a_1=7$.

点评：

本题综合考查数列的递推公式的应用、数列的并项求和、分类讨论思想和数学计算能力.

例 4 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$2S_n=a_{n+1}a_n$，则 $S_{20}=($ $)$

A．200　　　　B．210　　　　C．400　　　　D．410

【答案】B

【分析】首先利用递推关系式求出数列的通项公式，进一步利用等差数列的前 n 项和公式的应用求出结果．

【解析】由题 $a_1=1$，$2S_n=a_{n+1}a_n$，又因为 $a_1=S_1$

所以当 $n=1$ 时，可解的 $a_2=2$

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}=a_n a_{n-1}$，与 $2S_n=a_{n+1}a_n$ 相减得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$

当 n 为奇数时，数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首相，2 为公差的等差数列，$a_n=2n-1$

当 n 为偶数时，数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首相，2 为公差的等差数列，$a_n=2n$

所以当 n 为正整数时，$a_n=n$，

则 $S_{20}=1+2+3+\cdots+20=210$.故选 B.

【巩固训练】

1.数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则其前 60 项和为__________.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n}$，$n\in N^*$，则 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{100}=$________.

3. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n},n\in N^*$, 则

（1）$a_3=$______；（2）$S_1+S_2+\cdots+S_{100}=$_________.

4.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对任意 $n\in \mathrm{N}_+$，$S_n=(-1)^n a_n+\frac{1}{2^n}+n-3$ 且 $(t-a_{n+1})(t-a_n)<0$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是_________.

5. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $3S_n=a_n a_{n+1}$，则 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=$_______.

6.设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=1,a_3=4,a_4=\frac{1}{4}$，数列$\{a_n\}$前 n 项和是S_n，对任意的$n\in N^*$，$f(x)=\frac{a_{n+2}}{a_n}x+(a_n+a_{n+2}-2a_{n+1})\cos x-\frac{a_{n+4}}{a_{n+2}}e^x$，若$f'(0)=0$，当$n$是偶数时，$S_n$的表达式是___________.

7. 若数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3n-6$，且数列$\{a_n\}$的前n项的和S_n总满足$S_n=An^2+Bn+C$（其中A、B、C为常数），则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$ __________.

8. 若数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3n-6$，且$a_2=\frac{1}{2}a_1$，若数列$\{a_n\}$单调递增，则a_1的取值范围为___________.

9.已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且满足$a_na_{n+1}=2^n\left(n\in N^*\right)$，则$a_{20}=$__________.

【答案或提示】

1.【答案】1830

【解析】由$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，可得$a_2-a_1=1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$a_5+a_4=7$，$a_6-a_5=7$，$a_7-a_6=11$，・・・，$a_{100}-a_{99}=199$

所以$a_3+a_1=2$，$a_4+a_2=8$，$a_7+a_5=2$，$a_8+a_6=24$，$a_9+a_{11}=2$，$a_{12}+a_{10}=40$，・・・，

所以从第一项起，每四项的和构成以 10 为首项，16 为公差的等差数列

所以$\{a_n\}$前60项和为$15\times10+\frac{15\times14}{2}\times16=1830$.

2.【答案】$\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1)$

【提示】奇偶项分别成等差数列.

3.【答案】$-\dfrac{1}{16}$；$\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2^{100}}-1)$

【解法一】$\because S_n=(-1)^n a_n-\dfrac{1}{2^n}$　　$\therefore$当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=(-1)^{n-1}a_{n-1}-\dfrac{1}{2^{n-1}}$

两式相减得$S_n-S_{n-1}=(-1)^n a_n-\dfrac{1}{2^n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}+\dfrac{1}{2^{n-1}}$，即

$a_n=(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}+\dfrac{1}{2^n}$

当n是偶数时，$a_n=a_n+a_{n-1}+\dfrac{1}{2^n}$，所以$a_{n-1}=-\dfrac{1}{2^n}$，即$n$是奇数时，$a_n=-\dfrac{1}{2^{n+1}}$；

当n是奇数时，$2a_n=-a_{n-1}+\dfrac{1}{2^n}$，$a_{n-1}=-2a_n+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，即当$n$是偶数时，$a_n=\dfrac{1}{2^n}$.

$\therefore S_1+S_2+\cdots+S_{100}=(-a_1-\dfrac{1}{2})+(a_2-\dfrac{1}{2^2})+\cdots+(a_{100}-\dfrac{1}{2^{100}})$

$=(a_2+a_4+\cdots+a_{100})-(a_1+a_3+\cdots+a_{99})-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{100}})$

$=(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{100}})+(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\cdots+\dfrac{1}{2^{99}})-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{100}})$

$=(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{100}})-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{100}})=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2^{100}}-1)$.

【解法二】$\because S_n=(-1)^n a_n-\dfrac{1}{2^n}$　　$\therefore S_n=(-1)^n(S_n-S_{n-1})-\dfrac{1}{2^n}$

当n是偶数时，$S_n=S_n-S_{n-1}-\dfrac{1}{2^n}$，$S_{n-1}=-\dfrac{1}{2^n}$，即当$n$是奇数时，$S_n=-\dfrac{1}{2^{n+1}}$；

当n是奇数时，$S_n=-S_n+S_{n-1}-\dfrac{1}{2^n}$，$S_{n-1}=2S_n+\dfrac{1}{2^n}=0$，即当$n$是偶数时，$S_n=0$；

$$S_1+S_2+\cdots+S_{100}=-(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}})=-\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{102}}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1).$$

4.【答案】$-\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{11}{4}$

【解析】当$n=1$时，$a_1=-\dfrac{3}{4}$

当 $n>2$ 时，$S_{n-1}=(-1)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}+n-4$，所以 $a_n=(-1)^n a_n+(-1)^n a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+1$

当 n 为偶数时，$a_{n-1}=\frac{1}{2^n}-1$；

当 n 为奇数时，$2a_n=-a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+1$，即 $\frac{1}{2^n}-2=-a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+1$，$a_{n-1}=3-\frac{2}{2^n}$.

所以 $a_n=\begin{cases}3-\frac{1}{2^n},n\text{为偶数}\\ \frac{1}{2^{n+1}}-1,n\text{为奇数}\end{cases}$.

当 n 为偶数时，$a_n=3-\frac{1}{2^n}\in\left[\frac{11}{4},3\right)$，当 n 为奇数时，$a_n=\frac{1}{2^{n+1}}-1\in\left(-1,-\frac{3}{4}\right]$

又因为 $(t-a_{n+1})(t-a_n)<0$ 恒成立，$a_{n+1}<t<a_n$，所以 $-\frac{3}{4}<t<\frac{11}{4}$.

5.【答案】 $\frac{3n(n+1)}{2}$

【解析】$\because 3S_n=a_na_{n+1}$　　$\therefore 3S_{n-1}=a_{n-1}a_n$（$n\ge 2$）

两式相减得 $3(S_n-S_{n-1})=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$，即 $3a_n=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$

又因为 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，所以 $a_{n+1}-a_{n-1}=3$（$n\ge 2$）

当 $n=1$ 时，由 $3S_n=a_na_{n+1}$ 得 $3S_1=3a_1=a_1a_2$，所以 $a_2=3$

故 $a_2,a_4,a_6,a_8,\cdots$ 是以 $a_2=3$ 为首项，公差为 3 的等差数列

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n\times 3+\frac{n\times(n-1)}{2}\times 3=\frac{3n(n+1)}{2}$.

6.【答案】 $\frac{2^n}{3}-\frac{4}{3\times 2^n}+1$

【解析】$f'(x)=\frac{a_{n+2}}{a_n}-(a_n+a_{n+2}-2a_{n+1})\sin x-\frac{a_{n+4}}{a_{n+2}}e^x$：，

因为 $f'(0)=0$，所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n}-\frac{a_{n+4}}{a_{n+2}}=0$，即 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+4}}{a_{n+2}}$，所以数列 $\{a_n\}$ 中所有的奇数项成等比数列，所有的偶数项成等比数列，所以当 n 是偶数时，

S_n 的表达式是 $\dfrac{1\cdot\left(1-4^{\frac{n}{2}}\right)}{1-4}+\dfrac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{4}{3\times 2^n}+1$.

7.【答案】$a_n = n - 3$

8.【答案】a_1 Î $(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{3}{2})$

9.【答案】512

【分析】利用已知将 n 换为 $n+1$，再写一个式子，与已知作比，得到数列 $\{a_n\}$ 的各个偶数项成等比，公比为 2，再求得 $a_2=1$，最后利用等比数列的通项公式即可得出.

【解析】∵$a_na_{n+1}=2^n$，（$n\in N^*$）∴$a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+2}$.（$n\in N^*$）

∴ $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=2$，（$n\in N^*$），∴数列 $\{a_n\}$ 的各个奇数项 a_1，a_3，a_5…成等比，公比为 2，

数列 $\{a_n\}$ 的各个偶数项 a_2，a_4，a_6…成等比，公比为 2，

又∵$a_na_{n+1}=2^n$，（$n\in N^*$），∴$a_1a_2=2$,又 $a_1=2$，∴ $a_2=1$，

可得：当 n 为偶数时，$a_n=a_2\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$ ∴$a_{20}=1\cdot 2^9=512$．故答案为 512．

专题 54 利用拆凑法求不等式的最值

【方法点拨】

1. 已知的一边是二次齐次可分解，另一边是常数，可考虑换元法；
2. 例 2、例 3 中使用了拆凑用以“凑形”，其目的在于一次使用基本不等式，能实现约分或倍数关系.

【典型题示例】

例 1 若实数 x，y 满足 $2x^2+xy-y^2=1$，则 $\dfrac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值为______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】因为 $2x^2+xy-y^2=(2x-y)(x+y)$， $x-2y=(2x-y)-(x+y)$，

$5x^2-2xy+2y^2=(2x-y)^2+(x+y)^2$，设 $2x-y=u$， $x+y=v$，

故原问题可转化为“已知 $u\cdot v=1$，求 $\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$ 的最大值”．

又因为 $\dfrac{u-v}{u^2+v^2}=\dfrac{u-v}{(u-v)^2+2uv}=\dfrac{1}{(u-v)+\dfrac{2}{u-v}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{(u-v)\cdot\dfrac{2}{u-v}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\dfrac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$， 当且仅当 $u-v=\sqrt{2}$ 时取等号．

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．

例 2 已知 $x,y,z\in R^+$，则 $\mu=\dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值是________

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】本题变量个数较多且不易消元，考虑利用均值不等式进行化简，要求得最值则需要分子与分母能够将变量消掉，观察分子为 xy,yz 均含 y，故考虑将分母中的 y^2 拆分与 x^2,z^2 搭配，即 $\mu=\dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{xy+yz}{\left(x^2+\dfrac{1}{2}y^2\right)+\left(\dfrac{1}{2}y^2+z^2\right)}$， 而

$x^2+\dfrac{1}{2}y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{2}y^2}=\sqrt{2}xy,z^2+\dfrac{1}{2}y^2\ge 2\sqrt{z^2\cdot\dfrac{1}{2}y^2}=\sqrt{2}yz$， 所以

$\mu\le\dfrac{xy+yz}{\sqrt{2}xy+\sqrt{2}yz}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

点评：

本题在拆分 y^2 时还有一个细节，因为分子 xy,yz 的系数相同，所以要想分子分母消去变量，则分母中 xy,yz 也要相同，从而在拆分 y^2 的时候要平均地进行拆分（因为 x^2,z^2 系数也相同）．所以利用均值不等式消元要善于调整系数，使之达到消去变量的目的．

例 3　若实数 x，y 满足 $x^2+2xy-1=0$，则 x^2+y^2 的最小值是__________.

【分析】

思路 1：注意到条件与所求均含有两个变量，从简化问题的角度来思考，消去一个变量，转化为只含有一个变量的函数，从而求它的最小值．本题中可直接由已知解得 y，代人所求消去 y；也可将直接使用“1”的代换，将所求转化为关于 x，y 的二次齐次分式.

思路 2：由所求的结论为 x^2+y^2，想到将条件应用基本不等式构造出 x^2+y^2，然后将 x^2+y^2 求解出来即可.

【解析一】从结论出发，注意到已知中不含“y^2”项，故拆“x^2”项的系数

设 $x^2+y^2=tx^2+(1-t)x^2+y^2=tx^2+[(1-t)x^2+y^2]\geqslant tx^2+2\sqrt{1-t}\,xy(0<t<1)$　　※

则 $t:2\sqrt{1-t}=1:2$，解之得：$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

代人※得：$x^2+y^2\geqslant\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(x^2+2xy)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x^2+y^2$ 的最小值是$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

【解析二】从已知出发，注意到结论中不含“xy”项，故拆“xy” 项的系数

设 $x^2+2xy=x^2+2(tx)(\frac{1}{t}y)\leqslant x^2+[(tx)^2+(\frac{1}{t}y)^2]=(1+t^2)x^2+\frac{1}{t^2}y^2$

则$(1+t^2):\frac{1}{t^2}=1:1$(下略).

【巩固训练】

1. 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，则 $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2+5}{2bc+ac}$ 的最小值为__________.

2.已知正实数 x，y 满足 $x^2+xy-2y^2=1$，则 $5x-2y$ 的最小值为__________.

3.已知 $a,b,c>0$，则 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}$ 的最小值为____________.

4.当 m,n 是正实数时，$\dfrac{4m+n}{m^2+n^2+1}$ 的最大值是______.

【答案与提示】

1,【答案】4

【解析】注意到分母中因式均含 c，故需拆分子含“c^2” 项的系数

设$a^2+b^2+c^2=(a^2+tc^2)+[b^2+(1-t)c^2]\geq 2\sqrt{t}ac+2\sqrt{1-t}bc$

故$\sqrt{t}$：$\sqrt{1-t}=1:2$，解之得：$t=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$a^2+b^2+c^2\geq\frac{2\sqrt{5}}{5}(ac+2bc)$

当且仅当$a^2=\frac{1}{5}c^2$，$b^2=\frac{4}{5}c^2$，即 $a=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$，$b=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$ 时，等号成立.

则$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+5}{2bc+ac}\geq\frac{4(ac+2bc)}{5}+\frac{5}{2bc+ac}\geq 4$，当且仅当 $2bc+ac=5$ 时，等号成立.

2.【答案】4

【解析】：将已知条件左边分解因式得 $x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)=1$

因为 x，y 是正实数，且$(x-y)(x+2y)=1>0$，所以 $x-y>0$ ， $x+2y>0$

设 $5x-2y=a(x-y)+b(x+2y)$，则 $a=4$，$b=1$，所以 $5x-2y=4(x-y)+(x+2y)$

由基本不等式得 $4(x-y)+(x+2y)\geq 2\sqrt{4(x-y)(x+2y)}=4$.

3.【答案】$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析一】$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}=\dfrac{(a^2+\frac{1}{5}b^2)+(\frac{4}{5}b^2+c^2)}{ab+2bc}\geq\dfrac{2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{5}b^2}+2\sqrt{\frac{4}{5}b^2\cdot c^2}}{ab+2bc}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析二】$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}=\dfrac{(\frac{a}{b})^2+1+(\frac{c}{b})^2}{\frac{a}{b}+2\frac{c}{b}}$，设 $\frac{a}{b}=x,\frac{c}{b}=y$，$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}=t(t>0)$.

则满足等式$\dfrac{x^2+1+y^2}{x+2y}=t$ 的 x,y 存在，去分母后配方得：$(x-\frac{t}{2})^2+(y-t)^2=\frac{5}{4}t^2-1$，

故$\frac{5}{4}t^2-1\geq 0$，解得$t\geq\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

4.【答案】$\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

【解法一】$\dfrac{4m+n}{m^2+n^2+1}=\dfrac{4m+n}{m^2+\frac{16}{17}+n^2+\frac{1}{17}}\le\dfrac{4m+n}{2m\sqrt{\frac{16}{17}}+2n\sqrt{\frac{1}{17}}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

【解法二】设 $\dfrac{4m+n}{m^2+n^2+1}=\dfrac{1}{t}(t>0)$

所以 $m^2+n^2+1=t(4m+n)$，即 $(m-2t)^2+(n-\frac{t}{2})^2=\frac{17}{4}t^2-1$

故 $\frac{17}{4}t^2-1\ge 0$，解之得 $\frac{1}{t}\ge\frac{\sqrt{17}}{2}$.

【解法三】令 $m^2+n^2=r^2$，$m=r\cos\theta,n=r\sin\theta$

$$\frac{4m+n}{m^2+n^2+1}=\frac{4r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2+1}=\frac{\sqrt{17}r\sin(\theta+\alpha)}{r^2+1}\le\frac{\sqrt{17}r}{r^2+1}=\frac{\sqrt{17}}{r+\frac{1}{r}}\le\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

专题 55 一类貌似神离的不等式求最值

【方法点拨】

1. 已知 $ax+by=xy$，求 $mx+ny$ 的最值型（其中 a、b、m、n 均为正数）.

此类问题应归结为“知和求和”型，解决的策略是利用常数代换，即将“1”将已知与所求进行相乘，从而得到常数项与互为倒数的两项，然后利用均值不等式求解；也可用“权方和不等式”求解.

2. 已知 $ax+by+cxy+d=0$，求 $mx+ny$ 的最值型.

此类问题应采取“强分”的方法，即将 $ax+by+cxy+d=0$ 分解为 $(ex+f)(gy+h)=t$，然后直接使用基本不等式求解为最简单途径.

说明:关键要分清题设的条件的不同，根据不同的“结构特征”寻找解题的突破口，决不要“张冠李戴”.

【典型题示例】

例 1 已知 $x>0,y>0,x+y=xy$，求 $2x+y$ 的最小值.

【答案】$3+2\sqrt{2}$

【解析一】对 $x+y=xy$ 两边同时除以 xy 得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

$$2x+y=(2x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}+3\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}+3=2\sqrt{2}+3$$ （等号成立条件略）

即 $2x+y$ 的最小值 $3+2\sqrt{2}$.

