

目 录

- 专题 01 单调性的几个等价命题
- 专题 02 函数的奇偶性与单调性
- 专题 03 函数的奇偶性、对称性、周期性
- 专题 04 具有关于某点对称的函数的最值性质
- 专题 05 与函数的对称性相关的零点问题
- 专题 06 超越不等式（方程）
- 专题 07 指数函数型函数的单调性、对称性
- 专题 08 递推函数
- 专题 09 三次函数的对称性、穿根法作图象
- 专题 10 以分段函数为背景的解不等式
- 专题 11 双变量方程类存在性、任意性问题
- 专题 12 双变量不等式类能成立、恒成立问题
- 专题 13 一次绝对值函数
- 专题 14 二元不等式恒成立问题
- 专题 15 利用结构相同函数解题
- 专题 16 运用同构求值
- 专题 17 跨阶同构
- 专题 18 几类函数的对称中心及应用
- 专题 19 取对数
- 专题 20 用数形结合法求解零点问题
- 专题 21 有关等高线求值、求范围问题
- 专题 22 三点共线充要条件的应用
- 专题 23 极化恒等式
- 专题 24 利用向量的形解题
- 专题 25 奔驰定理与三角形的四心
- 专题 26 有关三角形中的范围问题
- 专题 27 以图形为背景的两角和与差的正切

专题 28 有关三角形中线、角平分线、高线问题

专题 29 三角形三内角正切积等于正切和的应用

专题 30 通过缩小参数范围求参数值

专题 31 对数单身狗 指数找朋友

专题 32 关于指对的两个重要不等式

专题 33 与导数相关的极值、最值

专题 34 逆用导数的四则运算法则构造函数

专题 35 基于切线的恒成立问题

专题 01 单调性的几个等价命题

【方法点拨】

1. 函数 $f(x)$ 为定义域在 D 上的增函数 \Leftrightarrow 对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0;$$

2. 对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > k \Leftrightarrow \frac{[f(x_1) - kx_1] - [f(x_2) - kx_2]}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \text{函数 } f(x) - kx \text{ 为 } D \text{ 上的增}$$

函数

说明: 含有地位同等的两个变量 x_1, x_2 或 q, r 等不等式, 进行“尘归尘, 土归土”式的整理, 是一种常见变形, 如果整理 (即同构) 后不等式两边具有结构的一致性, 往往暗示单调性 (需要预先设定两个变量的大小)。

【典型题示例】

例 1 (2022 · 江苏南通海安 12 月考 · 8) 已知 $f(x) = x^2 + 2ax - 1$, 对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 恒有 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) < a(x_1 - x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$

B. $(-\infty, 3]$

C. $(-\infty, \frac{7}{2}]$

D. $(0, \frac{7}{2}]$

【答案】A

【分析】由已知条件可得函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} + \frac{a}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} -$

$\frac{a}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - a}{x^2} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 从而可得 $a \leq x^2 + 1$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 进而可求得

答案

【解析】由 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) < a(x_1 - x_2)$, $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 得 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 x_2} < \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$,

所以 $\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{a}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2} + \frac{a}{x_2}$,

因为 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

所以函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} + \frac{a}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 即 $g(x) = x + 2a - \frac{1}{x} + \frac{a}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调

递增,

所以 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - a}{x^2} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $x^2 + 1 - a \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq x^2 + 1$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $a \leq 2$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$,

故选: A

例 2 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2$, 在其图象上任取两个不同的点 $P(x_1, y_1)$ 、

$Q(x_2, y_2) (x_1 > x_2)$, 总能使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $[1, +\infty)$

C. $(1, 2)$

D. $[1, 2]$

【答案】B

【分析】 根据 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 结合 $x_1 > x_2 > 0$, 可得出 $f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2$, 可

知函数 $g(x) = f(x) - 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 可得出 $g'(x) \geq 0$, 结合参变量分离法可求得实数 a 的取值范围.

【解析】 由 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 以及 $x_1 > x_2 > 0$, $\therefore f(x_1) - f(x_2) > 2x_1 - 2x_2$,

所以, $f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2$,

构造函数 $g(x) = f(x) - 2x = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, 则 $g(x_1) > g(x_2)$,

所以, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

由于 $g'(x) = \frac{a}{x} + x - 2$, 则 $g'(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

由 $g'(x) = \frac{a}{x} + x - 2 \geq 0$, 可得 $a \geq -x^2 + 2x$,

当 $x > 0$ 时, 则 $y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \leq 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立,

所以, $a \geq 1$, 因此实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

故选: B.

例 3 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 图象恒过 $(0, 1)$ 点, 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都

有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$, 则不等式 $f[\ln(e^x - 1)] < 1 + \ln(e^x - 1)$ 的解集为 ()

A. $(\ln 2, +\infty)$

B. $(-\infty, \ln 2)$

C. $(\ln 2, 1)$

D. $(0, \ln 2)$

【答案】D

【分析】移项通分，按结构相同、同一变量分成一组的原则，将 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 1$ 化为

$$\frac{[f(x_1)-x_1]-[f(x_2)-x_2]}{x_1-x_2} > 0$$

令 $F(x) = f(x) - x$,

故 $F(x)$ 在 \mathbf{R} 上单增，且 $F(0) = f(0) - 0 = 1$

$f[\ln(e^x - 1)] < 1 + \ln(e^x - 1)$ 可化为 $f[\ln(e^x - 1)] - \ln(e^x - 1) < 1$

即 $F[\ln(e^x - 1)] < F(0)$ ，所以 $\ln(e^x - 1) < 0$ ， $0 < e^x - 1 < 1$ ，解之得 $1 < x < \ln 2$

所以不等式 $f[\ln(e^x - 1)] < 1 + \ln(e^x - 1)$ 的解集为 $(0, \ln 2)$.

点评：

1. $f(x)$ 在 D 单增（减） \Leftrightarrow 对任意 $x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 \neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 (< 0)$ ；

2. 结构联想，当题目中出现 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > a$ ，应移项通分转化为

$$\frac{(f(x_1)-ax_1)-(f(x_2)-ax_2)}{x_1-x_2} > 0, \text{ 即 } F(x)=f(x)-ax \text{ 在 } D \text{ 单增.}$$

例 4 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 - 3x$ ，对于任意 $x_1, x_2 \in [1, 10]$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，不等式

$$f(x_1) - f(x_2) > \frac{m(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} \text{ 恒成立，则实数 } m \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $(-\infty, -1710]$

【分析】同构后不等式两边具有结构的一致性，构造新函数，直接转化为函数的单调性.

【解析】不等式 $f(x_1) - f(x_2) > \frac{m(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$ 可变形为 $f(x_1) - f(x_2) > \frac{m}{x_1} - \frac{m}{x_2}$,

即 $f(x_1) - \frac{m}{x_1} > f(x_2) - \frac{m}{x_2}$ ，当 $x_1, x_2 \in [1, 10]$ ，且 $x_1 < x_2$ 恒成立，

所以函数 $y = f(x) - \frac{m}{x}$ 在 $[1, 10]$ 上单调递减.

令 $h(x) = f(x) - \frac{m}{x} = \ln x + x^2 - 3x - \frac{m}{x}, x \in [1, 10]$

则 $h'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 + \frac{m}{x^2} \leq 0$ 在 $x \in [1, 10]$ 上恒成立,

即 $m - 2x^3 + 3x^2 - x$ 在 $x \in [1, 10]$ 上恒成立.

设 $F(x) = -2x^3 + 3x^2 - x$, 则 $F'(x) = -6x^2 + 6x - 1 = -6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

因为当 $x \in [1, 10]$ 时, $F'(x) < 0$,

所以函数 $F(x)$ 在 $[1, 10]$ 上单调递减,

所以 $F(x)_{\min} = F(10) = -2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 - 10 = -1710$,

所以 $m \leq -1710$,

即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -1710]$.

例 5 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 , 都有

$\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} > 0$, 记 $a = \frac{f(0.2^3)}{0.2^3}$, $b = \frac{f(\sin 1)}{\sin 1}$, $c = -\frac{f\left(\ln \frac{1}{3}\right)}{\ln 3}$, 则 a, b, c

的大小关系为

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】D

【解析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 故 $g(x)$ 为定义域

是 $\{x | x \neq 0\}$ 的偶函数

又对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} > 0$, 即

$\frac{\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1 - x_2} < 0 \Rightarrow \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

综上, $g(x)$ 为偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{又 } a = \frac{f(0.2^3)}{0.2^3} = g(0.2^3), \quad b = \frac{f(\sin 1)}{\sin 1} = g(\sin 1),$$

$$c = -\frac{f\left(\ln \frac{1}{3}\right)}{\ln 3} = -\frac{f(-\ln 3)}{\ln 3} = \frac{f(\ln 3)}{\ln 3} = g(\ln 3), \quad \text{且 } 0 < 0.2^3 < \sin 1 < \ln 3$$

所以 $g(0.2^3) > g(\sin 1) > g(\ln 3)$, 即 $a > b > c$, 故答案为: D.

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x, & 0 < x < 1 \\ (4a-1)x + 2a, & x \geq 1 \end{cases}$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成

立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ C. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ D. $(1, +\infty)$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - ax^2, x \in (0, +\infty)$, 当 $x_2 > x_1$ 时, 不等式 $\frac{f(x_1)}{x_2} - \frac{f(x_2)}{x_1} < 0$ 恒成

立, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{e^2}{12}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{e^2}{12}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right]$

3. 若对 $\forall x_1, x_2 \in (m, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_2 - x_1} < 1$, 则 m 的最小值是 ()

注: (e 为自然对数的底数, 即 $e = 2.71828 \dots$)

- A. $\frac{1}{e}$ B. e C. 1 D. $\frac{3}{e}$

4. 已知函数 $f(x) = x - a \sin x$, 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 不等式

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a < \frac{1}{2}$ B. $a \leq \frac{1}{2}$ C. $a > \frac{1}{2}$ D. $a \geq \frac{1}{2}$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且 $f(-1) = -1$, 当 $a, b \in [-1, 1]$, 且 $a + b \neq 0$ 时,

$(a+b)(f(a) + f(b)) > 0$ 成立, 若 $f(x) < m^2 - 2tm + 1$ 对任意的 $t \in [-1, 1]$ 恒成立, 则实

数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
C. $(-2, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

6. 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f(-2)=0$, 若对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则不等式 $\frac{f(x)}{x} < 0$ 的解集为_____.

7. 已知 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 + x$, 若对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} < 1$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

8. 已知大于 1 的正数 a, b 满足 $\frac{\ln^2 b}{e^{2a}} < \left(\frac{b}{a}\right)^n$, 则正整数 n 的最大值为 ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 11

【答案与提示】

1. 【答案】B

【解析】因为函数对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 所以函数在定义域内单调递减, 所以

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 4a - 1 < 0 \\ \log_a 1 \geq (4a - 1) \cdot 1 + 2a \end{cases}, \therefore 0 < a \leq \frac{1}{6}. \text{故选 B.}$$

2. 【答案】A

【分析】令 $g(x) = xf(x)$, 由 $\frac{f(x_1)}{x_2} - \frac{f(x_2)}{x_1} < 0$ 可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 从而

可得 $g'(x) = e^x - 3ax^2 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立; 通过分离变量可得 $3a \leq \frac{e^x}{x^2}$, 令

$h(x) = \frac{e^x}{x^2} (x > 0)$, 利用导数可求得 $h(x)_{\min} = h(2) = \frac{e^2}{4}$, 从而可得 $3a \leq \frac{e^2}{4}$, 解不等式

求得结果.

【解析】由 $\frac{f(x_1)}{x_2} - \frac{f(x_2)}{x_1} < 0$ 且 $x_2 > x_1 > 0$ 得: $x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$

令 $g(x) = xf(x) = e^x - ax^3$ ，可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore g'(x) = e^x - 3ax^2 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，即： $3a \leq \frac{e^x}{x^2}$

令 $h(x) = \frac{e^x}{x^2} (x > 0)$ ，则 $h'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

$\therefore x \in (0, 2)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减； $x \in (2, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增

$\therefore h(x)_{\min} = h(2) = \frac{e^2}{4}$ $\therefore 3a \leq \frac{e^2}{4}$ ，解得： $a \in \left(-\infty, \frac{e^2}{12}\right]$

本题正确选项： A

点评：

本题考查根据函数的单调性求解参数范围的问题，关键是能够将已知关系式变形为符合单调性的形式，从而通过构造函数将问题转化为导数大于等于零恒成立的问题；解决恒成立问题常用的方法为分离变量，将问题转化为参数与函数最值之间的大小关系比较的问题，属于常考题型.

3. 【答案】 C

【解析】 由题意，当 $0 \leq m < x_1 < x_2$ 时，

由 $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_2 - x_1} < 1$ ，等价于 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 < x_2 - x_1$ ，即 $x_1 \ln x_2 + x_1 < x_2 \ln x_1 + x_2$ ，

故 $x_1(\ln x_2 + 1) < x_2(\ln x_1 + 1)$ ，故 $\frac{\ln x_2 + 1}{x_2} < \frac{\ln x_1 + 1}{x_1}$ ，

令 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ，则 $f(x_2) < f(x_1)$ ，

又 $\because x_2 > x_1 > m \geq 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(m, +\infty)$ 上单调递减，

又由 $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ ，令 $f'(x) < 0$ ，解得 $x > 1$ ，

故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，故 $m \geq 1$.

4. 【答案】 B

【解析】 因为 $x_1 \neq x_2$ ，不妨设 $x_1 > x_2$ ，则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a$ 可化为

$f(x_1) - f(x_2) > a(x_1 - x_2)$ ，即 $f(x_1) - ax_1 > f(x_2) - ax_2$

设 $F(x) = f(x) - ax$

则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a$ 恒成立, 即 $f(x_1) - ax_1 > f(x_2) - ax_2$ 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且

$x_1 > x_2$ 时恒成立, 即 $F(x_1) > F(x_2)$ 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $x_1 > x_2$ 时恒成立

所以 $F(x) = f(x) - ax$ 在 \mathbf{R} 上单增

故 $F'(x) = (x - a \sin x - ax)' = 1 - a \cos x - a \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立

所以 $a \leq \frac{1}{1 + \cos x}$, 故 $a \leq \left(\frac{1}{1 + \cos x} \right)_{\min} = \frac{1}{2}$

所以实数 a 的取值范围是 $a \leq \frac{1}{2}$, 选 B.

5. 【答案】B

【解析】令 $a = x_1, b = -x_2$, 则 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$ 成立,

则 $f(x)$ 为单调增函数,

若 $f(x) < m^2 - 2tm + 1$ 对任意的 $t \in [-1, 1]$ 恒成立, 则 $f(x)_{\max} < m^2 - 2tm + 1$,

即 $f(1) < m^2 - 2tm + 1$, 即 $\forall t \in [-1, 1]$ 都有 $m^2 - 2tm > 0$,

令 $g(t) = m^2 - 2tm > 0$, 则 $g(t)_{\min} > 0$,

$\therefore \begin{cases} g(1) > 0 \\ g(-1) > 0 \end{cases}$, $\therefore m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, 故选 B

6. 【答案】 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

【解析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 故 $g(x)$ 为定义域是

$\{x | x \neq 0\}$ 的偶函数, 又对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 即

$\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2} < 0 \Rightarrow \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数. 又 $f(-2) = 0$,

故 $g(-2) = \frac{f(-2)}{-2} = 0$.

综上, $g(x)$ 为偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

且 $g(-2) = g(2) = 0$. 故 $\frac{f(x)}{x} < 0$ 即 $g(x) < g(2)$.

根据函数性质解得 $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, 故答案为: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

7. 【答案】 $(-\infty, -\frac{1}{4}]$

【解析】 设 $x_1 > x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < x_1^2 - x_2^2$,

$$\therefore f(x_1) - x_1^2 < f(x_2) - x_2^2,$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - x^2 = a \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x,$$

$$\therefore g(x_1) < g(x_2),$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore g'(x) = \frac{a}{x} - x + 1 \leq 0,$$

$$\therefore a - x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4},$$

$$\therefore x = \frac{1}{4} \text{ 时, } (x^2 - x)_{\min} = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore a \geq -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -\frac{1}{4}].$$

故答案为: $(-\infty, -\frac{1}{4}]$.

8. 【答案】 C

【分析】 $\frac{\ln^2 b}{e^{2a}} < \frac{b^n}{a^n}$ 等价于 $\frac{\ln^2 b}{b^n} < \frac{e^{2a}}{a^n}$, 令 $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^n}$, $g(x) = \frac{e^{2x}}{x^n}$, 分别求 $f(x)$,

$g(x)$ 的导数, 判断函数的单调性, 可求得 $f(x)$ 有最大值 $f\left(e^{\frac{2}{n}}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2}$, $g(x)$ 有最小

值 $g\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$ ，根据题意，即求 $f(x)_{\max} \leq g(x)_{\min}$ ，代入为 $\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} \leq \frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$ ，等价于

$\frac{n+2}{n-2} \geq \ln \frac{n}{2}$ ，令 $\varphi(x) = \frac{x+2}{x-2} - \ln \frac{x}{2}$ ，即求 $\varphi(x) > 0$ 的最大的正整数. 对 $\varphi(x)$ 求导求单调

性，可知 $\varphi(x)$ 单调递减，代入数值计算即可求出结果.

【解析】由题干条件可知： $\frac{\ln^2 b}{e^{2a}} < \frac{b^n}{a^n}$ 等价于 $\frac{\ln^2 b}{b^n} < \frac{e^{2a}}{a^n}$ ，

令 $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^n}$ ， $(x > 1)$ ，则 $f'(x) = \frac{x^{n-1} \cdot \ln x (2 - n \ln x)}{x^{2n}} = \frac{\ln x (2 - n \ln x)}{x^{n+1}}$

$f'(x) = 0$ ， $x = e^{\frac{2}{n}}$ ，

当 $f'(x) > 0$ 时， $x \in \left(1, e^{\frac{2}{n}}\right)$ ，当 $f'(x) < 0$ 时， $x \in \left(e^{\frac{2}{n}}, +\infty\right)$

所以 $f(x)$ 在 $\left(1, e^{\frac{2}{n}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(e^{\frac{2}{n}}, +\infty\right)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 有最大值

$$f\left(e^{\frac{2}{n}}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2}.$$

令 $g(x) = \frac{e^{2x}}{x^n}$ ， $(x > 1)$ ，则 $g'(x) = \frac{e^{2x}(2x - n)}{x^{2n}}$ ，当 $\frac{n}{2} \leq 1$ 时，此题无解，所以 $\frac{n}{2} > 1$ ，

则 $g'(x) = 0, x = \frac{n}{2}$ ，当 $g'(x) > 0, x > \frac{n}{2}$ ，当 $g'(x) < 0, 1 < x < \frac{n}{2}$ ，

所以 $g(x)$ 在 $\left(1, \frac{n}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{n}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增，则 $g(x)$ 有最小值

$$g\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}.$$

若 $\frac{\ln^2 b}{b^n} < \frac{e^{2a}}{a^n}$ 成立，只需 $f\left(e^{\frac{2}{n}}\right) \leq g\left(\frac{n}{2}\right)$ ，即 $\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} \leq \frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$ ，即 $e^{n+2} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-2}$ ，

两边取对数可得: $n+2 \geq (n-2)\ln \frac{n}{2}$. $n=2$ 时, 等式成立, 当 $n \geq 3$ 时, 有 $\frac{n+2}{n-2} \geq \ln \frac{n}{2}$,

令 $\varphi(x) = \frac{x+2}{x-2} - \ln \frac{x}{2}$, 本题即求 $\varphi(x) > 0$ 的最大的正整数.

$\varphi'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2} - \frac{1}{x} < 0$ 恒成立, 则 $\varphi(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减,

$\varphi(8) = \frac{5}{3} - \ln 4 > 0$, $\varphi(9) = \frac{11}{7} - \ln \frac{9}{2} \approx 1.5714 - 1.51 > 0$, $\varphi(10) = \frac{3}{2} - \ln 5 < 0$,

所以 $\varphi(x) > 0$ 的最大正整数为 9.

故选: C.

点评:

本题考查构造函数法解决恒成立问题, 双变元的恒成立问题, 经常采用构造两个函数, 转

化为 $f(x_1) < g(x_2)$, 只需 $f(x_1)_{\max} < g(x_2)_{\min}$

专题 02 函数的奇偶性与单调性

【方法点拨】

1. 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x) = f(|x|)$, 其作用是将“变量化正”, 从而避免分类讨论.
2. 以具体的函数为依托, 而将奇偶性、单调性内隐于函数解析式去求解参数的取值范围, 是函数的奇偶性、单调性的综合题的一种重要命题方式, 考查学生运用知识解决问题的能力, 综合性强, 体现能力立意, 具有一定难度.

【典型题示例】

例 1 (2022 · 江苏新高考基地高三第一次联考 · 19 改编) 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{a}{5^x + 1}$ 为奇函数, 且存在 $m \in [-1, 1]$, 使得不等式 $f(x^2) + f(mx - 2) \leq 2 - x^2 - mx$ 成立, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $[-2, 2]$

【解析】 求得 $a=2$, 且 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的增函数,

$f(x^2) + f(mx - 2) \leq 2 - x^2 - mx$ 可化为 $f(x^2) + x^2 \leq 2 - mx - f(mx - 2)$

由 $f(x)$ 为奇函数, 得 $2 - mx - f(mx - 2) = 2 - mx + f(2 - mx)$

令 $F(x) = f(x) + x$, 则 $F(x^2) \leq F(2 - mx)$, 故有 $x^2 \leq 2 - mx$, 即 $x^2 + mx - 2 \leq 0$

令 $G(x)=x^2+mx-2$

因为存在 $m\in[-1, 1]$, 使 $G(x)=x^2+mx-2\leq 0$

故 $G(-1)=x^2-x-2\leq 0$ 或 $G(1)=x^2+x-2\leq 0$

解之得 $-2\leq x\leq 2$.

例 2 已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$, 其中 e 是自然对数的底数, 在 $f(a-1)+f(2a^2)\leq 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $[-1, \frac{1}{2}]$

【分析】 直接发现函数的单调性、奇偶性, 将 $f(a-1)+f(2a^2)\leq 0$ 移项, 运用奇偶性再将负号移入函数内, 逆用单调性脱“ f ”.

【解析】 $\because f(-x)=(-x)^3+2x+e^{-x}-e^x=-f(x)$ 且 $x\in\mathbf{R}$,

$\therefore f(x)$ 是奇函数

\because 函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$,

$\therefore f'(x)=3x^2-2+e^x+\frac{1}{e^x}\geq 3x^2-2+2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}\geq 0$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号),

$\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.,

由 $f(a-1)+f(2a^2)\leq 0$, 得 $f(2a^2)\leq f(1-a)$.

所以 $2a^2\leq 1-a$, 解之得 $-1\leq a\leq \frac{1}{2}$.

所以实数 a 的取值范围是 $[-1, \frac{1}{2}]$.

例 3 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}+1$ (e 为自然对数的底数), 若 $f(2x-1)+f(4-x^2)>2$, 则实数 x 的取值范围为_____.

【答案】 $(-1, 3)$

【分析】 本题是例 2 的进一步的延拓, 其要点是需对已知函数适当变形, 构造出一个具有奇偶性、单调性的函数, 其思维能力要求的更高, 难度更大.

【解析】 令 $F(x)=f(x)-1=e^x-e^{-x}$, 易知 $F(x)$ 是奇函数且在 \mathbf{R} 上单调递增

由 $f(2x-1)+f(4-x^2)>2$ 得 $f(4-x^2)-1>1-f(2x-1)=[f(2x-1)-1]$

即 $F(4-x^2)>-F(2x-1)$

由 $F(x)$ 是奇函数得 $-F(2x-1)=F(1-2x)$, 故 $F(4-x^2)>F(1-2x)$

由 $F(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 得 $4-x^2 > 1-2x$, 即 $x^2-2x-3 < 0$, 解得 $-1 < x < 3$,

故实数 x 的取值范围为 $(-1, 3)$.

例 4 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2x^2}{3^x+1} + 1$. 若存在 $m \in (1, 4)$ 使得不等式

$f(4-ma) + f(m^2+3m) > 2$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 8)$

【分析】 令 $F(x) = f(x) - 1$, 判断函数 $F(x)$ 的奇偶性与单调性, 从而将不等式转化为

$m^2+3m > ma-4$, 分离参数可得 $a < m + \frac{4}{m} + 3$, 令 $g(m) = m + \frac{4}{m} + 3$, $m \in (1, 4)$, 利用对勾函数的单调性可得 $g(m) < 8$, 结合题意即可求解 a 的取值范围.

【解析】 \because 函数 $f(x) = f(x) = x^2 - \frac{2x^2}{3^x+1} + 1$, 若存在 $m \in (1, 4)$ 使得不等式 $f(4-ma) + f(m^2+3m) > 2$ 成立,

$$\text{令 } F(x) = f(x) - 1 = x^2 - \frac{2x^2}{3^x+1} = \frac{x^2}{3^x+1} (3 - 1), \quad F(-x) = \frac{x^2(3^{-x}-1)}{3^{-x}+1} = \frac{x^2(1-3^x)}{1+3^x} = -F(x),$$

所以, $F(x)$ 为奇函数.

不等式 $f(4-ma) + f(m^2+3m) > 2$, 即 $f(4-ma) - 1 + f(m^2+3m) - 1 > 0$,

即 $F(4-ma) + F(m^2+3m) > 0$,

所以 $F(m^2+3m) > -F(4-ma) = F(ma-4)$,

因为 $y = x^2 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, $y = 1 - \frac{2}{3^x+1} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $F(x) = x^2(1 - \frac{2}{3^x+1})$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

由奇函数的性质可得 $F(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, 所以不等式等价于 $m^2+3m > ma-4$, 分离参数可

得 $a < m + \frac{4}{m} + 3$,

令 $g(m) = m + \frac{4}{m} + 3$, $m \in (1, 4)$,

由对勾函数的性质可知 $g(m)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, 4)$ 上单调递增,

$g(1) = 8$, $g(4) = 8$, 所以, $g(m) < 8$,

所以由题意可得 $a < 8$,

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 8)$.

故答案为: $(-\infty, 8)$.

例5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \geq 1 \\ 2^{x-1}, & x < 1 \end{cases}$, 若 $f(2x-2) \geq f(x^2-x+2)$, 则实数 x 的取值范围

是 ()

A. $[-2, -1]$

B. $[1, +\infty)$

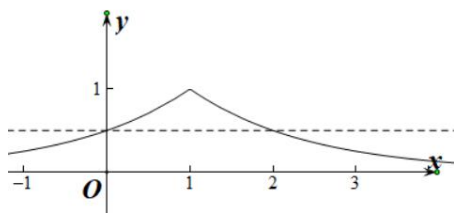
C. \mathbb{R}

D. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

【答案】D

【解析】函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \geq 1 \\ 2^{x-1}, & x < 1 \end{cases} = 2^{-|x-1|}$, 故 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 且在 $[1, +\infty)$ 上单

减, 函数 $f(x)$ 的图象如下:



$\because f(2x-2) \geq f(x^2-x+2)$, 且 $x^2-x+2 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 1$ 恒成立,

$\therefore |2x-2-1| \geq |x^2-x+2-1|$, 即 $|2x-3| \geq |x^2-x+1|$,

当 $x \geq \frac{3}{2}$ 时, 不等式化为: $2x-3 \geq x^2-x+1$, 即 $x^2-3x+4 \leq 0$, 解得 $x \in \mathbb{R}$, 即 $x \geq \frac{3}{2}$;

当 $x < \frac{3}{2}$ 时, 不等式化为: $3-2x \geq x^2-x+1$, 即 $x^2+x-2 \leq 0$, 解得 $x \leq -2$ 或 $x \leq 1$, 即

$x \leq -2$ 或 $1 \leq x < \frac{3}{2}$;

综上, $f(2x-2) \geq f(x^2-x+2)$ 时, 实数 x 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

故选: D.

例6 已知函数 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$, $f(1-2\log_3 t) + f(3\log_3 t - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} t$, 则 t 的取值范围是_____.

【答案】 $[1, +\infty)$

【分析】将已知 $f(1-2\log_3 t) + f(3\log_3 t - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} t$ 按照“左右形式相当, 一边一个变

量”的原则，移项变形为 $f(3\log_3 t - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} t - f(1 - 2\log_3 t)$ ，易知 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

是奇函数，故进一步变为 $f(3\log_3 t - 1) + (3\log_3 t - 1) \geq f(2\log_3 t - 1) + (2\log_3 t - 1)$

(#)，故下一步需构造函数 $F(x) = f(x) + x$ ，转化为研究 $F(x) = f(x) + x$ 的单调性，

而 $F(x) = f(x) + x$ 单增，故 (#) 可化为 $\log_3 t \geq 0$ ，即 $3\log_3 t - 1 \geq 2\log_3 t - 1$ ，解之得 $t \geq 1$ 。

例 7 (2022 · 江苏南通期末 · 8) 已知函数 $f(x) = \left| x - \frac{4}{2^x + 2} \right|$ ， $a = f(\log_3 2)$ ，

$b = f(\log_4 3)$ ， $c = f\left(\frac{4}{3}\right)$ ，则 ()

A. $a < b < c$

B. $b < c < a$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】B

【分析】分析可知函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，推导出函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$

对称，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为减函数，可得出 $c = f\left(\frac{2}{3}\right)$ ，利用函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上

的单调性可得出 a 、 b 、 c 的大小关系。

【解析】令 $g(x) = x - \frac{4}{2^x + 2}$ ，其中 $x \in \mathbf{R}$ ，则 $g(1) = 0$ ，

因为函数 $y = x$ 、 $y = -\frac{4}{2^x + 2}$ 均为 \mathbf{R} 上的增函数，故函数 $g(x)$ 也为 \mathbf{R} 上的增函数，

当 $x > 1$ 时， $g(x) > g(1) = 0$ ，此时 $f(x) = \left| x - \frac{4}{2^x + 2} \right| = x - \frac{4}{2^x + 2}$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，

因为 $f(2-x) = \left| 2-x - \frac{4}{2^{2-x} + 2} \right| = \left| \frac{2(2^{2-x} + 2) - 4}{2^{2-x} + 2} - x \right| = \left| \frac{2^{3-x}}{2^{2-x} + 2} - x \right|$

$= \left| \frac{2^x \cdot 2^{3-x}}{2^x(2^{2-x} + 2)} - x \right| = \left| \frac{4}{2^x + 2} - x \right| = \left| x - \frac{4}{2^x + 2} \right| = f(x)$

故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为减函数，

所以, $c = f\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right)$,

$\because 2^3 < 3^2$, 则 $3\lg 2 < 2\lg 3$, 即 $\log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3} < \frac{2}{3}$,

$\because 4^2 < 3^3$, 则 $2\lg 4 < 3\lg 3$, 则 $\log_4 3 = \frac{\lg 3}{\lg 4} > \frac{2}{3}$, 即 $\log_3 2 < \frac{2}{3} < \log_4 3 < 1$,

因此, $b < c < a$.

故选: B.

【巩固训练】

1. 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数, 则实数 $a =$ _____

2. 设函数 $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1 + x^2}$, 则使得 $f(x) > f(1)$ 成立的 x 的取值范围是 ().

A. $(1, +\infty)$

B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(-1, 1)$

D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x} - 2^x$, 则满足 $f(x^2 - 5x) + f(6) > 0$ 的实数 x 的取值范围是 _____.

4. 已知函数 $f(x) = x \cdot |x| + 3x + 1$, 若 $f(a) + f(a^2 - 2) < 2$, 则实数 a 的取值范围 _____.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ 2x - x^2, & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(2 - a^2) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

6. 已知函数 $g(x) = e^x - e^{-x}$, $f(x) = xg(x)$, 若 $a = f\left(\ln \frac{1}{3}\right)$, $b = f\left(0.2^{\frac{1}{4}}\right)$,

$c = f(5^{1.2})$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为 ()

A. $b < a < c$

B. $c < b < a$

C. $b < c < a$

D. $a < b < c$

7. (多选题) 关于函数 $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{e^x - 1}\right)$ 下列结论正确的是 ()

A 图像关于 y 轴对称

B 图像关于原点对称

C. 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增

D. $f(x)$ 恒大于0

8. 已知函数 $f(x) = 2020^x + \log_{2020}(\sqrt{x^2 + 1} + x) - 2020^{-x} + 1$, 则关于 x 的不等式

$f(2x+1) + f(x+1) - 2 > 0$ 的解集为 ().

A. $\left(-\frac{1}{2020}, +\infty\right)$

B. $(-2020, +\infty)$

C. $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

D. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$

9. 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2x^2}{3^x + 1} + 1$. 若存在 $m \in (1, 4)$ 使得不等式

$f(4 - ma) + f(m^2 + 3m) > 2$ 成立, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty, 7)$

B. $(-\infty, 7]$

C. $(-\infty, 8)$

D. $(-\infty, 8]$

10. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$, 则关于 x 的不等式 $f(x^2 - 3) + f(2x) < 0$ 的解集为

().

A. $(-3, 1)$

B. $(-1, 3)$

C. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

D. $[-1, 3]$

11. 已知 $f(x) = e^x - e^{-x} + \sin x - x$, 若 $f(a - 2\ln(|x| + 1)) + f\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a

的取值范围____.

12. 已知 $f(x) = e^x - e^{-x} + \sin x - x$, 若 $f(a - 2\ln(|x| + 1)) + f\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值

范围_____.

13. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} + e^x - e^{-x}$, 若不等式 $f(ax^2) + f(1 - 2ax) \geq 1$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则

实数 a 的取值范围是 ().

A. $(0, e]$

B. $[0, e]$

C. $(0, 1]$

D. $[0, 1]$

14. 已知函数 $f(x) = 2(x+1) + \sin x + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, 若不等式 $f(3^x - 9^x) + f(m \cdot 3^x - 3) < 4$ 对

任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立, 则 m 的取值范围为 ().

A. $(-\infty, 2\sqrt{3} - 1)$

B. $(-\infty, -2\sqrt{3} + 1)$

C. $(-2\sqrt{3} + 1, 2\sqrt{3} - 1)$

D. $(-2\sqrt{3} + 1, +\infty)$

【答案或提示】

1. **【答案】** 1

【解析】 $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 奇函数, $g(0)=\ln\sqrt{a}=0$, $a=1$.

2. **【答案】** B

【解析】 $f(x)$ 偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单增, $f(x)>f(1)$ 转化为 $|x|>1$, 解得 $x>1$ 或 $x<-1$.

3. **【答案】** (2,3)

【解析】 $f(x)$ 奇函数, 且单减, $f(x^2-5x)+f(6)>0$ 转化为 $x^2-5x+6<0$, 解得 $2<x<3$.

4. **【答案】** (-2,1)

【解析】 设 $g(x)=x\cdot|x|+3x$, 则 $g(x)$ 奇函数, 且单增, 而 $f(x)=g(x)+1$, 由

$f(a)+f(a^2-2)<2$ 得 $f(a^2-2)-1<1-f(a)$ 即 $g(a^2-2)<-g(a)=g(-a)$, 故

$a^2-2<-a$, 解之得 $-2<a<1$.

5. **【答案】** (-2,1)

【解析】 $\because y=x^2+2x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, $y=2x-x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 且

$0^2+2\times 0=2\times 0-0^2$, $\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

因此由 $f(2-a^2)>f(a)$ 得 $2-a^2>a$, $\therefore -2<a<1$, 故答案为: (-2,1)

6. **【答案】** A

【解析】 $\because f(x)=xg(x)=x(e^x-e^{-x})$, 该函数的定义域为 \mathbf{R} ,

$f(-x)=-x(e^{-x}-e^x)=x(e^x-e^{-x})$, 所以, 函数 $y=f(x)$ 为偶函数,

当 $x>0$ 时, $g(x)=e^x-e^{-x}>0$,

任取 $x_1>x_2>0$, $-x_1<-x_2$, 则 $e^{x_1}>e^{x_2}$, $e^{-x_1}<e^{-x_2}$,

所以, $e^{x_1}-e^{-x_1}>e^{x_2}-e^{-x_2}$,

$\therefore g(x_1)>g(x_2)>0$, $\therefore x_1g(x_1)>x_2g(x_2)$, 即 $f(x_1)>f(x_2)$,

所以, 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $a=f\left(\ln\frac{1}{3}\right)=f\left(\left|\ln\frac{1}{3}\right|\right)=f(\ln 3)$,

$\because 0 < 0.2^{\frac{1}{4}} < 0.2^0 = 1 < \ln 3 < 5 < 5^{1.2}$, 则 $f\left(0.2^{\frac{1}{4}}\right) < f(\ln 3) < f\left(5^{1.2}\right)$,

即 $b < a < c$. 故选: A.