【解析二】（权方和不等式）对 $x+y=xy$ 两边同时除以 xy 得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

所以 $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{2x}+\frac{1}{y}\geq\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{2x+y}$

所以 $2x+y\geq 3+2\sqrt{2}$（等号成立条件略）

即 $2x+y$ 的最小值 $3+2\sqrt{2}$.

说明：

1. 已知 $x,y,a,b\in R^{+}$，则有：$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\geq\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{x+y}$（当且仅当 $x:y=\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 时，等号成立）. 上式称为二元变量的权方和不等式，用于“知和求和型”求最值.
2. 此类问题还可以通过消元以达到减元的目的来求解，由 $y=\frac{x}{x-1}$，再代入到所求表达式，求出最值即可，但要注意 x 的范围需由 $y>0$ 缩定.

例 2 已知 $x>0,y>0,2x+y+xy=4$，求 $2x+y$ 的最小值.

【解析】因为 $2x+y+xy=(2x+xy)+y=(2+y)x+y=(2+y)x+(y+2)-2$

$=(x+1)(y+2)-2$

所以 $2x+y+xy=4 \Rightarrow (x+1)(y+2)=6$

所以 $2x+y=2(x+1)+(y+2)-4 \geq 2\sqrt{2(x+1)\cdot(y+2)}-4=4\sqrt{3}-4$，

即 $(2x+y)_{\min}=4\sqrt{3}-4$.

说明：

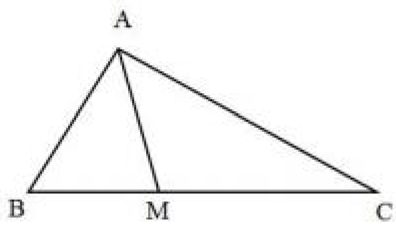
此类问题还可以通过消元以达到减元的目的来求解，由 $2x+y+xy=4 \Rightarrow y=\dfrac{4-2x}{x+1}$，再代入到所求表达式 $2x+y=2x+\dfrac{4-2x}{x+1}$，求出最值即可，但要注意 x 的范围需由 $y>0$ 缩定 $x\in(0,2)$.

【巩固训练】

1.已知正实数 x,y 满足 $xy+2x+y=4$，则 $x+y$ 的最小值为__________

2. 已知 $a>2b>0$，$a+b=1$，则 $\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为________.

3. 如图，已知三角形 ABC 中，$AB=1$，$AC=2$，若点 M 为线段 BC 的三等分点(靠近 B 点)，则 $\dfrac{1}{|\overrightarrow{AM}|^2}+\dfrac{2}{|\overrightarrow{BC}|^2}$ 的最小值为______.



4. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $x+y=1$ 则 $\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{y^2}{y+1}$ 的最小值是_______.

5. 已知 $x>1$，$y>1$，则 $\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$ 的最小值是_______.

6. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{b+1}$ 的最小值是_______.

7. 已知 $x>1$，$y>1$，$xy=10$，则 $\dfrac{1}{\lg x}+\dfrac{4}{\lg y}$ 的最小值是_______.

8. 已知正数 x,y 满足 $x+2y=2$，则 $\dfrac{x+8y}{xy}$ 的最小值为_________.

9.已知 $x\in(0,3)$，则 $y=\dfrac{2x-8}{x-3}+\dfrac{1}{2x}$ 的最小值为_________.

10. 已知正实数 x，y 满足 $x+y=xy$，则 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{9y}{y-1}$ 的最小值是_______.

11. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $\dfrac{2}{a+2}+\dfrac{1}{a+2b}=1$，则 $a+b$ 的最小值是_______.

【答案与提示】

1.【答案】$2\sqrt{6}-3$

【提示】由 $xy+2x+y=4$ 强分 $(x+1)(y+2)=6$ 即可.

2.【答案】$\dfrac{25}{18}$

【提示】权方和不等式 $\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{12}{3b}\ge\dfrac{\left(1+\sqrt{12}\right)^2}{(a-2b)+3b}$ 立得，或换元等.

3.【答案】$\dfrac{25}{18}$

【解析】$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\dfrac{8}{9}+\dfrac{8}{9}\cos\alpha$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=5-4\cos\alpha$

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2}+\frac{2}{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}=\frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\cos\alpha}+\frac{2}{5-4\cos\alpha}=\frac{\frac{9}{8}}{1+\cos\alpha}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\cos\alpha}$$

$$\geq \frac{\left(\sqrt{\frac{9}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{(1+\cos\alpha)+\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)}=\frac{25}{18}.$$

4.【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】$\frac{x^2}{x+2}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{(x+y)^2}{x+y+3}=\frac{1}{4}$，当 $\frac{x}{x+2}=\frac{y}{y+1}$，即 $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

5.【答案】8

【解析】令 $x+y-2=t(t>0)$

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq\frac{(x+y)^2}{x+y-2}=\frac{(t+2)^2}{t}=t+\frac{4}{t}+4\geq 8$$

当 $\begin{cases}x+y-2=2\\ \frac{x}{y-1}=\frac{y}{x-1}\end{cases}$，即 $x=2,y=2$，两个等号同时成立.

6.【答案】$\frac{5}{4}$

【解析】$\frac{1}{2a}+\frac{a}{b+1}=\frac{1}{2a}+\frac{1-b}{b+1}=\frac{1}{2a}+\frac{2-(1+b)}{b+1}=\frac{1}{2a}+\frac{4}{2b+2}-1$

$$\geq\frac{(1+2)^2}{2a+2b+2}-1=\frac{5}{4}$$

当 $\frac{1}{2a}=\frac{2}{2+2b}$，即 $a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$，$\left(\frac{1}{2a}+\frac{a}{b+1}\right)_{\min}=\frac{5}{4}$.

7.【答案】：9

【解析】∵$x>1$，$y>1$，$xy=10$，

∴ $\lg x+\lg y=1$，且 $\lg x>0,\lg y>0$

∴ $\frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}\geq\frac{(1+\sqrt{4})^2}{\lg x+\lg y}=9$，当且仅当 $x=10^{\frac{1}{3}}$ 时取“=”.

8.【答案】9

【解析】$\frac{x+8y}{xy}=\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{x}+\frac{2}{2y}\geq\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^{2}}{x+2y}=9$

当且仅当 $x=\frac{4}{3},y=\frac{1}{3}$，等号成立.

9.【答案】$\frac{7}{2}$

【解析】$y=\frac{2x-8}{x-3}+\frac{1}{2x}=2+\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2x}=2+\frac{4}{6-2x}+\frac{1}{2x}\geq2+\frac{\left(\sqrt{4}+1\right)^{2}}{\left(6-2x\right)+2x}=\frac{7}{2}$

当且仅当 $x=1$ 时，等号成立.

10.【答案】15

【解析】$x+y=xy$ 可化为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，

$$\frac{1}{x-1}+\frac{9y}{y-1}=\frac{x}{x-1}+\frac{9y}{y-1}-1=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}+\frac{9}{1-\frac{1}{y}}-1\geq\frac{\left(1+\sqrt{9}\right)^{2}}{(1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{y})}-1=15.$$

11.【答案】$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

【解析】$1=\frac{2}{a+2}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}}{2a+2b+2}$

当 $\frac{\sqrt{2}}{a+2}=\frac{1}{a+2b}$，即 $a=\sqrt{2},b=\frac{1}{2}$，$\left(a+b\right)_{\min}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

专题 56 （一元二次）不等式整数解的个数

【方法点拨】

不等式（一般是一元二次不等式）的整数解的个数问题，一般采用“分离函数”的方法转化为两函数图象间的位置关系较简单，分离函数的的一般策略是“一动一静，一直一曲，动直定曲”.

【典型题示例】

例 1　　若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2 < ax^2$ 的解集中整数恰有 3 个，则实数 a 的取值范围是

________.

【答案】$\left(\dfrac{25}{9},\dfrac{49}{16}\right]$

【解析一】原不等式转化为 $(a-4)x^2+4x-1>0$，

则 $a-4<0,\Delta=16+4(a-4)>0$，即 $0<a<4$

而 $(a-4)x^2+4x-1=0$ 的解为 $x_1=\dfrac{1}{2+\sqrt{a}},x_2=\dfrac{1}{2-\sqrt{a}}$，

由 $0<a<4$ 得：$x_1\in(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$，则 $x_2=\dfrac{1}{2-\sqrt{a}}\in\left(3,4\right]$，

解之得：$\dfrac{25}{9}<a\le\dfrac{49}{16}$.

【解析二】易知 $a>0$，则原不等式可化为 $|2x-1|<\sqrt{a}\,|x|$，

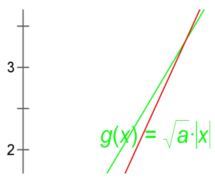
令 $f(x)=|2x-1|$，$g(x)=\sqrt{a}\,|x|$

问题转化为两函数 $f(x)$、$g(x)$ 图象问题，当 $f(x)$ 的图象在 $g(x)$ 的图象的下方时的横坐标为整数点有且仅有三个，如下图

则 $\begin{cases} g(3)>f(3) \\ g(4)\le f(4) \end{cases}$，$\begin{cases} 3\sqrt{a}>5 \\ 4\sqrt{a}\le 7 \end{cases}$，解之得 $\dfrac{25}{9}<a\le\dfrac{49}{16}$

故实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{25}{9},\dfrac{49}{16}\right]$.

.

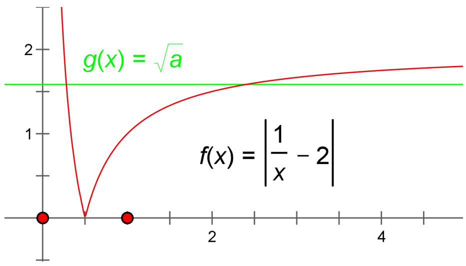


【解析三】**仿解法二，易知** $a>0$，则原不等式可化为 $\left|\frac{1}{x}-2\right|<\sqrt{a}$，

令 $f(x)=\left|\frac{1}{x}-2\right|$，$g(x)=\sqrt{a}$，下同解法二利用图象

则 $f(3)<\sqrt{a}\le f(4)$，即 $\frac{5}{3}<\sqrt{a}\le\frac{7}{4}$，解之得 $\frac{25}{9}<a\le\frac{49}{16}$

故实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{25}{9},\frac{49}{16}\right]$.



点评：

解法一是直接利用“数”解决，即将一元二次不等式解集中整数恰有 3 个问题，转化为对应的一元二次方程的解之间恰有三个整数，先将其中一个根的范围进行缩定，然后推测其另一个根的范围，利用之布列不等式求解.解法难度较大，不建议使用.

而解法二、三，其关键是利用“形”解决，即将一元二次不等式解集中整数恰有 3 个问题，转化为满足不等关系的函数图象间的横坐标恰有三个整数，从两种解法可以看出，解法三更简单，可谓实现“秒杀”，这对学生的转化能力提出更高的要求.该方法的重中之重在于“分离函数”的能力，一般遵循“一动一静，一直一曲，动直定曲”的原则进行.

例 2　已知函数 $f\left(x\right)=x+\frac{a}{x}$，过点 $(1,0)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的两条切线，切点分别为 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，其中 $0<x_1<x_2$.若在区间 (x_1,x_2) 内存在唯一整数，则实数 a 的取值范围是_______.

【答案】$-\frac{4}{3}\le a<-1$

【分析】利用导数的几何意义，不难得出 x_1,x_2 是方程 $x^2+2ax-a=0$ 的两个根，分离函数 $x^2=-2a(x-\frac{1}{2})$，问题转化为两函数 $y=x^2$、$y=-2a(x-\frac{1}{2})$ 的交点横坐标间存在唯一整数，利用“形”，易知该整数为 1，故只需 $\begin{cases}-2a(1-\frac{1}{2})>1\\-2a(2-\frac{1}{2})\le 4\end{cases}$，解之得 $-\frac{4}{3}\le a<-1$.

【巩固训练】

1.（多选题）若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2>0\\2x^2+(2k+5)x+5k<0\end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{-2\}$，则整数 k 的值可以是_________.

A. —3；　B. 0；　C. 1；　D. 2 .

2.若关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中至多包含 2 个整数，则实数的 a 取值范围是_________.

A. (—3, 5)；　B. (—3, 2)；　C. [—3, 5]；　D. [—2, 4] .

3.设集合 A=$\left\{x\middle|x^2+2x-3>0\right\}$，集合 B=$\left\{x\middle|x^2-2ax-1\le 0,a>0\right\}$.若 A$\cap$B 中恰含有一个整数，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$　B. $\left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right)$　C. $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$　D. $(1,+\infty)$

4.设 0＜b＜1+a, 若关于 x 的不等式 $(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个，则（　）

A. $-1<a<0$　B. $0<a<1$　C. $1<a<3$　D. $3<a<6$

5.已知关于 x 的不等式组 $1\le kx^2+2x+k\le 2$ 有唯一实数解，则实数 k 的取值是_________.

6. 若关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a<0$ 的解集中的整数恰有 2 个，则实数 a 的取值范围是____________.

7. 若关于 x 的不等式 $x^2-\left(2a+3\right)x+a^2+3a<0$ 只有两个整数解 1 和 2，则实数 a 的值是_________.

【答案与提示】

1.【答案】ABC

【提示】由 $x^2-x-2>0$ 得 $x<-1或x>2$，$2x^2+(2k+5)x+5k=(2x+5)(x+k)<0$，故 $-2<-k\le 3$，即 $-3\le k<2$.

2.【答案】C

【提示】由 $x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)<0$ 结合数轴立得.

3.【答案】B.

【解析】$A=\left\{x\,|\,x^2+2x-3>0\right\}=\left\{x\,|\,x>1或x<-3\right\}$，因为函数 $y=f(x)=x^2-2ax-1$ 的对称轴为 $x=a>0$，$f(0)=-1<0$，根据对称性可知要使 $A\cap B$ 中恰含有一个整数，则这个整数解为 2，所以有 $f(2)\le 0, f(3)>0$ 且 $f(3)>0$，即 $\begin{cases}4-4a-1\le 0\\9-6a-1>0\end{cases}, \therefore \frac{3}{4}\le a<\frac{4}{3}$，选 B.

4.【答案】C

【解析】由题得不等式 $|x-b|>|ax|$，设 $f(x)=|x-b|$，$g(x)=|ax|$，利用函数图象转化为其在点处的函数值大小关系.

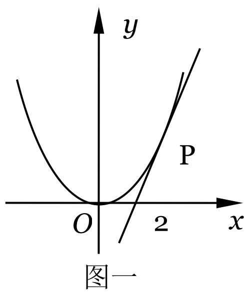
5.【答案】 $k=1+\sqrt{2}$或$k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

6.【答案】$\left[-1,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{25}{3},9\right]$

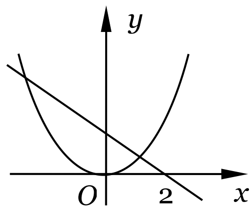
【解析】分离变量，不等式 $x^2-ax+2a<0$ 可转化为 $x^2<a$（$x-2$），构造函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=a$（$x-2$）.

如图一，当 $a>0$，利用导数易求出切点 P（4,16），欲使不等式 $x^2-ax+2a<0$ 的解集中恰有两个整数，其解集中必要整数 4，则另一解必为 3 或 5，比较过这两点的直线的斜率，可得 $\frac{25}{3}<a\le 9$；如图二，当 $a<0$，欲使不等式 $x^2-ax+2a<0$ 的解集中恰有两个整数，其解集中必要整数 0，则另一解必为 1 或-1，比较过这两点的直线的斜率，可得 $-1\le a<-\frac{1}{3}$；

综上可得，实数 a 的取值范围是：$\frac{25}{3}<a\le 9$ 或 $-1\le a<-\frac{1}{3}$.



图一



图二

6.【答案】2

【提示】由 $x^2+x-6>0$ 得 $x<-3$或$x>2$，设 $f(x)=x^2-2ax+3$，故

$\begin{cases} f(3)=12-6a\le 0 \\ f(4)=19-8a>0 \end{cases}$，解得 $2\le a<\frac{9}{8}$.

7.【答案】0

【分析】先解出不等式，然后根据整数解确定 a 的值.

【解析】原不等式化为 $(x-a)(x-a-3)<0$，所以 $a<x<a+3$，

因为整数中只有1，2是不等式的解，0和3都是不是解，则$\begin{cases} a \ge 0 \\ a+3 \le 3 \end{cases}$，所以$a=0$.

$a=0$时，不等式的解为$0<x<3$满足题意.

故答案为：0.

专题57 一类过定点问题的不等式恒成立

【方法点拨】

将恒成立问题转化为两函数的位置关系问题，难点在于发现两函数过定点.

【典型题示例】

例1　已知$a \in \mathbf{R}$，$x\ln x\left(ax^2-x-a+1\right) \le 0$在$x \in \left[\frac{1}{2},2\right]$上恒成立，则实数$a$的取值范围为________.

【答案】$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$

【分析】$x\ln x\left(ax^2-x-a+1\right) \le 0$在$x \in \left[\frac{1}{2},2\right]$上恒成立，即对于$\forall x \in \left[\frac{1}{2},2\right]$，两函数$f(x)=\ln x$、$g(x)=ax^2-x-a+1$的函数值异号，亦既是在此范围内，两函数的图象分别位于x轴的两侧，故将恒成立问题转化为了两函数的位置关系问题，再进一步发现两函数过定点（1,0），而函数$g(x)=ax^2-x-a+1$含参，是二次函数，只需对a的符号（即对称轴位置）及端点值进行讨论、限制即可.

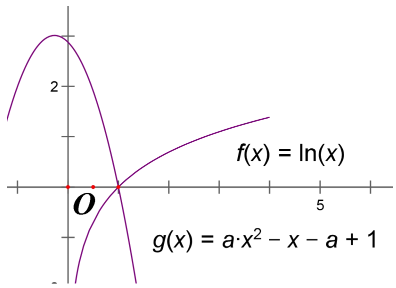
【解析】$\because x \in \left[\frac{1}{2},2\right]$，$x>0$

$\therefore x\ln x\left(ax^2-x-a+1\right) \le 0$在$x \in \left[\frac{1}{2},2\right]$上恒成立，即$\ln x\left(ax^2-x-a+1\right) \le 0$在

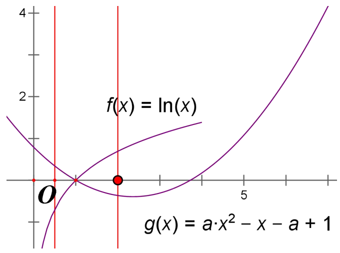
$x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上恒成立

设 $f(x)=\ln x$， $g(x)=ax^2-x-a+1$

易知 $f(x)$， $g(x)$ 图象恒过点（1,0），下面对 a 的符号进行分类讨论.



（1）当



$a<0$ 时，如上图左中， $g(x)$ 的对称轴在 y 轴的左侧， $g(x)$ 在对称轴右侧单减且恒过点（1,0），故满足题意.

(2) 当 $a=0$ 时，易知满足题意.

（3）当 $a>0$ 时，如上图右中，欲使 $\ln x\left(ax^2-x-a+1\right)\le 0$ 在 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上恒成立

只需 $g(2)\le 0$，即 $g(2)=3a-1\le 0$，解之得 $a\le\dfrac{1}{3}$，故 $0<a\le\dfrac{1}{3}$.

综上得，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$.

例 2　设 $a\in\mathbf{R}$，若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$，则 $a=$____________.

【答案】 $\dfrac{3}{2}$

【分析】本题解法较多，按照一般思路，则可分为以下两种情况：

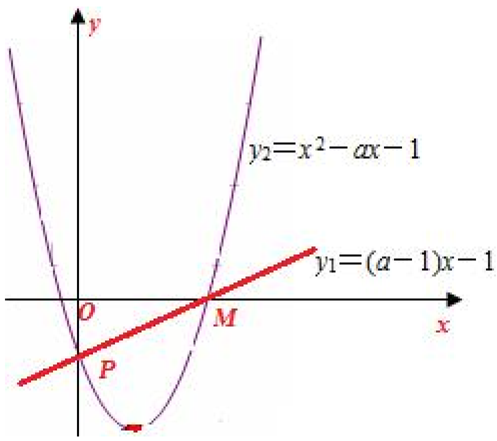
$(A)\begin{cases}(a-1)x-1\le 0\\ x^2-ax-1\le 0\end{cases}$，　无解；　　　$(B)\begin{cases}(a-1)x-1\ge 0\\ x^2-ax-1\ge 0\end{cases}$，　无解.

因为受到经验的影响，会认为本题可能是错题或者解不出本题．其实在 $x>0$ 的整个区间上，我们可以将其分成两个区间(为什么是两个？)，在各自的区间内恒正或恒负．(如下图)

我们知道：函数 $y_1=(a-1)x-1$，$y_2=x^2-ax-1$ 都过定点 $P(0，1)$.

考查函数 $y_1=(a-1)x-1$：令 $y=0$，得 $M(\frac{1}{a-1}$，0)，还可分析得：$a>1$；

考查函数 $y_2=x^2-ax-1$：显然过点 $M(\frac{1}{a-1}$，0)，代入得：$\left(\frac{1}{a-1}\right)^2-\frac{a}{a-1}-1=0$，解之得：$a=0$，或者 $a=\frac{3}{2}$，舍去 $a=0$，得答案：$a=\frac{3}{2}$.



点评：

本题的关键在于，一是将恒成立问题转化为利用“形”进一步转化为两函数的位置关系问题，二是发现两函数在 x 轴的右侧过定点.

【巩固训练】

1. 对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $(ax^2+a^2x-2)\ln x\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值的集合是__________.

2.对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $(x-a+\ln\frac{x}{a})(-2x^2+ax+10)\leq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是__________.

3. 已知不等式 $(ax+3)(x^2-b)\leq 0$ 对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，其中 a,b 是整数，则

$a+b$ 的取值集合为__________.

4. 已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$，$g(x)=mx$，若对于任一实数 x，$f(x)$ 与 $g(x)$ 至少有一个为正数，则实数 m 的取值范围是

A. $(0,2)$　　B. $(0,8)$　　C. $(2,8)$　　D. $(-\infty,0)$

【答案与提示】

1.【答案】$\{1\}$

【解析】设 $f(x)=ax^2+a^2x-2$， $g(x)=\ln x$

因为 $g(x)=\ln x$ 恒过点（1,0），所以必有 $\begin{cases} f(1)=a+a^2-2=0 \\ a>0 \end{cases}$，解之得 $a=1$.

2.【答案】$\{\sqrt{10}\}$

【分析】考虑从“形”出发.

设 $f(x)=x-a+\ln\dfrac{x}{a}$， $g(x)=-2x^2+ax+10$

易知 $a>0$，且函数 $f(x)$ 横过点 $(a,0)$

又 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上增

必有 $g(x)=-2x^2+ax+10$ 过 $(a,0)$

所以 $-2a^2+a^2+10=0$，解之得 $a=\pm\sqrt{10}$

又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{10}$.

3.【答案】$\{-2,8\}$

【解析】构造“形”易得 $\sqrt{b}=-\dfrac{3}{a}$，即 $a\sqrt{b}=-3$

$\because a,b$ 是整数

$\therefore \begin{cases}a=-3\\ \sqrt{b}=1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=-1\\ \sqrt{b}=3\end{cases}$

解之得：$\begin{cases}a=-3\\ b=1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=-1\\ b=9\end{cases}$

所以 $a+b=-2$ 或 8，故 $a+b$ 的取值集合为 $\{-2,8\}$.

4.【答案】B

【解析】当 $m\le 0$ 时，显然不成立

当 $m>0$ 时，因 $f(0)=1>0$ 当 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4-m}{2}\ge 0$ 即 $0<m\le 4$ 时结论显然成立；

当 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4-m}{2}<0$ 时只要 $\Delta=4(4-m)^2-8m=4(m-8)(m-2)<0$ 即可即 $4<m<8$

则 $0<m<8$.

专题 58 多次使用基本不等式

【方法点拨】

多元变量的最值问题是一种常见的题型，也是高考命题的热点，其解法灵活多变，较难把握. 当目标式中有的变量间彼此独立，相互间没有制约条件时，使用分离变量法，多次使用基本不等式即可. 这是可多次使用基本不等式的先决条件，其目的是保证等号能同时成立.

【典型题示例】

例 1　若 $a>0$，$b>0$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}+b$ 的最小值为_______.

【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】两次利用基本不等式即可求出.

【解析】$\because$ $a>0$，$b>0$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}$且$\frac{2}{b}=b$，即$a=b=\sqrt{2}$时等号成立，

所以$\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$的最小值为$2\sqrt{2}$.

例 2　已知$a>0,b>0,c>2,$且$a+b=1$，则$\frac{3ac}{b}+\frac{c}{ab}+\frac{6}{c-2}$的最小值是_________.

【答案】24

【解析】由于$\frac{3ac}{b}+\frac{c}{ab}+\frac{6}{c-2}=(\frac{3a}{b}+\frac{1}{ab})c+\frac{6}{c-2}$，故考虑先求出$\frac{3a}{b}+\frac{1}{ab}$的最小值，

$$\frac{3a}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{3a}{b}+\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{3a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2=\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+2\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=6$$

$$\frac{3ac}{b}+\frac{c}{ab}+\frac{6}{c-2}\ge 6c+\frac{6}{c-2}=6(c-2)+\frac{6}{c-2}+12\ge 2\sqrt{6(c-2)\bullet\frac{6}{c-2}}+12=24.$$

点评：（1）“多元问题一般应减元”，这是解决多元问题的基本思路.本题中，虽然已知中含有三个变量，但其地位是不同的，这里$a+b=1$有约束条件，而变量c除了“$c>2$”外，没有其它的任何约束条件，系“单身狗”，故应将其分为一组------------其目的是“孤立单身狗”，求出其最小值，再使用基本不等式，而两次使用基本不等式的条件没有关联；

（2）在求$\frac{3a}{b}+\frac{1}{ab}$的最小值时，观察式子的结构特征，使用了“1”的代换，其目的仍在于“化齐次”.

例 3　设$x+4y=1(x>0,y>0)$，$s>t>0$，则$\frac{x^2s^2+ys^2}{xy}+\frac{1}{st-t^2}$的最小值为_________.

【答案】$4\sqrt{5}$

【分析】所求$\dfrac{x^2s^2+ys^2}{xy}+\dfrac{1}{st-t^2}$变形为$\left(\dfrac{x^2+y}{xy}\right)s^2+\dfrac{1}{st-t^2}$.三次使用基本不等式，第一次，在条件$x+4y=1(x>0,y>0)$下，求$\dfrac{x^2+y}{xy}$最小值，需使用“1”的代换化齐次；第二次，在条件$s>t>0$下，求$st-t^2$最小值，为达到消$t$的目的，需拆凑放缩（解答所给方法）或直接使用基本不等式$st-t^2=t(s-t)\le\left[\dfrac{t+(s-t)}{2}\right]^2=\dfrac{s^2}{4}$；第三次，直接运用互倒型，使用基本不等式.三次使用基本不等式取等条件相互独立，从而最小值能够取得.

【解析】由题$x+4y=1(x>0，y>0)$，

$\dfrac{x^2+y}{xy}=\dfrac{x^2+(x+4y)y}{xy}=\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{4y}{x}\geq4+1=5$，当且仅当$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{6}$时，“=”成立.

因为$0<t<s$，则$\dfrac{1}{ts-t^2}=\dfrac{4}{s^2-(s-2t)^2}\geq\dfrac{4}{s^2}$，当且仅当$s=2t$时，“=”成立.

于是$\dfrac{x^2s^2+ys^2}{xy}+\dfrac{1}{ts-t^2}\geq5s^2+\dfrac{4}{s^2}\geq4\sqrt{5}$，

当且仅当$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{6}$，$s=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$t=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$时，“=”成立.

所以$\dfrac{x^2s^2+ys^2}{xy}+\dfrac{1}{ts-t^2}$的最小值为$4\sqrt{5}$.

例 4　已知$a>0$，$b>0$，$c>2$，且$a+b=2$，那么$\dfrac{ac}{b}+\dfrac{c}{ab}-\dfrac{c}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}$的最小值为________.

【答案】$\sqrt{10}+\sqrt{5}$

【分析】a、b间有制约条件“$a+b=2$”，“c”为独立变量，故将所求变形为$\dfrac{ac}{b}+\dfrac{c}{ab}-\dfrac{c}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}=c\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}$，先求出$\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{ab}$的最小值即可.

【解析】因为$a>0,b>0$,所以$\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4ab}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5a}{4b}+\dfrac{b}{4a}\geqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,当且仅当$b=\sqrt{5}a$时等号成立.

又因为$c>2$，由不等式的性质可得$\dfrac{ac}{b}+\dfrac{c}{ab}-\dfrac{c}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}=c\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}\geqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}c+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}$.

又因为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}c+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(c-2)+\dfrac{\sqrt{5}}{c-2}+\sqrt{5}\geqslant\sqrt{10}+\sqrt{5}$，当且仅当$c=2+\sqrt{2}$时等号成立，

所以$\frac{ac}{b}+\frac{c}{ab}-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{5}}{c-2}$的最小值为$\sqrt{10}+\sqrt{5}$.

点评：

本题中有三个变量，其中两个变量间有约束条件. 先求出其最值，然后使用不等式的性质放缩，再使用一次基本不等式.

【巩固训练】

1.已知$x>0$，$y>0$，则$x+\frac{y}{x}+\frac{16}{xy}$的最小值为_______.

2. 已知$a>b>0$，则$a^2+\frac{64}{b(a-b)}$的最小值为_______.

3. 已知$x>0$，$y>0$，$z>0$，且$x+\sqrt{3}y+z=6$，则x^3+y^2+3z的最小值为_________.

4.设正实数x，y满足$xy=\frac{x+y}{x-y}$，则实数x的最小值为____.

5.已知正数a,b满足$a^2b(2a+b)=4$，则$a+b$的最小值为___________.

6. 若$x>y>0$，则$\sqrt{2}x^3+\frac{3}{xy-y^2}$的最小值为______.

7.已知正数a,b满足$\frac{ab}{a+2b}\geq 1$，则$(a+1)^2+(b+2)^2$的最小值是_________.

【答案或提示】

1.【答案】$4\sqrt{2}$

【解析】所求变形为$x+\frac{y}{x}+\frac{16}{xy}=x+\frac{1}{x}(y+\frac{16}{y})$

∵$y>0$　∴$y+\frac{16}{y}\geq 2\sqrt{y\cdot\frac{16}{y}}=8$，当且仅当$y=4$时，等号成立，

∵$x>0$，$y+\frac{16}{y}\geq 8$

∴$x+\frac{y}{x}+\frac{16}{xy}\geq x+\frac{8}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{8}{x}}=4\sqrt{2}$，当且仅当$x=2\sqrt{2}$时，等号成立，

∴$x+\frac{y}{x}+\frac{16}{xy}$的最小值为$4\sqrt{2}$，当且仅当$x=2\sqrt{2}$，$y=4$成立.

2.【答案】32

【解析】∵$b(a-b)\leq\left(\frac{b+(a-b)}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$，当且仅当$a=2b$时，等号成立，

∴$a^2+\frac{64}{b(a-b)}\geq a^2+\frac{64}{\frac{a^2}{4}}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{4\times 64}{a^2}}=32$，当且仅当$a=4$时，等号成立，

∴$a^2+\frac{64}{b(a-b)}$的最小值为32，当且仅当$a=4$，$b=2$成立.

3. 【答案】$\frac{37}{4}$

【解析】先减元$x^3+y^2+3z=x^3+y^2+3(6-x-\sqrt{3}y)=x^3-3x+(y-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+\frac{45}{4}$

令$f(x)=x^3-3x$，$g(y)=(y-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+\frac{45}{4}$，

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，$x>0$，

$f(x)$在（0, 1）上递减，在（1，＋∞）上递增，

所以，$f(x)_{\min}=f(1)=-2$

当 $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，$g(y)$ 有最小值：$g(y)_{\min}=\dfrac{45}{4}$

所以 x^3+y^2+3z 的最小值为 $-2+\dfrac{45}{4}=\dfrac{37}{4}$.

4.【答案】$\sqrt{2}+1$.

【解析】由正实数 x，y 满足 $xy=\dfrac{x+y}{x-y}$，化为 $x-y=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$，

为求 x 的最小值，将含“x”项用“y”的函数表示得：$x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{y}+y$

$\because \dfrac{1}{y}+y\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{y}\cdot y}$（当且仅当 $y=1$，“=”成立）

$\therefore x-\dfrac{1}{x}\geq 2$，解得 $x \quad \sqrt{2}+1$.

$\therefore$ 实数 x 的最小值为 $\sqrt{2}+1$.

5.【答案】2

【解析】将已知条件 $a^2b(2a+b)=4$ 视为关于 b 的一元二次方程，利用解方程分离元来实施减元.

由 $a^2b(2a+b)=4$ 解得 $b=-a+\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{a}$

$\therefore a+b=\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{a}=\sqrt{a^2+\dfrac{4}{a^2}}\geq 2$，当且仅当 $a=\sqrt{2}$ 时，取等.

6. 【答案】10

【提示】$xy-y^2=y(x-y)\leq \dfrac{x^2}{4}$，$f(x)\geq \sqrt{2}x^3+\dfrac{12}{x^2}$，再利用导数知识解决.

7.【答案】$22+12\sqrt{2}$

【解析】由平方均值不等式得 $\sqrt{\frac{(a+1)^2+(b+2)^2}{2}}\geq\frac{(a+1)+(b+2)}{2}$，当且仅当 $a=b+1$ 时，“=”成立

由 $\frac{ab}{a+2b}\geq 1$ 变形得 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\leq 1$

所以 $a+b\geq(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=3+\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}b$，即

$a=2+\sqrt{2}$ ，$b=1+\sqrt{2}$时，“=”成立

将 $a=2+\sqrt{2}$ ，$b=1+\sqrt{2}$代入得$(a+1)^2+(b+2)^2=22+12\sqrt{2}$.

所以$(a+1)^2+(b+2)^2$的最小值是 $22+12\sqrt{2}$.

专题 59 二元权方和不等式

【方法点拨】

已知 $x,y,a,b\in R^+$，则有：$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\geq\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{x+y}$（当且仅当 $x:y=\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 时，等号成立）.

说明:

1.上式其实即为二元变量的权方和不等式，用于“知和求和型”求最值，其实质就是“1”的代换.

2. 设 $a_i,b_i\in R^+$（$i=1,2,\cdots,n$），实数 $m>0$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geq\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{m+1}}{(\sum_{i=1}^{n}b_i)^m}$，其中等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立.称之为权方和不等式.

我们称 m 为该不等式的权，权方和不等式的特征是分子的幂指数比分母的幂指数高 1 次.

【典型题示例】

例 1 （2022·江苏金陵中学·网课质检卷·13）已知 $x>-1$，$y>0$ 且满足 $x+2y=1$，则 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y}$ 的最小值为________.

【答案】$\frac{9}{2}$

【分析】由 $x>-1$ 知：$x+1>0$，为保证分母和为定值，对所求作适当的变形 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{2y}$，然后就可以使用权方和不等式了.

【解析】$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{2y}\geq\dfrac{\left(1+\sqrt{4}\right)^2}{(x+1)+2y}=\dfrac{9}{2}$（取等条件略）.

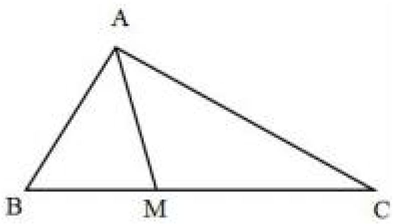
例 2　已知 $a>2b>0$，$a+b=1$，则 $\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为________.