7. 【答案】ACD

8. 【答案】C

【解析】构造函数 $F(x) = f(x) - 1 = 2020^x + \log_{2020}(\sqrt{x^2+1} + x) - 2020^{-x}$,

由于 $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$, 所以 $\sqrt{x^2+1} + x > 0$, 所以 $F(x)$ 的定义域为 R .

$$\begin{aligned} F(-x) &= 2020^{-x} + \log_{2020}(\sqrt{x^2+1} - x) - 2020^x \\ &= 2020^{-x} + \log_{2020} \left[\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} \right] - 2020^x \\ &= 2020^{-x} + \log_{2020} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \right] - 2020^x \\ &= 2020^{-x} - \log_{2020}(\sqrt{x^2+1} + x) - 2020^x = -F(x), \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 为奇函数, $F(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时, $y = 2020^x, y = -2020^{-x}, y = \log_{2020}(\sqrt{x^2+1} + x)$ 都为增函数,

所以当 $x > 0$ 时, $F(x)$ 递增, 所以 $F(x)$ 在 R 上为增函数.

由 $f(2x+1) + f(x+1) - 2 > 0$, 得 $f(2x+1) - 1 + f(x+1) - 1 > 0$,

即 $F(2x+1) + F(x+1) > 0$, 所以 $2x+1+x+1 > 0$, 解得 $x > -\frac{2}{3}$.

所以不等式的解集为 $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$. 故选: C

9. 【答案】C

【解析】 $f(x) = x^2 - \frac{2x^2}{3^x+1} + 1 = x^2 \left(1 - \frac{2}{3^x+1}\right) + 1 = x^2 \cdot \frac{3^x-1}{3^x+1} + 1$

设 $g(x) = f(x) - 1 = x^2 \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ ，则 $g(x)$ 为定义在 R 的奇函数

所以 $f(x)$ 关于点 $(0, 1)$ 对称

$$\text{又 } g'(x) = [x^2]' \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + x^2 \cdot \left[\frac{3^x - 1}{3^x + 1} \right]' = 2x \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + \frac{2 \ln 3 \cdot x^2 \cdot 3^x}{3^x + 1}$$

所以当 $x > 0$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也单增

因为 $f(4 - ma) + f(m^2 + 3m) > 2$ 可化为 $f(4 - ma) - 1 > -f(m^2 + 3m) + 1$

所以 $g(4 - ma) > -g(m^2 + 3m)$

因为 $g(x)$ 为 R 的奇函数， $g(4 - ma) > -g(m^2 + 3m) = g(-m^2 - 3m)$

所以 $4 - ma > -m^2 - 3m$

又因为存在 $m \in (1, 4)$ 使得不等式 $4 - ma > -m^2 - 3m$ 成立，分参得 $a < m + \frac{4}{m} + 3$

易得 $m + \frac{4}{m} + 3 \in [7, 8)$ ，所以 $a < 8$ ，故选 C.

10. 【答案】A

【分析】根据题意可判断函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$ 为奇函数且在 R 上单调递增，进而根据奇偶性与单调性解不等式即可.

【解析】函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$ 的定义域为 R ，

$$f(-x) = e^{-x} - e^x - 2 \sin(-x) = e^{-x} - e^x + 2 \sin x = -f(x),$$

所以函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$ 为奇函数，

因为 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x \geq 2 - 2 \cos x \geq 0$ ，

所以函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$ 在 R 上单调递增，

$$\text{所以 } f(x^2 - 3) + f(2x) < 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 3) < -f(2x) = f(-2x),$$

所以 $x^2 - 3 < -2x$ ，即 $x^2 + 2x - 3 < 0$ ，解得 $-3 < x < 1$

所以不等式 $f(x^2 - 3) + f(2x) < 0$ 的解集为 $(-3, 1)$

故选：A

11. 【答案】 $\left[2\ln 2 - \frac{1}{2}, +\infty\right)$

【分析】先分析 $f(x)$ 的奇偶性和单调性，则 $f(a - 2\ln(|x| + 1)) + f\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq 0$ 等价于

$f(a - 2\ln(|x| + 1)) \geq f\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ，所以 $a - 2\ln(|x| + 1) \geq -\frac{x^2}{2}$ ，可转化为

$a \geq g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x| + 1)$ ，即 $a \geq g(x)_{\max}$ ，求 $g(x)_{\max}$ 即得解

【解析】因为 $f(-x) = e^{-x} - e^x - \sin x + x = -f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，

$f'(x) = e^x + e^{-x} + \cos x - 1$ ，

$f'(x) = e^x + e^{-x} + \cos x - 1 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} + \cos x - 1 = 1 + \cos x \geq 0$ ，

所以 $f(x)$ 是 R 上的增函数，

$f(a - 2\ln(|x| + 1)) + f\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq 0$ 等价于 $f(a - 2\ln(|x| + 1)) \geq -f\left(\frac{x^2}{2}\right) = f\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ，

所以 $a - 2\ln(|x| + 1) \geq -\frac{x^2}{2}$ ，所以 $a \geq -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x| + 1)$ ，

令 $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x| + 1)$ ，则 $a \geq g(x)_{\max}$ ，

因为 $g(-x) = g(x)$ 且定义域为 R ，

所以 $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x| + 1)$ 是 R 上的偶函数，

所以只需求 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值即可。

当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(x + 1)$ ，

$$g'(x) = -x + \frac{2}{x+1} = \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -\frac{(x+2)(x-1)}{x+1},$$

则当 $x \in [0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$;

所以 $g(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

可得: $g(x)_{\max} = g(1) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$, 即 $a \geq 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

故答案为: $\left[2\ln 2 - \frac{1}{2}, +\infty\right)$.

12. 【答案】 $\left[2\ln 2 - \frac{1}{2}, +\infty\right)$

【分析】先分析 $f(x)$ 的奇偶性和单调性, 则 $f(a - 2\ln(|x|+1)) + f\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq 0$ 等价于

$f(a - 2\ln(|x|+1)) \geq f\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, 所以 $a - 2\ln(|x|+1) \geq -\frac{x^2}{2}$, 可转化为

$a \geq g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x|+1)$, 即 $a \geq g(x)_{\max}$, 求 $g(x)_{\max}$ 即得解

【解析】因为 $f(-x) = e^{-x} - e^x - \sin x + x = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是 R 上的奇函数,

$$f'(x) = e^x + e^{-x} + \cos x - 1,$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x} + \cos x - 1 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} + \cos x - 1 = 1 + \cos x \geq 0,$$

所以 $f(x)$ 是 R 上的增函数,

$$f(a - 2\ln(|x|+1)) + f\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq 0 \text{ 等价于 } f(a - 2\ln(|x|+1)) \geq -f\left(\frac{x^2}{2}\right) = f\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

所以 $a - 2\ln(|x|+1) \geq -\frac{x^2}{2}$, 所以 $a \geq -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x|+1)$,

令 $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x|+1)$, 则 $a \geq g(x)_{\max}$,

因为 $g(-x) = g(x)$ 且定义域为 R ,

所以 $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(|x|+1)$ 是 R 上的偶函数,

所以只需求 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值即可.

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2\ln(x+1)$, $g'(x) = -x + \frac{2}{x+1} = \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}$,

则当 $x \in [0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$;

所以 $g(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

可得: $g(x)_{\max} = g(1) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$, 即 $a \geq 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

故答案为: $\left[2\ln 2 - \frac{1}{2}, +\infty\right)$.

13. 【答案】D

【分析】构造函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, 判断函数的奇偶性与单调性, 将所求不等式转化为

$f(ax^2) - \frac{1}{2} \geq -\left[f(1-2ax) - \frac{1}{2}\right]$, 即 $g(ax^2) \geq g(2ax-1)$, 再利用函数单调性解不等式即可.

【解析】Q $f(x) = \frac{1}{2^x+1} + e^x - e^{-x}$,

$$\therefore f(x) + f(-x) = \frac{1}{2^x+1} + e^x - e^{-x} + \frac{1}{2^{-x}+1} + e^{-x} - e^x = \frac{1}{2^x+1} + \frac{1}{2^{-x}+1} = 1$$

令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, 则 $g(x) + g(-x) = 0$, 可得 $g(x)$ 是奇函数,

$$\text{又 } g'(x) = \left(\frac{1}{2^x+1}\right)' + (e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x} - \frac{2^x \ln 2}{(2^x+1)^2} = e^x + \frac{1}{e^x} - \frac{\ln 2}{2^x + \frac{1}{2^x} + 2},$$

又利用基本不等式知 $e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2$ 当且仅当 $e^x = \frac{1}{e^x}$, 即 $x=0$ 时等号成立;

$$\frac{\ln 2}{2^x + \frac{1}{2^x} + 2} \leq \frac{\ln 2}{4} \text{ 当且仅当 } 2^x = \frac{1}{2^x}, \text{ 即 } x=0 \text{ 时等号成立;}$$

故 $g'(x) > 0$, 可得 $g(x)$ 是单调增函数,

$$\text{由 } f(ax^2) + f(1-2ax) \geq 1 \text{ 得 } f(ax^2) - \frac{1}{2} \geq -f(1-2ax) + \frac{1}{2} = -\left[f(1-2ax) - \frac{1}{2}\right],$$

即 $g(ax^2) \geq -g(1-2ax) = g(2ax-1)$, 即 $ax^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a=0$ 时显然成立; 当 $a \neq 0$ 时, 需 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4a^2 - 4a \leq 0 \end{cases}$, 得 $0 < a \leq 1$,

综上可得 $0 \leq a \leq 1$, 故选: D.

14. 【答案】A

【分析】由题设, 构造 $g(x) = f(x) - 2$, 易证 $g(x)$ 为奇函数, 利用导数可证 $g(x)$ 为增函数, 结

合题设不等式可得 $g(3^x - 9^x) < g(3 - m \cdot 3^x)$, 即 $m < \frac{3}{3^x} + 3^x - 1$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立, 即可求 m 的范围.

【解析】由题设, 令 $g(x) = f(x) - 2 = 2x + \sin x + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$,

$$\therefore g(-x) = -2x + \sin(-x) + \ln(\sqrt{(-x)^2 + 1} - x) = -2x - \sin x - \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -g(x),$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数, 又 $g'(x) = 2 + \cos x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$, 即 $g(x)$ 为增函数,

$$\therefore f(3^x - 9^x) + f(m \cdot 3^x - 3) < 4, \text{ 即 } f(3^x - 9^x) - 2 < -[f(m \cdot 3^x - 3) - 2],$$

$$\therefore g(3^x - 9^x) < -g(m \cdot 3^x - 3) = g(3 - m \cdot 3^x), \text{ 则 } 3^x - 9^x < 3 - m \cdot 3^x,$$

$\therefore m < \frac{3}{3^x} + 3^x - 1$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立, 又 $\frac{3}{3^x} + 3^x - 1 \geq 2\sqrt{\frac{3}{3^x} \cdot 3^x} - 1 = 2\sqrt{3} - 1$, 当且仅当 $x = \frac{1}{2}$ 时等号成立,

$$\therefore m < 2\sqrt{3} - 1, \text{ 即 } m \in (-\infty, 2\sqrt{3} - 1). \text{ 故选: A}$$

专题 03 函数的奇偶性、对称性、周期性

【方法点拨】

1. 常见的与周期函数有关的结论如下:

(1) 如果 $f(x+a) = -f(x) (a \neq 0)$, 那么 $f(x)$ 是周期函数, 其中的一个周期 $T = 2a$.

(2) 如果 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)} (a \neq 0)$, 那么 $f(x)$ 是周期函数, 其中的一个周期 $T = 2a$.

(3) 如果 $f(x+a) + f(x) = c (a \neq 0)$, 那么 $f(x)$ 是周期函数, 其中的一个周期 $T = 2a$.

2. 函数奇偶性、对称性间关系:

(1) 若函数 $y = f(x+a)$ 是偶函数, 即 $f(a+x) = f(a-x)$ 恒成立, 则 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称; 一般的, 若 $f(a+x) = f(b-x)$ 恒成立, 则 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

(2) 若函数 $y = f(x+a)$ 是奇函数, 即 $f(-x+a) + f(x+a) = 0$ 恒成立, 则函数 $y = f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ 中心对称; 一般的, 若对于 \mathbf{R} 上的任意 x 都有 $f(a+x) + f(a-x) = 2b$ 恒成立, 则 $y = f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称.

3. 函数对称性、周期性间关系:

若函数有多重对称性，则该函数具有周期性且最小正周期为相邻对称轴距离的 2 倍，为相邻对称中心距离的 2 倍，为对称轴与其相邻对称中心距离的 4 倍。

(注：如果遇到抽象函数给出类似性质，可以联想 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 的对称轴、对称中心和周期之间的关系)

4. 善于发现函数的对称性（中心对称、轴对称），有时需将对称性与函数的奇偶性相互转化。

【典型题示例】

例 1 (2022 · 全国乙 · 理 · T12) 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} ，且

$f(x) + g(2-x) = 5$ ， $g(x) - f(x-4) = 7$ 。若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，

$g(2) = 4$ ，则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$

A. -21

B. -22

C. -23

D. -24

【答案】D

【分析】根据对称性和已知条件得到 $f(x) + f(x-2) = -2$ ，从而得到

$f(3) + f(5) + \dots + f(21) = -10$ ， $f(4) + f(6) + \dots + f(22) = -10$ ，然后根据条件得到

$f(2)$ 的值，再由题意得到 $g(3) = 6$ 从而得到 $f(1)$ 的值即可求解。

【解析】因为 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，

所以 $g(2-x) = g(x+2)$ ，

因为 $g(x) - f(x-4) = 7$ ，所以 $g(x+2) - f(x-2) = 7$ ，即 $g(x+2) = 7 + f(x-2)$ ，

因为 $f(x) + g(2-x) = 5$ ，所以 $f(x) + g(x+2) = 5$ ，

代入得 $f(x) + [7 + f(x-2)] = 5$ ，即 $f(x) + f(x-2) = -2$ ，

所以 $f(3) + f(5) + \dots + f(21) = (-2) \times 5 = -10$ ，

$f(4) + f(6) + \dots + f(22) = (-2) \times 5 = -10$ 。

因为 $f(x) + g(2-x) = 5$ ，所以 $f(0) + g(2) = 5$ ，即 $f(0) = 1$ ，所以

$f(2) = -2 - f(0) = -3$ 。

因为 $g(x) - f(x-4) = 7$ ，所以 $g(x+4) - f(x) = 7$ ，又因为 $f(x) + g(2-x) = 5$ ，

联立得， $g(2-x) + g(x+4) = 12$ ，

所以 $y = g(x)$ 的图像关于点 $(3, 6)$ 中心对称，因为函数 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，

所以 $g(3) = 6$

因为 $f(x) + g(x+2) = 5$ ，所以 $f(1) = 5 - g(3) = -1$ 。

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1) + f(2) + [f(3) + f(5) + \dots + f(21)] +$

$[f(4) + f(6) + \dots + f(22)] = -1 - 3 - 10 - 10 = -24$ 。

故选：D

例 2 （2022·新高考 II 卷·T8）若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且

$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$ ，则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$ ()

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

【答案】A

【分析】根据题意赋值即可知函数 $f(x)$ 的一个周期为 6，求出函数一个周期中的

$f(1), f(2), \dots, f(6)$ 的值，即可解出。

【解析】因为 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ ，

令 $x=1, y=0$ 可得， $2f(1) = f(1)f(0)$ ，所以 $f(0) = 2$ ，

令 $x=0$ 可得， $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ ，即 $f(y) = f(-y)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数，

令 $y=1$ 得， $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1) = f(x)$ ，即有 $f(x+2) + f(x) = f(x+1)$ ，

从而可知 $f(x+2) = -f(x-1)$ ， $f(x-1) = -f(x-4)$ ，

故 $f(x+2) = f(x-4)$ ，即 $f(x) = f(x+6)$ ，所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6。

因为 $f(2) = f(1) - f(0) = 1 - 2 = -1$ ， $f(3) = f(2) - f(1) = -1 - 1 = -2$ ，

$f(4)=f(-2)=f(2)=-1$ ， $f(5)=f(-1)=f(1)=1$ ， $f(6)=f(0)=2$ ，所以

一个周期内的 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$ 。由于 22 除以 6 余 4，

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$ 。

故选：A。

例 3 （2021·新高考全国 II 卷·8）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(x+2)$ 为偶函数，

$f(2x+1)$ 为奇函数，则（ ）

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ B. $f(-1)=0$ C. $f(2)=0$ D.

$f(4)=0$

【答案】B

【分析】推导出函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，由已知条件得出 $f(1)=0$ ，结合已知条件可得出结论。

【解析】因为函数 $f(x+2)$ 为偶函数，则 $f(2+x)=f(2-x)$ ，可得 $f(x+3)=f(1-x)$ ，
因为函数 $f(2x+1)$ 为奇函数，则 $f(1-2x)=-f(2x+1)$ ，所以， $f(1-x)=-f(x+1)$ ，
所以， $f(x+3)=-f(x+1)=f(x-1)$ ，即 $f(x)=f(x+4)$ ，

故函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

因为函数 $F(x)=f(2x+1)$ 为奇函数，则 $F(0)=f(1)=0$ ，

故 $f(-1)=-f(1)=0$ ，其它三个选项未知。

故选：B。

例 4 （2021·全国甲卷·理 12）设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(x+1)$ 为奇函数， $f(x+2)$

为偶函数，当 $x \in [1, 2]$ 时， $f(x)=ax^2+b$ 。若 $f(0)+f(3)=6$ ，则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=$ （ ）

A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

【答案】D

【分析】通过 $f(x+1)$ 是奇函数和 $f(x+2)$ 是偶函数条件，可以确定出函数解析式

$f(x) = -2x^2 + 2$ ，进而利用定义或周期性结论，即可得到答案.

【解析】因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$ ①；

因为 $f(x+2)$ 是偶函数，所以 $f(x+2) = f(-x+2)$ ②.

令 $x=1$ ，由①得： $f(0) = -f(2) = -(4a+b)$ ，由②得： $f(3) = f(1) = a+b$ ，

因为 $f(0) + f(3) = 6$ ，所以 $-(4a+b) + a+b = 6 \Rightarrow a = -2$ ，

令 $x=0$ ，由①得： $f(1) = -f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow b = 2$ ，所以 $f(x) = -2x^2 + 2$.

思路一：从定义入手.

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2} + 1\right) = -f\left(\frac{3}{2} + 1\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$-f\left(\frac{5}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2} + 2\right) = -f\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{9}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

思路二：从周期性入手

由两个对称性可知，函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$.

$$\text{所以 } f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

故选：D.

例 5 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ，都有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right) = f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ ，函数 $f(x+1)$ 是奇函数，当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时， $f(x) = 2x$ ，则方程 $f(x) = -\frac{1}{2}$ 在区间 $[-3, 5]$ 内的所有根之和为_____.

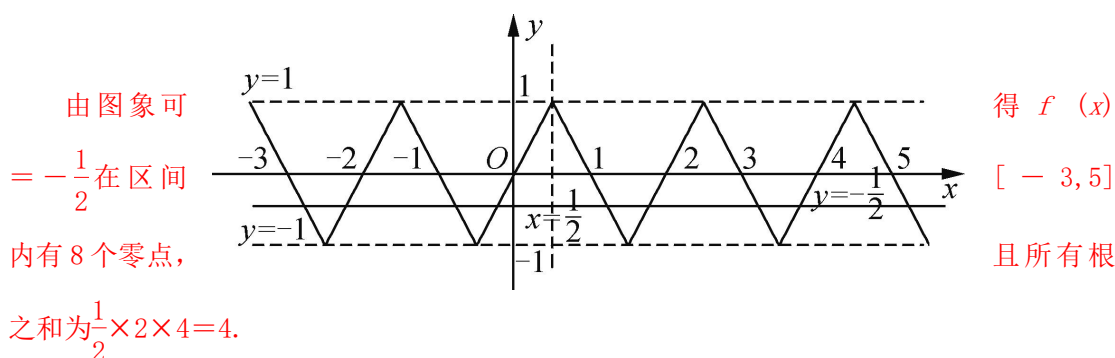
【答案】4

【分析】由 $f\left(\frac{1}{2}+x\right) = f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，得 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称，由函

数

$f(x+1)$ 是奇函数, $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 根据函数对称性、周期性间关系, 知函数 $f(x)$ 的周期为 2, 作出函数 $f(x)$ 的图象即可.

【解析】因为函数 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$, 又因为 $f\left(\frac{1}{2}+x\right) = f\left(\frac{1}{2}-x\right)$, 所以 $f(1-x) = f(x)$, 所以 $f(x+1) = -f(x)$, 即 $f(x+2) = -f(x+1) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期为 2, 且图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称. 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示,



例 6 已知函数 $y = f(x)$ 是 R 上的奇函数, 对任意 $x \in R$, 都有 $f(2-x) = f(x) + f(2)$ 成立, 当 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 则下列结论正确的有 ()

- A. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2019) = 0$
- B. 直线 $x = -5$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴
- C. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-7, 7]$ 上有 5 个零点
- D. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-7, -5]$ 上为减函数

【分析】根据题意, 利用特殊值法求出 $f(2)$ 的值, 进而分析可得 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴, 函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数和 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上为增函数, 据此分析选项即可得答案.

【解答】解: 根据题意, 函数 $y = f(x)$ 是 R 上的奇函数, 则 $f(0) = 0$;

对任意 $x \in R$, 都有 $f(2-x) = f(x) + f(2)$ 成立, 当 $x = 2$ 时, 有 $f(0) = 2f(2) = 0$, 则有 $f(2) = 0$,

则有 $f(2-x) = f(x)$, 即 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴;

又由 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(2-x) = -f(-x)$, 变形可得 $f(x+2) = -f(x)$, 则有

$$f(x+4) = -f(x+2) = f(x),$$

故函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

当 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，且 $x_1 \neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上为增函数，

又由 $y = f(x)$ 是 R 上的奇函数，则 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上为增函数；

据此分析选项：

对于 A ， $f(x+2) = -f(x)$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = [f(1) + f(3)] + [f(2) + f(4)] = 0$ ，

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2019) = 504 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) + f(3) = f(2) = 0$ ， A 正确；

对于 B ， $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，且函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则 $x=5$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，

又由函数为奇函数，则直线 $x=-5$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴， B 正确；

对于 C ，函数 $y=f(x)$ 在 $[-7, 7]$ 上有 7 个零点：分别为 $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ ；

C 错误；

对于 D ， $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上为增函数且其周期为 4，函数 $y=f(x)$ 在 $[-5, -3]$ 上为增函数，

又由 $x=-5$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，则函数 $y=f(x)$ 在 $[-7, -5]$ 上为减函数， D 正确；

故选：ABD.

例 7 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ ， $g(x) = x-2$ ，则关于 x 的方程

$f(x) = g(x)$ 的实数根之和为_____；定义区间 (a, b) ， $[a, b)$ ， $(a, b]$ ， $[a, b]$ 长度均为

$b-a$ ，则 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \geq 1$ 解集全部区间长度之和为_____.

【答案】①8 ②3

【分析】根据题意得以函数 $f(x)$ 关于点 $(2, 0)$ 对称，进而利用导数研究函数 $f(x)$ 性质，

作出简图，树形结合求解即可得关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 的实数根之和；令

$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 1$ 整理得方程的实数根 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ ，再数

形结合得 $f(x) \geq 1$ 解集为 $(1, x_1] \cup (2, x_2] \cup (3, x_3]$ ，最后根据定义求解区间长度的和即可。

【解析】因为 $f(4-x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{1-x} = -f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 关于点 $(2, 0)$ 对称，

由于 $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} < 0$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (1, 2), (2, 3), (3, +\infty)$ 上单调递减，

由于 $x < 1$ 时， $f(x) < 0$ ， $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow 0$ ， $x \rightarrow 1^-, f(x) \rightarrow -\infty$ ，

$x \rightarrow 1^+, f(x) \rightarrow +\infty$ ，

$x \rightarrow 2^-, f(x) \rightarrow -\infty$ ， $x \rightarrow 2^+, f(x) \rightarrow +\infty$ ， $x \rightarrow 3^-, f(x) \rightarrow -\infty$ ，

$x \rightarrow 3^+, f(x) \rightarrow +\infty$ ， $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow 0$ ，且 $x > 3$ 时， $f(x) > 0$ 。

故作出函数简图如图：

根据图像可知，函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ 与函数 $g(x) = x-2$ 的图像共有 4 个交

点，且关于点 $(2, 0)$ 对称，

所以 $f(x) = g(x)$ 的实数根之和为 8；

令 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 1$ ，整理得 $x^3 - 9x^2 + 23x - 17 = 0$ ，

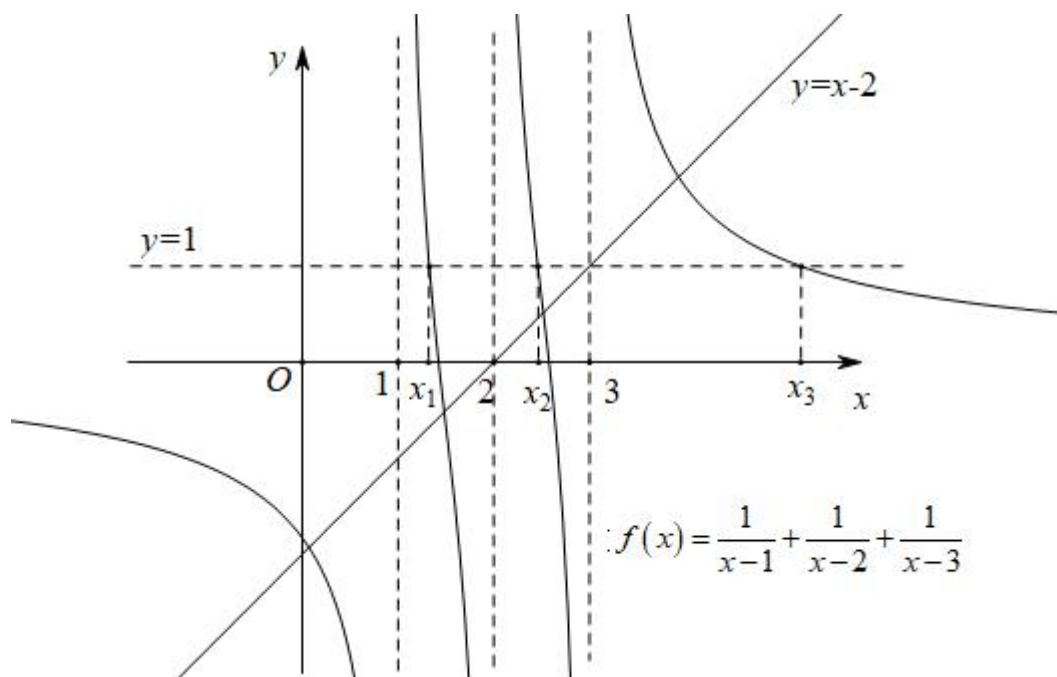
由图像知方程有三个实数解，不妨设为 x_1, x_2, x_3 ，

所以由三次方程的韦达定理得 $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ ，

由函数图像得 $f(x) \geq 1$ 解集为 $(1, x_1] \cup (2, x_2] \cup (3, x_3]$

所以全部区间长度之和为 $x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 = x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 3$ 。

故答案为：8；3。



【巩固训练】

- 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|}$ 关于 $x=1$ 对称, 则 $f(2x-2) \geq f(0)$ 的解集为_____.
- 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = -f(3-x)$, 且 $f(x)$ 的图象与 $g(x) = \lg \frac{x}{4-x}$ 的图象有四个交点, 则这四个交点的横纵坐标之和等于_____.
- 已知函数 $f(x) (x \in R)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, $f(4+x) = f(4-x)$, 且 $-3 < x \leq 3$ 时, $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $f(2018) =$ ()
 A. 0 B. 1 C. $\ln(\sqrt{5}-2)$ D. $\ln(\sqrt{5}+2)$
- 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的函数, 满足 $f(x+1) = f(x-3)$, $f(1+x) = f(3-x)$, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = x^2 - x$, 则下列说法正确的是()
 A. 函数 $f(x)$ 的周期为 4
 B. 函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x=2$ 对称
 C. 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 2
 D. 当 $6 \leq x \leq 8$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$

5. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ ，满足 $f(x-4) = -f(x)$ ，且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数，

若方程 $f(x) = m (m > 0)$ 在区间 $[-8, 8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，则

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. (多选题) 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数，则()

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x)$ 为周期函数

C. $f(x+3)$ 为奇函数

D. $f(x+4)$ 为偶函数

7. 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$ ， $f(x+1)$ 是奇函数，现给出下列 4 个论断：

① $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数；② $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称；

③ $f(x)$ 是偶函数；④ $f(x)$ 的图象经过点 $(-2, 0)$ ；

其中正确论断的个数是 .

8. (多选题) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2 - f(2-x)$ ，且 $f(x)$ 是偶函数，下列说法正确的是()

A. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称

B. $f(x)$ 是周期为 4 的函数

C. 若 $f(x)$ 满足对任意的 $x \in [0, 1]$ ，都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上单调递增

D. 若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的解析式为 $f(x) = \ln x + 1$ ，则 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上的解析式为 $f(x) = 1 - \ln(x-2)$

9. (2022·江苏常州·模拟) 已知函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$ ，若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$

图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ ，则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)$ 等于()

A. 0

B. m

C. $2m$

D. $4m$

10. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x) = f(1+x)$ 。若 $f(1) = 2$ ，则

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) =$$

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

11. 已知函数 $y = kx + b$ 与函数 $y = e^{x-1} - e^{1-x}$ 的图象交于 A, B, C ，且 $|AB| = |BC| =$

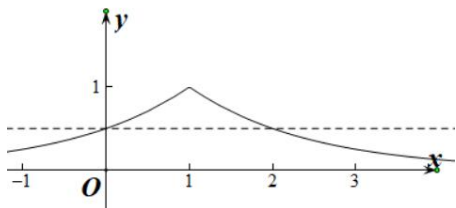
$$\sqrt{e^2 + \frac{1}{e^2}} - 1, \text{ 则实数 } k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案与提示】

1. 【答案】 $[1, 2]$

【解析】 \because 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|}$ 关于 $x=1$ 对称, $\therefore a=1, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$,

则由 $f(2x-2) \geq f(0) = \frac{1}{2}$, 结合图象可得 $0 \leq 2x-2 \leq 2$, 求得 $1 \leq x \leq 2$.



2. 【答案】 8

【解析】 $g(x) = \lg \frac{x}{4-x}$, 故 $g(4-x) = -g(x)$, 即 $y = g(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称,

又函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = -f(3-x)$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 所以四个交点的横纵坐标之和为 8.

3. 【答案】 D

【解析】 因为 $f(1+x) = f(1-x), f(4+x) = f(4-x)$,

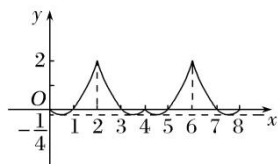
所以 $f(x) = f(2-x), f(x) = f(8-x) \therefore f(2-x) = f(8-x) \therefore T = 8 - 2 = 6$,

$\therefore f(2018) = f(2) = \ln(2 + \sqrt{5})$.

4. 【答案】 ABC

【解析】 由 $f(x+1) = f(x-3)$, 得 $f(x) = f[(x-1)+1] = f[(x-1)-3] = f(x-4)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期为 4, A 正确. 由 $f(1+x) = f(3-x)$, 得 $f(2+x) = f(2-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, B 正确. 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递增. 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上取得极小值 $-\frac{1}{4}$, 且 $f(0) = 0, f(2) = 2$. 作出函数 $f(x)$ 在 $[0, 8]$ 上的大致图象, 如图. 由图可知, 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(2) = 2$, C 正确; 当 $6 \leq x \leq 8$

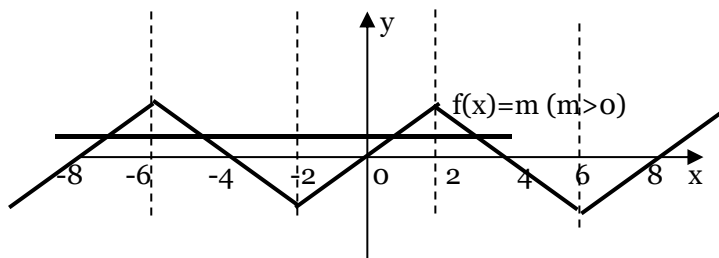
时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{15}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, D 错误. 故选 ABC.



5. 【答案】-8

【提示】四个根分别关于直线 $x=2$ ， $x=-6$ 对称.

【命题立意】本题综合考查了函数的奇偶性，单调性，对称性，周期性，以及由函数图象解方程问题，运用数形结合的思想和函数与方程的思想解答问题.



6. 【答案】ABC

【解析】法一 由 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数知，函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ ， $(2, 0)$ 对称，所以 $f(-x)+f(2+x)=0$ ， $f(-x)+f(4+x)=0$ ，所以 $f(2+x)=f(4+x)$ ，即 $f(x)=f(2+x)$ ，所以 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数. 又 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数，所以 $f(x)$ ， $f(x+3)$ ， $f(x+4)$ 均为奇函数. 故选 ABC.

法二 由 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数知，函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ ， $(2, 0)$ 对称，所以 $f(x)$ 的周期为 $2|2-1|=2$ ，所以 $f(x)$ 与 $f(x+2)$ ， $f(x+4)$ 的奇偶性相同， $f(x+1)$ 与 $f(x+3)$ 的奇偶性相同，所以 $f(x)$ ， $f(x+3)$ ， $f(x+4)$ 均为奇函数. 故选 ABC.

7. 【答案】3

【解析】命题①：由 $f(x+2)=-f(x)$ ，得： $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 的周期为 4，故①正确；

命题②：由 $f(x+1)$ 是奇函数，知 $f(x+1)$ 的图象关于原点对称，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称，故②正确；

命题③：由 $f(x+1)$ 是奇函数，得： $f(1+x)=-f(1-x)$ ，

又 $f(x+2)=-f(x)$ ，

所以 $f(-x)=-f(-x+2)=-f(1+1-x)=f(1-(1-x))=f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 是偶函数，故③正确；

命题④: $f(-2) = -f(-2+2) = -f(0)$,

无法判断其值, 故④错误. 综上, 正确论断的序号是: ①②③.

8. 【答案】ABC

【解析】根据题意, $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, A 正确; 又 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以 $f(x) = f(-x)$, 则 $2 - f(2-x) = f(-x)$, $f(x) = 2 - f(x+2)$, 从而 $f(x+2) = 2 - f(x+4)$, 所以 $f(x) = f(x+4)$, B 正确; 由 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} < 0$ 可知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 因为 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上单调递增, C 正确; 因为 $f(x) = f(-x)$, $x \in [-2, -1]$ 时, $-x \in [1, 2]$, 所以 $f(x) = f(-x) = \ln(-x) + 1$, $x \in [-2, -1]$, 因为 $f(x)$ 的周期为 4, $f(x) = f(x-4)$, $x \in [2, 3]$ 时, $x-4 \in [-2, -1]$, 所以 $f(x) = f(x-4) = \ln(4-x) + 1$, $x \in [2, 3]$, D 错误. 综上, 正确的是 ABC.

9. 【答案】B

【解析】 $\because f(x) + f(-x) = 2$, $y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$.

\therefore 函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{x+1}{x}$ 的图象都关于点 $(0, 1)$ 对称,

$\therefore \sum_{i=1}^m x_i = 0$, $\sum_{i=1}^m y_i = \frac{m}{2} \times 2 = m$.

10. 【答案】C

【分析】同例 1 得 $f(x)$ 的周期为 4, 故 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = \dots = f(45) + f(46) + f(47) + f(48)$, 而 $f(1) = 2$, $f(2) = f(0) = 0$ ($f(1-x) = f(1+x)$ 中, 取 $x=1$)、 $f(3) = f(-1) = -f(1) = -2$ 、 $f(4) = f(0) = 0$, 故 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = \dots = f(45) + f(46) + f(47) + f(48) = 0$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) = f(47) + f(48) = f(1) + f(2) = 2$.

11. 【答案】 $e - \frac{1}{e}$

【解析】设 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 则 $f(x)$ 为定义在 R 上的单增的奇函数

而 $y = e^{x-1} - e^{1-x} = f(x-1)$, 故其图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称

又因为 $|AB| = |BC|$, 所以 B 的坐标为 $(1, 0)$

为使运算更简单, 问题可转化为过坐标原点的直线 $y=kx$ 与 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 交于一点 D ,

且 $OD=\sqrt{e^2+\frac{1}{e^2}-1}$, 求实数 k 的值

不妨设 $D(x_0, e^{x_0}-e^{-x_0})$ ($x_0>0$),

$$\text{则 } \sqrt{x_0^2+(e^{x_0}-e^{-x_0})^2}=\sqrt{e^2+\frac{1}{e^2}-1}=\sqrt{(e-e^{-1})^2+1}$$

解之得 $x_0=1$, $D(1, e-e^{-1})$, 所以 $k=e-e^{-1}$.

专题 04 具有关于某点对称的函数的最值性质

【方法点拨】

1. 若奇函数 $f(x)$ 在 D 上有最值, 则 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=0$.
2. 关于某一点中心对称的函数在对称区间上的最值的解决方法同上, 可以使用图象变换, 转化为奇函数在对称区间上的最值问题. 一般的, 若单调函数 $f(x)$ 关于点 (m, n) 对称, 且在 D 上有最值, 则 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=2n$.

【典型题示例】

例 1 设函数 $f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M+m=$

_____.

【答案】2

【分析】本题解法较多, 利用函数的奇偶性应当最为简单. 将函数解析式适当作如下变形,

$$f(x)=\frac{(x^2+1)+2x+\sin x}{x^2+1}=1+\frac{2x+\sin x}{x^2+1}, \text{ 设 } g(x)=f(x)-1=\frac{2x+\sin x}{x^2+1}, \text{ 显然}$$

$g(x)$ 为奇函数, 由题意知其最大值、最小值一定存在, 根据函数图象的对称性, 最大

值与最小值互为相反数, 其和为 0, 所以, 本题应填 2.

【解析】显然函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1},$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}, \text{ 则 } g(-x) = -g(x),$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数,

由奇函数图象的对称性知 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$,

$$\therefore M + m = [g(x) + 1]_{\max} + [g(x) + 1]_{\min} = 2 + g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 2$$

答案: 2.

点评:

1. 本题欲求最大值与最小值的和, 上述解法没有运用常规的求最值的基本工具, 如: 求导、基本不等式、单调性、反解等, 而是充分利用函数的性质——奇偶性, 舍弃解析式其外在的“形”转而研究函数的“性”, 这种策略和方法在解题中经常涉及. 由于考生受定势思维的影响, 此类题目多为考生所畏惧.

2. 发现函数隐藏的单调性、对称性是解决此类问题之关键, 对于单调奇函数有下列性质: 若单调奇函数 $f(x)$ 满足 $f(a) + f(b) = 0$, 则 $a + b = 0$. 更一般的, 若单调函数 $f(x)$ 关于点 (m, n) 对称, 且满足 $f(a) + f(b) = 2n$, 则 $a + b = 2m$.

例 2 已知函数 $f(x) = (2x^2 - 4x + 3)(e^{x-1} - e^{1-x}) - 2x + 1$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

【答案】 -2

【解析】 将函数 $f(x)$ 配成关于 $x-1$ 的形式 $f(x) = [2(x-1)^2 + 1](e^{x-1} - e^{1-x}) - 2(x-1) - 1$

$$\text{设 } g(x) = (2x^2 + 1)(e^x - e^{-x}) - 2x$$

$$\text{则 } g(-x) = [2(-x)^2 + 1](e^{-x} - e^x) - 2(-x) = -(2x^2 + 1)(e^x - e^{-x}) + 2x = -g(x)$$

故 $g(x)$ 为奇函数, 其图象关于坐标原点对称

又 $f(x) = g(x-1) - 1$, 所以其图象关于点 $(1, -1)$ 对称

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m 的和 $M + m = -2$.

例 3 已知 $a > 0$, 设函数 $f(x) = \frac{2020^{x+1} + 2019}{2020^x + 1}$, $x \in [-a, a]$ 的最大值、最小值分别为

M 、 N , 则 $M + N$ 的值为_____.

【答案】4039

【分析】研究函数的对称性，利用函数 $g(x) = f(x) + a$ （其中 $f(x)$ 是奇函数）在对称区间上的最大值、最小值的和为 $2a$ 。

【解析】
$$f(x) = \frac{2020^{x+1} + 2019}{2020^x + 1} = \frac{2020^{x+1} + 2020 - 1}{2020^x + 1} = 2020 - \frac{1}{2020^x + 1}$$

设
$$g(x) = f(x) - 2020 = -\frac{1}{2020^x + 1}$$

则
$$g(-x) + g(x) = -\left(\frac{1}{2020^x + 1} + \frac{1}{2020^{-x} + 1}\right) = -1$$

所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(0, -\frac{1}{2})$ 对称

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, \frac{4039}{2})$ 对称

故 $M+N$ 的值为 4039..

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$ ，则 $f(\lg 2) + f\left(\lg \frac{1}{2}\right) = (\quad)$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

2. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = 3\sin x - 2x + 1$ ，则在 $[-5, 5]$ 上 $f(x)$ 的最大值与最小值之和等于 (\quad)

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

3. 已知函数 $f(x) = \frac{|x| - \sin x + 1}{|x| + 1} (x \in R)$ 的最大值为 M ，最小值为 m ，则 $M + m$ 的值为

(\quad)

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

4. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$ ， $f(a) = 5$ ，则 $f(-a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x + 1} + \sin x$ 在区间 $[-k, k]$ 的值域为 $[m, n]$ ，则 $m + n$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \cos x - \sin x}{x^2 + \cos x + 1}$ ，在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 M 最小值为 N ，则

$M + N = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 若关于 x 的函数 $f(x) = \frac{tx^2 + 2x + t^2 + \sin x}{x^2 + t} (t > 0)$ 的最大值为 M 最小值为 N ，且

$M + N = 4$ ，则实数 t 的值为_____.

【答案或提示】

1. **【答案】** D

【解析】 令 $g(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x)$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $g(-x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x)$, 因为 $g(x) + g(-x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x) = \ln(1+9x^2-9x^2) = \ln 1 = 0$, 所以 $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

又 $\lg \frac{1}{2} = -\lg 2$, 所以 $g(\lg 2) + g\left(\lg \frac{1}{2}\right) = 0$,

所以 $f(\lg 2) + f\left(\lg \frac{1}{2}\right) = g(\lg 2) + 1 + g\left(\lg \frac{1}{2}\right) + 1 = 2$.

2. **【解析】** 根据题意, 设 $g(x) = f(x) - 1 = 3\sin x - 2x$, $x \in [-5, 5]$,

有 $g(-x) = 3\sin(-x) - 2(-x) = -(3\sin x - 2x) = -g(x)$,

即函数 $y = g(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 则 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$,

则有 $[f(x)_{\max} - 1] + [f(x)_{\min} - 1] = f(x)_{\max} + f(x)_{\min} - 2 = 0$, 变形可得

$f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = 2$, 所以, 当 $x \in [-5, 5]$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的最大值与最小值之和等于 2. 故选: C.

3. **【解析】** $f(x) = \frac{|x| - \sin x + 1}{|x| + 1} = 1 - \frac{\sin x}{|x| + 1} (x \in \mathbf{R})$,

令 $g(x) = -\frac{\sin x}{|x| + 1} (x \in \mathbf{R})$, 即 $f(x) = 1 + g(x)$,

而 $g(x)$ 是在 \mathbf{R} 上的奇函数, 设其最大值为 N , 最小值为 n , 由奇函数性质可得 $N + n = 0$,

所以 $M + m = 2$, 故选择 C

4. **【答案】** -3

【解析】 因为 $f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1 + \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1$

$$= \ln(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)+2 = \ln 1+2 = 2$$

所以 $f(a)+f(-a)=2 \therefore f(-a)=2-5=-3$, 故答案为: -3 .

5. 【答案】2

【分析】本题的难点在于发现函数内隐藏的奇偶性、对称性.

【解析】因为 $f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x+1} + \sin x = \frac{(2^x-1)+(2^x+1)}{2^x+1} + \sin x = \frac{2^x-1}{2^x+1} + \sin x + 1$

设 $g(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1} + \sin x$, 则 $g(x)$ 为定义在 R 上的单调递增函数

所以 $f(x)$ 在区间 $[-k, k]$ 单增, 且关于点 $(0, 1)$ 对称

所以 $m+n=2$.

6. 【答案】2

【解析】 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \cos x - \sin x}{x^2 + \cos x + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1 + \cos x - \sin x}{x^2 + \cos x + 1} = 1 + \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x + 1}$.

$$\therefore \text{令 } g(x) = \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x + 1}$$

$$\therefore g(-x) = \frac{-2x + \sin x}{x^2 + \cos x + 1} = -g(x), \text{ 且 } x \in [-1, 1], \therefore g(x) \text{ 为奇函数,}$$

设其最大值为 a , 则其最小值为 $-a$,

\therefore 函数 $f(x)$ 的最大值为 $a+1$, 最小值为 $-a+1$

$$\therefore \begin{cases} a+1=M \\ -a+1=N \end{cases}, \therefore M+N=2. \text{ 故答案为: } 2.$$

7. 【答案】2

【解析】部分分式, 由已知 $f(x) = \frac{tx^2 + 2x + t^2 + \sin x}{x^2 + t} = t + \frac{2x + \sin x}{x^2 + t}$,

函数 $y = \frac{2x + \sin x}{x^2 + t}$ 为奇函数

又函数 $f(x)$ 最大值为 M 最小值为 N , 且 $M+N=4$,

$$\therefore M+N=2t=4 \quad \therefore t=2.$$

专题 05 与函数的对称性相关的零点问题

【方法点拨】

1. 若单调奇函数 $f(x)$ 满足 $f(a)+f(b)=0$, 则 $a+b=0$. 一般的, 若单调函数 $f(x)$ 关于点 (m, n) 对称, 且满足 $f(a)+f(b)=2n$, 则 $a+b=2m$.
2. 对于具有对称性的函数零点问题, 要注意检验充分性, 以防增解.
3. 对称性的三个常用结论:

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=-f(b-x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ 对称.

(3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 对称.

【典型题示例】

例 1 若函数 $f(x)=a(x-1)^3+\frac{b}{x-1}+x-1$ 存在 λ ($\lambda \in \mathbb{N}^*$) 个零点, 则所有这些零点的和等于_____.

【答案】 λ

【解析】 设 $g(x)=f(x+1)=ax^3+\frac{b}{x}+x$,

则 $g(x)$ 为奇函数, 其图象关于坐标原点对称

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故其与 x 轴的交点也关于点 $(1, 0)$ 对称

所以 $f(x)$ 的所有零点的和等于 λ .

例 2 设函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$, 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=(\quad)$

A. 0

B. 7

C. 14

D. 21

【答案】 D

【分析】 根据函数值之和 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$ 求自变量之和 $a_1+a_2+\cdots+a_7$, 很自然会去考虑函数的性质, 而等式常常考查对称性, 从而尝试去寻求函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 的对称中心.

函数 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$ 可以视为由 $y = (x-3)^3$ 与 $y = x - 1$ 构成，它们的对称中心不一样，可以考虑对函数的图象进行平移，比如 $f(x) - 2 = (x-3)^3 + (x-3)$ ，引入函数 $F(x) = f(x+3) - 2 = x^3 + x$ ，则该函数是奇函数，对称中心是坐标原点，由图象变换知识不难得出 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$ 的图象关于点 $(3, 2)$ 中心对称。

【解析】 $\because \{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，且 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_7) = 14$

$$\therefore [(a_1 - 3)^3 + a_1 - 1] + [(a_2 - 3)^3 + a_2 - 1] + \cdots + [(a_7 - 3)^3 + a_7 - 1] = 14$$

$$\therefore (a_1 + a_2 + \cdots + a_7) - 7 = 14$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 21$$

例 3 函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{-x+1} + a \sin \pi x (x \in \mathbb{R}, e \text{ 是自然对数的底数}, a > 0)$ 存在唯一的零点，则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{2}{\pi}]$ B. $(0, \frac{2}{\pi})$ C. $(0, 2]$ D. $(0, 2)$

【答案】A

【分析】分离函数，零点问题转化为两函数图象有唯一交点问题，再使用函数的对称性解决。

【解析】函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{-x+1} + a \sin \pi x (x \in \mathbb{R}, e \text{ 是自然对数的底数}, a > 0)$ 存在唯一的零点等价于：函数 $\varphi(x) = a \sin \pi x$ 与函数 $g(x) = e^{1-x} - e^{x-1}$ 只有唯一的一个交点，

$$\because \varphi(1) = 0, \quad g(1) = 0,$$

$$\therefore \text{函数 } \varphi(x) = a \sin \pi x \text{ 与函数 } g(x) = e^{1-x} - e^{x-1} \text{ 唯一交点为 } (1, 0),$$

$$\text{又} \because g'(x) = -e^{1-x} - e^{x-1}, \text{ 且 } e^{1-x} > 0, \quad e^{x-1} > 0,$$

$$\therefore g'(x) = -e^{1-x} - e^{x-1} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上恒小于零，即 } g(x) = e^{1-x} - e^{x-1} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上为单调递减函数，}$$

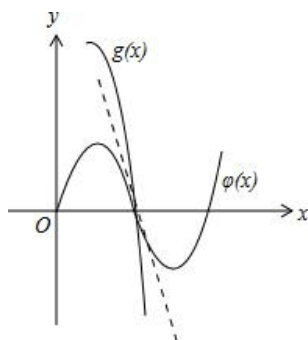
$$\text{又} \because \varphi(x) = a \sin \pi x \quad (a > 0) \text{ 是最小正周期为 } 2, \text{ 最大值为 } a \text{ 的正弦函数，}$$

∴ 可得函数 $\varphi(x) = a \sin \pi x$ 与函数 $g(x) = e^{1-x} - e^{x-1}$ 的大致图象如下图：

∴ 要使函数 $\varphi(x) = a \sin \pi x$ 与函数 $g(x) = e^{1-x} - e^{x-1}$ 只有唯一一个交点，则 $\varphi'(1) = g'(1)$ ，

$$\because \varphi'(1) = \pi a \cos \pi = -\pi a, \quad g'(1) = -e^{1-1} - e^{1-1} = -2, \quad \therefore -\pi a = -2, \quad \text{解得 } a = \frac{2}{\pi},$$

又 $\because a > 0$ ，∴ 实数 a 的范围为 $(0, \frac{2}{\pi}]$ ．故选：A．



例 4 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】C

【分析】如果利用导数研究 $f(x)$ 的零点，就会小题大做，容易陷入困难. 由函数与方程

思想，函数的零点满足 $2x - x^2 = a(e^{x-1} + e^{1-x})$.

设 $g(x) = e^{x-1} + e^{-x+1} = e^{x-1} + e^{-(x-1)}$ ，显然 $g(x)$ 是由函数 $y = e^x + e^{-x}$ 向右平移一个单位而得到，易知 $y = e^x + e^{-x}$ 是偶函数且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 故 $g(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称，且在 $[1, +\infty)$ 上是增函数，在 $(-\infty, 1]$ 上是减函数， $g(x)_{\min} = g(1) = 2$.

设 $h(x) = 2x - x^2$ ，显然 $h(x) = 2x - x^2$ 关于直线 $x = 1$ 对称，顶点为 $(1, 1)$.

若 $a < 0$ ，则函数 $y = a \cdot g(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称，且在 $[1, +\infty)$ 上是减函数，在 $(-\infty, 1]$ 上是增函数，最大值为 $2a$ ， $2a < h(x)_{\max}$.

若 $y = a \cdot g(x)$ 的图象与 $h(x)$ 的图象有一个公共点 A，根据对称性必有另一个公共

点 B. 所以, $a < 0$ 不合题意;

若 $a > 0$, 函数 $y = a \cdot g(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称, 且在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-\infty, 1]$ 上是减函数, 最小值为 $2a$. 若 $y = a \cdot g(x)$ 的图象与 $h(x)$ 的图象只有一个

公共点, 必有 $2a = 1$, 得 $a = \frac{1}{2}$.

【解析一】 $f(x) = (x-1)^2 + a(e^{x-1} + e^{-x+1}) - 1$, 令 $g(x) = f(x+1) + 1 = x^2 + a(e^x + e^{-x})$

则易知 $g(x)$ 是偶函数, 所以 $f(x)$ 图象关于直线 $x = 1$ 对称, 欲使 $f(x)$ 有唯一零点,

必有 $f(1) = 0$, 即 $2a - 1 = 0$, 所以 $a = \frac{1}{2}$.

【解析二】 $x^2 - 2x = -a(e^{x-1} + e^{-x+1})$,

设 $g(x) = e^{x-1} + e^{-x+1}$, $g'(x) = e^{x-1} - e^{-x+1} = e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{e^{2(x-1)} - 1}{e^{x-1}}$,

当 $g'(x) = 0$ 时, $x = 1$,

当 $x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减;

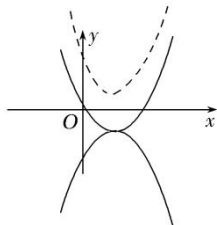
当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增, 当 $x = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最小值 $g(1) = 2$,

设 $h(x) = x^2 - 2x$, 当 $x = 1$ 时, 函数取得最小值 -1 ,

作出 $-ag(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图象如图所示.

若 $-a > 0$, 结合选项 A, $a = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $h(x)$ 和 $-ag(x)$ 的图象没有交点, 排除选项 A;

当 $-a < 0$ 时, $-ag(1) = h(1)$ 时, 此时函数 $h(x)$ 和 $-ag(x)$ 的图象有一个交点, 即 $-a \times 2 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, 故选 C.



例 5 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2a \log_2(x^2 + 2) + a^2 - 3 = 0$ 有唯一解, 则实数 a 的值为

_____.

【答案】 1

【分析】 利用隐藏的对称性, 易得 $f(0) = 0$, 求得 $a = 1$ 或 $a = -3$, 再利用数形结合, 将增解

舍弃.

【解析】通过对函数 $f(x)=x^2+2a\log_2(x^2+2)+a^2-3$ 的研究, 可发现它是一个偶函数, 那么它的图象就关于 y 轴对称, 若有唯一解, 则该解必为 0.

将 $x=0$ 代入原方程中, 可求得 $a=1$ 或 $a=-3$. 这就意味着, 当 $a=1$ 或 $a=-3$ 时, 原方程必有一解 0, 但是否是唯一解, 还需进一步验证.

当 $a=1$ 时, 原方程为 $x^2+2\log_2(x^2+2)-2=0$, 即 $2\log_2(x^2+2)=2-x^2$, 该方程实数根的研究可能过函数 $y=2\log_2 t$ 和函数 $y=4-t$ 的交点情况进行, 不难发现, 此时是符合题意的; 而当 $a=-3$ 时, 原方程为 $x^2-6\log_2(x^2+2)+6=0$, 即 $x^2+6=6\log_2(x^2+2)$. 通过研究函数 $y=4+t$ 和 $y=6\log_2 t$ 可以发现, 此时原方程不止一解, 不合题意, 需舍去.

点评:

$f(0)=0$ 仅是函数存在零点的必要条件, 要注意检验充分性, 一般是代入检验进行取舍.

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=\ln x-ax$, 若函数 $f(x)$ 恰有 5 个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

2. 若函数 $f(x)=x^2+2a|x|+4a^2-3$ 的零点有且只有一个, 则实数 a =_____.

3. 若函数 $f(x)=x^2-m\cos x+m^2+3m-8$ 有唯一零点, 则满足条件的实数 m 组成的集合为_____.

4. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$, $a\in\mathbf{R}$, 则函数 $f(x)$ 零点的个数所有可能值构成的集合为_____.

5. 函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图象与函数 $y=2\sin\pi x(-2\leq x\leq 4)$ 的图像所有交点的横坐标之和等于 ()

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

6. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$, 若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点

为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$ ()

A. 0 B. m C. 2m D. 4m

7. 已知实数 x, y 满足 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, 则 $x^2-3xy-4y^2-6x-6y+2020$

的值是_____.

8.圆 $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ 与曲线 $y = \frac{2x+4}{x+3}$ 相交于 A, B, C, D 点四点, O 为坐标原点, 则

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

9.已知函数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, 函数 $g(x) = 2^{|x-2021|} - 2af(x-2021) - 2a^2$ 有唯一零点, 则实数 a 的值为_____.

10.函数 $f(x) = \ln(e^{x-2} + e^{2-x}) + x^2 - 4x$ 的所有零点之和为().

A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

11. 已知函数 $f(x) = e^{x-2} + e^{2-x} + a \sin(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6})$ 有唯一零点, 则 $a =$ ()

A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

12. (2022·江苏常州·模拟) 已知函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$

图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)$ 等于()

A. 0 B. m C. $2m$ D. $4m$

【答案与提示】

1. 【答案】 $(0, e)$

【提示】分离函数, 问题即为 $x > 0$ 时, $h(x) = \ln x$ 与 $g(x) = ax$ 的图象恰有 2 个交点, 利用导数求出当 $a = e$ 时, 相切为临界值.

2. 【答案】 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

【提示】同例 4, 利用 $f(x) = 0$, 求得 $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而当 $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 不满足题意, 应舍去.

3. 【答案】 $m = 2$

【提示】发现 $f(x)$ 是偶函数, 故得到 $f(0) = 0$, 立得 $m = 2$ 或 $m = -4$, 难点在于对 $m = -4$ 的取舍问题. 思路有二, 一是“分离函数”, 利用“形”助数; 二是利用导数知识, 只需当 $x > 0$ 时, 函数恒增或恒减即可.

4. 【答案】 $\{0, 1, 2, 4\}$

【提示】见例 3.

5. 【答案】B

【提示】根据对称性易得答案.

6. 【答案】B

【分析】该题设计抽象函数 $f(x)$ 关于点 $(0,1)$ 成中心对称, 函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 由奇函数 $y = \frac{1}{x}$

向上平移一个单位得到, 也关于点 $(0,1)$ 成中心对称, 因而两函数图象的交点为也关于

点 $(0,1)$ 成中心对称, $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m y_i$, 考虑倒序相加法, 可得 $\sum_{i=1}^m x_i = 0$,

$\sum_{i=1}^m y_i = m$, 故 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = m$.

7. 【答案】2020

【提示】两边取自然对数得 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 0$

设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则易得其为 R 上的单增奇函数

所以 $x + y = 0$,

故 $x^2 - 3xy - 4y^2 - 6x - 6y + 2020 = (x + y)(x - 4y) - 6(x + y) + 2020 = 2020$.

8. 【答案】 $4\sqrt{13}$

【分析】注意发现圆与一次分式函数 $y = \frac{2x+4}{x+3}$ 的图象均关于点 $(-3, 2)$ 对称, 利用三角形中线的向量表示, 将所求转化即可.

【解析】由圆方程 $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$, 可得 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$, 圆心坐标为 $(-3, 2)$

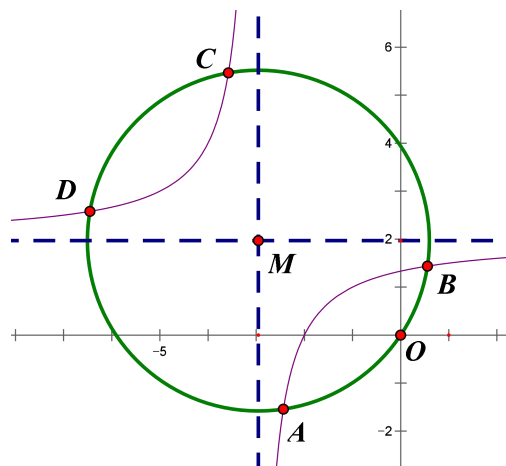
$y = \frac{2x+4}{x+3} = \frac{2(x+3)-2}{x+3} = 2 - \frac{2}{x+3}$, 其对称

中心为 $(-3, 2)$.

在同一直角坐标系中, 画出圆和函数图像如右图所示:

数形结合可知, 圆和函数都关于点 $M(-3, 2)$ 对称,

故可得其交点 A 和 C , B 和 D 都关于点 $M(-3, 2)$



对称.

$$\text{故 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = 4|\overrightarrow{OM}| = 4\sqrt{13}.$$

9. 【答案】 -1 或 $\frac{1}{2}$

10. 【答案】 A

11. 【答案】 C

【提示】函数关于直线 $x=2$ 对称, 故必有 $f(2)=0$.

12. 【答案】 B

【解析】 $\because f(x) + f(-x) = 2, y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$.

\therefore 函数 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{x+1}{x}$ 的图象都关于点 $(0, 1)$ 对称,

$$\therefore \sum_{i=1}^m x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m y_i = \frac{m}{2} \times 2 = m.$$

专题 06 超越不等式 (方程)

【方法点拨】

含有指对运算的方程(或不等式)称之为超越方程(或超越不等式), 实现解这类方程、不等式, 一般是先猜根, 再构造函数, 利用函数的单调性来解决.

【典型题示例】

例 1 (2022·新高考 I·22 改编) 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值, 则实数 $a =$ _____.

【答案】 $a = 1$

【分析】利用导数知识易得, $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a$, $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln \frac{1}{a}$,

根据最小值相等得 $a - a \ln a = 1 - \ln \frac{1}{a}$, 即 $\frac{a-1}{1+a} = \ln a$, 猜根易得可求 $a = 1$ 是其中一个根,

构造函数, 研究函数的单调性, 说明根的唯一性从而得解.

【解析】 $f(x) = e^x - ax$ 的定义域为 R ，而 $f'(x) = e^x - a$ ，

若 $a \leq 0$ ，则 $f'(x) > 0$ ，此时 $f(x)$ 无最小值，故 $a > 0$ 。

$g(x) = ax - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，而 $g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$ 。

当 $x < \ln a$ 时， $f'(x) < 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上为减函数，

当 $x > \ln a$ 时， $f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上为增函数，

故 $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a$ 。

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时， $g'(x) < 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上为减函数，

当 $x > \frac{1}{a}$ 时， $g'(x) > 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上为增函数，

故 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{a}) = 1 - \ln \frac{1}{a}$ 。

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值，

故 $1 - \ln \frac{1}{a} = a - a \ln a$ ，整理得到 $\frac{a-1}{1+a} = \ln a$ ，其中 $a > 0$ ，

设 $H(a) = \frac{a-1}{1+a} - \ln a, a > 0$ ，则 $H'(a) = \frac{2}{(1+a)^2} - \frac{1}{a} = \frac{-a^2-1}{a(1+a)^2} \leq 0$ ，

故 $H(a)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数，而 $H(1) = 0$ ，

故 $H(a) = 0$ 的唯一解为 $a = 1$ ，故 $\frac{1-a}{1+a} = \ln a$ 的解为 $a = 1$ 。

综上， $a = 1$ 。

例 2 (2022 · 四川 · 成都 · 二检) 已知函数 $f(x) = 9^x + \frac{\log_3 \sqrt{x-1}}{x^2 - x}$ 的零点为 x_0 ，则

$9^{x_0}(x_0 - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】1

【分析】

【解析】由题意得： $9^{x_0} = -\frac{\log_3 \sqrt{x_0-1}}{x_0^2 - x_0}$

$\therefore 9^{x_0}(x_0 - 1) = \frac{1}{x_0 - 1} \log_9 \frac{1}{x_0 - 1} = 9^{\log_9 \frac{1}{x_0 - 1}} \cdot \log_9 \frac{1}{x_0 - 1}$

设 $g(x) = x \cdot 9^x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单增

故有 $x_0 = \log_9 \frac{1}{x_0 - 1}$, 即 $9^{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1}$

$$\therefore 9^{x_0}(x_0 - 1) = 1.$$

例 3 (多选题) (2022 · 江苏七市三模) 已知函数 $y = x + e^x$ 的零点为 x_1 ,

$y = x + \ln x$ 的零点为 x_2 , 则

A. $x_1 + x_2 > 0$

B. $x_1 x_2 < 0$

C. $e^{x_1} + \ln x_2 = 0$

D. $x_1 x_2 - x_1 + x_2 < 1$

【答案】BCD

【解析】 $x_1 + e^{x_1} = x_2 + \ln x_2 = 0$, 则 $x_1 + e^{x_1} = \ln x_2 + e^{\ln x_2}$,

显然 $f(x) = x + e^x$ 单增, 故 $x_1 = \ln x_2$ 等价于 $e^{x_1} = x_2$, 则 $x_1 + x_2 = x_1 + e^{x_1} = 0$,

故 A 错误;

因为 $f(x) = x + e^x$ 单增, 且 $f(0) = 1$, 故 $f(x_1) = 0 < f(0)$, 则 $x_1 < 0$

故 $x_1 x_2 = x_1 e^{x_1} < 0$, 则 B 正确;

$e^{x_1} + \ln x_2 = x_2 + \ln x_2 = 0$, 则 C 正确;

D. $x_1 x_2 - x_1 + x_2 < 1 \Leftrightarrow x_1(x_2 - 1) < 1 - x_2$, 因为 $x_2 + \ln x_2 = 0 < 1 + \ln 1$, 故

$x_2 < 1$,

则 $x_1(x_2 - 1) < 1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 > -1$, 而 $x_1 + e^{x_1} = 0 > -1 + e^{-1}$, 则 $x_1 > -1$, 故 D

正确.

例 4 已知点 P 为函数 $f(x) = \ln x$ 的图象上任意一点, 点 Q 为圆 $\left[x - \left(e + \frac{1}{e}\right)\right]^2 + y^2 = 1$

上任意一点, 则线段 PQ 的长度的最小值为 ()

A. $\frac{\sqrt{e^2 + 1} - e}{e}$

B. $\frac{\sqrt{2e^2 + 1} - e}{e}$

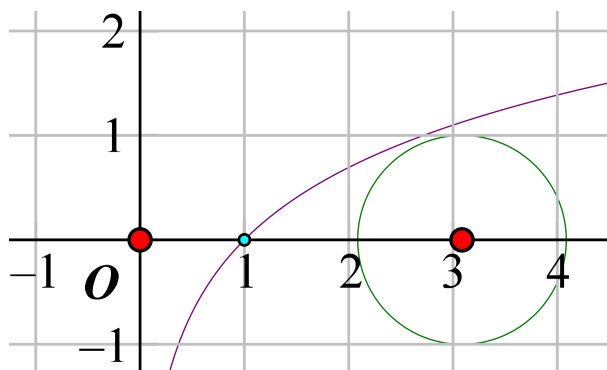
C. $\frac{e - \sqrt{e^2 - 1}}{e}$

D. $e + \frac{1}{e} - 1$

【答案】A

【解析】考虑从“形”的角度切入，与已知圆同心且与 $f(x) = \ln x$ 相切的圆的半径与已知圆的半径之差即为所求

如下图



设该圆与 $f(x) = \ln x$ 相切的切点为 $Q'(x_0, \ln x_0)$

则由导数的几何意义、圆的切线性质得 $\frac{\ln x_0}{x_0 - \left(e + \frac{1}{e}\right)} \times \frac{1}{x_0} = -1$

即 $x_0^2 - \left(e + \frac{1}{e}\right)x_0 + \ln x_0 = 0$ ，此为超越方程，应先猜根，易知 $x_0 = e$ 为其中一个根

设 $f(x) = x^2 - \left(e + \frac{1}{e}\right)x + \ln x$ ，则 $f'(x) = 2x - \left(e + \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{x} < 0$ ， $f(x)$ 单调递减

故 $x_0 = e$ 为其唯一的一个根，此时切点为 $(e, 1)$

所以 PQ 的长度的最小值为 $\sqrt{\left[e - \left(e + \frac{1}{e}\right)\right]^2 + 1^2} - 1 = \frac{\sqrt{e^2 + 1} - e}{e}$ ，故选 A.

例 5 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - ax + a}$ ($a \in \mathbf{R}$)，其中 e 为自然对数的底数，若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(2) > f(a)$ ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】(2, 4)

【解析】由函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，得 $x^2 - ax + a \neq 0$ 恒成立，

所以 $a^2 - 4a < 0$ ，解得 $0 < a < 4$.

方法 1 (讨论单调性)

由 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - ax + a}$ ，得 $f'(x) = \frac{e^x(x-a)(x-2)}{(x^2 - ax + a)^2}$.

①当 $a=2$ 时， $f(2)=f(a)$ ，不符题意.

②当 $0 < a < 2$ 时,

因为当 $a < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(a, 2)$ 上单调递减,

所以 $f(a) > f(2)$, 不符题意.

③当 $2 < a < 4$ 时,

因为当 $2 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, a)$ 上单调递减,

所以 $f(a) < f(2)$, 满足题意.

综上, a 的取值范围为 $(2, 4)$.

方法 2 (转化为解超越不等式, 先猜根再使用单调性)

由 $f(2) > f(a)$, 得 $\frac{e^2}{4-a} > \frac{e^a}{a}$.

因为 $0 < a < 4$, 所以不等式可化为 $e^2 > \frac{e^a}{a}(4-a)$.

设函数 $g(x) = \frac{e^x}{x}(4-x) - e^2$, $0 < x < 4$.

因为 $g'(x) = e^x \cdot \frac{-(x-2)^2}{x^2} \leq 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递减.

又因为 $g(2) = 0$, 所以 $g(x) < 0$ 的解集为 $(2, 4)$.

所以, a 的取值范围为 $(2, 4)$.

例 6 已知函数 $f(x) = x - 1 - (e-1)\ln x$, 其中 e 为自然对数的底, 则满足 $f(e^x) < 0$ 的 x 的取值范围为_____.

【答案】 $(0, 1)$

【解析】 易得 $f(1) = f(e) = 0$

$$\therefore f'(x) = 1 - \frac{e-1}{x} = \frac{x-(e-1)}{x}$$

\therefore 当 $x \in (0, e-1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, e-1)$ 单调减; 当 $x \in (e-1, +\infty)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(e-1, +\infty)$ 单调增

$\therefore f(x) < 0$ 的解集是 $1 < x < e$

令 $1 < e^x < e$, 得 $0 < x < 1$, 故 $f(e^x) < 0$ 的 x 的取值范围为 $(0, 1)$.

例 7 若存在正数 x, y , 使得 $(3e^2y - x)(\ln x - \ln y) - ay = 0$, 其中 e 为自然对数的底数, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a \leq 4e^2$

【分析】 对 $(3e^2y - x)(\ln x - \ln y) - ay = 0$ 进行“完全分参”，两边同时除以 y 、移项得

$a = (3e^2 - \frac{x}{y}) \ln \frac{x}{y}$ ，令 $\frac{x}{y} = t$ ，问题转化为存在正数 t ，使得 $a = (3e^2 - t) \ln t$ 成立，再设

$f(x) = (3e^2 - x) \ln x$ ，只需 $a \in f(x)$ 的值域.

【解析】 对 $(3e^2y - x)(\ln x - \ln y) - ay = 0$ 两边同时除以 y 、移项得 $a = (3e^2 - \frac{x}{y}) \ln \frac{x}{y}$ ，

令 $\frac{x}{y} = t$ ，问题转化为存在正数 t ，使得 $a = (3e^2 - t) \ln t$ 成立，

设 $f(x) = (3e^2 - x) \ln x$ ，只需 $a \in f(x)$ 的值域.

$$f'(x) = -\ln x + (3e^2 - x) \frac{1}{x} = -\ln x - 1 + \frac{3e^2}{x}$$

猜根，往与 e 的方向猜，可得 $f'(e^2) = -\ln e^2 - 1 + \frac{3e^2}{e^2} = 0$

再设 $g(x) = -\ln x - 1 + \frac{3e^2}{x}$ ，则 $g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{3e^2}{x^2} < 0$

故 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单减

所以 $f'(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 只有一个零点为 e^2

且当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f'(x) < 0$

故有当 $x \in (0, e^2]$ ， $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 单增；当 $x \in [e^2, +\infty)$ ， $f'(x) \leq 0$ ， $f(x)$ 单减

故当 $x = e^2$ 时， $f(x)$ 取得极大值也就是最大值为 $f(e^2) = (3e^2 - e^2) \ln e^2 = 4e^2$ ，无最小值

故 $a \leq 4e^2$ 即为所求.