【答案】$14+4\sqrt{6}$

【分析】由 $a>2b>0$ 知：$a-2b>0,b>0$，为保证分母和为定值，对所求作适当的变形 $\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{12}{3b}$，然后就可以使用权方和不等式了.

【解析】$\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{12}{3b}\geq\dfrac{\left(1+\sqrt{12}\right)^2}{(a-2b)+3b}=14+4\sqrt{6}$（等号成立条件，略，下同）.

例 3　如图，已知三角形 ABC 中，$AB=1$，$AC=2$，若点 M 为线段 BC 的三等分点(靠近 B 点)，则 $\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2}+\dfrac{2}{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}$ 的最小值为______.



【答案】$\dfrac{25}{18}$

【解析】$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\dfrac{8}{9}+\dfrac{8}{9}\cos\alpha$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=5-4\cos\alpha$

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2}+\frac{2}{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}=\frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\cos\alpha}+\frac{2}{5-4\cos\alpha}=\frac{\frac{9}{8}}{1+\cos\alpha}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\cos\alpha}$$

$$\geq \frac{\left(\sqrt{\frac{9}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{(1+\cos\alpha)+\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)}=\frac{25}{18}.$$

例 4　已知 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{2}{a+2}+\frac{1}{a+2b}=1$，则 $a+b$ 的最小值是_______.

【答案】$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

【解析】$1=\frac{2}{a+2}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2a+2b+2}$

当 $\frac{\sqrt{2}}{a+2}=\frac{1}{a+2b}$，即 $a=\sqrt{2},b=\frac{1}{2}$，$(a+b)_{\min}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

例 5　已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=1$ 则 $\frac{x^2}{x+2}+\frac{y^2}{y+1}$ 的最小值是_______.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】$\frac{x^2}{x+2}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{(x+y)^2}{x+y+3}=\frac{1}{4}$

当 $\frac{x}{x+2}=\frac{y}{y+1}$，即 $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

例 5　已知 $x>1$，$y>1$，则 $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$ 的最小值是_______.

【答案】8

【解析】令 $x+y-2=t(t>0)$

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq\frac{(x+y)^2}{x+y-2}=\frac{(t+2)^2}{t}=t+\frac{4}{t}+4\geq 8$$

当 $\begin{cases}x+y-2=2\\ \frac{x}{y-1}=\frac{y}{x-1}\end{cases}$，即 $x=2,y=2$，两个等号同时成立.

例 6　已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{a}{b+1}$ 的最小值是_______.

【答案】$\frac{5}{4}$

【解析】$\frac{1}{2a}+\frac{a}{b+1}=\frac{1}{2a}+\frac{1-b}{b+1}=\frac{1}{2a}+\frac{2-(1+b)}{b+1}=\frac{1}{2a}+\frac{4}{2b+2}-1$

$\geq\frac{(1+2)^2}{2a+2b+2}-1=\frac{5}{4}$

当$\frac{1}{2a}=\frac{2}{2+2b}$，即$a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$，$\left(\frac{1}{2a}+\frac{a}{b+1}\right)_{\min}=\frac{5}{4}$.

例 7　已知a，$b>0$，且$a+2b+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{13}{2}$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最大值与最小值之和为

A．2　　B．$\frac{9}{2}$　　C．$\frac{13}{2}$　　D．9

【答案】C

【分析】已知中两个式子$a+2b$、$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$是“知和求和”的典型结构特征，而后者又是待求的，故可考虑换元法，设$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=t$，用“1 的代换”或权方和不等式，消去$a+2b$，化等式为不等式，从而构造出关于$t$的一元二次不等式，求出其解集.

【解析】设$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=t$（$t>0$）

由权方和不等式得$a+2b=\frac{1}{\frac{1}{a}}+\frac{4}{\frac{2}{b}}\geq\frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}=\frac{9}{t}$，

代入已知得$a+2b+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{13}{2}\geq\frac{9}{t}+t$

整理得$2t^2-13t+18\leq 0$，解之得$2\leq t\leq\frac{9}{2}$

即$2\leq\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\leq\frac{9}{2}$，当且仅当$\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$时，即$a=b=\frac{2}{3}$或$a=b=\frac{3}{2}$时取等号

所以最大值与最小值之和为$\frac{13}{2}$.

【巩固训练】

1. 已知 $x>1$，$y>1$，$xy=10$，则 $\frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}$ 的最小值是_______.

2. 已知正数 x,y 满足 $x+2y=2$，则 $\frac{x+8y}{xy}$ 的最小值为_________.

3. 已知 $x\in(0,3)$，则 $y=\frac{2x-8}{x-3}+\frac{1}{2x}$ 的最小值为_________.

4. 已知正实数 x，y 满足 $x+y=xy$，则 $\frac{1}{x-1}+\frac{9y}{y-1}$ 的最小值是_______.

【答案与提示】

1.【答案】9

【解析】∵$x>1$，$y>1$，$xy=10$，

∴ $\lg x+\lg y=1$，且 $\lg x>0,\lg y>0$

∴ $\frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}\geq\frac{\left(1+\sqrt{4}\right)^2}{\lg x+\lg y}=9$，当且仅当 $x=10^{\frac{1}{3}}$ 时取“＝”.

2.【答案】9

【解析】$\frac{x+8y}{xy}=\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{x}+\frac{2}{2y}\geq\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2}{x+2y}=9$

当且仅当 $x=\frac{4}{3},y=\frac{1}{3}$，等号成立.

3.【答案】$\frac{7}{2}$

【解析】$y=\frac{2x-8}{x-3}+\frac{1}{2x}=2+\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2x}=2+\frac{4}{6-2x}+\frac{1}{2x}\geq 2+\frac{\left(\sqrt{4}+1\right)^2}{(6-2x)+2x}=\frac{7}{2}$

当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立.

4.【答案】15

【解析】$x+y=xy$ 可化为$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，

$$\frac{1}{x-1}+\frac{9y}{y-1}=\frac{x}{x-1}+\frac{9y}{y-1}-1=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}+\frac{9}{1-\frac{1}{y}}-1\geq\frac{\left(1+\sqrt{9}\right)^2}{(1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{y})}-1=15$$

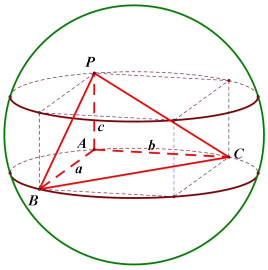
专题 60 两招玩转多面体的外接球

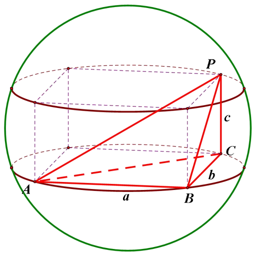
【方法点拨】

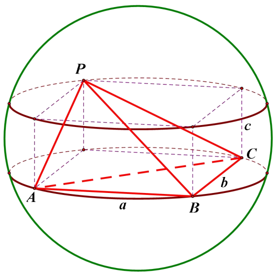
解决多面体的外接球问题的关键是“定心”，常用方法有两种：

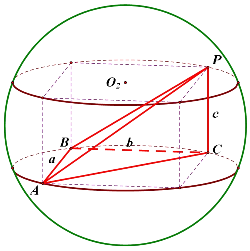
（1）“补体法”：对于符合特殊条件的四面体补形为长方体解决，常见的有下列两种类型.

类型一：墙角模型（三条线两个垂直，补形为长方体，其体对角线的中点即球心）





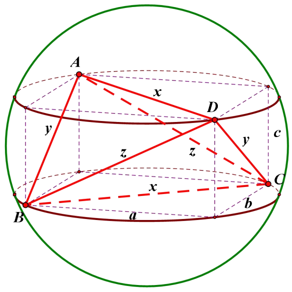




方法：找三条两两垂直的线段，直接用公式$(2R)^2=a^2+b^2+c^2$，即$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，求出R.

类型二：对棱相等模型（补形为长方体）

如下图，三棱锥（即四面体）中，已知三组对棱分别相等，求外接球半径（$AB=CD$，$AD=BC$，$AC=BD$）



第一步：画出一个长方体，标出三组互为异面直线的对棱；

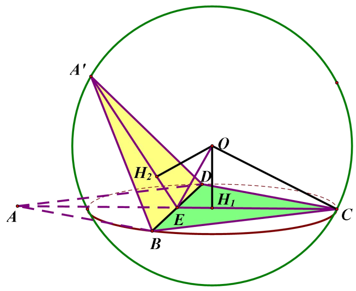
第二步：设出长方体的长宽高分别为a,b,c，$AD=BC=x$，$AB=CD=y$，$AC=BD=z$，列方程组，

$$\begin{cases}a^2+b^2=x^2\\b^2+c^2=y^2\\c^2+a^2=z^2\end{cases}\Rightarrow(2R)^2=a^2+b^2+c^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{2},$$

补充：$V_{A-BCD}=abc-\frac{1}{6}abc\times4=\frac{1}{3}abc$

第三步：根据墙角模型，$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}$，$R^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{8}$，$R=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{8}}$，求出$R$.

（2）“窜心法”：多面体的外接球心问题，可转化为其某两个侧面三角形外接圆的垂线来解决，即球心就是分别过两个侧面三角形外接圆的圆心且垂直于该平面的直线的交点（即将三角形外接圆的圆心，垂直上蹿下跳）.



第一步：先画出如图所示的图形，将ΔBCD画在小圆上，找出ΔBCD和$\Delta A'BD$的外心H_1和H_2；

第二步：过H_1和H_2分别作平面BCD和平面$A'BD$的垂线，两垂线的交点即为球心O，连接OE,OC；

第三步：解ΔOEH_1，算出OH_1，在$Rt\Delta OCH_1$中，勾股定理：$OH_1^2+CH_1^2=OC^2$.

说明：

解法二是通法，具体解题过程中，常常涉及复杂的线面位置关系的论证、多次解三角形等，有一定的难度.

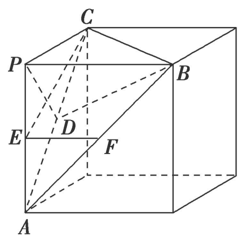
【典型题示例】

例1 (2021·全国)已知三棱锥P-ABC的四个顶点在球O的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，E，F分别是PA，AB的中点，$\angle CEF=90°$，则球O的体积为(　　)

A．$8\sqrt{6}\pi$　　　　B．$4\sqrt{6}\pi$

C．$2\sqrt{6}\pi$　　　　D．$\sqrt{6}\pi$

【答案】D



【解析】因为点E，F分别为PA，AB的中点，所以$EF\parallel PB$，

因为$\angle CEF=90°$，所以$EF\perp CE$，所以$PB\perp CE$.

取AC的中点D，连接BD，PD，易证$AC\perp$平面BDP，

所以$PB\perp AC$，又$AC\cap CE=C$，AC，$CE\subset$平面PAC，所以$PB\perp$平面PAC，

所以$PB\perp PA$，$PB\perp PC$，因为$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$为正三角形，

所以$PA\perp PC$，即PA，PB，PC两两垂直，将三棱锥P-ABC放在正方体中如图所示．因为$AB=2$，所以该正方体的棱长为$\sqrt{2}$，所以该正方体的体对角线长为$\sqrt{6}$，所以三棱锥P-ABC的外接球的半径$R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以球O的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{6}}{2})^3=\sqrt{6}\pi$.故选D.

例 2　在边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中，$A=60°$，沿对角线 BD 折起，使二面角 $A-BD-C$ 的大小为 120°，这时点 A，B，C，D 在同一个球面上，则该球的表面积为____________.

【答案】28π

【解析】设 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的外心 O_1 和 O_2，过 O_1 和 O_2 分别作平面 ABD 和平面 BCD 的垂线，两垂线的交点即为球心 O（两垂线共面的证明，此处从略），连接 OA 即为所求球的半径

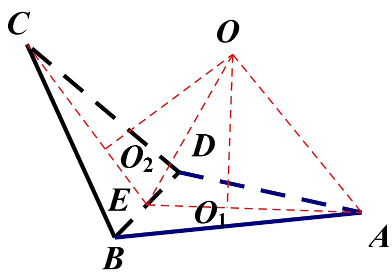
易知二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AEC$（证明从略），故 $\angle AEC=120°$，

因为 O_1 是 $\triangle ABD$ 的外心，所以 $AE=CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$，$O_1E=1$，$O_1A=2$

在 $Rt\triangle O_1OE$，$O_1E=1$，$\angle OEO_1=60°$，所以 $O_1O=\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle AOO_1$，$OA^2=OO_1^{\ 2}+O_1A^2=\sqrt{3}^{\ 2}+2^2=7$

∴四面体的外接球的表面积为 $4\pi R^2=28\pi$.



例 3　在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=BC=5$，$PB=AC=\sqrt{17}$，$PC=AB=\sqrt{10}$，则该三棱锥外接球的表面积为____________；外接球体积为____________.

【答案】$26\pi,\dfrac{13\sqrt{26}\pi}{3}$

【解析】由题意，该三棱锥的对棱相等，可知该三棱锥可置于一个长方体中，记该长方体的

棱长为 a, b, c，所以 $\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ a^2+c^2=17 \\ b^2+c^2=25 \end{cases}$，即 $a=1, b=3, c=4$，所以

$r=\dfrac{\sqrt{1+9+25}}{2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$，由此可得，

$S=4\pi r^2=26\pi$，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{13\sqrt{26}\pi}{3}$.

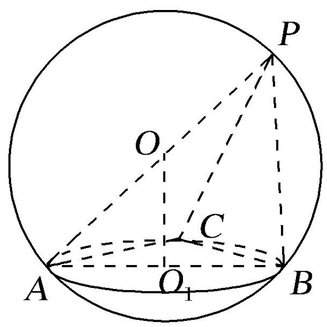
例 4 已知三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 满足 $AB=2\sqrt{2}$，$\angle ACB=90°$，PA 为球 O 的直径且 $PA=4$，则点 P 到底面 ABC 的距离为(　　)

A.$\sqrt{2}$　　　　B.$2\sqrt{2}$　　　　C.$\sqrt{3}$　　　　D.$2\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 取 AB 的中点 O_1，连接 OO_1，

如图，



在$\triangle ABC$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$\angle ACB=90°$，

所以$\triangle ABC$ 所在小圆圆 O_1 是以 AB 为直径的圆，

所以 $O_1A=\sqrt{2}$，且 $OO_1\perp AO_1$，

又球 O 的直径 $PA=4$，所以 $OA=2$，

所以 $OO_1=\sqrt{OA^2-O_1A^2}=\sqrt{2}$，且 $OO_1\perp$底面 ABC，

所以点 P 到平面 ABC 的距离为 $2OO_1=2\sqrt{2}$.

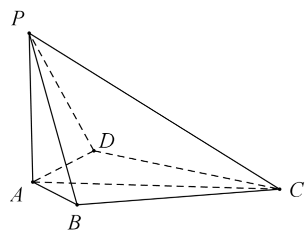
【巩固训练】

1. 在三棱锥 $D-ABC$ 中，平面 $ACD\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，且 $AC=CD=DA=3$，$AB=\sqrt{3}$，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为（　　）.

A. $\dfrac{15}{4}\pi$　　B. 15π　　C. $\dfrac{3}{2}\pi$　　D. 6π

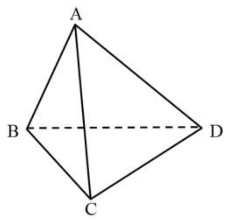
2. 如下图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知 $PA\perp$ 底面 $ABCD, AB\perp BC, AD\perp CD$，且 $\angle BAD=120°, PA=AB=AD=2$，则该四棱锥外接球的表面积为（　　）

A. 8π　　B. 20π　　C. $20\sqrt{5}\pi$　　D. $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi$



3.三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\triangle PAC$ 和$\triangle ABC$ 均为边长为 2 的正三角形，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为________.

4. 如图所示三棱锥 $A-BCD$，其中 $AB=CD=5, AC=BD=6, AD=BC=7,$ 则该三棱锥外接球的表面积为________.



5. 正四面体的各条棱长都为 $\sqrt{2}$，则该正面体外接球的体积为________.

6. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，ΔPAB 是边长为 3 的等边三角形，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，二面角 $P-AB-C$ 的大小为$120°$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为____.

7. 已知在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SD\perp$底面 $ABCD$，且底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$BC//AD$，若 $SD=AD=8$，$BC=6$，$AB=CD=\sqrt{2}$，则四棱锥 $S-ABCD$ 的体积为________；它的外接球

的半径为________．(第一空 2 分，第二空 3 分)

8. 在三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB=CD=2, AD=BC=3, AC=BD=4,$ 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为___________.

9.(多选题)在正六棱锥 $P-ABCDEF$ 中，已知底面边长为1，侧棱长为2，则

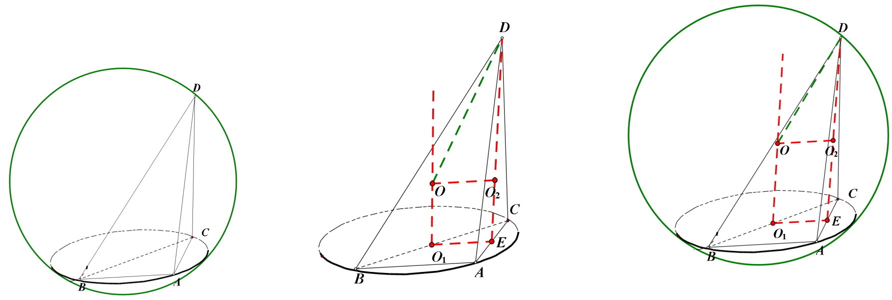
A． $AB\perp PD$　　　　　　B．共有 4 条棱所在的直线与 AB 是异面直线

C．该正六棱锥的内切球的半径为 $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$

D．该正六棱锥的外接球的表面积为 $\dfrac{16\pi}{3}$

【答案或提示】

1. 【答案】B



甲　　　　　　乙　　　　　　丙

【解析】∵$AB\perp AC$　∴△ABC 外接圆的圆心为 BC 中点，

∴ $A-BCD$ 外接球的球心在过 BC 中点且垂直于△ABC 所在平面的直线上

如上图（乙）中，设 BC 中点为 O_1，球心为 O，同理，设△ADC 外接圆的圆心为 O_2

则 $OO_2=O_1E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

在△OO_2D 中，$O_2D=\sqrt{3}$，所以 $OD^2=O_1E^2+O_2D^2=\dfrac{15}{4}$

所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 15π.