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$ ，则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 () .

A. $(-1, 1)$

B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(0, 1)$

D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2. 关于 x 的不等式 $x^2 + \ln x - 1 \geq 0$ 的解集为_____.

3. 方程 $xe^x + e \ln x - e = 0$ 的根是_____.

4. 已知 α 、 β 分别是方程 $x^5 + x + 1 = 0$ 、 $x + \sqrt[5]{x} + 1 = 0$ 的根，则 $\alpha + \beta$ 的值是_____.

5. 已知实数 x 、 y 满足 $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ ，则 $x^2 - 3xy - 4y^2 - 6x - 6y + 2020$ 的值是_____.

6. 不等式 $x - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0$ 的解集是_____.

7. 方程 $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x+3} + 3x + 4 = 0$ 的根是_____.

8. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2^x + 2^{-x} - \frac{7}{2}$ ，则 $f(x) = 0$ 的解集为_____.

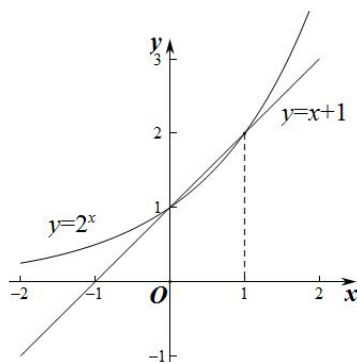
【答案或提示】

1. 【答案】D

【分析】作出函数 $y = 2^x$ 和 $y = x + 1$ 的图象，观察图象可得结果.

【解析】因为 $f(x) = 2^x - x - 1$ ，所以 $f(x) > 0$ 等价于 $2^x > x + 1$ ，

在同一直角坐标系中作出 $y = 2^x$ 和 $y = x + 1$ 的图象如图：



两函数图象的交点

坐标为 $(0, 1), (1, 2)$ ，

不等式 $2^x > x + 1$ 的解为 $x < 0$ 或 $x > 1$ 。

所以不等式 $f(x) > 0$ 的解集为： $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 。

2. 【答案】 $[1, +\infty)$

【提示】设 $f(x) = x^2 + \ln x - 1$ ，则 $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ ， $f(1) = 0$ ， $f(x)$ 单增。

3. 【答案】1

【解析】设 $\varphi(x) = xe^x + e \ln x - e$ ，则 $\varphi'(x) = (x+1)e^x + \frac{e}{x} > 0$ ，所以 $\varphi(x)$ 单调递增，

因为 $\varphi(1) = 0$ ，所以 $x = 1$ 。

4. 【答案】-1

【提示】设 $f(x) = x^5 + x + 1$ ，则 $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ ， $f(x)$ 单增。

由 $\alpha^5 + \alpha + 1 = 0$ ， $(\sqrt[5]{\beta})^5 + \sqrt[5]{\beta} + 1 = 0$ 得 $\alpha = \sqrt[5]{\beta}$

代入 $\alpha^5 + \alpha + 1 = 0$ 得 $(\sqrt[5]{\beta})^5 + \alpha + 1 = 0$ ，即 $\beta + \alpha + 1 = 0$ ，得 $\alpha + \beta = -1$ 。

5. 【答案】2020

【提示】两边取自然对数得 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 0$

设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则易得其为 R 上的单增奇函数

所以 $x + y = 0$ ，

故 $x^2 - 3xy - 4y^2 - 6x - 6y + 2020 = (x + y)(x - 4y) - 6(x + y) + 2020 = 2020$ 。

6. 【答案】(0,1]

【解法一】显然 $x = 1$ 是方程 $x - \frac{1}{x} - \ln x = 0$ 一个根

$$\text{令 } f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x, \text{ 则 } f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}{x^2} > 0$$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增，且 $f(1) = 0$

所以不等式 $x - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0$ 的解集是 $(0, 1]$ 。

【解法二】 $x - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0$ 变形为 $x - \frac{1}{x} \leq \ln x$

设 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ， $g(x) = \ln x$

而 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单减， $g(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 单增，且图象均过 $(1, 0)$

所以不等式 $x - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0$ 的解集是 $(0, 1]$.

7. 【答案】 $-\frac{4}{3}$

【分析】利用“同构”构造函数，再利用函数的单调性.

【解析】原方程可化为 $\sqrt[3]{x+1} + (x+1) + \sqrt[3]{2x+3} + (2x+3) = 0$

设 $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$ ，易得其为 R 上的单增奇函数

所以 $(x+1) + (2x+3) = 0$ ， $x = -\frac{4}{3}$ 即为所求.

8. 【答案】 $\{-1, 1\}$

【解析】本题可通过猜根秒杀（常规解法：构造函数关系）.

专题 07 指数函数型函数的单调性、对称性

【方法点拨】

1. 指数复合型函数 $f(x) = \frac{n}{a^x + m}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, mn \neq 0$) 的对称中心为 $(\log_a |m|, \frac{n}{2m})$.

记忆方法：横下对，纵半分（即横坐标是使分母取对数的值，但真数为保证有意义，取的是绝对值而已，而纵坐标是分母、分子中的常数分别作为分母、分子的值的一半）.

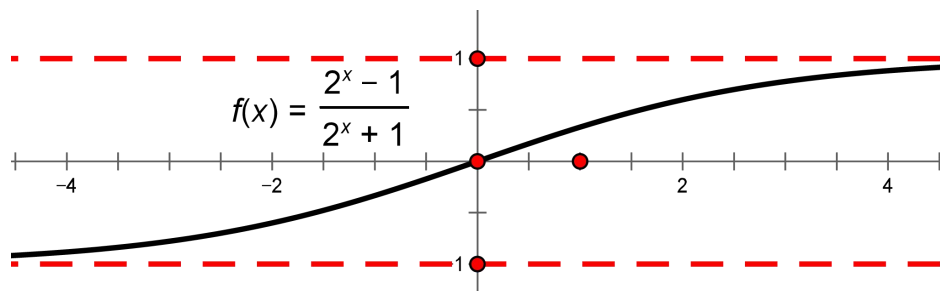
2. 函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 的性质如下：

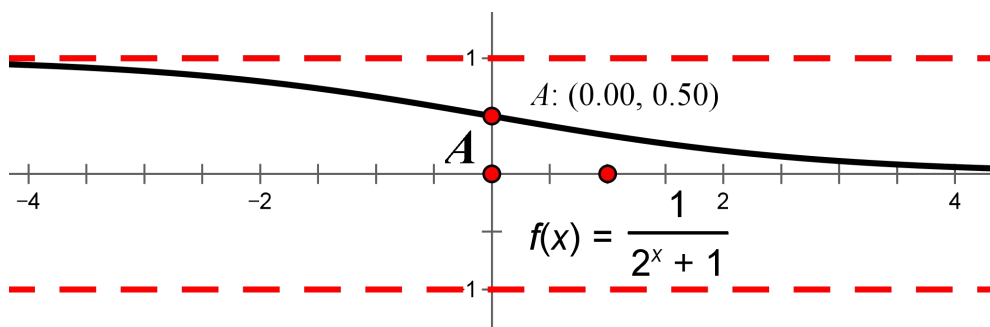
(1) 定义域是 R ；

(2) 值域是 $(-1, 1)$ ；

(3) 在 $(-\infty, +\infty)$ 单增；

(4) 是奇函数，其图象关于坐标原点对称.





说明：形如 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 的函数，即指数函数与一次分式函数复合类型的函数是重要的考

察的载体，通过变形（部分分式），可得到 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$ 、 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$ 、 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1}$ 等。

【典型例题】

例 1 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3^x + 1} - 2x$ ，则满足不等式 $f(a) + f(3a + 2) > 2$ 的实数 a 的取值范围是_____。

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

【解析】 $y = \frac{2}{3^x + 1}$ 的对称中心是 $(0, 1)$ ，其定义域为 \mathbf{R} 且单调

令 $g(x) = f(x) - 1 = \frac{2}{3^x + 1} - 2x - 1$ ，则 $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的单调递减的奇函数

由 $f(a) + f(3a + 2) > 2$ 得 $f(3a + 2) - 1 > 1 - f(a)$

即 $g(3a + 2) > -g(a)$

因为 $g(x)$ 为奇函数，故 $-g(a) = g(-a)$

所以 $g(3a + 2) > g(-a)$

又 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减，所以 $3a + 2 < -a$ ，解之得 $a < -\frac{1}{2}$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 。

例 2 已知 $a > 0$ ，设函数 $f(x) = \frac{2020^{x+1} + 2019}{2020^x + 1}$ ， $x \in [-a, a]$ 的最大值、最小值分别为 M 、 N ，则 $M+N$ 的值为_____.

【答案】 4039

【分析】 研究函数的对称性，利用函数 $g(x) = f(x) + a$ （其中 $f(x)$ 是奇函数）在对称区间上的最大值、最小值的和为 $2a$.

【解析】 $f(x) = \frac{2020^{x+1} + 2019}{2020^x + 1} = \frac{2020^{x+1} + 2020 - 1}{2020^x + 1} = 2020 - \frac{1}{2020^x + 1}$

设 $g(x) = f(x) - 2020 = -\frac{1}{2020^x + 1}$

则 $g(-x) + g(x) = -(\frac{1}{2020^x + 1} + \frac{1}{2020^{-x} + 1}) = -1$

所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(0, -\frac{1}{2})$ 对称

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, \frac{4039}{2})$ 对称

故 $M+N$ 的值为 4039.

例 3 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1+x}{1+ax}$ ($a \neq 1$) 是奇函数，设函数 $g(x) = f(x) + \frac{2}{2^x + 1}$ ，

$x \in (-1, 1)$ ，

若 $g(m) > g(n)$ ，其中 $m, n \in (-1, 1)$ ，试比较 m, n 的大小.

【答案】 $m < n$.

【分析】 研究函数的单调性，逆用单调性脱“g”即可.

【解析】 易得 $a = -1$ ，故 $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1+x}{1-x} + \frac{2}{2^x + 1}$ ， $x \in (-1, 1)$ ，下面考察函数的单调性.

对于 $\frac{1+x}{1-x} = \frac{2-(1-x)}{1-x} = -\frac{2}{x-1} - 1$ 在 $(-1, 1)$ 单增，由复合函数单调性得 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1+x}{1-x}$ 在

$(-1, 1)$ 单减；

对于 $\frac{2}{2^x + 1}$ ，设 $2^x = t$ ($t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$)， $\frac{2}{t+1}$ 在 $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 单减，由复合函数单调性得 $\frac{2}{2^x + 1}$

在 $(-1, 1)$ 单减，

再由函数单调性得性质得 $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1+x}{1-x} + \frac{2}{2^x+1}$ ，在 $x \in (-1, 1)$ 单减，

因为 $g(m) > g(n)$ ， $m, n \in (-1, 1)$ ，所以 $m < n$ 。

【巩固练习】

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x-1} + a$ 的图象关于坐标原点对称，则实数 a 的值为_____。

2. 已知函数 $f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1} + 2x$ ，则满足不等式 $f(a) + f(3a+2) > 0$ 的实数 a 的取值范围是_____。

3. 已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$ ，则 $f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + f\left(\frac{3}{1001}\right) + \cdots + f\left(\frac{1000}{1001}\right)$ 的值为_____。

4. 已知函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x+1} - 2x$ 在区间 $[-k, k]$ 上的值域为 $[m, n]$ ，则 $m+n=$ _____。

5. 已知函数 $f(x) = a - \frac{2^x}{2^x+1}$ 是定义域为 R 的奇函数，当 $x \in [3, 9]$ 时，不等式 $f(\log_3^2 x) + f(2 - m \log_3 x) \geq 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____。

【答案与提示】

1. 【答案】 -1

【提示】由 $f(-1) + f(1) = 0$ 立得。

2. 【答案】 $\left(-\frac{1}{2} + \infty\right)$

【提示】 $f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1} + 2x = \frac{3^x+1-2}{3^x+1} + 2x = 1 - \frac{2}{3^x+1} + 2x$ 的对称中心是 $(0, 0)$ ，其定义

域为 R 且单增。

3. 【答案】 500

【思路一】从所求式中自变量的特征，被动发现函数的对称性. 设若 $0 < a < 1$ ，尝试去求

$f(a) + f(1-a)$ 的值，易得 $f(a) + f(1-a) = 1$ 。

【思路二】主动发现函数的对称性， $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2} = 1 - \frac{2}{4^x + 2}$ ，设 $g(x) = \frac{2}{4^x + 2}$ ，则其对称中心为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，则 $f(x)$ 的对称中心也为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，故 $f(x) + f(1-x) = 1$ 。

4. 【答案】2

【提示】 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} - 2x + 1$ ， $g(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} - 2x$ 奇，单增。

5. 【答案】 $[3, +\infty)$ 。

【解析】∵ 函数是定义域为 R 的奇函数，

$$\therefore f(0) = a - \frac{2^0}{2^0 + 1} = 0, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2}.$$

经检验，当 $a = \frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 为奇函数，即所求实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{设 } \forall x_1, x_2 \in R \text{ 且 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{2} - \frac{2^{x_1}}{2^{x_1} + 1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2^{x_2}}{2^{x_2} + 1} \right) \\ &= \frac{2^{x_2}(2^{x_1} + 1) - 2^{x_1}(2^{x_2} + 1)}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} = \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)}, \end{aligned}$$

$$\because x_1 < x_2, \therefore 2^{x_2} - 2^{x_1} > 0, (2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1) > 0,$$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$ ，即 $f(x_1) > f(x_2)$ ，所以 $f(x)$ 是 R 上的减函数。

由 $f(\log_3^2 x) + f(2 - m \log_3 x) \geq 0$ ，可得 $f(\log_3^2 x) \geq -f(2 - m \log_3 x)$ 。

$\because f(x)$ 是 R 上的奇函数， $\therefore f(\log_3^2 x) \geq f(m \log_3 x - 2)$ ，

又 $f(x)$ 是 R 上的减函数，

所以 $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2 \leq 0$ 对 $x \in [3, 9]$ 恒成立，

令 $t = \log_3 x$ ， $\because x \in [3, 9]$ ， $\therefore t \in [1, 2]$ ，

$\therefore t^2 - mt + 2 \leq 0$ 对 $t \in [1, 2]$ 恒成立，

思路一：（转化为二次函数区间上的最大值 ≤ 0 ）

令 $g(t) = t^2 - mt + 2$, $t \in [1, 2]$, 该函数开口朝上, 故 $t=1$ 或 $t=2$ 取得最大值

$$\therefore \begin{cases} g(1) = 3 - m \leq 0 \\ g(2) = 6 - 2m \leq 0 \end{cases}, \text{解得 } m \geq 3, \text{ 所以实数 } m \text{ 的取值范围为 } [3, +\infty).$$

思路二: (分离变量) 即 $m \geq t + \frac{2}{t}$ 对 $t \in [1, 2]$ 恒成立,

设 $g(t) = t + \frac{2}{t}$, 则 $g(t)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上单减, 在区间 $[\sqrt{2}, 2]$ 上单增

$$\text{所以 } g(t)_{\max} = \max \{g(1), g(2)\} = 3$$

所以 $m \geq 3$, 故实数 m 的取值范围为 $[3, +\infty)$.

专题 08 递推函数

【方法点拨】

类比于数列的递推关系, 我们把具有 $f(x+1) = 2f(x)$ 等形式的函数称为递推函数. 诸如函数 $f(x+1) = 2f(x)$, 意即变量的值增加 1, 其对应的函数值是原来函数值的 2 倍, 类似函数的周期性, 但有一个倍数关系. 依然可以考虑利用周期性的思想, 在作图时, 以一个“周期”图像为基础, 其余各部分按照倍数调整图像即可. $f(x) = f(x-1) + 1$ 等以此类推.

【典型题示例】

例 1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$. 若对

任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是()

A. $\left[-\infty, \frac{9}{4}\right]$

B. $\left[-\infty, \frac{7}{3}\right]$

C. $\left[-\infty, \frac{5}{2}\right]$

D. $\left[-\infty, \frac{8}{3}\right]$

【答案】 B

【分析】 作出图示, 求出函数的解析式, 求出 $f(x) = -\frac{8}{9}$ 成立的 x 的值, 运用数形结合的思想可得选项.

【解析一】 $\because x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$, $f(x)_{\text{极小值}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

∴ 当 $x \in (1, 2]$ 时, $x-1 \in (0, 1]$, 故 $f(x) = f((x-1)+1) = 2f(x-1) = 2(x-1)(x-2)$,

$$f(x)_{\text{极小值}} = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

同理, 当 $x \in (2, 3]$ 时, $f(x) = 2^2(x-2)(x-3)$, ∴ $f(x)_{\text{极小值}} = f\left(\frac{5}{2}\right) = -1$, ...,

当 $x \in (k, k+1] (k \in \mathbb{Z})$ 时, $f(x) = 2^k(x-k)[x-(k+1)]$,

$$\therefore f(x)_{\text{极小值}} = f\left(k+\frac{1}{2}\right) = -2^{k-2}$$

所以, 当 $x \in (-\infty, 2]$, $f(x)_{\min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \geq -\frac{8}{9}$

当 $x \in (2, 3]$ 时, $f(x) = 2^2(x-2)(x-3)$, 令 $f(x) = 2^2(x-2)(x-3) = -\frac{8}{9}$,

$$\text{解之得: } x = \frac{7}{3} \text{ 或 } x = \frac{8}{3}$$

为使对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 $m \leq \frac{7}{3}$.

故选 B.

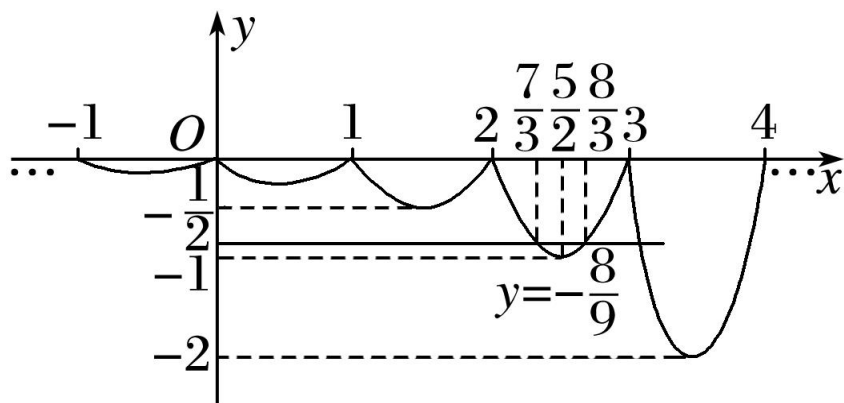
【解析二】 当 $-1 < x \leq 0$ 时, $0 < x+1 \leq 1$, 则 $f(x) = \frac{1}{2}f(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)x$; 当 $1 < x \leq 2$ 时, $0 < x-1 \leq 1$, 则 $f(x) = 2f(x-1) = 2(x-1)(x-2)$; 当 $2 < x \leq 3$ 时, $0 < x-2 \leq 1$, 则 $f(x) = 2f(x-1) = 2^2f(x-2) = 2^2(x-2)(x-3)$, ..., 由此可得

$$f(x) = \begin{cases} \dots, \\ \frac{1}{2}x(x+1), & -1 < x \leq 0, \\ x(x-1), & 0 < x \leq 1, \\ 2(x-1)(x-2), & 1 < x \leq 2, \\ 2^2(x-2)(x-3), & 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

由此作出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示. 由图

可知当 $2 < x \leq 3$ 时, 令 $2^2(x-2)(x-3) = -\frac{8}{9}$, 整理, 得 $(3x-7)(3x-8) = 0$, 解得 $x = \frac{7}{3}$ 或 $x = \frac{8}{3}$, 将这两个值标注在图中. 要使对任意 $x \in (-\infty, m]$ 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 必有 $m \leq \frac{7}{3}$, 即实数

m 的取值范围是 $\left[-\infty, \frac{7}{3}\right]$, 故选 B.



例 2 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数，且 $f(x) = \begin{cases} 1-|2x-3|, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}x\right), & x \geq 2, \end{cases}$ 则函数 $y=2xf(x)-3$ 在区间 $(1, 2015)$ 上的零点个数
为_____.

【答案】11

【解析一】由题意得当 $1 \leq x < 2$ 时， $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & 1 \leq x < \frac{3}{2}, \\ 4-2x, & \frac{3}{2} \leq x < 2. \end{cases}$ 设 $x \in [2^{n-1}, 2^n) (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则 $\frac{x}{2^{n-1}}$

$$\in [1, 2), \text{ 又 } f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x\right),$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{x}{2^{n-1}} \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \text{ 时, 则 } x \in [2^{n-1}, 3 \cdot 2^{n-2}], \text{ 所以 } f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \left[2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}x - 2\right],$$

$$\text{所以 } 2xf(x) - 3 = 2x \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left[2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}x - 2\right] - 3 = 0, \text{ 整理得 } x^2 - 2 \cdot 2^{n-2}x - 3 \cdot 2^{2n-4} = 0. \text{ 解得 } x =$$

$$3 \cdot 2^{n-2} \text{ 或 } x = -2^{n-2}. \text{ 由于 } x \in [2^{n-1}, 3 \cdot 2^{n-2}], \text{ 所以 } x = 3 \cdot 2^{n-2};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{x}{2^{n-1}} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \text{ 时, 则 } x \in (3 \cdot 2^{n-2}, 2^n), \text{ 所以 } f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \left[4 - 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}x\right], \text{ 所}$$

$$\text{以 } 2xf(x) - 3 = 2x \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left[4 - \frac{2x}{2^{n-1}}\right] - 3 = 0, \text{ 整理得 } x^2 - 4 \cdot 2^{n-2}x + 3 \cdot 2^{2n-4} = 0. \text{ 解得 } x =$$

$$3 \cdot 2^{n-2} \text{ 或 } x = 2^{n-2}. \text{ 由于 } x \in (3 \cdot 2^{n-2}, 2^n), \text{ 所以无解.}$$

综上所述， $x = 3 \cdot 2^{n-2}$. 由 $x = 3 \cdot 2^{n-2} \in (1, 2015)$ ，得 $n \leq 11$ ，所以函数 $y = 2xf(x) - 3$ 在区间 $(1, 2015)$ 上零点的个数是 11.

【解法二】由题意得当 $x \in [2^{n-1}, 2^n)$ 时，因为 $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x\right)$ ，所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

令 $g(x) = \frac{3}{2x}$. 当 $x = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$ 时, $g(x) = g\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$,

所以当 $x \in [2^{n-1}, 2^n)$ 时, $x = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$ 为 $y = 2xf(x) - 3$ 的一个零点.

下面证明: 当 $x \in [2^{n-1}, 2^n)$ 时, $y = 2xf(x) - 3$ 只有一个零点.

当 $x \in [2^{n-1}, 3 \cdot 2^{n-2}]$ 时, $y = f(x)$ 单调递增, $y = g(x)$ 单调递减, $f(3 \cdot 2^{n-2}) = g(3 \cdot 2^{n-2})$, 所以 x

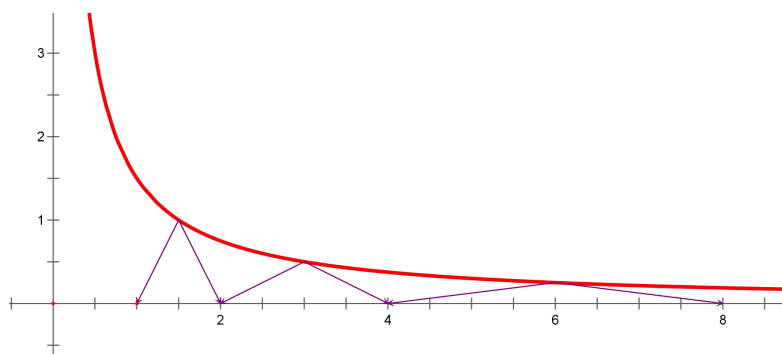
$\in [2^{n-1}, 3 \cdot 2^{n-2}]$ 时, 有一零点 $x = 3 \cdot 2^{n-2}$; 当 $x \in (3 \cdot 2^{n-2}, 2^n)$ 时, $y = f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{x}{2^{n-2}} - 3 \right]$,

$$k_1 = f'(x) = -\frac{1}{2^{2n-3}}, \quad g(x) = \frac{3}{2x}, \quad k_2 = g'(x) = -\frac{3}{2x^2} \in \left[-\frac{1}{3 \cdot 2^{2n-3}}, -\frac{3}{2^{2n+1}} \right], \text{ 所以 } k_1 < k_2. \text{ 又因为}$$

$f(3 \cdot 2^{n-2}) = g(3 \cdot 2^{n-2})$, 所以当 $x \in [2^{n-1}, 2^n)$ 时, $y = 2xf(x) - 3$ 只有一个零点. 由 $x = 3 \cdot 2^{n-2} \in (1, 2015)$, 得 $n \leq 11$, 所以函数 $y = 2xf(x) - 3$ 在区间 $(1, 2015)$ 上零点的个数是 11.

【解法三】分别作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{3}{2x}$ 的图像, 如图, 交点在 $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, ...,

$x_n = 3 \cdot 2^{n-2}$ 处取得. 由 $x = 3 \cdot 2^{n-2} \in (1, 2015)$, 得 $n \leq 11$, 所以函数 $y = 2xf(x) - 3$ 在区间 $(1, 2015)$ 上零点的个数是 11.



例 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1, & x < 2 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f(x) - mx$ 有 4 个零点, 则

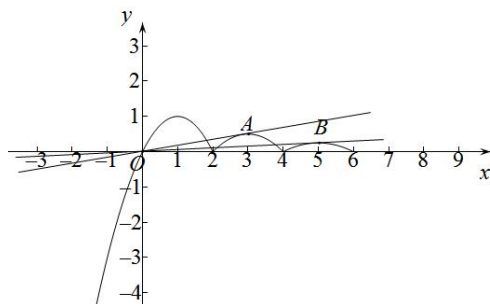
实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}, \frac{1}{6}\right)$ B. $\left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{20}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{6}\right)$

【答案】B

【解析】函数 $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1, & x < 2 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$, 函数 $F(x) = f(x) - mx$ 有 4 个零点, 即

$f(x) = mx$ 有四个不同交点. 画出函数 $f(x)$ 图像如下图所示:



由图可知, 当 $2 \leq x < 4$ 时, 设对应二次函数顶点为 A , 则 $A\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $k_{OA} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$,

当 $4 \leq x < 6$ 时, 设对应二次函数的顶点为 B , 则 $B\left(5, \frac{1}{4}\right)$, $k_{OB} = \frac{\frac{1}{4}}{5} = \frac{1}{20}$. 所以

$\frac{1}{20} < m < \frac{1}{6}$. 当直线 $y = mx$ 与 $2 \leq x < 4$ 时的函数图像相切时与函数 $f(x)$ 图像有三个交点,

此时 $\begin{cases} y = mx \\ y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$, 化简可得 $x^2 + (2m-6)x + 8 = 0$. $\Delta = (2m-6)^2 - 4 \times 8 = 0$,

解得 $m = 3 - 2\sqrt{2}$, $m = 3 + 2\sqrt{2}$ (舍); 当直线 $y = mx$ 与 $4 \leq x < 6$ 时的函数图像相切时与

函数 $f(x)$ 图像有五个交点, 此时 $\begin{cases} y = mx \\ y = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$, 化简可得

$x^2 + (4m-10)x + 24 = 0$. $\Delta = (4m-10)^2 - 4 \times 24 = 0$, 解得 $m = \frac{5}{2} - \sqrt{6}$, $m = \frac{5}{2} + \sqrt{6}$

(舍); 故当 $f(x) = mx$ 有四个不同交点时 $m \in \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$. 故选: B.

【巩固训练】

- 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 且 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0, \end{cases}$ 若方程 $f(x) = x + a$ 有两个不同实根, 则 a 的取值范围为_____.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x - [x], & x \geq 0, \\ f(x+1), & x < 0, \end{cases}$ 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 若直线 $y = k(x+1)$ ($k > 0$) 与函数 $y = f(x)$ 的图象恰有三个不同的交点, 则实数 k 的取值范围是_____.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ f(x-1) + 1, & x > 0 \end{cases}$, 当 $x \in [0, 100]$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = x - \frac{1}{5}$ 的所有解的和为_____.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1|, & x < 2, \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x \geq 2, \end{cases}$, 则方程 $xf(x) - 1 = 0$ 根的个数为_____.

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+\pi) = 2f(x)$, 当 $x \in [0, \pi)$ 时, $f(x) = -\sin x$. 若存在 $x_0 \in (-\infty, m]$, 使得 $f(x_0) \leq -4\sqrt{3}$, 则 m 的取值范围为_____.

6. 已知函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2^{|x-1|}-1, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 2, \end{cases}$ 那么函数 $g(x) = xf(x) - 1$ 在 $[-7, +\infty)$ 上的所有零点之和为_____.

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, 当 $x > 0$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} 2^{|x-1|} - 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}, \text{ 则函数 } g(x) = 4f(x) - 1 \text{ 的零点个数为 ()}$$

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+4| - 2, & x < -2 \\ 2f(x-4), & x \geq -2 \end{cases}$, 给出下列命题, 其中正确的有 ()

A. $f(2020) = 2^{507}$;

B. 方程 $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$ 有四个实根;

C. 当 $x \in [6, 10)$ 时, $f(x) = 8|x-8| - 16$;

D. 若函数 $y = f(x) - t$ 在 $(-\infty, 10)$ 上有 8 个零点 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$, 则 $\sum_{i=1}^8 x_i f(x_i)$ 的取值范围为 $(-16, 0)$.

9. 定义在 R 上的函数 $f(x)$, 恒有 $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 当 $x \in [0, \pi)$ 时, $f(x) = \sin x$,

若 $\forall x \in (-\infty, a]$, 恒有 $f(x) < 4\sqrt{3}$, 则 a 的取值集合为_____.

10. 已知函数 $f(x)$ 满足当 $x \leq 0$ 时, $2f(x-2) = f(x)$, 且当 $x \in (-2, 0]$ 时, $f(x) = |x+1| - 1$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点恰好有 3 对, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(625, +\infty)$ B. $(4, 64)$ C. $(9, 625)$ D. $(9, 64)$

11. 定义在 R 上函数满足 $f(x+1) = \frac{1}{2}f(x)$, 且当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = 1 - |2x-1|$. 则使得

$f(x) \leq \frac{1}{16}$ 在 $[m, +\infty)$ 上恒成立的 m 的最小值是 ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{13}{4}$ D. $\frac{15}{4}$

【答案或提示】

1. 【答案】 $(-\infty, 1)$

【解析】 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^{-x} - 1$,

$0 < x \leq 1$ 时, $-1 < x-1 \leq 0$,

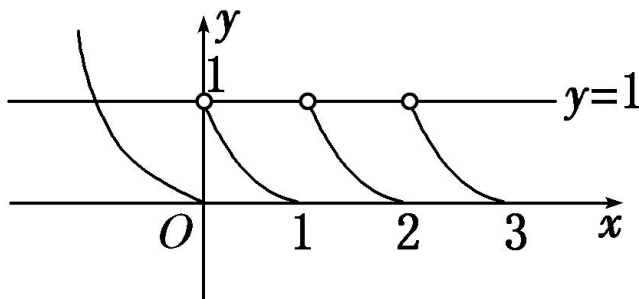
$f(x) = f(x-1) = 2^{-(x-1)} - 1$.

故 $x > 0$ 时, $f(x)$ 是周期函数,

如图所示.

若方程 $f(x) = x + a$ 有两个不同的实数根, 则函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = x + a$ 有两个不同交点,

故 $a < 1$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

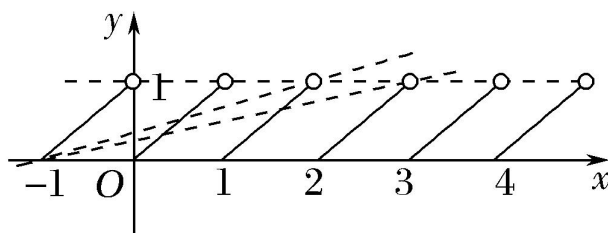


2. 【答案】 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

【解析】根据 $[x]$ 表示的意义可知, 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f(x) = x$, 当 $1 \leq x < 2$ 时, $f(x) = x-1$, 当 $2 \leq x < 3$ 时, $f(x) = x-2$, 以此类推, 当 $k \leq x < k+1$ 时, $f(x) = x-k$, $k \in \mathbf{Z}$, 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f(x) = -x+1$. 作出函数 $f(x)$ 的图象如图. 直线 $y = -k(x+1)$ 过点 $(-1, 0)$. 当直线经过点 $(2, 1)$ 时恰

有三个交点，当直线经过点(2, 1)时恰好有两个交点，在这两条直线之间时有三个交点，故

$$k \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right).$$



3. 【答案】10000

【提示】当 $0 < x \leq 1$ 时， $x-1 \leq 0$ ， $f(x) = f(x-1) + 1 = x^2$ ，此时 $f(x) = x - \frac{1}{5}$ 的两根之和是 1

当 $1 < x \leq 2$ 时， $0 < x-1 \leq 1$ ， $f(x) = f(x-1) + 1 = (x-1)^2 + 1$ ，此时 $f(x) = x - \frac{1}{5}$ 的两根之和是 3

当 $2 < x \leq 3$ 时， $1 < x-1 \leq 2$ ， $f(x) = f(x-1) + 1 = (x-2)^2 + 2$ ，

此时 $f(x) = x - \frac{1}{5}$ 的两根之和是 5

以此类推，当 $99 < x \leq 100$ 时， $f(x) = x - \frac{1}{5}$ 的两根之和是 199

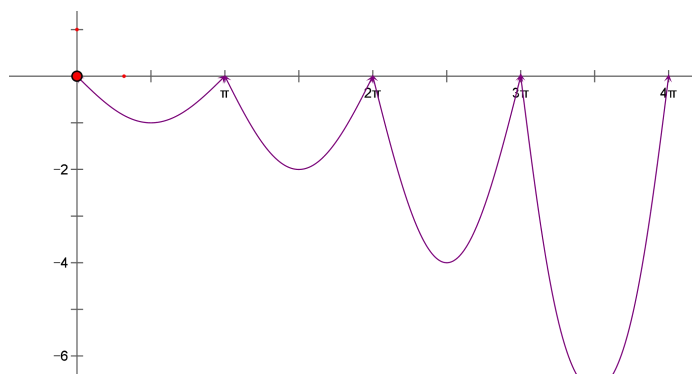
所以方程 $f(x) = x - \frac{1}{5}$ 的所有解的和为 $1+3+5+\cdots+199=10000$.

4. 【答案】6

【提示】转化为两函数 $y = f(x)$ 、 $y = \frac{1}{x}$ 交点个数.

5. 【答案】 $\left[\frac{10\pi}{3}, +\infty \right)$

【解析】根据题意作出函数图像，如下：



故 $m \geq \frac{10\pi}{3}$.

6. 【答案】8

【提示】转化为两函数 $y = f(x)$ 、 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[-7, +\infty)$ 上的所有交点横坐标和的问题，两函数均为奇函数，故在 $[-7, 7]$ 上横坐标和为 0，只需考虑 $x \in (-7, +\infty)$ 即可，利用递推关系作出图象.

7. 【答案】D

【分析】由 $f(x)$ 为偶函数可得：只需作出正半轴的图像，再利用对称性作另一半图像即可，

当 $x \in (0, 2]$ 时，可以利用 $y = 2^x$ 利用图像变换作出图像， $x > 2$ 时， $f(x) = \frac{1}{2}f(x-2)$ ，

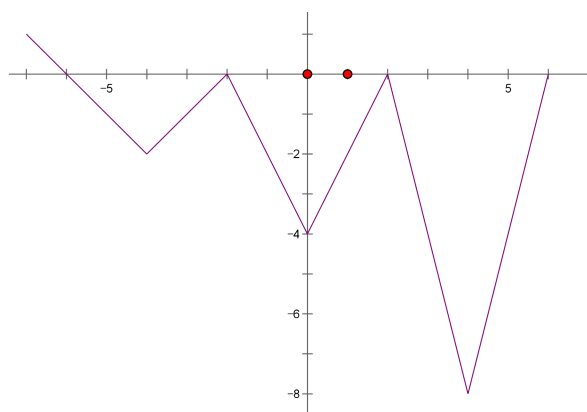
即自变量差 2 个单位，函数值折半，进而可作出 $(2, 4]$ ， $(4, 6]$ ，.....的图像， $g(x)$ 的零点

个数即为 $f(x) = \frac{1}{4}$ 根的个数，即 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{4}$ 的交点个数，观察图像在 $x > 0$ 时，有 5

个交点，根据对称性可得 $x < 0$ 时，也有 5 个交点. 共计 10 个交点

8. 【答案】BC

【提示】利用如下图.



9. 【答案】 $a < \frac{10\pi}{3}$

10. 【答案】C

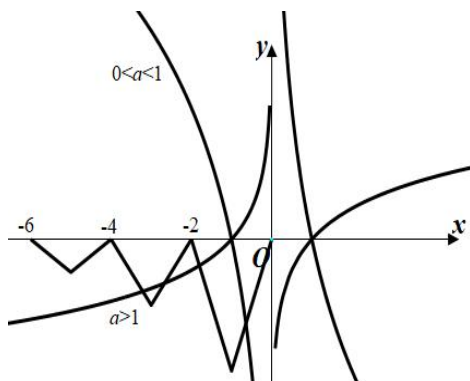
【分析】先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象，

分类利用图像列出有 3 个交点时满足的条件，解之即可.

【解析】先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象，

如图所示，当 $0 < a < 1$ 时，对称后的图象不可能与 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 的图象有 3 个交点；

当 $a > 1$ 时，要使函数 $f(x)$ 关于原点对称后的图象与所作的图象有 3 个交点，



$$\begin{cases} a > 1 \\ -\log_a 3 > -\frac{1}{2} \\ -\log_a 5 < -\frac{1}{4} \end{cases}, \text{解得 } 9 < a < 625. \text{故选: C.}$$

11. 【答案】D

【分析】计算 $f(x) = \frac{1}{2^n} [1 - |2x - (2n+1)|]$ ，画出图像，计算 $f(x) = \frac{1}{16}$ ，解得 $x = \frac{15}{4}$ ，得到答案.

【解析】根据题设可知，当 $x \in [1, 2)$ 时， $x-1 \in [0, 1)$ ，故 $f(x) = \frac{1}{2} f(x-1) = \frac{1}{2} (1 - |2x-3|)$ ，

同理可得：在区间 $[n, n+1) (n \in \mathbb{Z})$ 上， $f(x) = \frac{1}{2^n} [1 - |2x - (2n+1)|] \leq \frac{1}{2^n}$ ，

所以当 $n \geq 4$ 时， $f(x) \leq \frac{1}{16}$ 。

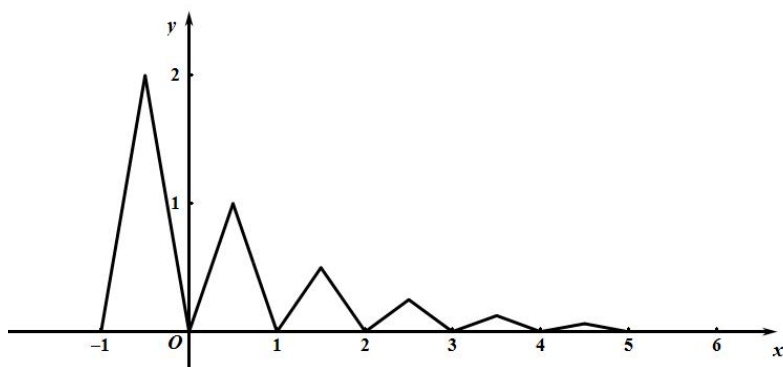
作函数 $y = f(x)$ 的图像，如图所示。

在 $[\frac{7}{2}, 4)$ 上，由

$$f(x) = \frac{1}{8} [1 - |2x - 7|] = \frac{1}{16}, \text{得 } x = \frac{15}{4}.$$

由图象可知当 $x \geq \frac{15}{4}$ 时， $f(x) \leq \frac{1}{16}$ 。

故选：D。



专题 09 三次函数的对称性、穿根法作图象

【方法点拨】

对于三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (其中 $a \neq 0$)，给出以下常用结论：

(1) 当 $a > 0$, $b^2 - 3ac > 0$ 时，三次函数的图象为 N 字型；当 $a < 0$, $b^2 - 3ac > 0$ 时，三次函数的图象为反 N 字型；当 $a > 0$, $b^2 - 3ac \leq 0$ 时，单调递增，当 $a < 0$, $b^2 - 3ac \leq 0$ 时，单调递减。

(2) 三次函数有对称中心 $(x_0, f(x_0))$, $f''(x_0) = 0$.

【典型题示例】

例 1 (2021 · 全国乙卷 · 理 10) 设 $a \neq 0$ ，若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则 ()

A. $a < b$

B. $a > b$

C. $ab < a^2$

D.

$ab > a^2$

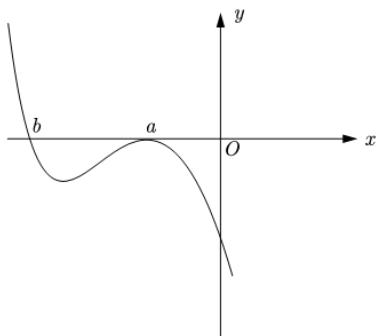
【答案】D

【分析】先考虑函数的零点情况，注意零点左右附近函数值是否变号，结合极大值点的性质，对 a 进行分类讨论，画出 $f(x)$ 图象，即可得到 a, b 所满足的关系，由此确定正确选项。

【解析】若 $a = b$ ，则 $f(x) = a(x-a)^3$ 为单调函数，无极值点，不符合题意，故 $a \neq b$ 。

$\therefore f(x)$ 有 $x = a$ 和 $x = b$ 两个不同零点，且在 $x = a$ 左右附近是不变号，在 $x = b$ 左右附近是变号的。依题意， $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点， \therefore 在 $x = a$ 左右附近都是小于零的。

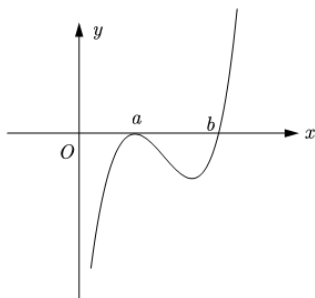
当 $a < 0$ 时，由 $x > b$ ， $f(x) \leq 0$ ，画出 $f(x)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b < a$, $a < 0$,

故 $ab > a^2$.

当 $a > 0$ 时，由 $x > b$ 时， $f(x) > 0$ ，画出 $f(x)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b > a$ ， $a > 0$ ，故 $ab > a^2$ 。

综上所述， $ab > a^2$ 成立。

故选：D

例 2 若函数 $f(x) = x^2|x - a|$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是_____。

【答案】 $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

【解析】 $f(x) = x^2|x - a| = \begin{cases} x^2(x - a), & x \geq a \\ -x^2(x - a), & x < a \end{cases}$ 。

函数 $f(x)$ 的一个极值点是 $x = 0$ ，所以以 0 为界与 a 比较，进行分类讨论。

①当 $a > 0$ 时，如图一，由 $f'(x) = -3x^2 + 2ax = 0$ 得， $x = 0$ 或 $x = \frac{2a}{3}$ ，欲使函数

$f(x) = x^2|x - a|$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增，只需 $x = \frac{2a}{3} \geq 2$ ，即 $a \geq 3$ 。

②当 $a \leq 0$ 时，如图二， $f(x) = x^2|x - a|$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增，满足题意。

综上知，实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ 。



点评:

作三次函数 $f(x)=a(x-x_1)^2(x-x_2)$ (其中 $a \neq 0, x_1 \neq x_2$) 示意图的方法要点有二:

(1) 当 $a > 0$ 时, 三次函数的图象为 N 字型 (最右区间增); 当 $a < 0$ 时, 三次函数的图象为反 N 字型 (最右区间减).

(2) x_1 既是函数的零点, 又是函数的极值点, 从形上看, 函数图象此时与 x 轴相切 (或称“奇穿偶回”, 即 x_1, x_2 都是函数的零点, x_1 是二重根, 图象到此不穿过 x 轴, 即“回”, 这种作函数图象的方法称为“穿根法”).

例 3 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$ 在 $x \geq 0$ 上恒成立, 则 ()

A. $a < 0$

B. $a > 0$

C. $b < 0$

D. $b > 0$

【答案】C

【分析】本题的实质是考察三次函数的图象, 设 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-2a-b)$, 欲满足题意, 从形上看则必须在 $x \geq 0$ 时有两个重合的零点才可以, 对 a 分 $a > 0$ 与 $a < 0$ 两种情况讨论, 结合三次函数的性质分析即可得到答案.

【解析】因为 $ab \neq 0$, 所以 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 设 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-2a-b)$, 则 $f(x)$ 的零点为 $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = 2a+b$

当 $a > 0$ 时, 则 $x_2 < x_3$, $x_1 > 0$, 要使 $f(x) \geq 0$, 必有 $2a+b = a$, 且 $b < 0$, 即 $b = -a$, 且 $b < 0$, 所以 $b < 0$;

当 $a < 0$ 时, 则 $x_2 > x_3$, $x_1 < 0$, 要使 $f(x) \geq 0$, 必有 $b < 0$.

综上一定有 $b < 0$.

故选: C

例 4 已知 $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$, $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$, 那么 $a+b$ 的值是_____.

【答案】2

【分析】本题的难点在于发现函数的对称性、变形为“结构相同”后逆用函数的单调性.

【解析】由题意知 $a^3 - 3a^2 + 5a - 3 = -2$, $b^3 - 3b^2 + 5b - 3 = 2$,

设 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, 则 $f(a) = -2$, $f(b) = 2$.

因为 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1, 0)$, 所以 $a+b=2$.

【巩固训练】

1. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ 图象的对称中心为_____.
2. 已知直线 l 与曲线 $y = x^3 - x + 1$ 有三个不同的交点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 且 $|AB| = |AC|$, 则 $\sum_{i=1}^3 (x_i + y_i) =$ _____.
3. 若函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1 (a \in \mathbf{R})$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值的和为_____.
4. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x) = ax(x+2)(x-a) (a \neq 0)$, 若函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取到极小值, 则实数 a 的取值范围是_____.
5. 若函数 $f(x) = (x-2)^2 |x-a|$ 在区间 $[2, 4]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.
6. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $x > 0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1) \geq 0$, 则 $a =$ _____.
7. 已知函数 $f(x) = x|x^2-3|$, $x \in [0, m]$, 其中 $m \in \mathbf{R}$, 且 $m > 0$, 如果函数 $f(x)$ 的值域是 $[0, 2]$, 则实数 m 的取值范围为_____.
8. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 |x-a|$, 则函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值是_____.
9. 已知函数 $f(x) = x|x^2-12|$ 的定义域是 $[0, m]$, 值域是 $[0, am^2]$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案或提示】

1. 【答案】 $(1, 2)$

【解析一】由题意设对称中心的坐标为 (a, b) , 则有 $2b = f(a+x) + f(a-x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立, 代入函数解析式得,

$$2b = (a+x)^3 - 3(a+x)^2 + 5(a+x) - 1 + (a-x)^3 - 3(a-x)^2 + 5(a-x) - 1$$

整理得到：

$$2b = (a+x)^3 - 3(a+x)^2 + 5(a+x) - 1 + (a-x)^3 - 3(a-x)^2 + 5(a-x) - 1,$$

整理得到 $2b = (6a-6)x^2 + 2a^3 - 6a^2 + 10a - 2 = 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立，

$$\text{所以} \begin{cases} 6a-6=0 \\ 2a^3-6a^2+10a-2=2b \end{cases}, \text{ 所以 } a=1, b=2.$$

即对称中心 $(1, 2)$.

【解析二】 $\because f''(x) = 6x - 6$ 令 $f''(x) = 6x - 6 = 0$ 解得 $x = 1$

将 $x = 1$ 代入得 $f(x)$ 得 $f(1) = 2$ \therefore 对称中心 $(1, 2)$.

2. 【答案】 3

【解析】由题意，函数 $y = x^3 - x$ 是奇函数，则函数 $y = x^3 - x$ 的图象关于原点对称，

所以函数 $y = x^3 - x + 1$ 的函数图象关于点 $(0, 1)$ 对称，

因为直线 l 与曲线 $y = x^3 - x + 1$ 有三个不同的交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，

且 $|AB| = |AC|$ ，

所以点 A 为函数的对称点，即 $A(0, 1)$ ，且 B, C 两点关于点 $A(0, 1)$ 对称，

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 3$ ，于是 $\sum_{i=1}^3 (x_i + y_i) = 3$.

3. 【答案】 -3

【解析】因为 $f(0) = 1$ ，且由 $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 6x(x - \frac{1}{3}a) = 0$ 得： $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{3}a$

所以函数 $f(x)$ 的图象是增-减-增型，且在 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{3}a$ 处取得极值

欲使函数在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点，当且仅当
$$\begin{cases} f(\frac{a}{3}) = 2 \cdot (\frac{a}{3})^3 - a \cdot (\frac{a}{3})^2 + 1 = 0 \\ \frac{a}{3} > 0 \end{cases}$$

解之得 $a = 3$.

当 $x \in [-1, 0]$ 时， $f(x)$ 增； $x \in [0, 1]$ 时， $f(x)$ 减，

故 $f(x)_{\max} = f(0) = 1$ ， $f(x)_{\min} = \min\{f(1), f(-1)\} = -4$ ，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为 -3 .

4. 【答案】 $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

5. 【答案】 $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$

6. 【答案】 $a = \frac{3}{2}$

7. 【答案】 $1 \leq m \leq 2$

8. 【答案】 $m = \begin{cases} 1-a, & \text{当 } a \leq 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 1 < a \leq 2 \text{ 时;} \\ 4(a-2), & \text{当 } 2 < a \leq \frac{7}{3} \text{ 时;} \\ a-1, & \text{当 } a > \frac{7}{3} \text{ 时;} \end{cases}$

【解析】 设此最小值为 m .

①当 $a \leq 1$ 时, 在区间 $[1,2]$ 上, $f(x) = x^3 - ax^2$.

因为: $f'(x) = 3x^2 - 2ax = 3x(x - \frac{2}{3}a) > 0, x \in (1,2)$,

则 $f(x)$ 是区间 $[1,2]$ 上的增函数, 所以 $m=f(1)=1-a$.

②当 $1 < a \leq 2$ 时, 在区间 $[1,2]$ 上, $f(x) = x^2|x-a| \geq 0$, 由 $f(a) = 0$ 知: $m = f(a) = 0$.

③当 $a > 2$ 时, 在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = ax^2 - x^3$. $f'(x) = 2ax - 3x^2 = 3x(\frac{2}{3}a - x)$.

若 $a \geq 3$, 在区间 $(1, 2)$ 内 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 为区间 $[1, 2]$ 上的增函数, 由此得: $m=f(1)=a-1$.

若 $2 < a < 3$, 则 $1 < \frac{2}{3}a < 2$

当 $1 < x < \frac{2}{3}a$ 时, $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 为区间 $[1, \frac{2}{3}a]$ 上的增函数;

当 $\frac{2}{3} < x < 2$ 时, 从而 $f'(x)$ 为区间 $[\frac{2}{3}, 2]$ 上的减函数.

因此, 当 $2 < a < 3$ 时, $m=f(1)=a-1$ 或 $m=f(2)=4(a-2)$.

当 $2 < a \leq \frac{7}{3}$ 时, $4(a-2) \leq a-1$, 故 $m = 4(a-2)$;

当 $\frac{7}{3} < a < 3$ 时, $a-1 < 4(a-2)$, 故 $m = a-1$.

综上所述, 所求函数的最小值 $m = \begin{cases} 1-a, & \text{当 } a \leq 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 1 < a \leq 2 \text{ 时;} \\ 4(a-2), & \text{当 } 2 < a \leq \frac{7}{3} \text{ 时;} \\ a-1, & \text{当 } a > \frac{7}{3} \text{ 时;} \end{cases}$

9. 【答案】 $a \geq 1$

【解析一】易知: 当 $0 \leq x \leq 2$, $f(x)$ 增; 当 $2 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, $f(x)$ 减; 当 $x \geq 2\sqrt{3}$, $f(x)$ 增, 且 $f(2) = f(4) = 16$.

① 当 $0 < m \leq 2$ 时, $f(x)$ $[0, m]$ 增

$$\therefore -m(m^2 - 12) = am^2, \quad a = -m + \frac{12}{m} \in [4, +\infty);$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 2 < m \leq 4 \text{ 时, } am^2 = 16, \quad a = \frac{16}{m^2} \in [1, 4);$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } m \geq 4 \text{ 时, } m(m^2 - 12) = am^2, \quad a = m - \frac{12}{m} \in (1, +\infty);$$

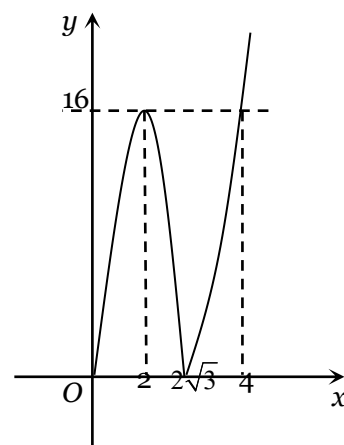
综上, $a \geq 1$.

【解析二】仅考虑函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的情况, 可知

$$f(x) = \begin{cases} 12x - x^3, & x < 2\sqrt{3}, \\ x^3 - 12x, & x \geq 2\sqrt{3}. \end{cases} \quad \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x=2 \text{ 时, 取得极大值 } 16.$$

令 $x^3 - 12x = 16$, 解得, $x = 4$.

作出函数的图象 (如右图所示).



函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, m]$ ，值域为 $[0, am^2]$ ，分为以下情况考虑：（1）当 $0 < m < 2$ 时，函数的值域为 $[0, m(12 - m^2)]$ ，有 $m(12 - m^2) = am^2$ ，所以 $a = \frac{12}{m} - m$ ，因为 $0 < m < 2$ ，所以 $a > 4$ ；（2）当 $2 \leq m \leq 4$ 时，函数的值域为 $[0, 16]$ ，有 $am^2 = 16$ ，所以 $a = \frac{16}{m^2}$ ，因为 $2 \leq m \leq 4$ ，所以 $1 \leq a \leq 4$ ；（3）当 $m > 4$ 时，函数的值域为 $[0, m(m^2 - 12)]$ ，有 $m(m^2 - 12) = am^2$ ，所以 $a = m - \frac{12}{m}$ ，因为 $m > 4$ ，所以 $a > 1$ ；综上所述，实数 a 的取值范围是 $a \geq 1$ 。

专题 10 以分段函数为背景的解不等式

【方法点拨】

1. 遇绝对值往往直接转化为分段函数解决。
2. 以分段函数为背景的解不等式，注意对分类后结果的处理，一般“类中取交、类后取并”（即分类过程中，不等式取交集，而最终结果应取各类之并集）。

【典型题示例】

例 1 （2021 · 全国乙卷 · 理 23 改编）已知函数 $f(x) = |x - a| + |x + 3|$ 。（1）当 $a = 1$ 时，不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集是_____；（2）若 $f(x) > -a$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

【答案】（1） $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ 。（2） $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 。

【分析】（1）利用绝对值的几何意义求得不等式的解集。

（2）利用绝对值不等式化简 $f(x) > -a$ ，由此求得 a 的取值范围。

【解析】（1）当 $a = 1$ 时， $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ ， $|x - 1| + |x + 3|$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和，

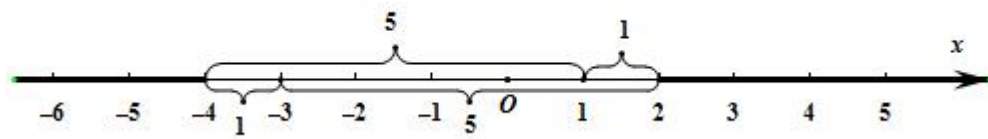
则 $f(x) \geq 6$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和不小于 6，

当 $x = -4$ 或 $x = 2$ 时所对应的数轴上的点到 1, -3 所对应的点距离之和等于 6，

• 数轴上到 1, -3 所对应的点距离之和等于大于等于 6 得到所对应的坐标的范围是 $x \leq -4$ 或

$$x \geq 2,$$

所以 $f(x) \geq 6$ 的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.



(2) 依题意 $f(x) > -a$, 即 $|x-a| + |x+3| > -a$ 恒成立,

$$|x-a| + |x+3| = |a-x| + |x+3| \geq |a+3|,$$

当且仅当 $(a-x)(x+3) \geq 0$ 时取等号, $\therefore f(x)_{\min} = |a+3|$, 故 $|a+3| > -a$,

所以 $a+3 > -a$ 或 $a+3 < a$,

$$\text{解得 } a > -\frac{3}{2}.$$

点评:

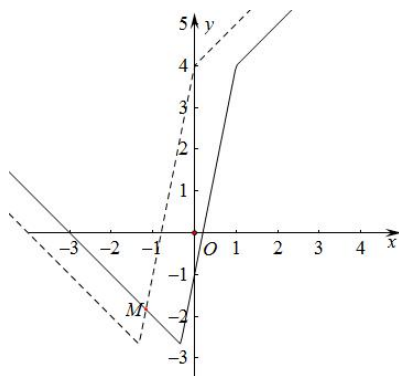
解绝对值不等式的方法有零点分段法、几何意义法. 解含有两个绝对值, 且其中的 x 的系数相等时, 可以考虑利用数轴上绝对值的几何意义求解; 利用绝对值三角不等式求最值也是常见的问题, 注意表述取等号的条件.

例 2 已知函数 $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$, 则不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集是_____.

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$.

【分析】 在同一直角坐标系内作出函数 $f(x)$ 、 $f(x+1)$ 的图象, 根据图象即可解出.

【解析】 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位, 可得函数 $f(x+1)$ 的图象, 如图所示:



由 $-x-3=5(x+1)-1$ ，解得 $x=-\frac{7}{6}$ 。

所以不等式的解集为 $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$ 。

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\leq 2 \\ \frac{1}{2}x-1, & x>2 \end{cases}$ ，则关于 x 的不等式 $f(1-x)<f(2-x)$ 的解集为_____。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x\leq 0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是()

A. $(-\infty, -1]$

B. $(0, +\infty)$

C. $(-1, 0)$

D. $(-\infty, 0)$

3. 已知 $f(x)=(x+1)|x|-3x$ 。若对于任意 $x\in\mathbf{R}$ ，总有 $f(x)\leq f(x+a)$ 恒成立，则常数 a 的最小值是_____。

4. 已知函数 $f(x)=x(1-a|x|)+1(a>0)$ ，若 $f(x+a)\leq f(x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____。

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，当 $x>0$ 时， $f(x)=x^2-4x$ ，则不等式 $f(x)>x$ 的解集为_____。

6. 已知函数 $f(x)=x|x-2|$ ，则不等式 $f(\sqrt{2}-x)\leq f(1)$ 的解集为_____。

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时， $f(x)=\frac{1}{2}(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2)$ 。若对于任意 $x\in\mathbf{R}$ ，有 $f(x-1)\leq f(x)$ ，则实数 a 的取值范围为_____。

【答案或提示】

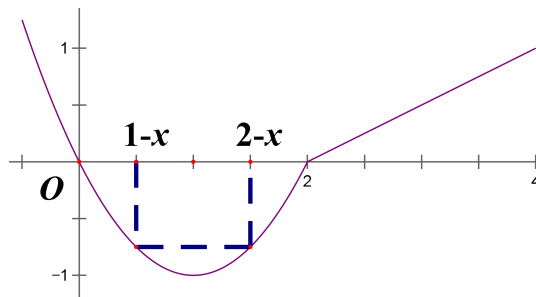
1. 【答案】 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

【分析】作出函数 $f(x)$ 图象，考察动区间 $[1-x, 2-x]$ 间图象的单调性，易得，当 $1-x=\frac{1}{2}$

即 $x=\frac{1}{2}$ 时， $f(1-x)=f(2-x)$ ，此即为“临界值”，而动区间右移时满足题意，故

$$1-x > \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}$$

所以不等式 $f(1-x) < f(2-x)$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.



2. 【答案】 D

【解析】 法一：分类讨论法

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \begin{cases} x+1 \leq 0, \\ 2x \leq 0, \end{cases} \quad \text{即 } x \leq -1 \text{ 时,}$$

$$f(x+1) < f(2x), \text{ 即为 } 2^{-(x+1)} < 2^{-2x},$$

$$\text{即 } -(x+1) < -2x, \text{ 解得 } x < 1.$$

因此不等式的解集为 $(-\infty, -1]$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \begin{cases} x+1 \leq 0, \\ 2x > 0 \end{cases} \quad \text{时, 不等式组无解.}$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } \begin{cases} x+1 > 0, \\ 2x \leq 0, \end{cases} \quad \text{即 } -1 < x \leq 0 \text{ 时,}$$

$$f(x+1) < f(2x), \text{ 即为 } 1 < 2^{-2x}, \text{ 解得 } x < 0.$$

因此不等式的解集为 $(-1, 0)$.

$$\textcircled{4} \text{ 当 } \begin{cases} x+1 > 0, \\ 2x > 0, \end{cases} \quad \text{即 } x > 0 \text{ 时, } f(x+1) = 1, f(2x) = 1, \text{ 不合题意.}$$

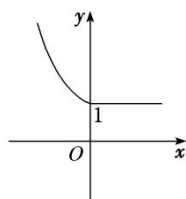
综上, 不等式 $f(x+1) < f(2x)$ 的解集为 $(-\infty, 0)$.

法二：数形结合法

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

\therefore 函数 $f(x)$ 的图象如图所示.

结合图象知, 要使 $f(x+1) < f(2x)$,

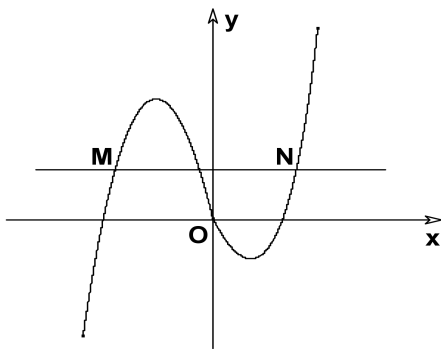


$$\text{则需} \begin{cases} x+1 < 0, \\ 2x < 0, \\ 2x < x+1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x < 0, \end{cases}$$

$\therefore x < 0$, 故选 D.

3. 【答案】 $3 + \sqrt{10}$.

【提示】 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0, \\ -x^2 - 4x, & x < 0, \end{cases}$, 作出函数 $f(x)$ 的图象得:



作平行于 x 轴的直线 l 与 $f(x)$ 图象有三个交点, 设最左边与最右边的交点分别为 M , N , 如图所示, 则 a 的最小值即为线段 MN 长的最大值. 设直线 l 的方程为 $y=t$,

$$\begin{aligned} \text{可得 } MN &= 3 + \sqrt{1+t} + \sqrt{4-t} = 3 + \sqrt{(\sqrt{1+t} + \sqrt{4-t})^2} = 3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{(1+t)(4-t)}} \\ &\leq 3 + \sqrt{5 + 1 + t + 4 - t} = 3 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

所以, a 的最小值是 $3 + \sqrt{10}$

【说明】

1. 本题的难点是要能结合函数的图象发现常数 a 的最小值即为线段 MN 长的最大值.
2. 本题也可使用导数知识解决.

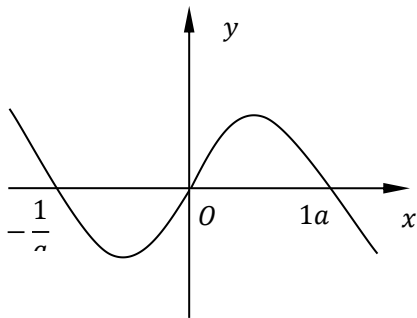
4. 【答案】 $[\sqrt{2}, +\infty)$

【解析】 设 $g(x) = x(1 - a|x|) (a > 0)$, 则 $f(x+a) \leq f(x) \Leftrightarrow g(x+a) \leq g(x)$ 对任意的

$x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 意即将 $g(x)$ 图象上的每一点向左平移 a 个单位后, 所得到的图象不可能在 $g(x)$ 的上方.

$$\text{因为 } g(x) = x(1 - a|x|) = \begin{cases} x(1 - ax), & x \geq 0 \\ x(1 + ax), & x < 0 \end{cases}$$

如图, 由图象得, $a \geq \frac{2}{a}$, 又因为 $a > 0$, 故 $a \geq \sqrt{2}$.



5. 【答案】

$$(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$$

【提示】利用奇函数，求出 $x < 0$ 时， $f(x) = -x^2 - 4x$ ，代入分段求出，或直接使用图象，数形结合求出。

6. 【答案】 $[-1, +\infty)$

【提示】去绝对值，分段求出，或直接使用图象，数形结合求出。

7. 【答案】 $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$.

专题 11 双变量方程类存在性、任意性问题

【方法点拨】

解决双变量“存在性或任意性”问题关键就是将含有全称量词和存在量词的条件“等价转化”为两个函数值域之间的关系(或两个函数最值之间的关系)，目的在于培养学生的逻辑推理素养和良好的数学思维品质。

若 $f(x)$, $g(x)$ 的值域分别为 A , B ，则有：

① $\forall x_1 \in D, \exists x_2 \in E$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，则 $A \subseteq B$ ；

② $\exists x_1 \in D, \exists x_2 \in E$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，则 $A \cap B \neq \emptyset$ 。

【典型题示例】

例 1 已知函数 $f(x) = -x^2 - 6x - 3$ ， $g(x) = \frac{e^x + ex}{ex}$ 实数 m ， n 满足 $m < n < 0$ ，若

$\forall x_1 \in [m, n], \exists x_2 \in (0, +\infty)$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，则 $n - m$ 的最大值为 ()

A. 4

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{5}$

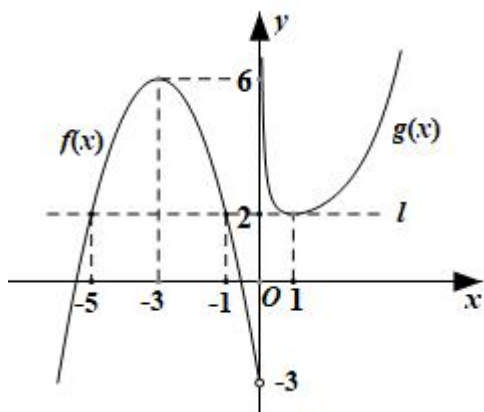
【答案】A

【解析】 $g'(x) = \left(\frac{e^x}{ex} + 1 \right)' = \frac{e^x(x-1)}{ex^2}$ ，则当 $0 < x < 1$ 时， $g'(x) < 0$ ；当 $x > 1$ 时，

$g'(x) > 0$ ， $\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 2$. $f(x) = -(x+3)^2 + 6 \leq 6$ ，作函数 $y = f(x)$ 的图象

如图所示，当 $f(x) = 2$ 时，方程两根分别为 -5 和 -1 ，则 $n-m$ 的最大值为 $-1 - (-5) = 4$.

故选 A.



例 2 已知函数 $g(x) = a - x^2 \left(\frac{1}{e} \leq x \leq e, e \text{ 为自然对数的底数} \right)$ 与 $h(x) = 2\ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $[1, e^2 - 2]$

【解析】 函数 $g(x) = a - x^2 \left(\frac{1}{e} \leq x \leq e, e \text{ 为自然对数的底数} \right)$

与 $h(x) = 2\ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点，等价于 $a - x^2 = -2\ln x$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e \right]$ 上有解，即

$-a = 2\ln x - x^2$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e \right]$ 上有解.

设 $f(x) = 2\ln x - x^2, x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$,

则 $f'(x) = \frac{2(1+x)(1-x)}{x}$.

$\therefore f'(x) = 0$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e \right]$ 上有唯一的零点 $x = 1$.

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$ 上单调递增，在 $(1, e]$ 上单调递减.

$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = -1$,

又 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -2 - \frac{1}{e^2}$, $f(e) = 2 - e^2$, 知 $f(e) < f\left(\frac{1}{e}\right)$.

\therefore 函数 $f(x)$ 的值域为 $[2 - e^2, -1]$.

故方程 $-a = 2\ln x - x^2$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有解等价于 $2 - e^2 \leq -a \leq -1$, 即 $1 \leq a \leq e^2 - 2$,
 \therefore 实数 a 的取值范围是 $[1, e^2 - 2]$.

例 3 已知 e 为自然对数的底数, 若对任意的 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, 总存在唯一的 $y \in [-1, 2]$, 使得 $\ln x - x + 1 + a = y^2 e^y$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $\left[\frac{2}{e}, 4e^2\right]$

【分析】 令 $f(x) = \ln x - x + 1 + a$, $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, $g(x) = x^2 e^x, x \in [-1, 2]$. 利用导数可求前者的值域和后者的单调性, 最后根据方程的解的唯一性得到实数 a 的取值范围.

【解析】 令 $f(x) = \ln x - x + 1 + a$, $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, $g(x) = x^2 e^x, x \in [-1, 2]$.

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 为增函数,

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的值域为 $\left[a - \frac{1}{e}, a\right]$.

又当 $x \in (-1, 0)$ 时, $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x < 0$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上为减函数, 在 $[0, 2]$ 上为增函数.

令 $t = f(x)$, 因为对任意的 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, 总存在唯一的 $y \in [-1, 2]$, 使得

$\ln x - x + 1 + a = y^2 e^y$ 成立,

故对直线 $s = t$ 与函数 $s = g(y)$ 的图象有且只要一个公共点,

而 $g(-1) = \frac{1}{e}, g(0) = 0, g(2) = 4e^2$, 且 $g(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上为减函数, 在 $[0, 2]$ 上为增函数,

故 $\frac{1}{e} < t \leq 4e^2$, 所以 $\begin{cases} a - \frac{1}{e} > \frac{1}{e} \\ a \leq 4e^2 \end{cases}$, 即 $\frac{2}{e} < a \leq 4e^2$.

故答案为: $\left(\frac{2}{e}, 4e^2\right]$.

例4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$ $g(x) = e^x + ax - 2 (a \in \mathbf{R})$, 若存在 x_1 ,

$x_2 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \geq 2 - e$

【解析】 当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单调递减, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{6}$;

当 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ 时, $f'(x) = x^2 - \frac{1}{4} \geq 0$ 成立,

$f(x)$ 单调递增, $\frac{1}{6} < f(x) \leq \frac{1}{3}$,

所以 $f(x)$ 的值域为 $A = \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

设 $g(x)$ 的值域为 B , 因为存在 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立,

所以 $B \cap A \neq \emptyset$. $g(x) = e^x + ax - 2$, $g'(x) = e^x + a$.

① $a \geq -1$, 任意 $x \in [0, 1]$, $g'(x) \geq 0$ 成立, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(0) = -1$, $g(x)_{\max} = g(1) = e + a - 2$, $B = [-1, e + a - 2]$.

因为 $B \cap A \neq \emptyset$, 所以 $e + a - 2 \geq 0$, $a \geq 2 - e$;

② $a \leq -e$, 任意 $x \in [0, 1]$, $g'(x) \leq 0$ 成立, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调递减,

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = e + a - 2$, $g(x)_{\max} = g(0) = -1$, $B = [e + a - 2, -1]$,

则 $B \cap A = \emptyset$, 不合题意;

③ $-e < a < -1$, 令 $g'(x) = e^x + a = 0$, $x = \ln(-a)$,

$g(x)$ 在 $(0, \ln(-a))$ 递减, $(\ln(-a), 1)$ 递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(\ln(-a)) = -a - 2 + a \ln(-a)$, $g(x)_{\max} = \max\{g(0), g(1)\}$, .

又 $g(0) = -1 < 0$, $g(1) = e + a - 2 < 0$,

则 $B \cap A = \emptyset$, 不合题意.

综上所述, $a \geq 2 - e$.

点评:

存在性和恒成立混合问题注意理解题意, 等量关系转化为值域的关系.

例5 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 函数 $g(x) =$

x^2-2x+m , 且如果对于任意的 $x_1 \in [-2, 2]$, 都存在 $x_2 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_2)=f(x_1)$, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $[-5, -2]$

【分析】 易得 $f(x) \in [-3, 3]$, $g(x) \in [m-1, m+8]$, 若对于 $\forall x_1 \in [-2, 2], \exists x_2 \in [-2, 2]$, 使得

$g(x_2)=f(x_1)$, 只需 $f(x)$ 的值域包含于 $g(x)$ 的值域即可, 即 $m-1 \leq -3$ 且 $m+8 \geq 3$,

解得 $-5 \leq m \leq -2$.