2. 【答案】B

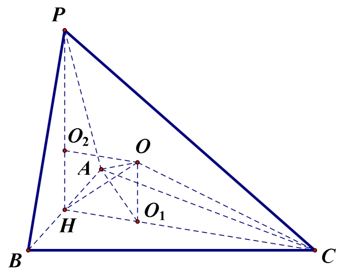
【解析】四边形 $ABCD$ 的外接圆的直径 $AC=4$，故四棱锥外接球的球心在过 AC 的中点且垂直于平面 $ABCD$ 的直线上，

又因为 P、A 两点在球面上，故其球心在过 PA 中点且垂直于 PA 的垂面上，

所以球心即为 PC 中点（$\triangle PAC$ 的外接圆即为大圆），

故 $PC=2\sqrt{5}$，四棱锥外接球的表面积为 20π.

3.【答案】$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$



【解析一】$2r_1=2r_2=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，$r_1=r_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

$O_2H=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

$R^2=O_2H^2+r_1^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$，$R=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

【解析二】$O_2H=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$O_1H=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$AH=1$，

$R^2=AO^2=AH^2+O_1H^2+O_1O^2=\dfrac{5}{3}$，$R=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

4.【答案】55π

【解析】同例 2，设补形为长方体，三个长度为三对面的对角线长，设长宽高分别为 a,b,c，

$2(a^2+b^2+c^2)=25+36+49=110$，$a^2+b^2+c^2=55$，$4R^2=55$，$S=55\pi$.

5.【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

【解析】这是对棱相等的特殊情况放入长方体中，$2R=\sqrt{3}$，

$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

6.【答案】13π

【解析】取 AB 的中点 M，连接 PM、CM，

因为 ΔPAB 是等边三角形，

所以 $PM \perp AB$，又因 $AC=BC$，所以 $CM \perp AB$，

所以 $\angle PMC$ 即为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，即 $\angle PMC=120°$，

因为 ΔPAB 是等边三角形，

所以 ΔPAB 的外接圆圆心即为三角形的重心 O_1，

过 O_1 作 $l_1 \perp$ 平面 PAB，而 M 为 ΔABC 的外接圆圆心，过 M 作 $l_2 \perp$ 平面 ABC，

所以 l_1 与 l_2 的交点即为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心 O，

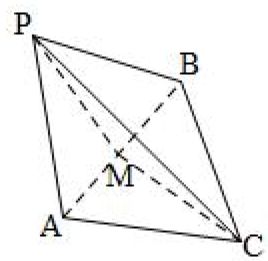
作平面 PMC 截面图，

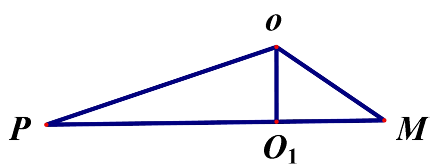
则 $PM=\sqrt{AP^2-(\frac{AB}{2})^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$， $O_1M=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $O_1P=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 3=\sqrt{3}$，

而 $\angle PMO=\angle PMC-90°=30°$，则 $OO_1=O_1M\cdot\tan 30°=\frac{1}{2}$，

所以 $r=OP=\sqrt{O_1P^2+OO_1^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi r^2=13\pi$．





7.【答案】$\frac{56}{3}$；$\sqrt{41}$

【提示】球心 O 在 SD 的中垂面上，所以 O 到底面的距离 $d=4$，设底面 $ABCD$ 的圆心为 H，半径为 r，则 $\sqrt{r^2-3^2}=\sqrt{r^2-4^2}+1$，解得 $r=5$，所以外接球的半径为 $R=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$．

8.【答案】$\frac{29}{2}\pi$

【解析】如“方法点拨类型二”图，设补形为长方体，三个长度为三对面的对角线长，

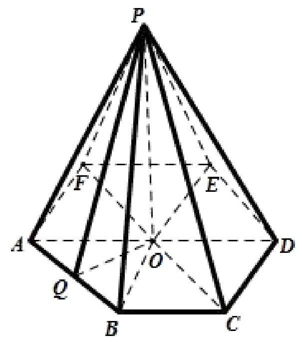
设长宽高分别为 a,b,c，则 $a^2+b^2=9$， $b^2+c^2=4$， $c^2+a^2=16$

$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)=9+4+16=29$， $2(a^2+b^2+c^2)=9+4+16=29$，

$a^2+b^2+c^2=\dfrac{29}{2}$， $4R^2=\dfrac{29}{2}$， $S=\dfrac{29}{2}\pi$.

9.【答案】BCD

【解析】设底面中心为O， $PO\perp$平面$ABCDEF$， $\therefore PO\perp AB$.



若$PD\perp AB$，则$AB\perp$平面POD，则$AB\perp OD$，即$AB\perp AD$矛盾，A 错.

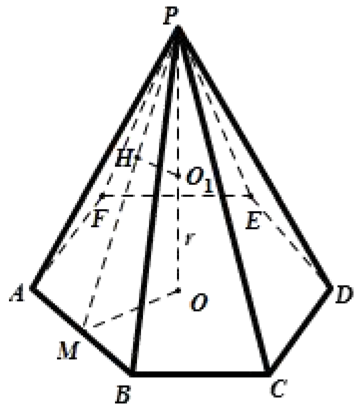
AB与PC,PD,PE,PF异面，B 对.

对于 C，可用几何法.

设四棱锥内切球球心为O_1， $\therefore O_1$一定在PO上，图中$OM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$PM=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$， $PO=\sqrt{3}$，取AB中点M，连接PM,OM，

过O_1作$O_1H\perp PM$于点H， $\therefore O_1H\perp$平面PAB



只需$O_1H=O_1O=r$，由$\triangle PO_1H\backsim\triangle PMO\Rightarrow\dfrac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-r}{\frac{\sqrt{15}}{2}}$

$\Rightarrow$ 内切球球半径 $r=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$，C 正确.

设内切圆半径为 r，取 AB 中点 Q，$PA=PB=2$，$BQ=\dfrac{1}{2}$，$\therefore PQ=\sqrt{4-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

$\therefore S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\therefore S_{侧}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$，$S_{底}=6\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\mathrm{Rt}\triangle POQ$ 中，$PO=\sqrt{PQ^2-OQ^2}=\sqrt{\dfrac{15}{4}-\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot r$，$\therefore r=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$.

设外接球半径为 R，则 $(\sqrt{3}-R)^2+1=R^2$，$\therefore R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

$S=4\pi R^2=\dfrac{16}{3}\pi$，D 对，选 BCD.

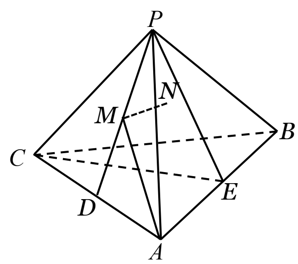
专题 61 利用展开图求空间距离最值

【方法点拨】

遇到求空间两点间距离的最小值或空间两条线段和的最小值问题，利用降维的思想，应考虑将线段所在平面展开至同一平面内或将侧面展开，将空间问题转化为平面内两点间距离最小问题.

【典型题示例】

例 1　如图，在正三棱锥 $P-ABC$ 中，侧棱长为 $2\sqrt{2}$，底面边长为 4，D 为 AC 中点，E 为 AB 中点，M 是线段 PD 上的动点，N 是平面 PCE 上的动点，则 $AM+MN$ 最小值是_______.



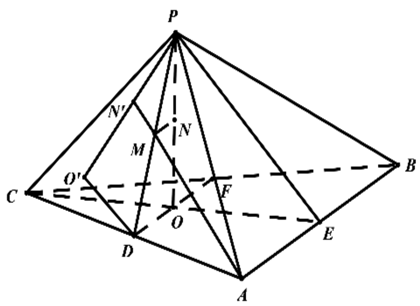
【答案】$\sqrt{3}+1$

【分析】由于 M、N 都是动点，A 是定点，可将△PAD 沿 PD 折起，使其所在平面与平面 PCE 垂直，则求 $AM+MN$ 最小值问题即转化为求点 A 到平面 PCE 距离的问题.也可将过 PD 且垂直于平面 PCE 的△POD 折至与面 PDA 共面，则求 $AM+MN$ 最小值问题即转化为点 A 到直线 PO'距离的问题（即解析所给解法）.

【解析】CB 中点 F,连接 DF 交 CE 于点 O,

易证得 $DO\perp$面 PCE，要求 $AM+MN$ 最小，即求 MN 最小，

可得 $MN\perp PCE$，又可证明 $MN//DF$，再把平面 POD 绕 PD 旋转，与面 PDA 共面，如下图



又可证得$\angle POD=90°$.

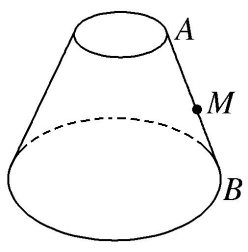
$\because PD=\frac{1}{2}AC$，$DO=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}AB=1$，

$\therefore \sin\angle OPD=\frac{OD}{PD}=\frac{1}{2}$，即$\angle OPD=30°$，

$\therefore \angle APN'=45°+30°=75°$，可得 $\sin75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

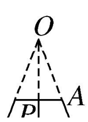
$(AM+MN)_{\min}=AN'=PA\cdot\sin75°=\sqrt{3}+1$.

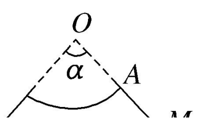
例 2　如图所示，圆台母线 AB 长为 20 cm，上、下底面半径分别为 5 cm 和 10 cm，从母线 AB 的中点 M 拉一条绳子绕圆台侧面转到 B 点，则这条绳长的最小值为________cm.



【答案】50

【解析】作出圆台的轴截面与侧面展开图，如图所示，





如图 1，由其轴截面中 Rt△OPA 与 Rt△OQB 相似，得$\dfrac{OA}{OA+AB}=\dfrac{5}{10}$，可求得 $OA=20$ cm.

如图 2，设$\angle BOB'=\alpha$，由于扇形弧 $\overset{\frown}{BB'}$ 的长与底面圆 Q 的周长相等，而底面圆 Q 的周长为 $2\pi\times 10$ cm.扇形 OBB'的半径为 $OA+AB=20+20=40$ cm，

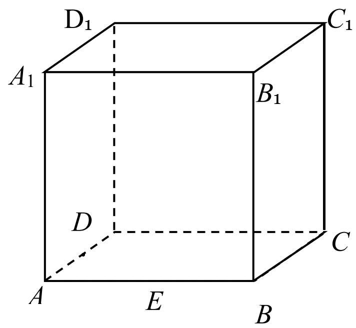
扇形 OBB'所在圆的周长为 $2\pi\times 40=80\pi$ cm.

所以扇形弧 $\overset{\frown}{BB'}$ 的长度 20π为所在圆周长的$\dfrac{1}{4}$.

所以 $OB\perp OB'$.所以在 Rt△$B'OM$ 中，$B'M^2=40^2+30^2$，

所以 $B'M=50$ cm，即所求绳长的最小值为 50 cm.

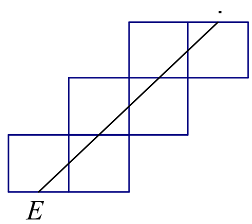
例 3 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，E 为棱 AB 的中点．一个点从 E 出发在正方体的表面上依次经过棱 BB_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1D、DA 上的点，又回到 E，则整个线路的最小值为___________.



【答案】$3\sqrt{2}$

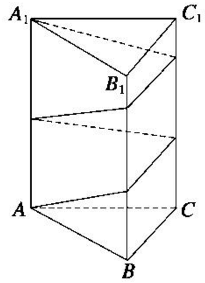
【解析】如图，将正方体六个面展开，从图中 E 到 E，

两点之间线段最短，而且依次经过棱 BB_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1D、DA 上的中点，所求的最小值为 $3\sqrt{2}$.



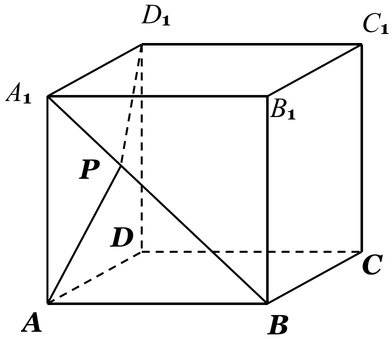
【巩固训练】

1.如图，已知正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2 cm，高为 5 cm，则一质点自点 A 出发，沿着三棱柱的侧面绕行两周到达点 A_1 的最短路线的长为______ cm.

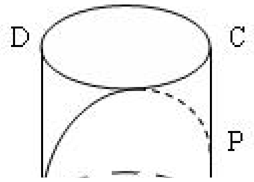


2.三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=SB=SC=1$，$\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=30°$，$M$ 和 N 分别是棱 SB 和 SC 上的点，则△AMN 周长的最小值为_________.

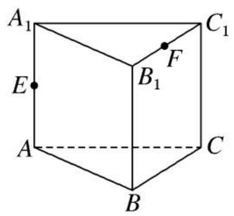
3. 如下图所示，在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 A_1B 上存在一点 P 使得 $AP+D_1P$ 最短，则 $AP+D_1P$ 的最小值为________.



4.如图，有一圆柱形的开口容器（下表面密封），过圆柱上下底面中心的平面截圆柱侧面得边长为 2 的正方形 $ABCD$，P 是 BC 的中点，现有一只蚂蚁位于外壁 A 处，内壁 P 处有一米粒，则这只蚂蚁取得米粒所经过的最短路程为_____.



5.如图所示，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=\sqrt{2}$，$BB_1=2$，$\angle ABC=90°$，E，F 分别为 AA_1，C_1B_1 的中点，则沿棱柱的表面从点 E 到点 F 的最短路径为_________.



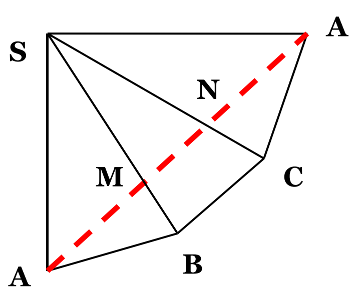
【答案或提示】

1.【答案】13

【提示】将侧面二次展开，得到长、宽各为 12cm、5 cm 的矩形，其对角线即为所求．

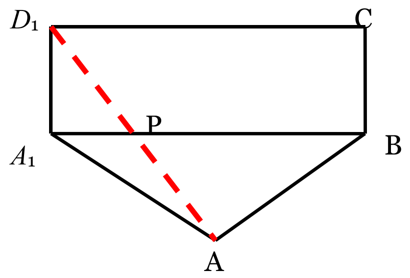
2.【答案】$\sqrt{2}$

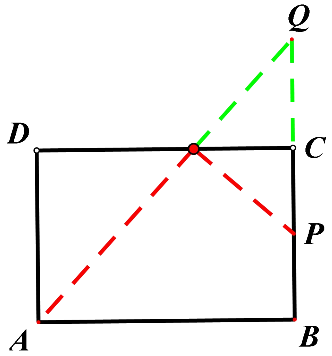
【解析】如下图，将三棱锥 $S-ABC$ 的侧面沿 SA 展开，显然，共线时最短.



3.【答案】$\sqrt{2+\sqrt{2}}$

【解析】右下图左，将△ABA_1 沿 A_1B 折起，使之与平面 A_1D_1CB 共面，当 A、P、D_1 共线时，$AP+D_1P$ 取得最小值，在△AA_1D_1 利用余弦定理易得 $AD_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.





4.【答案】$\sqrt{\pi^2+9}$

【提示】如上图右，$AB=\pi$，P、Q 关于直线 CD 对称，$PQ=3$，由勾股定理立得.

5.【答案】$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】若将$\triangle A_1B_1C_1$ 沿 A_1B_1 折起，使得 E，F 在同一平面内，则此时 EF＝ $\sqrt{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}$.若将侧面沿 B_1B 展成平面，则此时 EF＝ $\sqrt{\frac{11}{2}}$.若将$\triangle A_1B_1C_1$ 沿 A_1C_1 折起使得 E，F 在同一平面内，则此时 EF＝$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.经比较知沿棱柱的表面从点 E 到点 F 的最短路径为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

专题 62 割补法与等积变换求解体积问题

【方法点拨】

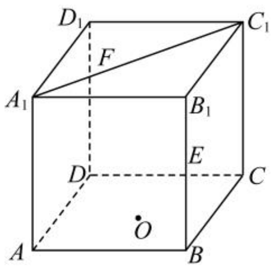
1. 利用等积变换求解三棱锥的体积问题，归根结底就是“换顶点（或换底面）”，换顶点的常用方法有二. 一是直接换，即从四个顶点选择一个点作为顶点，选择的基本原则是点面距易求，如出现线面垂直等；二是利用线面平行更换顶点，由于该直线上任意一点到平面的距离均相等，换完后依然是便于求出点面距. 当然，有时还会遇到利用与平面相交的直线上的点换顶点等不一而足.
2. 利用求体积可以求点面距，其数学方法是“算两次”.

【典型题示例】

例 1　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，动点 E 在棱 BB_1上，动点 F 在线段A_1C_1上，O 为底面 $ABCD$ 的中心，若 $BE=x$，$A_1F=y$，则四面体 $O-AEF$ 的体积(　)

A. 与 x，y 都有关　　B. 与 x，y 都无关

C. 与 x 有关，与 y 无关　　D. 与 y 有关，与 x 无关



【答案】B

【分析】利用线面平行换顶点，化动为静.