【解析】 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x)=2^x-1$ 为增函数, 值域为 $(0, 3]$,

因为 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的值域为 $[-3, 3]$,

函数 $g(x)=x^2-2x+m$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上的值域为 $[m-1, m+8]$.

因为对任意的 $x_1 \in [-2, 2]$, 都存在 $x_2 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_2)=f(x_1)$,

所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的值域是 $g(x)=x^2-2x+m$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上的值域的子集,

所以 $\begin{cases} m+8 \geq 3 \\ m-1 \leq -3 \end{cases}$, 解得 $-5 \leq m \leq -2$

即实数 m 的取值范围是 $[-5, -2]$.

点评:

考查函数的单调性、奇偶性、最值、值域, 以及恒成立, 存在性问题, 关键是理解题意, 转化为值域之间的关系.

例 6 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{x^2}, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ \log \frac{1+x}{2}, & x > -\frac{1}{2}, \end{cases}$ $g(x)=-x^2-2x-2$. 若存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得

$f(a)+g(b)=0$, 则实数 b 的取值范围是_____.

【答案】 $(-2, 0)$

【解析】 当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=1+\frac{2x-1}{x^2} < 1$,

此时 $f(x)=1+\frac{2x-1}{x^2}=1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ 在 $\left[-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减, 易求得 $f(x) \in [-7, 1)$;

当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=\log \frac{1}{2} \frac{1+x}{2}$,

此时 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 易求得 $f(x) \in (-\infty, 2)$,

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 2)$.

故存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(a)+g(b)=0 \Rightarrow -g(b)=f(a) \in (-\infty, 2) \Rightarrow b^2+2b+2 < 2 \Rightarrow b \in (-2, 0)$.

例7 已知函数 $f(x) = 2^{x-1}$, $g(x) = \begin{cases} a\cos x + 2, & x \geq 0 \\ x^2 + 2a, & x < 0 \end{cases}$ ($a \in R$), 若对任意 $x_1 \in [1, +\infty)$,

总存在 $x_2 \in R$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

B. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup [1, 2]$

D. $\left(1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, 2\right]$

【答案】C

【解析】对任意 $x \in [1, +\infty)$, 则 $f(x) = 2^{x-1} \geq 2^0 = 1$, 即函数 $f(x_1)$ 的值域为 $[1, +\infty)$,

若对任意 $x_1 \in [1, +\infty)$, 总存在 $x_2 \in R$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$,

设函数 $g(x)$ 的值域为 A , 则满足 $[1, +\infty) \subseteq A$, 即可,

当 $x < 0$ 时, 函数 $g(x) = x^2 + 2a$ 为减函数, 则此时 $g(x) > 2a$,

当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = a\cos x + 2 \in [2 - |a|, 2 + |a|]$,

①当 $2a < 1$ 时, (红色曲线), 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, 满足条件 $[1, +\infty) \subseteq A$,

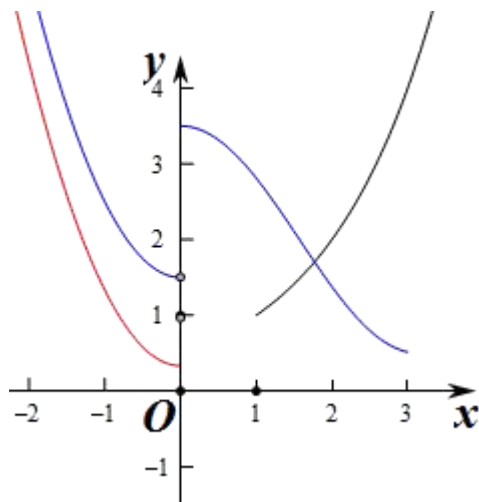
②当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 此时 $2a \geq 1$, 要使 $[1, +\infty) \subseteq A$ 成立,

则此时 $g(x) = a\cos x + 2 \in [2 - a, 2 + a]$,

此时满足 (蓝色曲线) $\begin{cases} 2 - a \leq 1 \\ 2a \leq 2 + a \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \geq 1 \\ a \leq 2 \end{cases}$, 得 $1 \leq a \leq 2$,

综上 $a < \frac{1}{2}$ 或 $1 \leq a \leq 2$,

故选: C.



例 8 若存在正数 x, y ，使得 $(3e^2y - x)(\ln x - \ln y) - ay = 0$ ，其中 e 为自然对数的底数，则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a \leq 4e^2$

【分析】 对 $(3e^2y - x)(\ln x - \ln y) - ay = 0$ 进行“完全分参”，两边同时除以 y 、移项得

$a = (3e^2 - \frac{x}{y})\ln \frac{x}{y}$ ，令 $\frac{x}{y} = t$ ，问题转化为存在正数 t ，使得 $a = (3e^2 - t)\ln t$ 成立，再设

$f(x) = (3e^2 - x)\ln x$ ，只需 $a \in f(x)$ 的值域.

【解析】 对 $(3e^2y - x)(\ln x - \ln y) - ay = 0$ 两边同时除以 y 、移项得 $a = (3e^2 - \frac{x}{y})\ln \frac{x}{y}$ ，

令 $\frac{x}{y} = t$ ，问题转化为存在正数 t ，使得 $a = (3e^2 - t)\ln t$ 成立，

设 $f(x) = (3e^2 - x)\ln x$ ，只需 $a \in f(x)$ 的值域.

$$f'(x) = -\ln x + (3e^2 - x) \frac{1}{x} = -\ln x - 1 + \frac{3e^2}{x}$$

猜根，往与 e 的方向猜，可得 $f'(e^2) = -\ln e^2 - 1 + \frac{3e^2}{e^2} = 0$

再设 $g(x) = -\ln x - 1 + \frac{3e^2}{x}$ ，则 $g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{3e^2}{x^2} < 0$

故 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单减

所以 $f'(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 只有一个零点为 e^2

且当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f'(x) < 0$

故有当 $x \in (0, e^2]$ ， $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 单增；当 $x \in [e^2, +\infty)$ ， $f'(x) \leq 0$ ， $f(x)$ 单减

故当 $x = e^2$ 时， $f(x)$ 取得极大值也就是最大值为 $f(e^2) = (3e^2 - e^2)\ln e^2 = 4e^2$ ，无最小值

故 $a \leq 4e^2$ 即为所求.

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x) = 3x^2 + 2x - a^2 - 2a$, $g(x) = \frac{19}{6}x - \frac{1}{3}$, 若对任意 $x_1 \in [-1, 1]$, 总存在 $x_2 \in [0, 2]$,

使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

2. 已知函数 $f(x) = 2x$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 函数 $g(x) = kx - 2k + 2 (k > 0)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 若存在 $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

及 $x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, $g(x) = \ln(x+1) - a$, 若存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 求

实数 a 的取值范围.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} (x \geq 2)$, $g(x) = a^x (a > 1, x \geq 2)$.

(1) 若 $\exists x_0 \in [2, +\infty)$, 使 $f(x_0) = m$ 成立, 则实数 m 的取值范围为_____;

(2) 若 $\forall x_1 \in [2, +\infty)$, $\exists x_2 \in [2, +\infty)$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围为_____.

5. 已知函数 $f(x) = \frac{-3x-7}{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2x$, 若存在实数 $a \in (-\infty, -2)$, 使得 $f(a) + g(b) = 0$

成立, 则实数 b 的取值范围是_____.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2}, & x \leq -\frac{1}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+x}{2}\right), & x > -\frac{1}{2} \end{cases}$, $g(x) = -x^2 - 2x - 2$, 若存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $f(a) + g(b) = 0$,

则实数 b 的取值范围是_____.

7. 若 $\forall x_1 \in (0, +\infty)$, 总 $\exists x_2 \in (2, +\infty)$ 使得 $x_1 |x_1 - a| - \ln(x_1 x_2 - x_1) = 0$ 成立, 则实数 a 的取

值范围是_____.

【答案或提示】

1. 【答案】 $[-2, 0]$

【解析】 $f(x)=3x^2+2x-a(a+2)$, 则 $f'(x)=6x+2$, 由 $f'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{3}$.

当 $x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $[f(x)]_{\min} = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -a^2 - 2a - \frac{1}{3}$.

又由题意可知, $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{3}, 6\right]$ 的子集,

所以 $\begin{cases} f(-1) \leq 6, & -a^2 - 2a - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}, & f(1) \leq 6, \end{cases}$

解得实数 a 的取值范围是 $[-2, 0]$.

2. 【答案】 $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$

【解析】由题意, 易得函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$, $g(x)$ 的值域为 $\left[2-2k, 2-\frac{3k}{2}\right]$, 并且两个值域有公共部分.

先求没有公共部分的情况, 即 $2-2k > 1$ 或 $2-\frac{3}{2}k < 0$, 解得 $k < \frac{1}{2}$ 或 $k > \frac{4}{3}$, 所以, 要使两个

值域有公共部分, k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$.

3. 【答案】 $[-4, \ln 3]$

【解析】 $f(x)$ 值域 $A=[0, 4]$, $g(x)$ 值域 $B=[-a, \ln 3 - a]$,

由存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 知: $A \cap B \neq \emptyset$

正难则反, 先求出 $A \cap B = \emptyset$ 时, a 的取值范围

由 $A \cap B = \emptyset$ 得: $4 < -a$ 或 $\ln 3 - a < 0$, 解之得: $a < -4$ 或 $a > \ln 3$,

故 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, $-4 \leq a \leq \ln 3$,

所以 a 的取值范围是 $[-4, \ln 3]$.

4. 【答案】 (1) $[3, +\infty)$ (2) $(1, \sqrt{3}]$

【解析】(1) 因为 $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1} = x + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 2+1=3$, 当且仅当 $x=2$ 时等

号成立. 所以若 $\exists x_0 \in [2, +\infty)$, 使 $f(x_0)=m$ 成立, 则实数 m 的取值范围为 $[3, +\infty)$.

(2) 因为当 $x \geq 2$ 时, $f(x) \geq 3$, $g(x) \geq a^2$, 若 $\forall x_1 \in [2, +\infty)$, $\exists x_2 \in [2, +\infty)$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 $\{a^2 \leq 3, a > 1\}$, 解得 $a \in (1, \sqrt{3}]$.

5. 【答案】 $(-1, 3)$

6. 【答案】 $(-2, 0)$

7. 【答案】 $(-\infty, 1)$

专题 12 双变量不等式类能成立、恒成立问题

【方法点拨】

1. $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in E$, 均有 $f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立, 则 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$;

$\forall x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$;

$\exists x_1 \in D, \exists x_2 \in E$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\max} > g(x)_{\min}$.

记忆方法: 都任意, 大小小大 (即对于两个变量都是“任意”的, 不等式中较大者的最小值大于不等式中较小者的最大值), 存在换任意, 大小应互换.

2. 双元型不等式恒成立、能成立问题一般应遵循“双元化一元, 逐一处理”的策略, 即选择主次元的方法, 一般应“先独立后分参”, 即先处置独立变量 (所谓“独立变量”是指与所求参数无关的变量), 再处置另一变量, 而解题过程中往往采取分参方法.

【典型题示例】

例 1 已知 $a > 0, b \in R$, 若 $|ax^3 - bx^2 + ax| \leq bx^4 + (a+2b)x^2 + b$ 对任意 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 都成立, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$

【分析】不等式化为 $\left|x - \frac{b}{a} + \frac{1}{x}\right| \leq \frac{b}{a}x^2 + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 1$, 令 $t = x + \frac{1}{x}$, $t \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$, 可得

$\frac{b}{a}t^2 + 1 \geq \left|t - \frac{b}{a}\right|$, 分别讨论 $\frac{b}{a} = 0$, $\frac{b}{a} < 0$, 和 $\frac{b}{a} > 0$ 时, 求最值可得出.

【解析】不等式两边同时除以 ax^2 得 $\left|x - \frac{b}{a} + \frac{1}{x}\right| \leq \frac{b}{a}x^2 + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 1$,

整理得 $\frac{b}{a}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \geq \left|x + \frac{1}{x} - \frac{b}{a}\right|$,

令 $t = x + \frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 则 $t \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$, 则 $\frac{b}{a}t^2 + 1 \geq \left|t - \frac{b}{a}\right|$,

由于对任意 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 都成立, 则有 $\frac{b}{a}t^2 + 1 \geq \left|t - \frac{b}{a}\right|$ 对任意 $t \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$ 恒成立,

(1) 当 $\frac{b}{a} = 0$ 时, $1 \geq t$ 不成立, 不符合题意;

(2) 当 $\frac{b}{a} < 0$ 时, 则当 $t = \frac{5}{2}$ 时, 不等式左边取到最小, 右边取到最大, 满足题意,

则 $\frac{25}{4} \cdot \frac{b}{a} + 1 \geq \frac{5}{2} - \frac{b}{a}$, 解得 $\frac{b}{a} \geq \frac{6}{29}$, 与 $\frac{b}{a} < 0$ 矛盾, 不符合;

(3) 当 $\frac{b}{a} > 0$ 时,

① 当 $\frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$ 时, 则当 $t = 2$ 时, 不等式左边取到最小, 右边取到最大, 满足题意,

则 $4 \cdot \frac{b}{a} + 1 \geq \frac{b}{a} - 2$, 解得 $\frac{b}{a} \geq -1$, $\therefore \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$;

② 当 $0 < \frac{b}{a} \leq 2$ 时, 有 $\frac{b}{a} \cdot t^2 + 1 \geq t - \frac{b}{a}$, 即 $\frac{b}{a} \geq \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$, 则当 $t = 2$ 时, $\frac{1}{t + \frac{1}{t}}$ 取得最大值

为 $\frac{2}{5}$, 则 $\frac{b}{a} \geq \frac{2}{5}$, $\therefore \frac{2}{5} \leq \frac{b}{a} \leq 2$;

③ 当 $2 < \frac{b}{a} < \frac{5}{2}$ 时, $\frac{b}{a} \cdot t^2 + 1 > 1 > \left| t - \frac{b}{a} \right|$ 恒成立, 满足题意,

综上所述, $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 $\left[\frac{2}{5}, +\infty \right)$.

故答案为: $\left[\frac{2}{5}, +\infty \right)$.

例 2 已知函数 $f(x) = \log_a(ax^2 - x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 若对 $\forall x_1 \in [2, 3]$, 总 $\exists x_2 \in [3, 4]$, 使得 $f(x_1) > \log_a(8 - x_2)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{9} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$

【分析】 即 $f(x)_{\min} > [\log_a(8 - x)]_{\min}$.

当 $a > 1$ 时, $[\log_a(8 - x)]_{\min} = \log_a 4$, 故只需 $f(x) > \log_a 4$, 所以 $(ax^2 - x)_{\min} > 4$ 即 $ax^2 - x > 4$

对 $\forall x \in [2, 3]$ 恒成立, 分参得 $a > \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$, 令 $\frac{1}{x} = t \left(\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2} \right)$, $a > 4t^2 + t$,

$a > (4t^2 + t)_{\max} = (4t^2 + t) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$, 故 $a > \frac{3}{2}$;

当 $0 < a < 1$ 时, $[\log_a(8 - x)]_{\min} = \log_a 5$, 故只需 $f(x) > \log_a 5$, 所以 $(ax^2 - x)_{\max} < 5$, 且

$(ax^2 - x)_{\min} > 0$, 即 $0 < ax^2 - x < 5$ 对 $\forall x \in [2, 3]$ 恒成立, 分参得 $\frac{1}{x} < a < \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}$, 令

$\frac{1}{x} = t \left(\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2} \right)$, $t < a < 5t^2 + t$, $\frac{1}{2} = t_{\max} < a < (5t^2 + t)_{\min} = (5t^2 + t) \Big|_{t=\frac{1}{3}} = \frac{8}{9}$, 故 $\frac{1}{2} < a < \frac{8}{9}$;

综上, 实数 a 的取值范围 $\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{9} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$.

例 3 已知函数 $f(x) = \frac{4^x - 1}{2^x}$ ，若对任意 $x_1 \in [1, 2]$ ，都存在 $x_2 \in [1, 2]$ 使 $x_1^2 - 2bx_1 \geq f(x_2)$

成立，则实数 b 的取值范围是_____.

【解析】 由条件可知 $(x^2 - 2bx)_{\min} \geq f(x)_{\min}$

因为 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ ，且 $y = 2^x$ 、 $y = -2^{-x}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增

所以函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增， $f(x)_{\min} = f(1) = \frac{3}{2}$ ，

所以 $(x^2 - 2bx)_{\min} \geq \frac{3}{2}$ ，即 $x^2 - 2bx \geq \frac{3}{2}$ 在 $x \in [1, 2]$ 恒成立，

即 $2b \leq x - \frac{3}{2x}$ 在 $x \in [1, 2]$ 恒成立，记 $h(x) = x - \frac{3}{2x}$ ， $x \in [1, 2]$ ，

易证 $h(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，

所以， $h(x)_{\min} = h(1) = -\frac{1}{2}$ ，从而只需 $2b \leq -\frac{1}{2}$ ，即 $b \leq -\frac{1}{4}$ 。

点评：

为避免求函数 $y = x^2 - 2bx$ 最小值时的含参讨论，逆向转化为 $x^2 - 2bx \geq \frac{3}{2}$ 在

$x \in [1, 2]$ 上恒成立，再利用分离参数求解. 此种处理手段太重要，意味深长！！

例 4 已知函数 $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = f(x) + f(|x|)$ ，若 $\forall x_1 \in (0, +\infty)$ ， $\exists x_2 \in [-1, 0]$ ，

使得 $g(2x_1) + ag(x_1) + 2g(x_2) > 0$ 成立，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\sqrt{10}, +\infty)$

【解析】 双变量问题，逐一突破，这里先处理不含参部分

由题意得， $\forall x_1 \in (0, +\infty)$ ， $g(2x_1) + ag(x_1) > [-2g(x_2)]_{\min}$ ，

当 $x \in [-1, 0]$ 时， $g(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$ ，

令 $t = 2^x$ ，则 $y = t + \frac{1}{t}$ ， $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ， $y' = 1 - \frac{1}{t^2} < 0$ ，

即 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上为减函数，故 $(g(x_2))_{\max} = \frac{5}{2}$

所以 $[-2g(x_2)]_{\min} = -5$ ，

所以 $2 \cdot (2^{x_1})^2 + 2a \cdot 2^{x_1} > -5$ 恒成立,

即 $a > -\left(\frac{5}{2 \cdot 2^{x_1}} + 2^{x_1}\right)$ 恒成立,

又 $\frac{5}{2 \cdot 2^{x_1}} + 2^{x_1} \geq 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10}$, 当且仅当 $x_1 = \log_2 \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时取等号,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\sqrt{10}, +\infty)$.

点评:

存在性和恒成立混合问题注意理解题意, 不等关系转化为最值的关系.

例 5 若对任意 $x_1 \in R$, 存在 $x_2 \in (1, 2]$, 使不等式 $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \geq 2x_1 + mx_2 + 3$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, \frac{1}{2}]$

【解析一】 先视为以 “ x_1 ” 为主元的二次不等式的恒成立,

即不等式 $x_1^2 + (x_2 - 2)x_1 + x_2^2 - mx_2 - 3 \geq 0$ 在 $x_1 \in R$ 上恒成立,

所以 $\Delta = (x_2 - 2)^2 - 4(x_2^2 - mx_2 - 3) \leq 0$,

即 $3x_2^2 - (4m - 4)x_2 - 16 \geq 0$, 存在 $x_2 \in (1, 2]$, 使不等式 $3x_2^2 - (4m - 4)x_2 - 16 \geq 0$ 成立, 再视为以 “ x_2 ” 为元的二次不等式的存在性问题, 即能成立,

设 $h(x_2) = 3x_2^2 - (4m - 4)x_2 - 16$, 则只需 $h(1) > 0$ 或 $h(2) \geq 0$, 即 $m < -\frac{9}{4}$ 或 $m \leq \frac{1}{2}$,

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

【解析二】 先视为以 “ x_1 ” 为主元的二次不等式的恒成立,

即不等式 $x_1^2 + (x_2 - 2)x_1 + x_2^2 - mx_2 - 3 \geq 0$ 在 $x_1 \in R$ 上恒成立,

所以 $\Delta = (x_2 - 2)^2 - 4(x_2^2 - mx_2 - 3) \leq 0$,

即 $3x_2^2 - (4m - 4)x_2 - 16 \geq 0$, 存在 $x_2 \in (1, 2]$, 使不等式 $3x_2^2 - (4m - 4)x_2 - 16 \geq 0$ 成立, 再视为以 “ x_2 ” 为元的二次不等式的存在性问题, 即能成立,

即 $3x_2^2 - (4m - 4)x_2 - 16 \geq 0$ 在 $x_2 \in (1, 2]$ 能成立

分离变量得 $4m - 4 \leq 3x_2 - \frac{16}{x_2}$

设 $g(x) = 3x - \frac{16}{x}$, 则 $g(x) = 3x - \frac{16}{x}$ 在区间 $(1, 2]$ 上单增,

所以 $g(x)_{\max} = g(2) = -2$, 故 $4m - 4 \leq -2$, 即 $m \leq \frac{1}{2}$

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

点评:

1. 二元存在性、恒成立问题应考虑“主次元”思想;
2. 解法二用到了“分离参数”构造函数的方法, 一般来说, 求参变量范围问题, 应尽量做到“能分则分”, 以避免参数参与运算带来的分类讨论等不必要的麻烦.

例 6 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$, $g(x) = x - \ln x + 4$, 若对任意的 $x_1 \in [1, e]$, 存在 $x_2 \in [1, e]$, 都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $[\frac{5}{2}, +\infty)$

【分析】 问题可转化为 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$, 函数 $g(x)$ 不含参, 易求得 $g(x)_{\min} = g(1) = 5$, 接下来的思路有二, 一是直接分类讨论求 $f(x)_{\min}$, 二是将 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$ 转化为 $f(x) = x + \frac{a^2}{x} \geq 5$ 恒成立, 通过分离参数再解决

【解析】 问题可转化为 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$.

当 $x \in [1, e]$ 时, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$, 故 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 则 $g(x)_{\min} = g(1) = 5$.

思路一: 又 $f'(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 易知 $x = a$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

当 $a \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = 1 + a^2$, 则 $1 + a^2 \geq 5$, 不成立;

当 $1 < a \leq e$ 时, $f(x)_{\min} = f(a) = 2a$, 则 $2a \geq 5$, 得 $\frac{5}{2} \leq a \leq e$;

当 $a > e$ 时, $f(x)_{\min} = f(e) = e + \frac{a^2}{e} \geq 5$ 显然成立, 得 $a^2 > 5e - e^2$, 所以 $a > e$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[\frac{5}{2}, +\infty)$.

思路二: 故有 $f(x)_{\min} \geq 5$, 即 $f(x) = x + \frac{a^2}{x} \geq 5$ 恒成立, 分离参数得 $a^2 \geq x(5 - x)$,

易得 $[x(5 - x)]_{\max} = \frac{25}{4}$, 又 $a > 0$, 故 $a \geq \frac{5}{2}$

所以实数 a 的取值范围为 $[\frac{5}{2}, +\infty)$.

例 7 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$, $g(x) = \frac{a}{x}$, 其中 $a > 0$, $x \neq 0$.

(1) 对任意的 $x \in [1, 2]$, 都有 $f(x) > g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

【解析】 由题意知, $f(x) - g(x) > 0$ 对 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 即 $x^2 - 2ax + 1 - \frac{a}{x} > 0$ 对 $x \in [1, 2]$ 恒成立,

即 $a < \frac{x^3+x}{2x^2+1}$ 对 $x \in [1,2]$ 恒成立, 令 $\varphi(x) = \frac{x^3+x}{2x^2+1}$, 只需 $a < \varphi(x)_{\min}(x \in [1,2])$.

由于 $\varphi'(x) = \frac{2x^4+x^2+1}{(2x^2+1)^2} > 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $x \in [1,2]$ 上是增函数,

$\varphi(x)_{\min} = \varphi(1) = \frac{2}{3}$, 所以 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{2}{3}\right)$.

(2) 对任意的 $x_1 \in [1,2]$, 存在 $x_2 \in [1,2]$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】由题意知 $x^2 - 2ax + 1 > \left(\frac{a}{x}\right)_{\min} = \frac{a}{2}$, 即 $a < \frac{2(x^2+1)}{4x+1}$ 对 $x \in [1,2]$ 恒成立.

令 $\varphi(x) = \frac{2(x^2+1)}{4x+1}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{8(x^2-1)+4x}{(4x+1)^2} > 0$ 对 $x \in [1,2]$ 恒成立,

则 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数, $\varphi(x)_{\min} = \varphi(1) = \frac{4}{5}$,

所以 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{4}{5}\right)$.

点评:

防止误将 $\forall x \in D$, 均有 $f(x) > g(x)$ 恒成立, 转化为 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$, 一般应作差构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, 转化为 $F(x)_{\min} > 0$ 恒成立.

例 8 已知函数 $f(x) = a^x + x^2 - x \ln a$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 若对任意的 $x_1, x_2 \in [1,2]$,

不等式 $f(x_1) - f(x_2) \leq a^2 - a + 1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $[e^2, +\infty)$

【分析】求导 $f'(x) = (a^x - 1) \ln a + 2x$, 分 $0 < a < 1$, $a > 1$, 求得 $[f(x_1) - f(x_2)]_{\max}$,

再根据对任意的 $x_1, x_2 \in [1,2]$, 不等式 $f(x_1) - f(x_2) \leq a^2 - a + 1$ 恒成立求解.

【解析】因为函数 $f(x) = a^x + x^2 - x \ln a$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

所以 $f'(x) = (a^x - 1) \ln a + 2x$,

当 $0 < a < 1$, $x \in [1,2]$ 时, $a^x - 1 < 0, \ln a < 0$,

则 $f'(x) > 0$ 在 $[1,2]$ 上成立,

所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上递增,

所以 $f(x)_{\max} = f(2) = a^2 + 4 - 2 \ln a, f(x)_{\min} = f(1) = a + 1 - \ln a$,

所以 $\left[f(x_1) - f(x_2) \right]_{\max} = a^2 - a + 3 - \ln a$,

因为任意的 $x_1, x_2 \in [1, 2]$, 不等式 $f(x_1) - f(x_2) \leq a^2 - a + 1$ 恒成立,

所以 $a^2 - a + 1 \geq a^2 - a + 3 - \ln a$, 即 $\ln a \geq 2$,

解得 $a \geq e^2$,

当 $a > 1$, $x \in [1, 2]$ 时, $a^x - 1 > 0, \ln a > 0$,

则 $f'(x) > 0$ 在 $[1, 2]$ 上成立,

所以 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递增,

所以 $f(x)_{\max} = f(2) = a^2 + 4 - 2 \ln a, f(x)_{\min} = f(1) = a + 1 - \ln a$,

所以 $\left[f(x_1) - f(x_2) \right]_{\max} = a^2 - a + 3 - \ln a$,

因为任意的 $x_1, x_2 \in [1, 2]$, 不等式 $f(x_1) - f(x_2) \leq a^2 - a + 1$ 恒成立,

所以 $a^2 - a + 1 \geq a^2 - a + 3 - \ln a$, 即 $\ln a \geq 2$,

解得 $a \geq e^2$,

综上: 实数 a 的取值范围为 $[e^2, +\infty)$,

故答案为: $[e^2, +\infty)$

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = \log_2 x + m$, 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, 4]$ 有 $f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

2. 已知函数 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$, 若对 $\forall x_1 \in [0, 3]$, $\exists x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围是_____.

3. 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $g(x) = 2^x + a$, 若 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数

【答案或提示】

1. **【答案】** $(-\infty, 0)$

【解析】 $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, 当 $x \in [1, 4]$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 2$, $g(x)_{\max} = g(4) = 2 + m$,
则 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$, 即 $2 > 2 + m$, 解得 $m < 0$, 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 0)$.

2. **【答案】** $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

【解析】 当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = 0$, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{1}{4} - m$, 由 $f(x)_{\min}$
 $\geq g(x)_{\min}$, 得 $0 \geq \frac{1}{4} - m$, 所以 $m \geq \frac{1}{4}$.

3. **【答案】** $(-\infty, 1]$

【解析】 由题意知, $f(x)_{\min} \left(x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) \geq g(x)_{\min} (x \in [2, 3])$, 因为 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, 所以 $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$,
所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 5$, 又因为 $g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上的最小值为 $g(2)$
 $= 4 + a$, 所以 $5 \geq 4 + a$, 即 $a \leq 1$.

4. **【答案】** 14

【解析】 由 $f(x) = 3x^2 - 12$, 可得 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上单调递减, 在区间 $[2, 5]$ 上单调递增,
 $\therefore f(x)_{\min} = f(2) = -13$,
 $\therefore g(x) = 3^x - m$ 是增函数, $\therefore g(x)_{\min} = 1 - m$,
要满足题意, 只需 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$ 即可, 解得 $m \geq 14$,
故实数 m 的最小值是 14.

5. **【答案】** $-\frac{1}{3}$

6. **【答案】** $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【解析】 依题意知 $f(x)_{\max} \leq g(x)_{\max}$.

$\therefore f(x) = x + \frac{4}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上是减函数, $\therefore f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{2}$.

又 $g(x) = 2^x + a$ 在 $[2, 3]$ 上是增函数, $\therefore g(x)_{\max} = 8 + a$,

因此 $\frac{17}{2} \leq 8 + a$, 则 $a \geq \frac{1}{2}$.

7. **【答案】** $a > -4$

【分析】 问题可转化为 $f(x)_{\max} > g(x)_{\min}$, 易得 $f(x)_{\max} = 4$, $g(x)_{\min} = -a$, 由 $f(x)_{\max} > g(x)_{\min}$ 得:

$4 > -a$, 故 $a > -4$ 即为所求.

点评:

理解量词的含义，将原不等式转化为 $[f(x)]_{\max} \leq [g(x)]_{\max}$ ；利用函数的单调性，求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值，得关于 a 的不等式求得 a 的取值范围。

8. 【答案】 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

9. 【答案】 $[-2, +\infty)$

【解析】对不等式 $x^2 - mx + 3m - 2 \geq 0$ 分离参数得： $m \geq \frac{x^2 - 2}{x - 3}$

设 $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 3}$ ($x \in [1, 2]$)，则 $m \geq g(x)_{\min}$

令 $3 - x = t$ ($1 \leq t \leq 2$)，则 $g(t) = \frac{(3-t)^2 - 2}{-t} = -(t + \frac{7}{t}) + 6$

函数 $t + \frac{7}{t}$ 在区间 $t \in [1, 2]$ 单减，故 $(t + \frac{7}{t})_{\max} = 8$ ， $g(t)_{\min} = g(1) = -2$

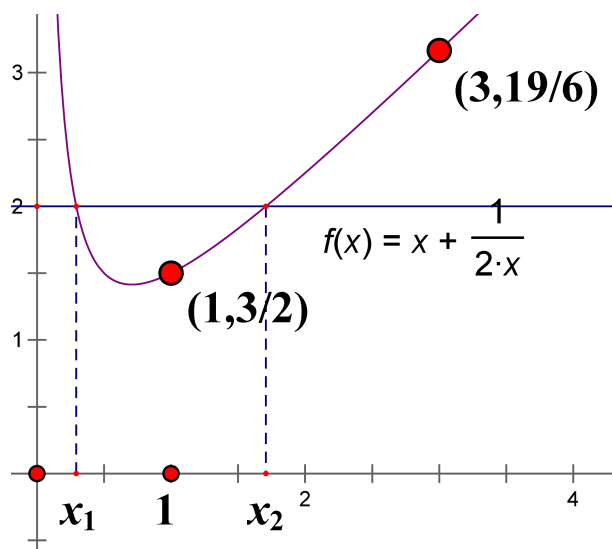
所以 $m \geq -2$ ，即实数 m 的取值范围是 $[-2, +\infty)$ 。

10. 【答案】 BC

【解析】将方程 $x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2} = 0$ 分离参数得： $-(m+1) = x + \frac{1}{2x}$

设 $f(x) = x + \frac{1}{2x}$ ，如图，则 $\frac{3}{2} < -(m+1) < \frac{19}{6}$ ，所以 $-\frac{25}{6} < m < -\frac{5}{2}$

选 BC.



11. 【答案】 D

【分析】转化为 $\left(\frac{g(x_1)}{k+1}\right)_{\max} \leq \left(\frac{f(x_2)}{k}\right)_{\min}$ ，求出 $f(x_2)$ 在 $(0, e]$ 上的最小值与 $g(x_1)$ 在 $(0, e]$

上的最大值代入可解得结果.

【解析】因为 $f(x_2) = x_2 + \frac{4}{x_2}$ 在 $(0, 2)$ 上递减，在 $(2, e]$ 上递增，

所以当 $x_2=2$ 时， $f(x_2)$ 取得最小值 $f(2)=4$ ，

因为 $g(x_1) = x_1 e^{x_1}$ ，所以 $g'(x_1) = e^{x_1} + x_1 e^{x_1} = (1+x_1)e^{x_1}$ ，当 $x_1 \in (0, e]$ 时， $g'(x_1) > 0$ ，

所以 $g(x_1) = x_1 e^{x_1}$ 在 $(0, e]$ 上单调递增，所以 $g(x_1)$ 的最大值为 $g(e) = e \cdot e^e$ ，

因为对任意 $x_1, x_2 \in (0, e]$ ，不等式 $\frac{g(x_1)}{k+1} \leq \frac{f(x_2)}{k}$ 恒成立，

所以 $\left(\frac{g(x_1)}{k+1}\right)_{\max} \leq \left(\frac{f(x_2)}{k}\right)_{\min}$ ，因为 $k > 0$ ，所以 $\frac{e \cdot e^e}{k+1} \leq \frac{4}{k}$ ，解得 $0 < k \leq \frac{4}{e^{e+1} - 4}$ 。

故选：D

12. 【答案】C

【分析】 $\frac{\ln^2 b}{e^{2a}} < \frac{b^n}{a^n}$ 等价于 $\frac{\ln^2 b}{b^n} < \frac{e^{2a}}{a^n}$ ，令 $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^n}$ ， $g(x) = \frac{e^{2x}}{x^n}$ ，分别求 $f(x)$ ，

$g(x)$ 的导数，判断函数的单调性，可求得 $f(x)$ 有最大值 $f\left(e^{\frac{2}{n}}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2}$ ， $g(x)$ 有最小

值 $g\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$ ，根据题意，即求 $f(x)_{\max} \leq g(x)_{\min}$ ，代入为 $\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} \leq \frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$ ，等价于

$\frac{n+2}{n-2} \geq \ln \frac{n}{2}$ ，令 $\varphi(x) = \frac{x+2}{x-2} - \ln \frac{x}{2}$ ，即求 $\varphi(x) > 0$ 的最大的正整数. 对 $\varphi(x)$ 求导求单调

性，可知 $\varphi(x)$ 单调递减，代入数值计算即可求出结果.