【解析】易知，$A_1C_1 \parallel$ 平面 AOE，故四面体 $O-AEF$ 即四面体 $F-AOE$ 与四面体 A_1-AOE

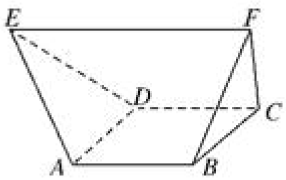
同底等高，即 $V_{四面体O-AEF}=V_{四面体A_1-AOE}$

同理，$BB_1 \parallel$ 平面 AA_1O，故四面体 A_1-AOE 即四面体 $E-AA_1O$ 与四面体 $B-AA_1O$ 同底等高，

即 $V_{四面体A_1-AOE}=V_{四面体B-AA_1O}$

所以 $V_{四面体O-AEF}=V_{四面体B-AA_1O}=V_{四面体O-AA_1B}$，故与 x，y 都无关.

例 2　如图所示，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 ΔADE、ΔBCF 均为正三角形，$EF//AB$，$EF=2$，则该多面体的体积为（　　）



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

【答案】A

【分析】将物体切割成一个三棱柱，两个三棱锥分别计算体积.

【解析】在 EF 上取点 M,N 使 $EM=FN=\dfrac{1}{2}$，连接 AM,DM,BN,CN，

$ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形，$EF//AB$，

所以四边形 $ABFE$ 为等腰梯形，$EF=2$，$MN=1$，

根据等腰梯形性质，$AM\perp EF, DM\perp EF, BN\perp EF, CN\perp EF$，

AM, DM 是平面 AMD 内两条相交直线，BN, CN 是平面 BNC 内两条相交直线，

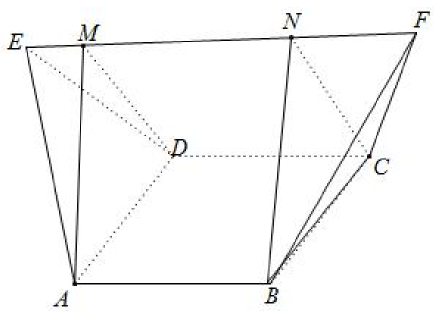
所以 $EF\perp$ 平面 AMD，$EF\perp$ 平面 BNC，

$MA=MD=NB=NC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

几何体体积为 $V=2V_{E-AMD}+V_{AMD-BNC}$

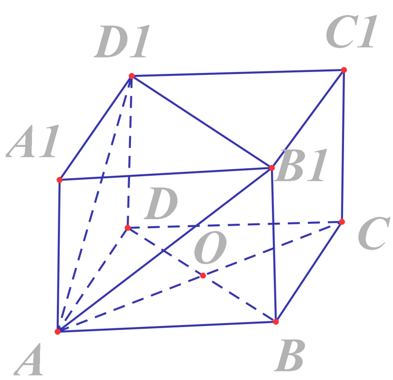
$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\times\dfrac{1}{2}\times2+\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

故选：A



例 3 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=3\text{cm}$，$AA_1=2\text{cm}$，则四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的体积为________cm^3.

【答案】6cm^3



【解析】如图所示，连结 AC 交 BD 于点 O，

因为 平面 $ABCD \perp BB_1D_1D$，又因为 $AC \perp BD$，所以，$AC \perp$ 平面BB_1D_1D，

所以四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的高为 AO，

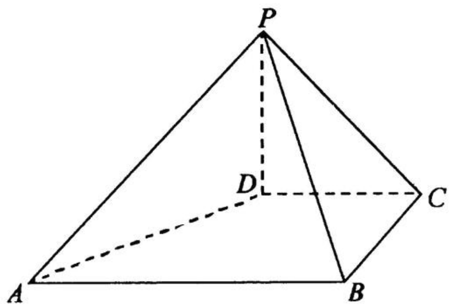
根据题意 $AB = AD = 3\text{cm}$，所以 $AO = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $BD = 3\sqrt{2}\text{cm}$，$AA_1 = 2\text{cm}$，故矩形 BB_1D_1D 的面积为 $6\sqrt{2}\text{cm}^2$，

从而四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的体积 $V = \dfrac{1}{3} \times 6\sqrt{2} \times \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 6\text{cm}^3$.

例 4　　如下图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD \perp$ 平面 $ABCD$，$PD = DC = BC = 1, AB = 2,$

$AB \,//\, DC, \angle BCD = 90°$，则点 A 到平面 PBC 的距离为__________.



【答案】$\sqrt{2}.$

【分析】先证明 $PC \perp BC$，而所求点 A 到平面 PBC 的距离，需利用“算两次”，求出三棱锥 $P-ABC$ 的体积即可.

【解析】因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$，$BC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD \perp BC$. 由 $\angle BCD = 90^\circ$，得 $BC \perp DC$.

又 $PD \cap DC = D$，$PD \subset$ 平面 PCD，$DC \subset$ 平面 PCD，所以 $BC \perp$ 平面 PCD，
因为 $PC \subset$ 平面 PCD，所以 $PC \perp BC$.
连结 AC. 设点 A 到平面 PBC 的距离为 h.

因为 $AB \,//\, DC$，$\angle BCD = 90^\circ$，所以 $\angle ABC = 90^\circ$. 从而由 $AB = 2, BC = 1$，

得 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC} = 1$. 由 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ 及 $PD = 1$，得三棱锥 $P-ABC$

的体积$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PD=\frac{1}{3}\cdot$因为$PD\perp$平面$ABCD,DC\subset$平面$ABCD$,

所以$PD\perp DC$,又$PD=DC=1$,所以$PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{2}$

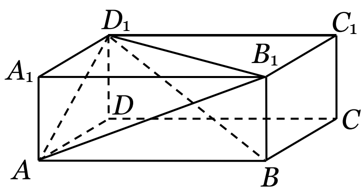
由$PC\perp BC$，$BC=1$,得ΔPBC的面积$S_{\Delta PBC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由$V=\frac{1}{3}S_{\Delta PBC}h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot h=\frac{1}{3}$,得$h=\sqrt{2}.$

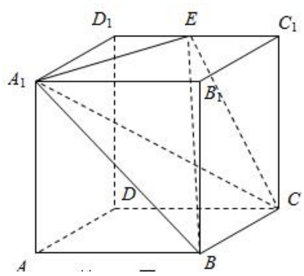
因此．点A到平面PBC的距离为$\sqrt{2}.$

【巩固训练】

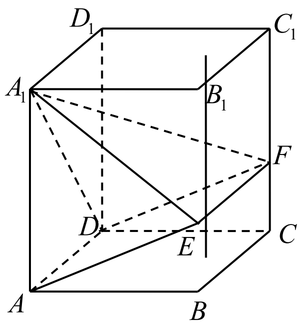
1.如下图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$ cm，$AD=2$ cm，$AA_1=1$ cm，则三棱锥B_1-ABD_1的体积为_________cm^3



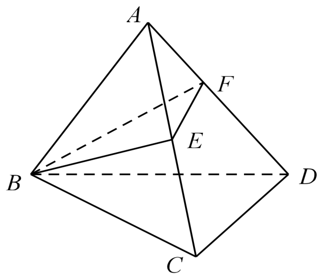
2.如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$cm，E为C_1D_1的中点，则三棱锥$E-A_1BC$的体积为_____cm^3.



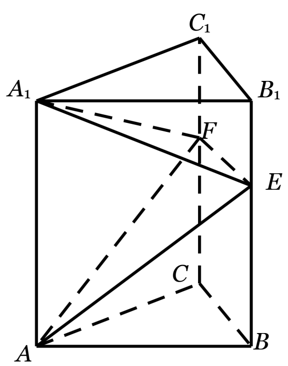
3.如图，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 36，点 E ， F 分别为棱 B_1B ， C_1C 上的点（异于端点），且 $EF // BC$ ，则四棱锥 A_1-AEFD 的体积为____.



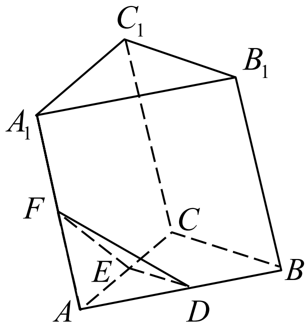
4．如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，E 是 AC 中点，F 在 AD 上，且 $2AF=FD$，若三棱锥 $A-BEF$ 的体积是 2，则四棱锥 $B-ECDF$ 的体积为________.



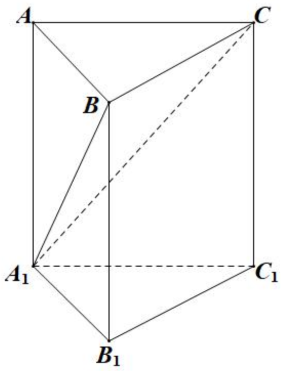
5.如图，正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，$AB=4$，$AA_1=6$．若 E，F 分别是棱 BB_1，CC_1 上的点，则三棱锥 $A—A_1EF$ 的体积是_____________.



6. 如图，在三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，D，E，F 分别是 AB，AC，AA_1 的中点，设三棱锥 $F-ADE$ 的体积为 V_1，三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积为 V_2，则 $V_1:V_2=$______.



7. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$，$BC=2$，$AC=\sqrt{3}$，$AA_1=1$.则 B_1 到面 A_1BC 的距离为____________.



【答案或提示】

1.【答案】1

【提示】直接使用等体积法.

2.【答案】$\dfrac{2}{3}$

【提示】直接使用等体积法.

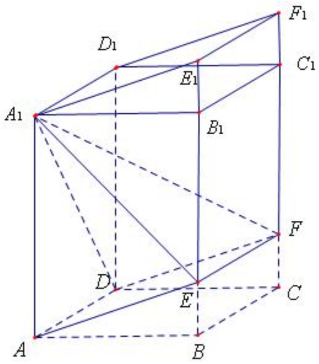
3.【答案】12

【解析一】特殊位置法，转化为求四棱锥 A_1-ABCD 的体积；

【解析二】连接 DE，则三菱锥 A_1-ADE 与三菱锥 A_1-DEF 体积相等，所以

$V_{A_1-AEFD}=2V_{A_1-ADE}=2V_{E-A_1AD}$，因为 $V_{E-A_1AD}=\frac{1}{6}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}$，所以 $V_{A_1-AEFD}=12$.

【解析三】补体，如右图.



4. 【答案】10

【解析】补体，转化为三菱锥 $A-BEF$ 与三棱锥 $A-BCD$ 的体积比，实施等积变换.

$$\frac{V_{A-BEF}}{V_{A-BCD}}=\frac{V_{B-AEF}}{V_{B-ACD}}=\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ACD}},$$

因为 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin A}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin A}=\frac{1}{6}$， $V_{总}=6V_{A-BEF}=12$，

则四棱锥 $B-ECDF$ 的体积为 10.

5.【答案】$8\sqrt{3}$

【提示】直接使用等体积法.

6. 【答案】1：24

【解析】三棱锥 $F-ADE$ 与三棱锥 A_1-ABC 的相似比为 1：2，故体积之比为 1：8.

又因三棱锥 A_1-ABC 与三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积之比为 1:3. 所以，三棱锥 $F-ADE$ 与三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积之比为 1：24.

7.【答案】$\frac{\sqrt{21}}{7}$.

【解析】因为三棱锥 $C-A_1AB$ 与三棱锥 $C-A_1BB_1$ 的底面积相等 $\left(S_{\triangle A_1AB}=S_{\triangle A_1B_1B}\right)$，

高也相等（点 C 到平面 ABB_1A_1 的距离）；

所以三棱锥 $C-A_1AB$ 与三棱锥 $C-A_1B_1B$ 的体积相等.

又 $V_{C-A_1AB}=V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

所以 $V_{C-A_1B_1B}=V_{B_1-A_1BC}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

设 B_1 到面 A_1BC 的距离为 H,

则 $V_{B_1-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}H=\frac{\sqrt{3}}{6}$，解得 $H=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

专题 63 几何体的内切球

【方法点拨】

1.“切”的问题处理规律：

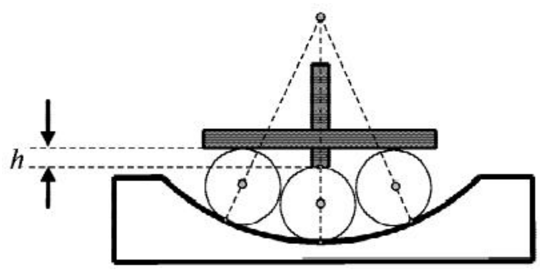
(1)找准切点，通过作过球心的截面来解决.

(2)体积分割是求内切球半径的常用方法.

2.多面体的内切球的半径，运用“等体积法”也是常用思路.

【典型题示例】

例 1　(2022・江苏南京、盐城・二检）某中学开展劳动实习，学生需测量某零件中圆弧的半径．如图，将三个半径为 20cm 的小球放在圆弧上，使它们与圆弧都相切，左、右两个小球与中间小球相切．利用“十”字尺测得小球的高度差 h 为 8cm，则圆弧的半径为______cm.



【答案】120

【解法一】由题意可知，$BC=8$，$AB=12$，$AO=8$，

设圆弧的半径为 r，可得 $\cos\angle AOO_1=\dfrac{AO}{OO_1}=\dfrac{8}{40}=\dfrac{1}{5}=\cos\angle MOO_1$，

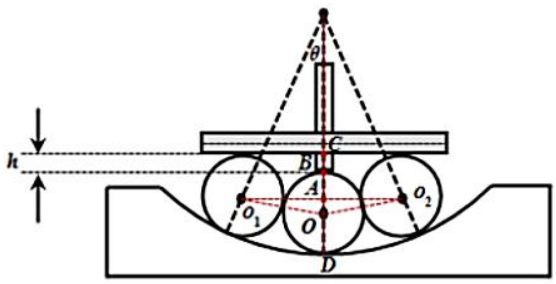
则在$\triangle MOO_1$中，由余弦定理可得，$(r-20)^2=(r-20)^2+40^2-2\cdot(r-20)\cdot 40\cdot\dfrac{1}{5}$，

解得 $r=120$.

【解法二】由题意可知，$BC=8$，$AB=12$，$AO=8$，

设圆弧的半径为 r，可得 $\cos\angle AOO_1=\dfrac{AO}{OO_1}=\dfrac{NO}{MO}=\dfrac{8}{40}=\dfrac{1}{5}$，

即$\dfrac{1}{5}=\dfrac{20}{MO}$，解得 $MO=100$，则 $r=MO+20=120$.



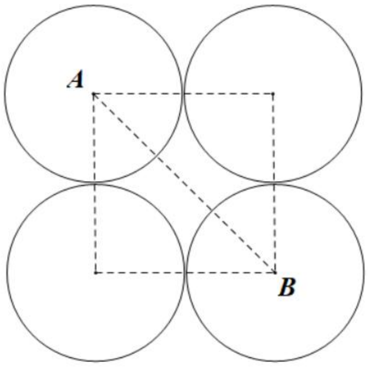
例 2　（2022·全国高中数学联赛江苏苏州选拔赛）已知半径为 2 的半球面碗中装有四个半径均为 r 的小球，碗壁和球的表面都是光滑的，且每个小球均与碗口平面相切，则 r 的值为____________.

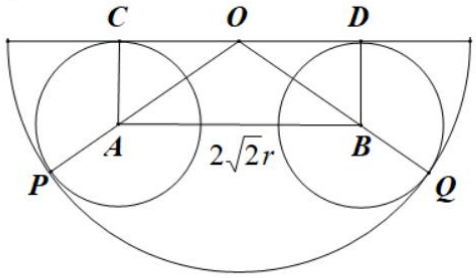
【答案】$\sqrt{3}-1$

【分析】先从碗口垂直方向分析四个球中，求得对角球心间的距离，再根据对角球与半球的切点在同一过球心的平面上，根据几何关系列式求解即可.

【解析】由题意，两个对角球心 A,B 间的距离为$\sqrt{(2r)^2+(2r)^2}=2\sqrt{2}r$，根据球的性质可得球 A,B 与半球碗的切点 P,Q 在同一过球心 O 的截面上，且 O,A,P 三点共线，O,B,Q 三点共线，作 AC,BD 分别垂直于碗的水平线，则 $OA=\sqrt{r^2+\left(\sqrt{2}r\right)^2}=\sqrt{3}r$，又球的半

径为 2，且 $OA+AP=OP$，故 $\sqrt{3}r+r=2$，即 $r=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$





故答案为：$\sqrt{3}-1$.

例 3　　已知一个棱长为a的正方体木块可以在一个圆锥形容器内任意转动，若圆锥的底面半径为2，母线长为4，则a的最大值为__________.

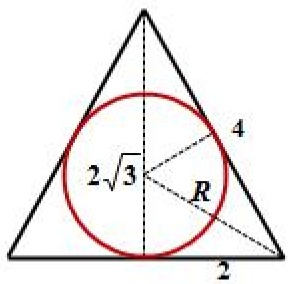
【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解法一】设圆锥的内切球与PM切于A点，内切球球心为O，

连接OA，$PQ=2\sqrt{3}$，设内切球半径为r，

$\therefore$由$\triangle POA\backsim\triangle PMQ\Rightarrow\dfrac{r}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}-r}{4}\Rightarrow r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a\le\dfrac{4}{3}$，



$\therefore a$的最大值为$\dfrac{4}{3}$.

【解法二】设圆锥内切球半径为R，$R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

正方体外接球半径为$\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}a}{2}\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$a\le\dfrac{4}{3}$.

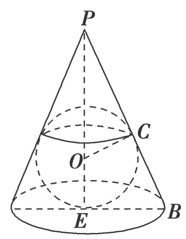
$\therefore a$的最大值为$\dfrac{4}{3}$.

例 4　已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】易知半径最大的球即为该圆锥的内切球.