【解析】由题干条件可知： $\frac{\ln^2 b}{e^{2a}} < \frac{b^n}{a^n}$ 等价于 $\frac{\ln^2 b}{b^n} < \frac{e^{2a}}{a^n}$ ，

令 $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^n}$ ， $(x > 1)$ ，则 $f'(x) = \frac{x^{n-1} \cdot \ln x (2 - n \ln x)}{x^{2n}} = \frac{\ln x (2 - n \ln x)}{x^{n+1}}$

$$f'(x)=0, \quad x=e^{\frac{2}{n}},$$

$$\text{当 } f'(x)>0 \text{ 时, } x \in \left(1, e^{\frac{2}{n}}\right), \text{ 当 } f'(x)<0 \text{ 时, } x \in \left(e^{\frac{2}{n}}, +\infty\right)$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(1, e^{\frac{2}{n}}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(e^{\frac{2}{n}}, +\infty\right)$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 有最大值

$$f\left(e^{\frac{2}{n}}\right)=\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2}.$$

$$\text{令 } g(x)=\frac{e^{2x}}{x^n}, \quad (x>1), \text{ 则 } g'(x)=\frac{e^{2x}(2x-n)}{x^{2n}}, \text{ 当 } \frac{n}{2} \leq 1 \text{ 时, 此题无解, 所以 } \frac{n}{2} > 1,$$

$$\text{则 } g'(x)=0, x=\frac{n}{2}, \text{ 当 } g'(x)>0, x>\frac{n}{2}, \text{ 当 } g'(x)<0, 1<x<\frac{n}{2},$$

所以 $g(x)$ 在 $\left(1, \frac{n}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{n}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 则 $g(x)$ 有最小值

$$g\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}.$$

$$\text{若 } \frac{\ln^2 b}{b^n} < \frac{e^{2a}}{a^n} \text{ 成立, 只需 } f\left(e^{\frac{2}{n}}\right) \leq g\left(\frac{n}{2}\right), \text{ 即 } \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} \leq \frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}, \text{ 即 } e^{n+2} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-2},$$

两边取对数可得: $n+2 \geq (n-2)\ln \frac{n}{2}$. $n=2$ 时, 等式成立, 当 $n \geq 3$ 时, 有 $\frac{n+2}{n-2} \geq \ln \frac{n}{2}$,

令 $\varphi(x)=\frac{x+2}{x-2}-\ln \frac{x}{2}$, 本题即求 $\varphi(x)>0$ 的最大的正整数.

$$\varphi'(x)=\frac{-4}{(x-2)^2}-\frac{1}{x}<0 \text{ 恒成立, 则 } \varphi(x) \text{ 在 } [3, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

$$\varphi(8)=\frac{5}{3}-\ln 4>0, \quad \varphi(9)=\frac{11}{7}-\ln \frac{9}{2} \approx 1.5714-1.51>0, \quad \varphi(10)=\frac{3}{2}-\ln 5<0,$$

所以 $\varphi(x)>0$ 的最大正整数为 9.

故选: C.

专题 13 一次绝对值函数

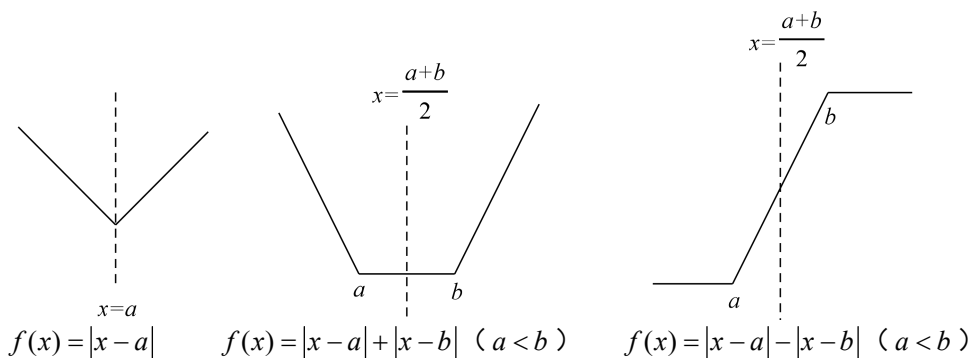
【方法点拨】

1. 几个常见的含绝对值的一次函数的图象与性质:

(1) $f(x) = |x - a|$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称, 且函数的最小值为 0;

(2) $f(x) = |x - a| + |x - b|$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称, 且函数的最小值为 $|b - a|$;

(3) $f(x) = |x - a| - |x - b|$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 对称, 且函数的值域为 $[-|a - b|, |a - b|]$.



2. 含绝对值的一次函数的求解策略:

(1) 根据绝对值的代数意义, 利用“零点分域讨论法”去绝对值, 化为分段函数;

(2) 有时也可根据绝对值的几何意义, 转化为 x 轴上动点到一些定点距离的和.

3. 一般地, 设 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + \dots + |x - a_n|$.

若 n 为奇数, 当 $x = a_{\frac{1+n}{2}}$ 时, $f(x)$ 取最小值; 若 n 为偶数, 则 $x \in [a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}]$ 时, $f(x)$ 取最小值.

即中间值或中间区间上取最值.

【典型题示例】

例 1 (2022 · 浙江 · 9) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, $a|x - b| + |x - 4| - |2x - 5| \geq 0$, 则 ()

A. $a \leq 1, b \geq 3$

B. $a \leq 1, b \leq 3$

C. $a \geq 1, b \geq 3$

D. $a \geq 1, b \leq 3$

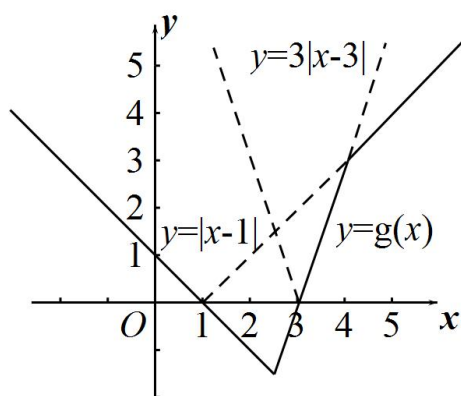
【答案】D

【分析】 将问题转换为 $a|x - b| \geq |2x - 5| - |x - 4|$, 再结合画图求解.

【解析】 由题意有: 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $a|x - b| \geq |2x - 5| - |x - 4|$ 恒成立.

$$\text{设 } f(x) = a|x-b|, \quad g(x) = |2x-5| - |x-4| = \begin{cases} 1-x, & x \leq \frac{5}{2} \\ 3x-9, & \frac{5}{2} < x < 4 \\ x-1, & x \geq 4 \end{cases}$$

由 $a|x-b| \geq |2x-5| - |x-4|$ 恒成立，即 $f(x)$ 的图像恒在 $g(x)$ 的上方（可重合），如下图所示：



由图可知， $a \geq 3$ ， $1 \leq b \leq 3$ ，或 $1 \leq a < 3$ ， $1 \leq b \leq 4 - \frac{3}{a} \leq 3$ ，

故选：D.

例 2 若对于任意实数 x 和任意正实数 a, b ，不等式 $|2x-1| + |x-m| \geq \frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq \frac{1}{6}$ 或 $m \geq \frac{7}{6}$

【分析】 根据基本不等式易求得 $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b} \leq \frac{2}{3}$ ，故问题转化为对于任意实数 x $|2x-1| + |x-m| \geq \frac{2}{3}$ 恒成立，即求 m 的取值范围，使函数 $f(x) = |2x-1| + |x-m|$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$ ，可利用函数的图象或直接使用绝对值的几何意义求解.

【解析】 令 $2a+b=m, a+2b=n$

$$\text{则 } a = \frac{2m-n}{3}, b = \frac{-m+2n}{3}$$

$$\text{所以 } \frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b} = \frac{2m-n}{3m} + \frac{2n-m}{3n} = \frac{4}{3} - \left(\frac{n}{3m} + \frac{m}{3n}\right) \leq \frac{4}{3} - 2\sqrt{\frac{n}{3m} \cdot \frac{m}{3n}} = \frac{2}{3}$$

不等式 $|2x-1| + |x-m| \geq \frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b}$ 恒成立，即 $|2x-1| + |x-m| \geq \frac{2}{3}$ 恒成立

对于多个一次绝对值函数求最值可以分解为：

设 $f(x) = |2x-1| + |x-m| = \left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|x - \frac{1}{2}\right| + |x-m|$ ，对于 3 个绝对值相加，取得最小值一

定是三个绝对值零点的中间值，

如上述函数，中间零点是 $\frac{1}{2}$ ，所以上述函数当 $x = \frac{1}{2}$ 取得最小值，

$$|2x-1| + |x-m| \geq \left|\frac{1}{2}-m\right|$$

所以 $\left|\frac{1}{2}-m\right| \geq \frac{2}{3}$ ，解得 $m \leq \frac{1}{6}$ 或 $m \geq \frac{7}{6}$ 。

【巩固训练】

1. 设函数 $f(x) = |x+1| + |x-a|$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，则 a 的值为_____。

2. 函数 $f(x) = \sum_{i=1}^{19} |x-n|$ 的最小值为_____。

3. 已知函数 $f(x) = 2|x-2| + ax$ ($x \in \mathbb{R}$) 有最小值，则实常数 a 的取值范围是_____。

4. 函数 $f(x) = x + a|x-1|$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值，则实数 a 的取值范围是_____。

5. 设函数 $f(x) = |x+1| + |x+2| + \cdots + |x+2022| + |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2022|$ ($x \in \mathbb{R}$)，

且 $f(a^2 - 3a + 2) = f(a - 1)$ ，则满足条件的所有整数 a 的和是_____。

6. 已知函数 $f(x) = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \cdots + |100x-1|$ ，则当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $f(x)$ 取得最小值。

【答案或提示】

1. 【答案】3

【提示】 $f(x) = |x-a| + |x-b|$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称，故 $\frac{a-1}{2} = 1$ ，解得 $a = 3$ 。

2. 【答案】90

【提示】利用绝对值的几何意义，知 $f(x) = \sum_{i=1}^{19} |x-n|$ 即 x 轴上动点到 1, 2, 3, ..., 19

距离之和，当 $x = 10$ 时，此时 $f(x) = \sum_{i=1}^{19} |10-n| = 9 + 8 + \cdots + 1 + 0 + 1 + \cdots + 8 + 9 = 90$ 。

3. 【答案】 $[-2, 2]$

【提示】直接去绝对值.

4. 【答案】 $(-\infty, -1]$

【提示】直接去绝对值.

5. 【答案】 6

【解析】易得 $f(x)$ 是偶函数,

$$\text{故 } a^2 - 3a + 2 = a - 1 \text{ 或 } a^2 - 3a + 2 = -(a - 1)$$

$$\text{则 } a = 1 \text{ 或 } a = 3$$

又 $f(0) = f(1) = f(-1)$, 所以 $a = 2$ 也满足题意, 故答案为 6.

6. 【答案】 $\frac{1}{71}$

$$\text{【解析】 } f(x) = \underbrace{|x-1|}_{1\text{项}} + \underbrace{\left|x-\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|}_{2\text{项}} + \underbrace{\left|x-\frac{1}{3}\right| + \cdots + \left|x-\frac{1}{3}\right|}_{3\text{项}} + \cdots + \underbrace{\left|x-\frac{1}{100}\right| + \cdots + \left|x-\frac{1}{100}\right|}_{100\text{项}},$$

$f(x)$ 共表示为 5050 项的和, 其最中间两项均为 $\left|x-\frac{1}{71}\right|$.

$x = \frac{1}{71}$, 同时使第 1 项 $|x-1|$ 与第 5050 项 $\left|x-\frac{1}{100}\right|$ 的和, 第 2 项 $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ 与第 5049 项 $\left|x-\frac{1}{100}\right|$ 的和, 第 3 项与第 5048 项的和, \cdots , 第 2525 项与第 2526 项的和, 取得最小值. 故所求的 x 为 $\frac{1}{71}$.

专题 14 二元不等式恒成立问题

【方法点拨】

1. 对于“双参求一参数范围问题”宜采取变更主元法, 如例 1、例 2, 此类题目的特征是: 含有双参数而问题是求其中一个参数的取值范围, 只需将另一参数视为“主元”, 求出最值即可.

2. 对于“ $f(x) \geq ax+b$ 或 $f(x) \leq ax+b$ 求有关 a 、 b 的代数式取值范围”型, 利用几何意义, 转化为比较零点来处理.

【典型题示例】

例1 若关于 x 的不等式 $x^3 - 3x^2 + ax + b < 0$ 对任意的实数 $x \in [1, 3]$ 及任意的实数 $b \in [2, 4]$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -2)$

【分析】 本题的特征是, 较一般的不等式恒成立问题, 增加了一个变量, 一般是关于该变量的“一次式”, 其解法是: 变更主元, 先看作“一次变量”的恒成立问题即可.

【解析】 先视为以 b 为主元的函数, 设 $f(b) = b + (x^3 - 3x^2 + ax)$

则 $f(b)$ 为关于 b 的一次函数, 在 $b \in [2, 4]$ 上增, 为使 $f(b) < 0$ 恒成立

只需 $f(4) < 0$, 即 $x^3 - 3x^2 + ax + 4 < 0$

再考虑 $x^3 - 3x^2 + ax + 4 < 0$ 在 $x \in [1, 3]$ 恒成立

分离参数可得: $a < 3x - x^2 - \frac{4}{x}$,

设 $g(x) = 3x - x^2 - \frac{4}{x}$, $x \in [1, 3]$, 故 $a < g(x)$ 的最小值

由 $g'(x) = 3 - 2x + \frac{4}{x^2}$, 可得 $1 < x < 2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增; $2 < x < 3$ 时,

$g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减,

又 $g(1) = -2$, $g(3) = -\frac{4}{3}$, 可得 $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 的最小值为 -2 ,

$\therefore a < -2$, 故实数 a 的范围是 $(-\infty, -2)$.

例2 已知函数 $f(x) = 8\ln x + x^2 - 10x + c$, 若对任意 $k \in [-1, 1]$, $x \in (0, 8]$, 不等式 $(k+1)x \geq f(x)$ 恒成立, 求实数 c 的取值范围.

【答案】 $(-\frac{7}{2}, 16 - 8\ln 8]$

【解析】 由 $(k+1)x \geq f(x)$ 在 $x \in (0, 8]$ 恒成立,

整理得 $k \geq \frac{8\ln x}{x} + x - 11 + \frac{c}{x}$ 对任意 $k \in [-1, 1]$ 恒成立,

所以应有 $-1 \geq \frac{8\ln x}{x} + x - 11 + \frac{c}{x}$ 恒成立,

即 $c \leq -8\ln x - x^2 + 10x$ 对 $x \in (0, 8]$ 恒成立.

设 $g(x) = -8\ln x - x^2 + 10x$, $x \in (0, 8]$,

则 $g'(x) = -\frac{8}{x} - 2x + 10 = -\frac{2(x-1)(x-4)}{x}$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = 4$, 列表如下:

x	$(0,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,8)$	8
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0
$g(x)$	\searrow	极小值 $g(1)$	\nearrow	极大值 $g(4)$	\searrow	$16-8\ln 8$

$$g(1)-g(8)=9-16+8\ln 8=8\ln 8-7>8\ln 8-8=8(\ln 8-1)>0,$$

所以 $g(x)$ 在 $x \in (0,8]$ 的最小值为 $g(1)=9-16=8\ln 8-7$, 又 $c < 4$,

$$16-8\ln 8-4=12-8\ln 8 < 12-8\ln e^2=12-16 < 0,$$

所以实数 c 的取值范围是 $(-\infty, 16-8\ln 8]$.

例 3 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $\ln x \leq a(x-2)+b$ 对一切正实数 x 恒成立, 则当 $a+b$ 取最小值时, b 的值为_____.

【答案】 $\ln 3 - \frac{1}{3}$.

【分析】 在平面直角坐标系 xOy 中, 分别作出 $y=\ln x$ 及 $y=a(x-2)+b$ 的图象, 不等式 $\ln x \leq a(x-2)+b$ 对一切正实数 x 恒成立, 即直线 $y=a(x-2)+b$ 恒在曲线 $y=\ln x$ 的上方. $a+b$ 最小, 即直线 $y=a(x-2)+b$ 与 $x=3$ 交点的纵坐标最小. 根据图象可知: $a+b$ 的最小值为 $\ln 3$, 此时直线 $y=a(x-2)+b$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $(3, \ln 3)$, 因此有: $a=\frac{1}{3}$,

$$\text{从而 } b=\ln 3 - \frac{1}{3}.$$

例 4 若 $ae^x \geq \ln x + 1$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $[e^{-1}, +\infty)$

【分析】 取对数, 化双曲为“一直一曲”, 解法同例 3.

【解析】 对 $ae^x \geq \ln x + 1$ 两边取自然对数得 $\ln a + x \geq \ln(\ln x + 1)$

$$\text{故 } -\ln a \leq 1, \quad a \geq e^{-1}$$

所以 a 的取值范围是 $[e^{-1}, +\infty)$.

例 5 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $e^x - 1 \geq ax - b$ 恒成立, 则 $\frac{b-a+1}{a}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $[\ln 2 - 1, +\infty)$

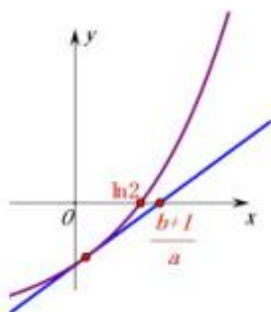
【分析】 所求 $\frac{b-a+1}{a} = \frac{b+1}{a} - 1$, 为了出现 $\frac{b+1}{a}$, 将 $e^x - 1 \geq ax - b$ 变形为

$$e^x - 2 \geq ax - (b+1), \quad \text{此时 } \frac{b+1}{a} \text{ 的几何意义是直线 } y = ax - (b+1) \text{ 在 } x \text{ 轴上的截距即}$$

函数 $y = ax - (b+1)$ 的零点, 根据图象可知, 当 $e^x - 2 \geq ax - (b+1)$ 时, 曲线 $y = e^x - 2$

在任意一点的切线的零点都不小于曲线的零点，即 $\frac{b+1}{a} \geq \ln 2$ ，所以

$$\frac{b-a+1}{a} = \frac{b+1}{a} - 1 \geq \ln 2 - 1, \quad \frac{b-a+1}{a} \text{ 的取值范围是 } [\ln 2 - 1, +\infty).$$



点评：

对于 $f(x) \geq ax+b$ 或 $f(x) \leq ax+b$ 型恒成立，求有关 a 、 b 的代数式取值范围问题的解题步骤是：

- ① 判断函数的凸凹性（当 $f''(x) > 0$ 时，函数为凹函数；当 $f''(x) < 0$ 时，函数为凸函数），从而得出因凸凹的不同，切线在曲线的上下的不同；
- ② 凑配条件中的参数系数，求曲线和切线的零点，比较零点的大小即可。

例 6 已知 $a > 0$ ，若不等式 $ax^2 + bx - 1 \geq \ln x$ 恒成立，则 $\frac{b}{a}$ 的最小值是_____。

【答案】 $-\frac{1}{e}$

【分析】 问题转化为 $ax^2 + bx \geq \ln x + 1$ ，设 $f(x) = ax^2 + bx$ 、 $g(x) = \ln x + 1$ ，则两函数左右两侧的凸凹性相反，从形上看，若 b （ $b < 0$ ）固定不变，当 a 变大时，抛物线的开口程度越大，此时 $\frac{b}{a}$ 越小，欲求使 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立时 $\frac{b}{a}$ 的最小值，则两函数图象相切即为“临界状态”；另一方面， $f(x) = x(ax+b)$ ，函数的零点为 $-\frac{b}{a}$ 、 0 ，故 $-\frac{b}{a}$ 的几何意义是函数 $f(x)$ 的一个零点，零点的最大值即 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点运动到最优时，从形上看不能知道，零点即“公切点”时满足题意。

【解析】 设 $f(x) = ax^2 + bx$ 、 $g(x) = \ln x + 1$

则函数 $f(x) = ax^2 + bx$ 的零点 $-\frac{b}{a}$ 即为两函数的“公切点”时满足题意

令 $g(x) = \ln x + 1 = 0$ 得， $x = \frac{1}{e}$ ，

所以 $-\frac{b}{a} = \frac{1}{e}$, 即 $\frac{b}{a} = -\frac{1}{e}$, 此即为所求 $\frac{b}{a}$ 的最小值.

【点评】

1. 本题解法的实质是, 构造的两函数的零点相同.
2. 本题也可转化为 $ax + b \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 再利用“形”来求解.

【巩固训练】

1. 若不等式 $bx + c + 9\ln x \leq x^2$, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $b \in (0, 3)$ 恒成立, 则实数 c 的取值范围为_____.
2. 设函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + b (x \in \mathbf{R})$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$. 若对于任意的 $a \in [-2, 2]$, 不等式 $f(x) \leq 1$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立, 则 b 的取值范围为_____.
3. 设 a, b 均为实数, 已知函数 $f(x) = axe^x (a \in \mathbf{R})$, 若不等式 $f(x) \geq 2x^2 + bx$ 对任意的 $a \geq 1$ 及任意的 $x > 0$ 恒成立, 求 b 的取值范围;
4. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $\ln x - 1 \leq ax - b$ 恒成立, 则 $\frac{b-a+1}{a}$ 的取值范围是_____.
5. 已知直线 $y = ax + b$ 与曲线 $f(x) = \ln x - 1$ 相切, 则 $\frac{b}{a}$ 的最小值是 ().
A. $-\frac{1}{e^2}$ B. $-e^2$ C. $-e$ D. $-\frac{1}{e}$
6. 若不等式 $e^x - 4x + 2 \geq ax + b$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $\frac{b-4}{a+4}$ 的最大值是 ().
A. $2 - 2\ln 2$ B. $-1 - \ln 2$ C. $-\ln 2$ D. $-2\ln 2$
7. 已知 e 为自然对数的底数, 不等式 $e^x \geq ax + b (a \neq 0, b \in \mathbf{R})$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $\frac{b-3}{a}$ 的最大值为 ().
A. $1 - \ln 3$ B. $-\ln 3$ C. $-1 - \ln 3$ D. $-2 - \ln 3$

【答案与提示】

1. 【答案】 $(-\infty, -9\ln 3)$

2. 【答案】 $(-\infty, -4]$.

3. 【分析】 变更主元、分离参数，可得 $e^x - 2x \geq b$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立，构造函数

$\varphi(x) = e^x - 2x$ ，利用导数求出函数的最值即可求出 b 的范围，

【解析】 由 $f(x) = 2x^2 + bx$ ，得 $ax \leq e^x - 2x^2 + bx$ ，由于 $x > 0$ ，

所以 $ae^x \leq 2x + b$ 对任意的 $a \geq 1$ 及任意的 $x > 0$ 恒成立.

由于 $e^x > 0$ ，所以 $ae^x \leq e^x$ ，所以 $e^x - 2x \geq b$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立.

设 $\varphi(x) = e^x - 2x$ ， $x > 0$ ，则 $\varphi'(x) = e^x - 2$ ，

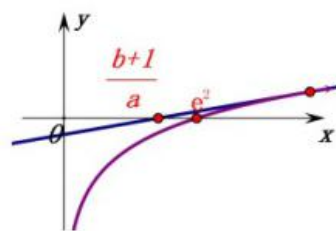
所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$ ，

所以 $b \geq 2 - 2\ln 2$.

4. 【答案】 $(-\infty, e^2 - 1]$

【提示】 如图中，同例 3，易得 $\frac{b+1}{a} \leq e^2$.



5. 【答案】 C

6. 【答案】 C

【提示】 将 $e^x - 4x + 2 \geq ax + b$ 变形为 $e^x - 2 \geq (a+4)x + (b-4)$ 即可.

7. 【答案】 B

专题 15 利用结构相同函数解题

【方法点拨】

1. 一个方程中出现两个变量,适当变形后,使得两边结构相同;或不等式两边式子也可适当变形,使其两边结构相同,然后构造函数,利用函数的单调性把方程或不等式化简.

2. 同构的基本策略是:“左右形式相当,一边一个变量,取左或取右,构造函数妥当”.

【典型题示例】

例 1 (2022·江苏苏大考前指导卷) 已知 $a > b > 0$, 且 $a < b + \ln \frac{a}{b}$ 成立, 则 ()

A. $a < 1$

B. $a > 1$

C. $0 < b < 1$

D. $a > b > 1$

【答案】C

【分析】利用构造函数法,结合导数求得正确答案.

【解析】依题意, $a > b > 0$, $a < b + \ln \frac{a}{b}$, $a - b < \ln a - \ln b$, $a - \ln a < b - \ln b$,

构造函数 $f(x) = x - \ln x (x > 0)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; 在区间 $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增.

若 $a > b \geq 1$, 则 $f(a) > f(b)$, $a - \ln a > b - \ln b$, 不符合题意.

若 $1 \geq a > b > 0$, 则 $f(a) < f(b)$, $a - \ln a < b - \ln b$, 符合题意,

若 $a > 1 > b > 0$, 此时对任意 $b \in (0, 1)$, $f(x) = f(b)$ 有两个不同的实数根 b, x_0 ,

则存在 $x_0 > a > 1 > b > 0$, 使“ $a > b > 0$ 且 $a < b + \ln \frac{a}{b}$ ”成立.

对任意 $a \in (1, +\infty)$, $f(x) = f(a)$ 有两个不同的实数根 a, x_1 ,

则存在 $0 < b < x_1 < 1 < a$, 使“ $a > b > 0$ 且 $a < b + \ln \frac{a}{b}$ ”成立.

综上所述, $0 < b < 1$.

故选: C

例2 (2022·全国高中数学联赛江苏苏州选拔赛 7)若关于 x 的不等式 $\ln(ax) + ax \leq x + e^x$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为_____.

【答案】 e

【分析】 关于 x 的不等式 $\ln(ax) + ax \leq x + e^x$ 恒成立, 即关于 x 的不等式

$\ln(ax) + e^{\ln(ax)} \leq x + e^x$ 恒成立, 则 $\ln(ax) \leq x$, 即 $ax \leq e^x$, 分 $a = 0, a < 0, a > 0$ 三种情况讨论, 分离参数, 构造新的函数, 利用导数求出函数的最值, 从而可得出答案.

【解析】 关于 x 的不等式 $\ln(ax) + ax \leq x + e^x$ 恒成立,

即关于 x 的不等式 $\ln(ax) + e^{\ln(ax)} \leq x + e^x$ 恒成立,

因为函数 $y = x + e^x$ 为增函数,

所以 $\ln(ax) \leq x$, 所以 $ax \leq e^x$,

当 $a = 0$ 时, $\ln(ax)$ 无意义, 故 $a \neq 0$; 当 $a < 0$ 时, 则 $x < 0$, 则 $a \geq \frac{e^x}{x}$,

令 $f(x) = \frac{e^x}{x} (x < 0)$, 则 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} < 0 (x < 0)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0_-$, 所以 $a \geq 0$, 与 $a < 0$ 矛盾, 所以 $a < 0$ 舍去,

当 $a > 0$ 时, 则 $a \leq \frac{e^x}{x}$,

令 $h(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} (x > 0)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = e$,

所以 $0 < a \leq e$,

综上所述, $0 < a \leq e$,

所以实数 a 的最大值为 e .

故答案为: e .

点评: 利用同构得出 $ax \leq e^x$ 后, 由函数图象则易得 $0 < a \leq e$, 故实数 a 的最大值为 e .

例 3 (2022·江苏南通一模) 已知 α, β 均为锐角, 且 $\alpha + \beta - \frac{\pi}{2} > \sin \beta - \cos \alpha$,

则

A. $\sin \alpha > \sin \beta$

B. $\cos \alpha > \cos \beta$

C. $\cos \alpha > \sin \beta$

D. $\sin \alpha > \cos \beta$

【答案】D

【解析】 $\alpha + \beta - \frac{\pi}{2} > \sin \beta - \cos \alpha$, $\beta - \sin \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

令 $f(x) = x - \sin x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上 ↗,

$\therefore \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\cos \beta < \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\therefore \cos \beta < \sin \alpha$, 选 D.

例 4 (2021·江苏新高考适应性考试·8) 已知 $a < 5$ 且 $ae^5 = 5e^a$, $b < 4$ 且 $be^4 = 4e^b$,

$c < 3$ 且 $ce^3 = 3e^c$, 则 ()

A. $c < b < a$	B. $b < c < a$	C. $a < c < b$	D. $a < b < c$
----------------	----------------	----------------	----------------

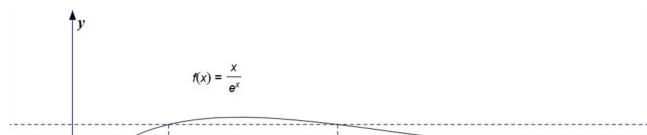
【答案】D

【解析一】 往结构相同方向变形, 将已知变形为 $\frac{e^a}{a} = \frac{e^5}{5}$, $\frac{e^b}{b} = \frac{e^4}{4}$, $\frac{e^c}{c} = \frac{e^3}{3}$,

设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单减, 在 $(1, +\infty)$ 上单增

所以 $f(3) < f(4) < f(5)$, $f(c) < f(b) < f(a)$, 所以 $a < b < c$.



【解析二】将已知两边取对数： $\ln a + 5 = \ln 5 + a$ ， $\ln b + 4 = \ln 4 + b$ ， $\ln c + 3 = \ln 3 + c$ ，
再往结构相同方向变形： $a - \ln a = 5 - \ln 5$ ， $b - \ln b = 4 - \ln 4$ ， $c - \ln c = 3 - \ln 3$

设函数 $f(x) = x - \ln x$ ，则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单减，在 $(1, +\infty)$ 上单增

所以 $f(3) < f(4) < f(5)$ ， $f(c) < f(b) < f(a)$ ，所以 $a < b < c$ 。

例 5 已知实数 a, b 满足 $3^a + a = 7$ ， $\log_3 \sqrt[3]{3b+1} + b = 2$ ，则 $a + 3b =$ _____。

【答案】16

【解析】令 $\log_3 \sqrt[3]{3b+1} = c$ ，则 $b = \frac{1}{3}(3^{3c} - 1)$ ，代入 $\log_3 \sqrt[3]{3b+1} + b = 2$ 可化为

$$c + \frac{1}{3}(3^{3c} - 1) = 2, \text{ 即 } 3^{3c} + 3c = 7$$

设 $f(x) = 3^x + x - 7$ ，则 $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x + 1 > 0$ ， $f(x)$ 在 R 上单增

故 $f(x) = 3^x + x - 7 = 0$ 只有一个零点

所以 $a = 3c$ ，即 $3 \log_3 \sqrt[3]{3b+1} = a$ ， $3^a = 3b + 1$

所以 $a + 3^b = a + 3^a - 1 = 7 - 1 = 6$ 。

例 6 已知函数 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ ， $f(1 - 2 \log_3 t) + f(3 \log_3 t - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} t$ ，则 t 的取值范围是_____。

【答案】 $[1, +\infty)$

【分析】这里可以发现 $\log_{\frac{1}{3}} t = -\log_3 t = (2 \log_3 t - 1) - (3 \log_3 t - 1)$ ，将
 $f(1 - 2 \log_3 t) + f(3 \log_3 t - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} t$ 移项变形为
 $f(3 \log_3 t - 1) + (3 \log_3 t - 1) \geq (2 \log_3 t + 1) - f(1 - 2 \log_3 t)$ ，易知 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ 是奇函数，
 $-f(1 - 2 \log_3 t) = f(2 \log_3 t + 1)$ ，故进一步变形为

$f(3\log_3 t - 1) + (3\log_3 t - 1) \geq f(2\log_3 t - 1) + (2\log_3 t - 1)$ ，此时，得到一个“左右形式相当，一边一个变量”的不等式，令 $F(x) = f(x) + x$ ，问题转化为 $F(3\log_3 t - 1) \geq F(2\log_3 t - 1)$ ，只需研究 $F(x) = f(x) + x$ 的单调性，逆用该函数的单调性即可。

【解析】 $\because \log_{\frac{1}{3}} t = -\log_3 t = -(1 - 2\log_3 t) - (3\log_3 t - 1)$

$\therefore f(1 - 2\log_3 t) + f(3\log_3 t - 1) \geq \log_{\frac{1}{3}} t$ 可变形为：

$$f(3\log_3 t - 1) + (3\log_3 t - 1) \geq (2\log_3 t - 1) - f(1 - 2\log_3 t)$$

$\because f(x) = 3^x - 3^{-x}$ 是奇函数

$$\therefore -f(1 - 2\log_3 t) = f(2\log_3 t - 1)$$

$$\therefore f(3\log_3 t - 1) + (3\log_3 t - 1) \geq f(2\log_3 t - 1) + (2\log_3 t - 1)$$

令 $F(x) = f(x) + x = 3^x - 3^{-x} + x$ ，则 $F'(x) = \ln 3 \cdot 3^x + \ln 3 \cdot 3^{-x} + 1 > 0$

$\therefore F(x)$ 单增

$$\therefore 3\log_3 t - 1 \geq 2\log_3 t - 1, \text{ 即 } \log_3 t \geq 0, \text{ 解之得 } t \geq 1$$

所以 t 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 。

例 7 已知实数 x_1, x_2 满足 $x_1 e^{x_1} = e^3, x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5$ ，则 $x_1 x_2 =$ _____。

【答案】 e^5

【分析】由已知条件考虑将两个等式转化为统一结构形式，令 $\ln x_2 - 2 = t, x_2 = e^{t+2}$ ，得到

$te^t = e^3$ ，研究函数 $f(x) = xe^x$ 的单调性，求出 x_1, t 关系，即可求解。

【解析一】实数 x_1, x_2 满足 $x_1 e^{x_1} = e^3, x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5$ ，

$$x_1 > 0, x_2 > e^2, \ln x_2 - 2 = t > 0, x_2 = e^{t+2}, \text{ 则 } te^t = e^3,$$

$$f(x) = xe^x (x > 0), f'(x) = (x+1)e^x > 0 (x > 0),$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，而 $f(x_1) = f(t) = e^3$ ，

$$\therefore x_1 = t = \ln x_2 - 2, \therefore x_1 x_2 = x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5.$$

【解析二】对 $x_1 e^{x_1} = e^3$ 两边取自然对数得: $\ln x_1 + x_1 = 3$,

$$\text{对 } x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5 \text{ 两边取自然对数得: } \ln x_2 + \ln (\ln x_2 - 2) = 5 \quad (*)$$

为使两式结构相同, 将 $(*)$ 进一步变形为: $(\ln x_2 - 2) + \ln (\ln x_2 - 2) = 3$

$$\text{设 } f(x) = \ln x + x, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $f(x) = 3$ 的解只有一个.

$$\therefore x_1 = \ln x_2 - 2, \therefore x_1 x_2 = (\ln x_2 - 2) x_2 = e^5$$

点评:两种解法实质相同, 其关键是对已知等式进行变形, 使其“结构相同”, 然后构造函数, 利用函数的单调性, 利用是同一方程求解.

【巩固训练】

1. 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2 \log_4 b$, 则 ()

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

2. 若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则 ()

- A. $\ln(y-x+1) > 0$ B. $\ln(y-x+1) < 0$ C. $\ln|x-y| > 0$ D. $\ln|x-y| < 0$.

3. (多选题) 已知对任意 $x, y \in (0, 2)$, $(x-1)^3 - 3y \geq (1-y)^3 + 3x - 6$ 恒成立, 则

- A. $x+y \geq 2$ B. $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq \frac{9}{2}$
C. $x^2 + 3xy \leq 4$ D. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} \leq 2\sqrt{3}$

4. 如果 $\cos^5 \theta - \sin^5 \theta < 7(\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 则 θ 的取值范围是_____.

5. 不等式 $\frac{8}{(x+1)^3} + \frac{10}{x+1} - x^3 - 5x > 0$ 的解集是_____.

6. 已知 $\theta \in [0, 2\pi)$, 若关于 k 的不等式 $\sqrt{\sin \theta} - \sqrt{\cos \theta} \leq k(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$ 在 $(-\infty, -2]$ 上恒成立, 则 θ 的取值范围为_____.

7. 已知实数 $a, b \in (0, 2)$, 且满足 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$, 则 $a+b$ 的值为_____.

8. 设方程 $x + 2^x = 4$ 的根为 m , 方程 $x + \log_2 x = 4$ 的根为 n , 则 $m+n =$ _____.

9. 已知 $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$, $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$, 那么 $a+b$ 的值是_____.

10. 不等式 $x^6 - (x+2)^3 + x^2 \leq x^4 - (x+2)^2 + x + 2$ 的解集是_____.

11. 若 x_1 满足 $2x + 2^x = 5$, x_2 满足 $2x + 2 \log_2 (x-1) = 5$, $x_1 + x_2 =$ ()

A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. $\frac{7}{2}$ D. 4

12. 已知实数 $a, b \in (\sqrt{2}, +\infty)$, 且满足 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} > \ln \frac{b}{a}$, 则 a, b, \sqrt{ab} 的大小关系是_____.

13. 已知关于 x 的方程 $2^{x^2+1} - 2^{ax} = -x^2 + ax - 1$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上有两个不相等的实数根, 则实数 a 的取值范围为_____.

14. 已知 $a, b, c \in (0, 1)$, 且 $a^2 - 2 \ln a + 1 = e$, $b^2 - 2 \ln b + 2 = e^2$, $c^2 - 2 \ln c + 3 = e^3$ 其中 e 是自然对数的底数, 则

A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

15. 已知 $x \ln x = 2021$, $xe^x = 2021$ 的根分别为 x_1, x_2 , 则下列关于 x_1, x_2 的式子中等于 2021 的是()

A. $x_1 + x_2$ B. $x_1 - x_2$ C. $x_1 x_2$ D. $\frac{x_1}{x_2}$

16. 若方程 $3^x + 9x = 36$, $x + \log_3 x = 2$ 的根分别为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 =$ _____.