圆锥及其内切球 O 如　　　　图所示，



设内切球的半径为 R，则 $\sin\angle BPE=\dfrac{R}{OP}=\dfrac{BE}{PB}=\dfrac{1}{3}$，所以 $OP=3R$，

所以 $PE=4R=\sqrt{PB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以内切球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$，

即该圆锥内半径最大的球的体积为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

例 5　正四面体$ABCD$的棱长为a，O是棱AB的中点，以O为球心的球面与平面BCD的交线和CD相切，则球O的体积是（　　）

A. $\dfrac{1}{6}\pi a^3$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi a^3$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

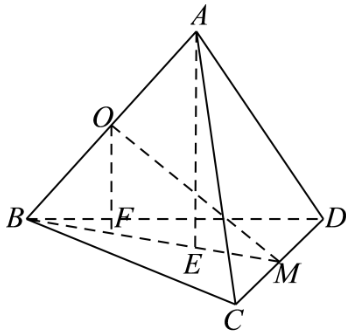
【答案】D

【分析】设点A在平面BCD内的射影为点E，则E为$\triangle BCD$的中心，取CD的中点M，

连接 BM，则 $E \in BM$，取线段 BE 的中点 F，连接 OF，分析可知以 O 为球心的球面与平面 BCD 的交线和 CD 相切的切点为 M，求出 OM，即为球 O 的半径，再利用球体的体积公式可求得结果.

【解析】设点A在平面 BCD 内的射影为点 E，则 E 为 $\triangle BCD$ 的中心，

取 CD 的中点 M，连接 BM，则 $E \in BM$，取线段 BE 的中点 F，连接 OF，



因为 O、F 分别为 AB、BE 的中点，则 $OF // AE$ 且 $OF = \frac{1}{2}AE$，

因为 $AE \perp$ 平面 BCD，则 $OF \perp$ 平面 BCD，因为 $BE \subset$ 平面 BCD，则 $AE \perp BE$，

正 $\triangle BCD$ 的外接圆半径为 $BE = \dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，

所以，$OF = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{6}}{6}a$，

易知球 O 被平面 BCD 所截的截面圆圆心为点 F，且 $BF = EF = EM$，故

$FM = BE = \frac{\sqrt{3}}{3}a$，

因为 $\triangle BCD$ 为等边三角形，M 为 CD 的中点，则 $BM \perp CD$，

因为以 O 为球心的球面与平面 BCD 的交线和 CD 相切，则切点为点 M，

则球 O 的半径为 $OM = \sqrt{OF^2 + FM^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，

因此，球 O 的体积是 $V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

故选：D.

【巩固训练】

1．在四棱锥 P -$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 $2a$ 的正方形，$PD\perp$底面 $ABCD$，且 PD＝$2a$.若在这个四棱锥内放一球，则此球的最大半径为________.

2.在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内容纳 9 个等球，8 个角各放 1 个， 中间放 1 个，则这些等球的最大半径为______________.

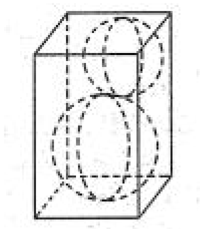
3.已知一个平放的各棱长为 4 的三棱锥内有一个小球 O(重量忽略不计)，现从该三棱锥顶端向内注水，小球慢慢上浮，若注入的水的体积是该三棱锥体积的$\frac{7}{8}$时，小球与该三棱锥的各侧面均相切(与水面也相切)，则小球的表面积等于(　　)

A.$\frac{7\pi}{6}$　　B.$\frac{4\pi}{3}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

4.半径为 R 的球内部装有四个相同半径 r 的小球，则 r 的最大值为（　　）.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}R$　　*B.* $\frac{2}{2+\sqrt{6}}R$　　*C.* $\frac{1}{1+\sqrt{3}}R$　　*D.* $\frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}R$

5.如图，在底面边长为2，高为3的正四棱柱中，大球与该正四棱柱的五个面均相切，小球在大球上方且与该正四棱柱的三个面相切，也与大球相切，则小球的半径为___________.



6.球 O 与棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个面都相切，点 M 为棱 DD_1 的中点，则平面 ACM 截球 O 所得的截面圆与球心 O 所构成的圆锥的体积为______.

7.我国古代数学名著《九章算术》中将正四棱锥称为方锥.已知某方锥各棱长均为 2，则其内切球的体积为______.

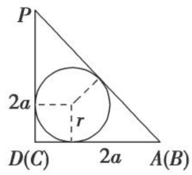
8.正三棱柱有一个半径为 $\sqrt{3}\text{cm}$ 的内切球，则此棱柱的体积是（　　）.

A．$9\sqrt{3}\text{cm}^3$　　B．54cm^3　　C．27cm^3　　D．$18\sqrt{3}\text{cm}^3$

【答案或提示】

1.【答案】$(2-\sqrt{2})a$

【解析】由题意知，当球与四棱锥各面均相切，即内切于四棱锥时球的半径最大．作出过球心的截面图，如图所示．易知球的半径 $r=(2-\sqrt{2})a$.

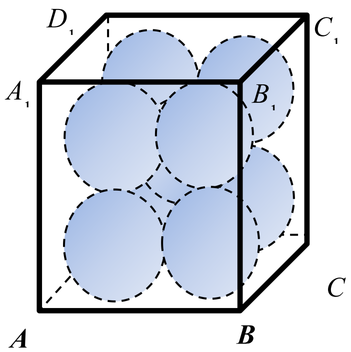


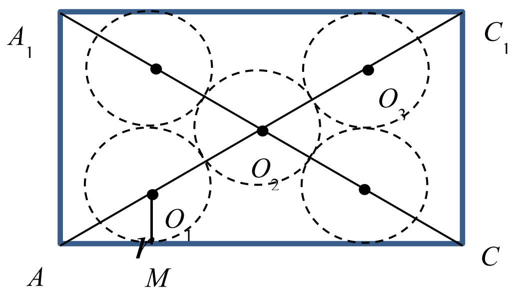
2.【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$

【解析】当球半径最大时，8 个角上的球必与正方体的三个面相切，切点在各面的对角线上，球心都在正方体的体对角面上

作轴截面 AA_1C_1C，设球半径为 r，则 $A_1C=2\sqrt{3}r+4r$，而 $A_1C=\sqrt{3}$

故 $r=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$.





3.【答案】 C

【解析】 当注入水的体积是该三棱锥体积的$\frac{7}{8}$时，设水面上方的小三棱锥的棱长为 x(各棱

长都相等).

依题意，$\left(\frac{x}{4}\right)^3=\frac{1}{8}$，得 $x=2$，易得小三棱锥的高为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

设小球半径为 r，则 $\frac{1}{3}S_{底面}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=4\times\frac{1}{3}S_{底面}\cdot r$($S_{底面}$为小三棱锥的底面积)，得 $r=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故小球的表面积 $S=4\pi r^2=\frac{2\pi}{3}$.

4.【答案】B

5.【答案】$\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}$.

【分析】设出小球半径，结合图形，利用已知条件，根据勾股定理，即可求出答案.

【解析】易知大球的半径为 $R=1$，设小球的半径为 r，C 为小球球心，O 为大球球心，大球与正四棱柱的下底面相切与点 H，小球与正四棱柱的上底面相切与点 E，连接 HN,EM，作 $CD\perp OD$ 于点 D，如图，

由题意可知，$HN=\sqrt{2}, EM=\sqrt{2}r$，

所以 $OD=HN-EM=\sqrt{2}-\sqrt{2}r$，$CD=3-1-r=2-r$，

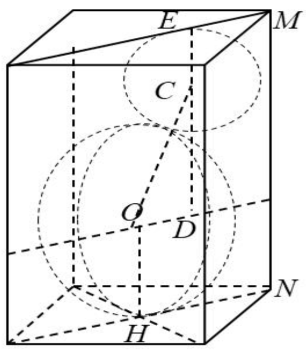
因为两圆相切，所以 $CO=1+r$，

因为 $\triangle OCD$ 为直角三角形，所以 $(1+r)^2=(2-r)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}r\right)^2$，

即 $2r^2-10r+5=0$，

又因为 $r\in(0,1)$，所以

$$r=\frac{10-\sqrt{100-40}}{4}=\frac{5-\sqrt{15}}{2}.$$

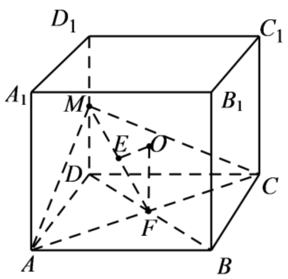


故答案为：$\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}$.

6.【答案】$\dfrac{\sqrt{6}\pi}{27}$

【分析】由球心 O 为正方体的中心，连接 BD 与 AC 交于点 F，作 $OE \perp MF$，易知 OE 为所得圆锥的高，底面的半径为 $r=EF$ 求解.

【解析】如图所示：



易知球心 O 为正方体的中心，连接 BD 与 AC 交于点 F，

作 $OE \perp MF$，易知 $AC \perp$ 面 B_1BDD_1，则 $AC \perp OE$，

又 $MF \cap AC = F$,所以 $OE \perp$ 平面 ACM，则 OE 为所得圆锥的高，

又 $OE=\dfrac{OF \cdot OM}{MF}=\dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

圆锥的底面的半径为 $r=EF=\sqrt{OF^2-OE^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以圆锥的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi \times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}\pi}{27}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}\pi}{27}$.

7.【答案】$\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】如图，设方锥底面的中心为 O，

则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=2\sqrt{2}$，所以 $AO=CO=\sqrt{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAO$ 中，$PO=\sqrt{2}$，

所以方锥的体积为 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

设方锥内切球的半径为 r，

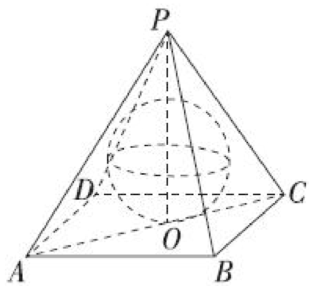
而方锥的表面积为 $4+4\times\dfrac{1}{2}\times 2^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4+4\sqrt{3}$，

由等体积法可得 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{3}\times\left(4+4\sqrt{3}\right)r$，

解得 $r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

体积为 $\dfrac{4}{3}\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$.

故填：$\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$.



8.【答案】B

【解析】∵正三棱柱有一个半径为 $\sqrt{3}\mathrm{cm}$ 的内切球，则正三棱柱的高为 $2\sqrt{3}\,cm$，

底面正三角形的内切圆的半径为 $\sqrt{3}\,cm$，

设底面正三角形的边长为 $a\,cm$,则 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{1}{3}=\sqrt{3}$，解得 $a=6\,cm$，

∴正三棱柱的底面面积为$\frac{1}{2}\times 6\times 6\times \frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ cm^2，

故此正三棱柱的体积 V= $9\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=54$ cm^3．故选：B．

专题 64 几何体被球所截的截痕

【方法点拨】

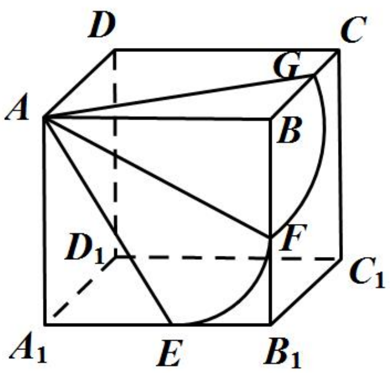
空间想象能力历来是立体几何考察之重点，几何体被球所截的截痕要弄清是圆弧还是圆，其圆心、半径是什么？具有对称性吗？

【典型题示例】

例 1 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A 为球心半径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$的球面与正方体表面的交线长为____________.

【答案】$\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$

【解析】如图，



球面与正方体的六个面都相交，所得的交线分为两类：

一类在顶点 A 所在的三个面上，即面 AA_1B_1B 、面 $ABCD$ 和面 AA_1D_1D 上；

另一类在不过顶点 A 的三个面上，即面 BB_1C_1C 、面 CC_1D_1D 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 上.

在面 AA_1B_1B 上，交线为弧 EF 且在过球心 A 的大圆上，

因为 $AE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$， $AA_1=1$，则 $\angle A_1AE=\frac{\pi}{6}$，同理 $\angle BAF=\frac{\pi}{6}$，

所以 $\angle EAF=\frac{\pi}{6}$，故弧 EF 的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$，而这样的弧共有三条.

在面 BB_1C_1C 上，交线为弧 FG 且在距球心为 1 的平面与球面相交所得的小圆上，此时，小圆的圆心为 B，半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$， $\angle FBG=\frac{\pi}{2}$，所以弧 FG 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$，这样的弧也有三条，

于是，所得的曲线长为 $3\times\frac{\sqrt{3}}{9}\pi+3\times\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$，故答案为 $\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$.

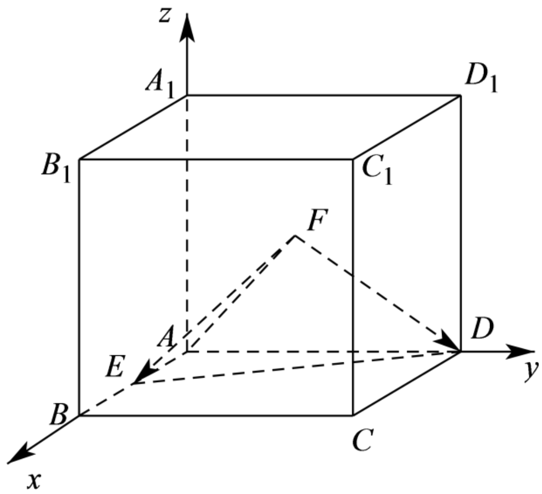
例 2　正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，E 是棱 AB 的中点，F 是四边形 AA_1D_1D 内一点（包含边界），且 $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}=-\frac{3}{4}$，当三棱锥 $F-AED$ 的体积最大时，EF 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】A

【分析】建立空间直角坐标系，设出 $F(0,m,n)$，利用向量的数量积 $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}=m^2-2m+n^2=-\frac{3}{4}$， $(m-1)^2+n^2=\frac{1}{4}$，故点 F 的轨迹 $(0,1,0)$ 为圆心， $\frac{1}{2}$ 为半径的圆，当体积最大值求得 $F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，从而得到 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值.

【解析】如图，以 A 为坐标原点，AB，AD， AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$， $E(1,0,0)$， $D(0,2,0)$，设 $F(0,m,n)$， $m\in[0,2],n\in[0,2]$，

则 $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}=(1,-m,-n)\cdot(0,2-m,-n)=m^2-2m+n^2=-\dfrac{3}{4}$，

由于 $S_{\triangle ADE}$ 为定值，要想三棱锥 $F-AED$ 的体积最大，则 F 到底面 ADE 的距离最大，

其中 $n^2=-\dfrac{3}{4}-m^2+2m=-(m-1)^2+\dfrac{1}{4}$，

所以当 $m=1$ 时， n^2 取得最大值 $\dfrac{1}{4}$，

因为 $n\in[0,2]$，

所以 n 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$，

所以 $F\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$， $\overrightarrow{EF}=\left(-1,1,\dfrac{1}{2}\right)$，

平面 ABB_1A_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$，

所以 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\left|\cos\overrightarrow{EF},\overrightarrow{n_1}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+1+\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{2}{3}$

故选：A

说明：

本题也可利用极化恒等式求解，请参考本系列讲座极化恒等式部分.

【巩固训练】

1. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A 为球心半径为 $\sqrt{3}$ 的球面与正方体表面的交线长为__________.

2.正三棱锥 $P-ABC$ 中，$\sqrt{2}PA=AB=4\sqrt{2}$，点 E 在棱 PA 上，且 $PE=3EA$，已知点 P、A、B、C 都在球 O 的表面上，过点 E 作球 O 的截面 α，则 α 截球 O 所得截面面积的最小值为____________.

3.某四棱锥的底面为正方形，顶点在底面的射影为正方形中心，该四棱锥所有顶点都在半径为 3 的球 O 上，当该四棱锥的体积最大时，底面正方形所在平面截球 O 的截面面积是（　　）

A．π　　B．4π　　C．8π　　D．9π

4. 已知球 O 是正三棱锥 A-BCD（底面是正三角形，顶点在底面的射影为底面中心）的外接球，$BC=3$，$AB=2\sqrt{3}$，点 E 在线段 BD 上，且 $BD=3BE$．过点 E 作球 O 的截面，则所得截面面积的最小值是（　　）

A．2π　　B．3π　　C．4π　　D．5π

5.已知正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的棱长均为 $\sqrt{3}$，点 P 在棱 AA_1 上运动，点 Q 在底面 $ABCDEF$ 内运动，$PQ=\sqrt{2}$，R 为 PQ 的中点，则动点 R 的轨迹与正六棱柱的侧面和底面围成的较小部分的体积为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{24}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{18}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{12}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

6.四棱锥 $P-OABC$ 中，底面 $OABC$ 是正方形，$OP\perp OA$，$OA=OP=a$．D 是棱 OP 上的一动点，E 是正方形 $OABC$ 内一动点，DE 的中点为 Q，当 $DE=a$ 时，Q 的轨迹是球面的一部分，其表面积为 3π，则 a 的值是（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{6}$　　C．$3\sqrt[3]{6}$　　D．6

【答案或提示】

1.【答案】$\frac{3}{2}\pi$

【提示】解法同例 1.

2. 【答案】3π

【提示】通过补体把正三棱锥补成正方体，则正方体的体对角线为外接球直径, 求出 OE =3，当 $OE\perp$平面α时，平面α截球 O 的截面面积最小，此时截面为圆面，从而可计算截面的半径，从而推导出截面的面积.

3.【答案】C

【分析】作出图形，可知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 为正四棱锥，由勾股定理可得出$\left(h-3\right)^2+2a^2=9$ 分析得出 $h>3$，利用三角换元，可设 $h=3+3\cos\theta$，$\sqrt{2}a=3\sin\theta$，其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，从而建立体积的目标函数，利用导数求出取最大值时对应的的值，求出 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 的值，可得出 $AE=3\sin\theta=2\sqrt{2}$，进而可求截面面积是 $\pi AE^2=8\pi$ 得结果.

4.【答案】A

【提示】O_1 是 A 在底面的射影，求出底面外接圆的半径和几何体外接球的半径，利用余弦定理求出 O_1E=1，当截面垂直于 OE 时，截面面积最小，求出截面圆的半径即得解.

5.【答案】B

【分析】根据题意，可判断出动点 R 的轨迹为球，结合球的体积公式，即可求解.

【解析】由直角三角形的性质得 $AR=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以点 R 在以 A 为球心，半径是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的球面上运动，

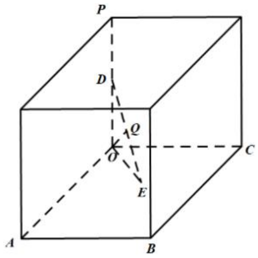
因为 $\angle BAF=\frac{2\pi}{3}$，所以动点 R 的轨迹与正六棱柱的侧面和底面围成的较小部分 $\frac{1}{6}$ 球，

其体积为 $\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{18}$.

故选：B.

6.【答案】B

【分析】首先假设$OP\perp OC$，将四棱锥$P-OABC$放在正方体中，然后根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半求得$OQ=\frac{1}{2}a$，得到点Q的轨迹，最后根据题意列出方程求出a的值 .



【解析】由题意不妨设$OP\perp OC$,又$OP\perp OA$，底面$OABC$是正方形，

所以可将四棱锥$P-OABC$放在一个正方体内，

所以$DO\perp$面$OABC$，又$OE\subset$面$OABC$，

则$DO\perp OE$，又DE的中点为Q，

所以$OQ=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}a$，

即Q的轨迹是以O为球心，$OQ=\frac{1}{2}a$为半径的球，且点Q恒在正方体内部，

又因为 8 个一样的正方体放在一起，点Q的轨迹就可以围成一个完整的球，

所以Q的轨迹是以O为球心，$OQ=\frac{1}{2}a$为半径的球的$\frac{1}{8}$球面，

所以$\frac{1}{8}\times 4\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=3\pi$，解得$a=2\sqrt{6}$，

故选：B.

专题 65 三个分布的期望、方差与性质的运用

【方法点拨】

1.如果 X～$B(n，p)$，那么 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$.

如果 X～$H(n，M，N)$时，$E(X)=\frac{nM}{N}$.

如果 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$.

2. $E(aX+b)=aE(X)+b$.

$D(aX+b)=a^2D(X)$.

【典型题示例】

例 1　购买某种意外伤害保险，每个投保人年度向保险公司交纳保险费 20 元，若被保险人在购买保险的一年度内出险，可获得赔偿金 50 万元.已知该保险每一份保单需要赔付的概率为10^{-5}，某保险公司一年能销售 10 万份保单，且每份保单相互独立，则一年度内该保险公司此项保险业务需要赔付的概率约为____________；一年度内盈利的期望为___________万元.（参考数据：$\left(1-10^{-5}\right)^{10^5}\approx 0.37$）

【答案】0.63，150

【分析】根据题意知，保险公司此项保险业务就是概率为10^{-5}，试验次数为 10 万的独立重复实验，设随机变量 X 为一年度内出险的人数，则 $X\sim B(10^5,10^{-5})$.一年度内该保险公司此项保险业务需要赔付的概率即求 $P(X\geq 1)$，转化为对立事件 $P(X\geq 1)=1-P(X=0)$，再结合贝努力概型公式即可. 一年度内盈利的期望转化为求随机变量 X 的期望再使用数学期望的性质立得.

【解析】设随机变量 X 为一年度内出险的人数，则 $X\sim B(10^5,10^{-5})$

所以 $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-C_{10^5}^{0}\left(10^{-5}\right)^0\left(1-10^{-5}\right)^{10^5}\approx 1-0.37=0.63$

故一年度内该保险公司此项保险业务需要赔付的概率约为 0.63

设，随机变量 Y 为一年度内盈利的金额（万元），则 $Y=200-50X$

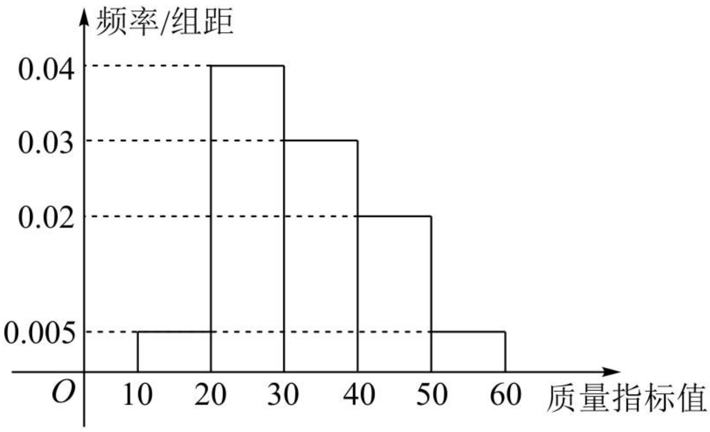
因为 $E\left(X\right)=10^5\times 10^{-5}=1$

所以根据数学期望的性质得 $E\left(Y\right)=200-50E\left(X\right)=150$

故保险公司一年度内盈利的期望为 150 万元.

例 2　为预防新冠肺炎，需做好个人的防护与自我检测，倡导个人每天做好体温检测工作. 我国某体温仪生产厂商在加大生产的过程中，严格管控质量，随机做好体温仪质量抽检

工作．该厂质检人员从某天所生产的体温仪中随机抽取了 100 个，依据质检指标值分成 $[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$ ，$[40,50)$ ，$[50,60]$ 五组，并制成如下的频率分布直方图．



为节省检测成本，现采用混装的方式将所有的体温仪按 200 个一箱包装．已知一个一级体温仪的利润是 20 元，一个特等体温仪的利润是 15 元，以样本分布的频率作为总体分布的概率，试估计每箱体温仪的利润为________．

【答案】3750 元.

【分析】设一箱体温仪中一级体温仪有 Y 个，每箱体温仪的利润为 Z 元，利用二项分布的期望公式，期望的性质计算作答.

【解析】设每箱产品中一级体温仪有 Y 个，每箱体温仪的利润为 Z 元，

则每箱特等体温仪有 $(200-Y)$ 个，因此 $Z=20Y+15(200-Y)=3000+5Y$，

由频率分布直方图知，质量指标值低于 40 的频率为 0.75，质量指标值不低于 40 的频率为 0.25，任抽一个体温仪，为一级体温仪的概率是 $\frac{3}{4}$，

故 $Y\sim B(200,\frac{3}{4})$，则 $E(Y)=200\times\frac{3}{4}=150$，

所以 $E(Z)=E(3000+5Y)=5E(Y)+3000=3750$（元），即每箱体温仪的利润大约为 3750 元.

【巩固训练】

1．有 9 本不同的书，其中语文书 2 本，英语书 3 本，数学书 4 本.现从中随机拿出 2 本，记拿出数学书的本数为 X，则（　　）

A．$P\left(X=2\right)=\frac{1}{6}$，$E\left(X\right)=\frac{2}{3}$　　　　B．$P\left(X=2\right)=\frac{1}{3}$，$E\left(X\right)=\frac{8}{9}$

C. $P\left(X=2\right)=\dfrac{1}{6}$，$E\left(X\right)=\dfrac{8}{9}$　　D. $P\left(X=2\right)=\dfrac{1}{3}$，$E\left(X\right)=\dfrac{2}{3}$

2. 袋中有大小完全相同的 7 个白球，3 个黑球.若甲每次抽取 1 个球，一共抽取 4 次，记录好球的颜色后再放回袋子中，等待下次抽取，且规定抽到白球得 10 分，抽到黑球得 20 分，记 X 为甲总得分，则 $E\left(X\right)=$________.

$E\left(X\right)=40+10E\left(Y\right)=40+10\times4\times\dfrac{3}{10}=52$.

3. 袋中有 10 个大小相同的球，其中 6 个黑球，4 个白球，现从中任取 4 个球，记随机变量 X 为其中白球的个数，随机变量 Y 为其中黑球的个数，若取出一个白球得 2 分，取出一个黑球得 1 分，随机变量 Z 为取出 4 个球的总得分，则下列结论中正确的是（　　）

A. $P(|Z-6|\le 1)=\dfrac{97}{105}$　　B. $E(X)>E(Y)$

C. $D(X)=D(Y)$　　D. $E\left(Z\right)=\dfrac{28}{5}$

【答案或提示】

1.【答案】C

【解析】由题意知 $X\sim H\left(2,4,9\right)$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{6}$，$E(X)=\dfrac{8}{9}$，故选：C

2.【答案】52

【解析】设 4 次取球取得黑球数为 Y，则 $X=40+10Y$，且 $Y\sim B\left(4,\dfrac{3}{10}\right)$

3.【答案】ACD

【分析】利用超几何分布的性质，及超几何分布的期望求解公式逐项验证.

【解析】由题意知 X，Y 均服从于超几何分布，且 $X+Y=4$，$Z=2X+Y$，

故 $P(X=k)=\dfrac{C_4^kC_6^{4-k}}{C_{10}^4}(k=0,1,2,3,4)$；

从而 $P(|Z-6|\le 1)=1-P(Z=4)-P(Z=8)=1-P(X=4)-P(X=0)=\dfrac{97}{105}$，故选项 A 正确；

$E(X)=4\times\dfrac{4}{10}=\dfrac{8}{5}$，$E(Y)=4-E(X)=\dfrac{12}{5}$，$D(X)=D(4-Y)=D(Y)$，故选项 B 错误，C 正确；

$E(Z)=2\times E(X)+E(Y)=\dfrac{28}{5}$，故选项 D 正确；

故选：ACD.

专题 66 递推法求解概率

【方法点拨】

在概率的背景下，得到递推关系，综合运用数列中的方法，诸如待定系数法、叠加法等求解通项公式进一步求解问题.

【典型题示例】

例 1 （2022 • 江苏徐州期末 • 22 改编）为抢占市场，某品牌电动汽车近期进行了一系列优惠促销方案．销售公司现面向意向客户推出“玩游戏，赢大奖，送汽车模型”活动，客户可根据抛掷骰子向上的点数，遥控汽车模型在方格图上行进，若汽车模型最终停在“幸运之神”方格，则可获得购车优惠券 2 万元；若最终停在“赠送汽车模型”方格，则可获得汽车模型一个．方格图上标有第 0 格、第 1 格、第 2 格、…、第 20 格．汽车模型开始在第 0 格，客户每掷一次骰子，汽车模型向前移动一次．若掷出 1，2，3，4 点，汽车模型向前移动一格（从第 k 格到第 $k+1$ 格），若掷出 5，6 点，汽车模型向前移动两格（从第 k 格到第 $k+2$ 格），直到移到第 19 格（幸运之神）或第 20 格（赠送汽车模型）时游戏结束．设汽车模型移到第 $n(1\le n\le 19)$ 格的概率为 P_n．则 $P_{19}=$___________；若有 6 人玩该游戏，每人一局，则这 6 人获得优惠券总金额的期望为_____________（结果精确到 1 万元）.

【分析】根据规则得到递推关系 $P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}$，使用待定系数法求得 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})$，即 $\{P_n-P_{n-1}\}$ 是以 $\frac{1}{9}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，求出 $P_n-P_{n-1}=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$，再使用叠加法求出通项公式.

【解析】由题意知，$P_1=\frac{2}{3}$，$P_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$.

汽车模型移到第 $n(3\le n\le 19)$ 格的情况是下列两种，而且也只有两种：

①汽车模型先到第 $n-2$ 格，又掷出 5，6 点，其概率为 $\frac{1}{3}P_{n-2}$；

②汽车模型先到第 $n-1$ 格，又掷出 1，2，3，4 点，其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}$.

所以 $P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}$，

则 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})$，且 $P_2-P_1=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

所以数列 $\{P_n-P_{n-1}\}$ 是以 $\frac{1}{9}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $P_n-P_{n-1}=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$，$n\ge 2$.

所以 $P_n=P_1+(P_2-P_1)+(P_3-P_2)+\cdots+(P_n-P_{n-1})$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\times\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^0+\left(-\frac{1}{3}\right)^1+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right]$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}，\ n\ge 2.$$

所以 $P_{19}=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$.

设玩游戏的 6 人中有 X 人获得优惠券，则 $X\sim B(6,P_{19})$，

所以这 6 人获得优惠券总金额的期望值为 $2\times 6P_{19}=9-\left(\frac{1}{3}\right)^{18}\approx 9$（万元）.

【巩固训练】

1. 从原点出发的某质点 M ，按向量 $\vec{a}=(0,1)$ 移动的概率为 $\frac{2}{3}$，按向量 $\vec{b}=(0,2)$ 移动的概率为 $\frac{1}{3}$，设 M 可到达点 $(0,n)$ 的概率为 P_n，则 P_n 的表达式为_______.

2.某人玩硬币走跳棋的游戏，已知硬币出现正反面的概率都是 $\frac{1}{2}$，棋盘上标有第 0 站、第 1 站、第 2 站、……、第 100 站.一枚棋子开始在第 0 站，棋手每掷一次硬币，棋子向前跳动一次，若掷出正面，棋子向前跳一站(从 k 到 $k+1$)；若掷出反面，棋子向前跳两站(从 k 到 $k+2$)，直到棋子跳到第 99 站(胜利大本营)或跳到第 100 站(失败集中营)时，该游戏结束.设棋子跳到第 n 站的概率为 P_n=________，玩该游戏获胜的概率为___________.

3. 一种掷骰子走跳棋的游戏：棋盘上标有第 0 站、第 1 站、第 2 站…第 100 站，共 101 站，设棋子跳到第 n 站的概率为 P_n，一枚棋子开始在第 0 站，棋手每掷一次骰子，棋子向前跳动一次．若掷出奇数点，棋子向前跳一站；若掷出偶数点，棋子向前跳两站，直到棋子跳到第 99 站(获胜)或第 100 站(失败)时，游戏结束(骰子是用一种均匀材料做成的立方体形状的游戏玩具，它的六个面分别标有点数 1,2,3,4,5,6)．则玩该游戏获胜的概率为___________.

【答案或提示】

1.【解析】易得 $P_1=\frac{2}{3},P_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

M 到达点 $(0,n+2)$ 有两种情况：

① 从点 $(0,n+1)$ 按向量 $\vec{a}=(0,1)$ 移动，即 $(0,n+1)\to(0,n+2)$；

② ②从点 $(0,n)$ 按向量 $\vec{b}=(0,2)$ 移动，即 $(0,n)\to(0,n+2)$

$\therefore P_{n+2}=\frac{2}{3}P_{n+1}+\frac{1}{3}P_n$,$\therefore P_{n+2}-P_{n+1}=-\frac{1}{3}(P_{n+1}-P_n)$

数列$\{P_{n+1}-P_n\}$是以P_2-P_1为首项，$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

$P_{n+1}-P_n=(P_2-P_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,$\therefore P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

又$\because P_n-P_1=(P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})+\cdots\cdots+(P_2-P_1)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

$=\left(\frac{1}{12}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

$\therefore P_n=P_1+\left(\frac{1}{12}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

2.【答案】$P_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](n=0,1,2,3\cdots\cdots99)$，$\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right]$

【解析】棋子开始在第 0 站为必然事件，$P_0=1$.

第一次掷硬币出现正面，棋子跳到第 1 站，其概率为$\frac{1}{2}$，$P_1=\frac{1}{2}$.

棋子跳到第 2 站应从如下两方面考虑：

①前两次掷硬币都出现正面，其概率为$\frac{1}{4}$；

②第一次掷硬币出现反面，其概率为$\frac{1}{2}$.

$\therefore P_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

棋子跳到第$n(2\le n\le 99)$站的情况是下列两种，而且也只有两种：

①棋子先到第 $n-2$ 站，又掷出反面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$；

②棋子先到第 $n-1$ 站，又掷出正面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.

$\therefore P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}, \therefore P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$.

故当 $1\le n\le 99$ 时，数列 $\{P_n-P_{n-1}\}$ 是首项为 $P_1-P_0=-\frac{1}{2}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$\therefore P_1-1=-\frac{1}{2}, P_2-P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2, P_3-P_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^3, \cdots\cdots, P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

以上各式相加，得 $P_n-1=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

$\therefore P_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](n=0,1,2,3\cdots\cdots99)$

$\therefore$ 获胜的概率为 $P_{99}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right]$，

失败的概率 $P_{99}=\frac{1}{2}P_{98}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}\right]=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\right]$.

3.【答案】$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)$

【解析】棋子开始在第 0 站是必然事件，所以 $P_0=1$.

棋子跳到第 1 站，只有一种情形，第一次掷骰子出现奇数点，其概率为 $\frac{1}{2}$，所以 $P_1=\frac{1}{2}$.

棋子跳到第 2 站，包括两种情形，①第一次掷骰子出现偶数点，其概率为 $\frac{1}{2}$；②前两次掷骰子都出现奇数点，其概率为 $\frac{1}{4}$，所以 $P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

棋子跳到第 $n(2\le n\le 99)$站，包括两种情形，①棋子先跳到第 $n-2$ 站，又掷骰子出现偶数点，

其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$；

棋子先跳到第 $n-1$ 站，又掷骰子出现奇数点，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.

故 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}(2\leq n\leq 99，n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$.

又因为 $P_1-P_0=-\frac{1}{2}$,

所以$\{P_n-P_{n-1}\}(n=1,2，\dots，99)$是首项为$-\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

所以 $P_{99}=(P_{99}-P_{98})+(P_{98}-P_{97})+\dots+(P_1-P_0)+P_0=\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{98}+\dots+\left(-\frac{1}{2}\right)+1$

$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+1=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)$.

所以玩该游戏获胜的概率为$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)$.