17. (2022 · 南京零模复习卷 · 8) 已知 $a > 1, b > 1$, 且 $\frac{e^a}{a} = \frac{e^{b+1} + 1}{b+1}$, 则下列结论一定正确的是 ()

A. $\ln(a+b) > 2$ B. $\ln(a-b) > 0$ C. $2^{a+1} < 2^b$ D. $2^a + 2^b < 2^3$

18. (2022·江苏金陵中学·网课质检卷·7) 已知 $a+2^a=2, b+3^b=2$, 则 $\lg a$ 与 $\lg b$ 的大小关系是

- A. $\lg a < \lg b$ B. $\lg a = \lg b$ C. $\lg a > \lg b$ D. 不确定

19. (2022·江苏南京零模·8) 已知 $a, b, c \in (0, 1)$, 且 $a^2 - 2 \ln a + 1 = e, b^2 - 2 \ln b + 2 = e^2, c^2 - 2 \ln c + 3 = e^3$, 其中 e 是自然对数的底数, 则

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【答案与提示】

1. 【答案】B

【解析】 $\because 4^b + 2 \log_4 b = 2^{2b} + \log_4 b^2 = 2^{2b} + \log_2 b = 2^{2b} + \log_2 2b - 1$

$\therefore 2^a + \log_2 a = 2^{2b} + \log_2 2b - 1$, 故 $2^a + \log_2 a < 2^{2b} + \log_2 2b$

设 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 则 $f(x)$ 为增函数,

所以 $f(a) < f(2b)$, 所以 $a < 2b$.

$$f(a) - f(b^2) = 2^a + \log_2 a - (2^{b^2} + \log_2 b^2) = 2^{2b} + \log_2 b - (2^{b^2} + \log_2 b^2) =$$

$$2^{2b} - 2^{b^2} - \log_2 b,$$

当 $b=1$ 时, $f(a) - f(b^2) = 2 > 0$, 此时 $f(a) > f(b^2)$, 有 $a > b^2$

当 $b=2$ 时, $f(a) - f(b^2) = -1 < 0$, 此时 $f(a) < f(b^2)$, 有 $a < b^2$, 所以 C、D 错误.

故选 B.

2. 【答案】A

【分析】将已知 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ 按照“左右形式形式相当, 一边一个变量”的目的变形, 然后逆用函数的单调性.

【解析】由 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ 移项变形为 $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$

设 $f(x) = 2^x - 3^{-x}$

易知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的增函数, 故由 $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$, 可得 $x < y$, 所以

$y - x > 0 \Rightarrow y - x + 1 > 1$, 从而 $\ln(y - x + 1) > 0$, 故选 A.

3. 【答案】BD

$(x-1)^3 - 3y \geq (1-y)^3 + 3x - 6$ 可变形为 $(x-1)^3 - 3(x-1) \geq (1-y)^3 - 3(1-y)$

设 $f(x) = x^3 - 3x$ ($x \in (-1, 1)$), 则 $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$, $f(x)$ 是奇函数且在 $x \in (-1, 1)$ 单减

所以 $x-1 \leq 1-y$, 故 $0 < x+y \leq 2$, 排除 A.

对于 B, 由权方和不等式有 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq \frac{1^2 + 2^2}{x+y} = \frac{9}{2}$, 故 B 正确.

对于 C, 当 $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ 时, $x^2 + 3xy = \frac{9}{2} > 4$, 不成立.

对于 D, $(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1})^2 = (2x+1) + (2y+1) + 2\sqrt{(2x+1)(2y+1)}$

$\leq (2x+1) + (2y+1) + [(2x+1) + (2y+1)] \leq 12$, 所以 $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} \leq 2\sqrt{3}$, 故 D 正确.

4. 【答案】 $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$

【提示】变形为 $\cos^5 \theta - 7\cos^3 \theta < \sin^5 \theta - 7\sin^3 \theta$.

5. 【解析】原不等式可化为: $\left(\frac{2}{x+1}\right)^3 + 5 \cdot \frac{2}{x+1} > x^3 + 5x$

构造函数 $f(x) = x^3 + 5x$, 则 $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单增

所以 $\frac{2}{x+1} > x$, 解之得 $x < -2$ 或 $-1 < x < 1$

所以原不等式解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } -1 < x < 1\}$.

6. 【答案】 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

【分析】本题的实质是含参数 θ (这里当然是 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$) 的不等式恒成立问题, 应抓住

已知条件 $\sqrt{\sin \theta} - \sqrt{\cos \theta} \leq k(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$ 的对称结构, 构造函数, 利用函数的单调性

布列不等式.

【解析】看到 $\sqrt{\sin \theta} - \sqrt{\cos \theta} \leq k(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$ 想“对称结构”, 将它变形为:

$$k \sin^3 \theta - \sqrt{\sin \theta} \geq k \cos^3 \theta - \sqrt{\cos \theta},$$

$$\text{设 } f(x) = kx^3 - \sqrt{x}, \quad f'(x) = 3kx^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

易知当 $k \in (-\infty, -2]$ 时, $f'(x) = 3kx^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单减,

$$\text{所以 } \begin{cases} \sin \theta \leq \cos \theta \\ \sin \theta \geq 0 \\ \cos \theta \geq 0 \end{cases}, \text{ 解之得: } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

所以 θ 的取值范围 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

7. 【答案】2

【分析】将 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$ 化为: $a^2 + 2^a = (2-b)^2 + 2^{2-b}$, 设 $f(x) = x^2 + 2^x$,

则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增, 由 $f(a) = f(2-b)$, 得 $a+b$ 的值.

【解析】由 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$, 化简为: $a^2 + 2^a = 2^{2-b} + (b-2)^2$, 即

$$a^2 + 2^a = (2-b)^2 + 2^{2-b},$$

设 $f(x) = x^2 + 2^x$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增, 因为 $a, b \in (0, 2)$, 所以 $2-b \in (0, 2)$,

且 $f(a) = f(2-b)$, 所以 $a = 2-b$, 即 $a+b = 2$.

8. 【答案】4

9. 【答案】2

【解析】由题意知 $a^3 - 3a^2 + 5a - 3 = -2$, $b^3 - 3b^2 + 5b - 3 = 2$,

设 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, 则 $f(a) = -2$, $f(b) = 2$.

因为 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1, 0)$, 所以 $a+b = 2$.

点评: 本题的难点在于发现函数的对称性, 对于三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 其对称中心为 $(x_0, f(x_0))$, 其中 $f''(x_0) = 0$.

10. 【答案】 $[-1, 2]$

【分析】直接解显然是不对路的. 观察不等式的特征, 发现其含有 $(x+2)$ 、 x 两个因式, 将不等式转化为“一边一个变量”的形式为:

$$x^6 - x^4 + x^2 \leq (x+2)^3 - (x+2)^2 + (x+2), \text{ 构造函数 } f(x) = x^3 - x^2 + x, \text{ 题目}$$

转化为求解 $f(x^2) \leq f(x+2)$ 的问题. 因为 $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$, 易知

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 为 R 上的单调增函数, 所以由

$f(x^2) \leq f(x+2)$ 立得: $x^2 \leq x+2$, 解之得 $-1 \leq x \leq 2$.

11. 【答案】C

12. 【答案】 $a > \sqrt{ab} > b$

【提示】 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} > \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} > \ln b - \ln a \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \ln a > \frac{1}{b^2} + \ln b$

构造函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln x$, 单增.

13. 【答案】 $(2, \frac{5}{2}]$

【解析】因为方程 $2^{x^2+1} - 2^{ax} = -x^2 + ax - 1$, 所以变形为 $2^{x^2+1} + (x^2 + 1) = 2^{ax} + ax$,

令 $f(t) = 2^t + t$, 则有 $f(x^2 + 1) = f(ax)$,

因为 $f(t) = 2^t + t$ 在 R 上单调递增, 所以 $f(x^2 + 1) = f(ax)$ 即为 $x^2 + 1 = ax$,

故当 $x \in [\frac{1}{2}, 3]$ 时, $x^2 + 1 = ax$ 有两个不相等的实数根,

在 $x^2 + 1 - ax = 0$ 中, 则有 $\begin{cases} \frac{1}{2} & -a & 3 \\ 2 & -2 \times 1 & \\ \Delta & > 0 \\ f(\frac{1}{2}) & 0 \\ f(3) & 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 1 & a & 6 \\ a^2 - 4 & > 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + 1 & 0 \\ 9 - 3a + 1 & 0 \end{cases}$, 解得 $2 < a \leq \frac{5}{2}$,

所以实数 a 的取值范围为 $(2, \frac{5}{2}]$.

14. 【答案】A

【解析】设 $f(x) = x^2 - 2\ln x, g(x) = e^x - x$, 则

$f(a) = g(1), f(b) = g(2), f(c) = g(3)$,

又 $g'(x) = e^x - 1 > 0 (x > 0)$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(3) > g(2) > g(1)$, 即 $f(c) > f(b) > f(a)$,

因为 $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} < 0 (x \in (0, 1))$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以

$a > b > c$.

15. 【答案】C

16. 【答案】4

【提示】对于方程 $3^{x_1} + 9x_1 = 36$ 两边同时除以 9 得 $3^{x_1-2} + x_1 = 4$, 即 $3^{x_1-2} + (x_1 - 2) = 2$ ①

$x_2 + \log_3 x_2 = 2$, 即 $3^{\log_3 x_2} + \log_3 x_2 = 2$ ②

① ②为同一方程, 故 $x_1 - 2 = \log_3 x_2$, 代入 $x_2 + \log_3 x_2 = 2$ 得 $x_1 + x_2 - 2 = 2$, 故 $x_1 + x_2 = 4$.

17. 【答案】B

【解析】考察函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} (x > 1)$, 易得 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} > 0$

$\therefore f(x) = \frac{e^x}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 单增

$\therefore \frac{e^a}{a} = \frac{e^{b+1} + 1}{b+1} > \frac{e^{b+1}}{b+1}$ 且 $a > 1, b > 1$

$\therefore a > b+1$, 故 $\ln(a-b) > 0$, B 正确.

18. 【答案】C

【分析】所求即判断 $\frac{\lg a}{a}$ 、 $\frac{\lg b}{b}$ 的大小, 应考察函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 的单调性及 a 、 b 的大小.

【解析】由已知得 $2^a = 2 - a$, $3^b = 2 - b$, 在同一坐标系内作出函数 $y = 2^x$ 、 $y = 3^x$ 及

$y = -x + 2$ 图象, 由图象不难得出 $1 > a > b > 0$

考察函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x} (0 < x < 1)$, $f'(x) = \frac{\lg e - \lg x}{x^2} > 0$

$\therefore f(x) = \frac{e^x}{x}$ 在 $(0, 1)$ 单增

$\therefore \frac{\lg a}{a} > \frac{\lg b}{b}$, 故 $b \lg a > a \lg b$, C 正确.

19. 【答案】A

【解析】设 $f(x) = x^2 - 2 \ln x, g(x) = e^x - x$, 则

$$f(a)=g(1), f(b)=g(2), f(c)=g(3),$$

又 $g'(x)=e^x-1>0(x>0)$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(3)>g(2)>g(1)$ ，即 $f(c)>f(b)>f(a)$ ，

因为 $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}<0(x\in(0,1))$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以

$$a>b>c.$$

专题 16 运用同构求值

【方法点拨】

含有指对运算的方程称之为超越方程，遇到相关的求值问题，可考虑“同构”，其关键是对已知等式进行变形，使其“结构相同”，然后构造函数利用函数的单调性，最终利用两方程“同解”来求解。

【典型题示例】

例 1 (2022·新高考 I·22 改编) 已知函数 $f(x)=e^x-x$ 和 $g(x)=x-\ln x$ ，存在直线 $y=b$ ，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点

的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 ，则 $\frac{x_1+x_3}{x_2}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】2

【分析】 由“等高”得 $b=f(x_1)=f(x_2)=g(x_2)=g(x_3)$ ，即

$$e^{x_1}-x_1=e^{x_2}-x_2=x_2-\ln x_2=x_3-\ln x_3，这样就建立 x_1, x_2, x_3 间的等量关系，为达到$$

“减元”之目的，需在纷杂的关系中，梳理出 $e^{x_1}-x_1=x_2-\ln x_2$ 、 $e^{x_2}-x_2=x_3-\ln x_3$ 两

组关系，发现“指对同现”想“同构”，从而得到 $x_1=\ln x_2$ ， $x_3=e^{x_2}$ ，代入求解即得解。

【解析】令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$ 得 $x = 0$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，且 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$ 。

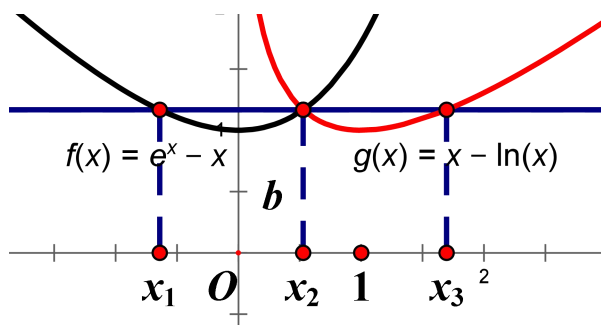
令 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0$ 得 $x = 1$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数，在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，且 $g(x)_{\min} = g(1) = 1$ 。

故函数 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$ 有相同的最小值 1

如下图所示，当直线 $y = b$ 过函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的交点时，满足题意，

此时 $b > 1$ ，故 $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$



由 $b = f(x_1) = f(x_2) = g(x_2) = g(x_3)$ ，

得 $e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3$

$$\text{即} \begin{cases} e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 \\ x_3 - \ln x_3 = e^{x_2} - x_2 \\ e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2 \end{cases}$$

一方面 $e^{x_1} - x_1 = x_2 - \ln x_2$ ，而 $e^{x_1} - x_1 = e^{x_1} - \ln e^{x_1} = g(e^{x_1})$

所以 $g(x_2) = g(e^{x_1})$

又因为 $0 < e^{x_1} < 1$ ， $0 < x_2 < 1$ ，且 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数

所以 $x_2 = e^{x_1}$ ，所以 $x_1 = \ln x_2$

另一方面，由 $e^{x_2} - x_2 = x_3 - \ln x_3$ ，同理可得 $x_3 = e^{x_2}$

所以 $\frac{x_1 + 3}{x_2} = \frac{\ln x_2 + e^{x_2}}{x_2}$

再由 $b = f(x_2) = e^{x_2} - x_2$ 和 $b = g(x_2) = x_2 - \ln x_2$ 得 $b = e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$

据果移项得 $e^{x_2} + \ln x_2 = 2x_2$ ，所以 $\frac{\ln x_2 + e^{x_2}}{x_2} = 2$

综上， $\frac{x_1 + 3}{x_2} = 2$ 。

例 2 (2022 · 四川 · 成都 · 二检) 已知函数 $f(x) = 9^x + \frac{\log_3 \sqrt{x-1}}{x^2 - x}$ 的零点为 x_0 ，则

$9^{x_0}(x_0 - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】1

【分析】“据果变形”，由题意得 $9^{x_0} = -\frac{\log_3 \sqrt{x_0-1}}{x_0^2 - x_0}$ ，所以 $9^{x_0}(x_0 - 1) = \frac{1}{x_0 - 1} \log_9 \frac{1}{x_0 - 1}$ ，观察

期结构特征，对右侧实施变形 $\frac{1}{x_0 - 1} \log_9 \frac{1}{x_0 - 1} = 9^{\log_9 \frac{1}{x_0 - 1}} \cdot \log_9 \frac{1}{x_0 - 1}$ ，设 $g(x) = x \cdot 9^x$ 即可。

【解析】由题意得： $9^{x_0} = -\frac{\log_3 \sqrt{x_0-1}}{x_0^2 - x_0}$

$\therefore 9^{x_0}(x_0 - 1) = \frac{1}{x_0 - 1} \log_9 \frac{1}{x_0 - 1} = 9^{\log_9 \frac{1}{x_0 - 1}} \cdot \log_9 \frac{1}{x_0 - 1}$

设 $g(x) = x \cdot 9^x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单增

故有 $x_0 = \log_9 \frac{1}{x_0 - 1}$ ，即 $9^{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1}$

$\therefore 9^{x_0}(x_0 - 1) = 1$ 。

例 3 (2022 · 江苏七市三模) 已知函数 $y = x + e^x$ 的零点为 x_1 ， $y = x + \ln x$ 的零点为 x_2 ，则

A. $x_1 + x_2 > 0$

B. $x_1 x_2 < 0$

C. $e^{x_1} + \ln x_2 = 0$

D. $x_1 x_2 - x_1 + x_2 < 1$

【答案】BCD

【解析】 $x_1 + e^{x_1} = x_2 + \ln x_2 = 0$ ，则 $x_1 + e^{x_1} = \ln x_2 + e^{\ln x_2}$ ，

显然 $f(x) = x + e^x$ 单增, 故 $x_1 = \ln x_2$ 等价于 $e^{x_1} = x_2$, 则 $x_1 + x_2 = x_1 + e^{x_1} = 0$,
故 A 错误;

因为 $f(x) = x + e^x$ 单增, 且 $f(0) = 1$, 故 $f(x_1) = 0 < f(0)$, 则 $x_1 < 0$

故 $x_1 x_2 = x_1 e^{x_1} < 0$, 则 B 正确;

$e^{x_1} + \ln x_2 = x_2 + \ln x_2 = 0$, 则 C 正确;

D. $x_1 x_2 - x_1 + x_2 < 1 \Leftrightarrow x_1(x_2 - 1) < 1 - x_2$, 因为 $x_2 + \ln x_2 = 0 < 1 + \ln 1$, 故
 $x_2 < 1$,

则 $x_1(x_2 - 1) < 1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 > -1$, 而 $x_1 + e^{x_1} = 0 > -1 + e^{-1}$, 则 $x_1 > -1$, 故 D
正确.

例 4 已知实数 x_1, x_2 满足 $x_1 e^{x_1} = e^3, x_2(\ln x_2 - 2) = e^5$, 则 $x_1 x_2 =$ _____.

【答案】 e^5

【分析】 由已知条件考虑将两个等式转化为统一结构形式, 令 $\ln x_2 - 2 = t, x_2 = e^{t+2}$, 得到

$te^t = e^3$, 研究函数 $f(x) = xe^x$ 的单调性, 求出 x_1, t 关系, 即可求解.

【解析一】 实数 x_1, x_2 满足 $x_1 e^{x_1} = e^3, x_2(\ln x_2 - 2) = e^5$,

$x_1 > 0, x_2 > e^2, \ln x_2 - 2 = t > 0, x_2 = e^{t+2}$, 则 $te^t = e^3$,

$f(x) = xe^x (x > 0), f'(x) = (x+1)e^x > 0 (x > 0)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 而 $f(x_1) = f(t) = e^3$,

$\therefore x_1 = t = \ln x_2 - 2, \therefore x_1 x_2 = x_2(\ln x_2 - 2) = e^5$.

【解析二】 对 $x_1 e^{x_1} = e^3$ 两边取自然对数得: $\ln x_1 + x_1 = 3$,

对 $x_2(\ln x_2 - 2) = e^5$ 两边取自然对数得: $\ln x_2 + \ln(\ln x_2 - 2) = 5$ (※)

为使两式结构相同, 将 (※) 进一步变形为: $(\ln x_2 - 2) + \ln(\ln x_2 - 2) = 3$

设 $f(x) = \ln x + x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $f(x) = 3$ 的解只有一个.

$$\therefore x_1 = \ln x_2 - 2, \quad \therefore x_1 x_2 = (\ln x_2 - 2) x_2 = e^5$$

点评:两种解法实质相同,其关键是对已知等式进行变形,使其“结构相同”,然后构造函数,利用函数的单调性,利用是同一方程求解.

例 5 已知实数 a, b 满足 $3^a + a = 7$, $\log_3 \sqrt[3]{3b+1} + b = 2$, 则 $a+3b=$ _____.

【答案】 16

【解析】 令 $\log_3 \sqrt[3]{3b+1} = c$, 则 $b = \frac{1}{3}(3^{3c} - 1)$, 代入 $\log_3 \sqrt[3]{3b+1} + b = 2$ 可化为

$$c + \frac{1}{3}(3^{3c} - 1) = 2, \quad \text{即 } 3^{3c} + 3c = 7$$

设 $f(x) = 3^x + x - 7$, 则 $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x + 1 > 0$, $f(x)$ 在 R 上单增

故 $f(x) = 3^x + x - 7 = 0$ 只有一个零点

所以 $a = 3c$, 即 $3\log_3 \sqrt[3]{3b+1} = a$, $3^a = 3b+1$

所以 $a+3^b = a+3^a - 1 = 7 - 1 = 6$.

例 6 已知实数 x, y 满足 $x2^x = 7$, $y(\log_2 y - 2) = 28$, 则 $xy =$ ()

A.112 B.28 C.7 D.4

【答案】 $y(\log_2 y - 2) = 28$, $y \log_2 \frac{y}{4} = 28$, 即 $\frac{y}{4} \log_2 \frac{y}{4} = 7$, $\log_2 \frac{y}{4} \cdot 2^{\log_2 \frac{y}{4}} = 7$

设 $f(x) = x2^x$, 则 $f(x) = f(\log_2 \frac{y}{4}) = 7$, 且易知其为定义在 $(0, +\infty)$ 上的单增函数

故 $x = \log_2 \frac{y}{4}$, 即 $xy = y \log_2 \frac{y}{4} = 28$, 选 B.

例 6 已知实数 x, y 满足 $(x-1)^5 + 2x + \sin(x-1) = 3$, $(y-1)^5 + 2y + \sin(y-1) = 1$, 则 $x+y =$ ()

A.0 B.2 C.4 D.6

【答案】 B

【解析】 $(x-1)^5 + 2x + \sin(x-1) = 3$ $(x-1)^5 + 2(x-1) + \sin(x-1) = 1$

$(y-1)^5 + 2y + \sin(y-1) = 1$ $(y-1)^5 + 2(y-1) + \sin(y-1) = -1$

设 $f(x) = x^5 + 2x + \sin x$ ，则 $f(x-1) = 1$ ， $f(y-1) = -1$

则 $f'(x) = 5x^4 + 2 + \cos x > 0$ ，且 $f(-x) = (-x)^5 + 2(-x) + \sin(-x) = -f(x)$ ，

故 $f(x)$ 为定义在 R 上的单增函数，且 $f(x-1) + f(y-1) = 0$

所以 $(x-1) + (y-1) = 0$ ，即 $x + y = 2$ ，选 B 。

【巩固训练】

1. 已知 α 、 β 分别是方程 $x^5 + x + 1 = 0$ 、 $x + \sqrt[5]{x} + 1 = 0$ 的根，则 $\alpha + \beta$ 的值是_____。

2. 已知实数 x 、 y 满足 $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ ，则 $x^2 - 3xy - 4y^2 - 6x - 6y + 2020$ 的值是_____。

3. 方程 $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x+3} + 3x + 4 = 0$ 的根是_____。

4. 已知实数 $a, b \in (0, 2)$ ，且满足 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$ ，则 $a + b$ 的值为_____。

5. 设方程 $x + 2^x = 4$ 的根为 m ，方程 $x + \log_2 x = 4$ 的根为 n ，则 $m + n =$ _____。

6. 已知 $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ ， $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$ ，那么 $a + b$ 的值是_____。

7. 若 x_1 满足 $2x + 2^x = 5$ ， x_2 满足 $2x + 2 \log_2(x-1) = 5$ ， $x_1 + x_2 =$ ()

A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. $\frac{7}{2}$ D. 4

【答案或提示】

1. 【答案】 -1

【提示】 设 $f(x) = x^5 + x + 1$ ，则 $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ ， $f(x)$ 单增。

由 $\alpha^5 + \alpha + 1 = 0$ ， $(\sqrt[5]{\beta})^5 + \sqrt[5]{\beta} + 1 = 0$ 得 $\alpha = \sqrt[5]{\beta}$

代入 $\alpha^5 + \alpha + 1 = 0$ 得 $(\sqrt[5]{\beta})^5 + \alpha + 1 = 0$ ，即 $\beta + \alpha + 1 = 0$ ，得 $\alpha + \beta = -1$ 。

2. 【答案】 2020

【提示】两边取自然对数得 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 0$

设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则易得其为 R 上的单增奇函数

所以 $x + y = 0$ ，

故 $x^2 - 3xy - 4y^2 - 6x - 6y + 2020 = (x + y)(x - 4y) - 6(x + y) + 2020 = 2020$.

3. 【答案】 $-\frac{4}{3}$

【分析】利用“同构”构造函数，再利用函数的单调性.

【解析】原方程可化为 $\sqrt[3]{x+1} + (x+1) + \sqrt[3]{2x+3} + (2x+3) = 0$

设 $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$ ，易得其为 R 上的单增奇函数

所以 $(x+1) + (2x+3) = 0$ ， $x = -\frac{4}{3}$ 即为所求.

4. 【答案】 2

【分析】将 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$ 化为： $a^2 + 2^a = (2-b)^2 + 2^{2-b}$ ，设 $f(x) = x^2 + 2^x$ ，

则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增，由 $f(a) = f(2-b)$ ，得 $a+b$ 的值.

【解析】由 $a^2 - b^2 - 4 = \frac{4}{2^b} - 2^a - 4b$ ，化简为： $a^2 + 2^a = 2^{2-b} + (b-2)^2$ ，即

$$a^2 + 2^a = (2-b)^2 + 2^{2-b},$$

设 $f(x) = x^2 + 2^x$ ，则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增，因为 $a, b \in (0, 2)$ ，所以 $2-b \in (0, 2)$ ，

且 $f(a) = f(2-b)$ ，所以 $a = 2-b$ ，即 $a+b = 2$.

5. 【答案】 4

6. 【答案】 2

【解析】由题意知 $a^3 - 3a^2 + 5a - 3 = -2$ ， $b^3 - 3b^2 + 5b - 3 = 2$ ，

设 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ ，则 $f(a) = -2$ ， $f(b) = 2$.

因为 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1, 0)$ ，所以 $a+b = 2$.

点评：本题的难点在于发现函数的对称性，对于三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 其对称

中心为 $(x_0, f(x_0))$ ，其中 $f''(x_0) = 0$.

7. 【答案】 C

专题 17 跨阶同构

【方法点拨】

1. 指对形式同时出现，可能需要利用指对同构来解决问题

2. 跨阶同构的几个关键环节：

(1) 指对各一边，参数是关键，凑形是难点.

(2) 凑形的常用方法：为了实现不等式两边“结构”相同的目的，需时时对指对式进行“改头换面”，常用的方法有： $x = e^{\ln x}$ 、 $xe^x = e^{\ln x + x}$ 、 $x^2 e^x = e^{2\ln x + x}$ 、 $\frac{e^x}{x} = e^{-\ln x + x}$ 、 $\ln x + \ln a = \ln ax$ 、

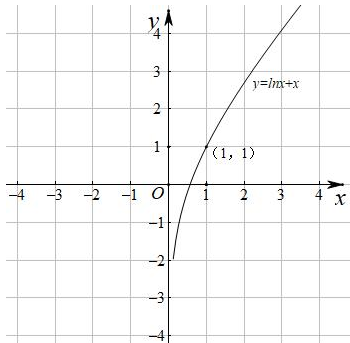
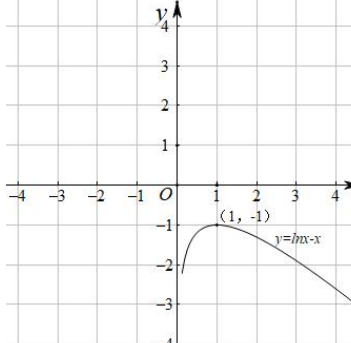
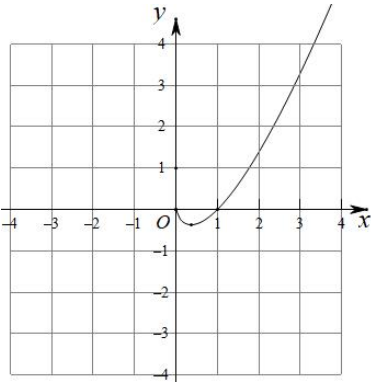
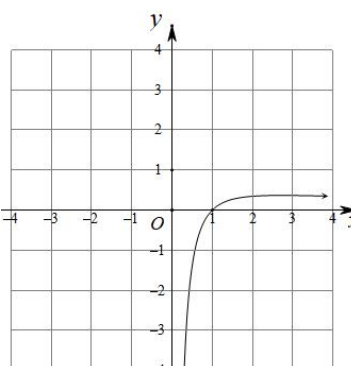
$\ln x - 1 = \ln \frac{x}{e}$ ，有时也需要对两边同时加、乘某式等.

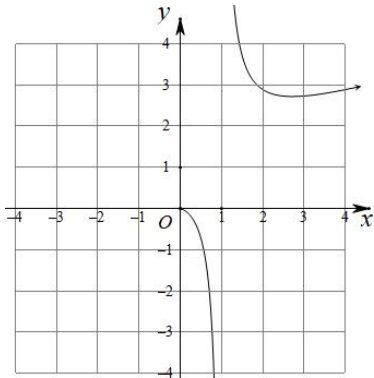
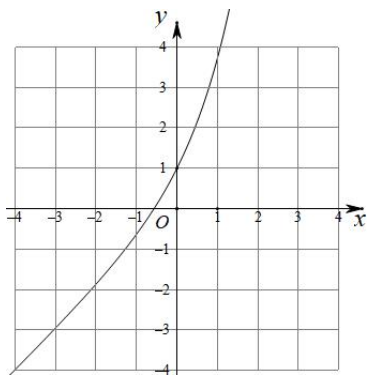
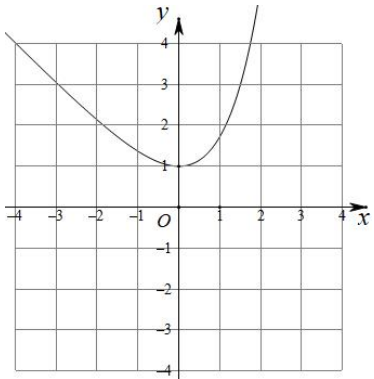
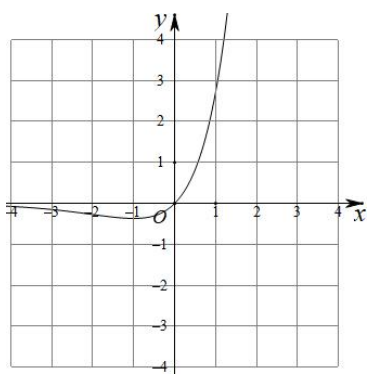
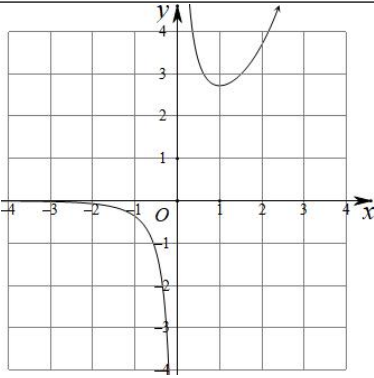
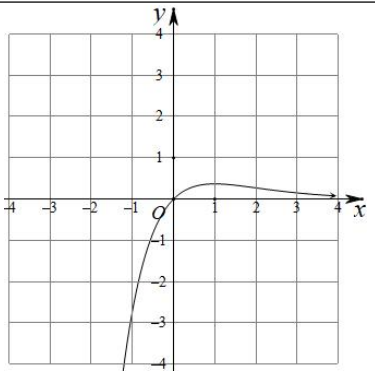
3. 常见同构式：

(1) $x \ln x$ 与 xe^x 型： $x \ln x = \ln x e^{\ln x}$ ， $xe^x = e^{\ln x} e^x$ ；

(2) $x + \ln x$ 与 $x + e^x$ 型： $x + \ln x = \ln x + e^{\ln x}$ ， $x + e^x = e^{\ln x} + e^x$.

4. 几个常用函数的图象：

函数表达式	图像	函数表达式	图像
$y = \ln x + x$		$y = \ln x - x$ 函数极值点 $(1, -1)$	
$y = x \ln x$ 函数极值点 $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$		$y = \frac{\ln x}{x}$ 函数极值点 $\left(e, \frac{1}{e}\right)$	

$y = \frac{x}{\ln x}$ 函数极值点 (e, e)		$y = e^x + x$ 过定点 $(0, 1)$	
$y = e^x - x$ 函数极值点 $(0, 1)$		$y = xe^x$ 函数极值点 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$	
$y = \frac{e^x}{x}$ 函数极值点 $(1, e)$		$y = \frac{x}{e^x}$ 函数极值点 $\left(1, \frac{1}{e}\right)$	

【典型题示例】

例 1 （2022·江苏天一中学期末·16）已知函数 $f(x) = ae^x \ln x$ ($a \neq 0$)，若对于任意 $x \in (0, 1)$ ， $f(x) < x^2 + x \ln a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

- A. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$; B. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$; C. $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$; D. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

【答案】A

【解析】 $f(x) < x^2 + x \ln a$ ，即 $ae^x \ln x < x^2 + x \ln a$

两边同时除以 x 得 $\frac{ae^x \ln x}{x} < x + \ln a$

两边同时除以 ae^x 得 $\frac{\ln x}{x} < \frac{x + \ln a}{ae^x}$, 即 $\frac{\ln x}{x} < \frac{x + \ln a}{ae^x} = \frac{\ln e^x + \ln a}{ae^x} = \frac{\ln ae^x}{ae^x}$

设函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 易得 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增

所以 $x < ae^x$, 易知 $a > 0$, 故 $\frac{1}{a} < \frac{e^x}{x}$

设 $h(x) = \frac{e^x}{x}$, 易得 $\frac{e^x}{x} > e$

所以 $\frac{1}{a} \leq e$, 故 $a \geq \frac{1}{e}$, 选 A.

例 2 (2022 · 江苏省 G4 (扬州中学、苏州中学、盐城中学、常州中学) 高三上学期 12 月阶段检测) 若不等式 $2e^x - 2 > -a \ln(x+1) + (a+2)x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 其中 e 为自然对数的底数, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

【答案】B

【分析】 运用同构对不等式进行变形, 使得两边“结构相同”, 由于式子中含有 e^x 、 $\ln(x+1)$ 及关于 x 的一次式, 故应考虑“跨阶同构”, 即对不等式变形时, 应使得不等式两边一边含 e^x 、另一边含 $\ln(x+1)$.

【解析】 对 $2e^x - 2 > -a \ln(x+1) + (a+2)x$ 变形得: $2e^x - ax > 2(x+1) - a \ln(x+1)$

一方面, $2e^x - ax = 2e^x - a \ln e^x$,

所以问题转化为 $2e^x - a \ln e^x > 2(x+1) - a \ln(x+1)$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立

又因为 $e^x > x+1$, 设 $f(x) = 2e^x - ax$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数

故 $f'(x) = 2e^x - a \geq 0$ 恒成立, 故 $a \leq 2$.

例 3 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$, 若 $f(x) \geq 1$, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \geq 1$

【解析】 由 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$ 移项得: $ae^{x-1} + \ln a \geq \ln x + 1$

(说明: 将变量移至一边的原则进行变形)

即 $e^{\ln a + x - 1} + \ln a \geq \ln x + 1$, 两边同时加 $(x-1)$ 得 $e^{\ln a + x - 1} + x + \ln a - 1 \geq \ln x + x$

(说明: 系数升指数、按左右结构相同的原则进行变形)

即 $e^{\ln a + x - 1} + (x + \ln a - 1) \geq \ln x + e^{\ln x}$

设 $g(x) = x + e^x$, 则 $g'(x) = 1 + e^x > 0$, 所以 $g(x)$ 单增

所以 $\ln a + x - 1 \geq \ln x$, 即 $x - \ln x + \ln a - 1 \geq 0$

设 $h(x) = x - \ln x + \ln a - 1$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单减, 在 $(1, +\infty)$ 单增,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = \ln a - 1 \geq 0$, 所以 $a \geq 1$.

点评:

对原不等式同解变形, 如移项、通分、取对数、系数升指数等, 把不等式转化为左右两边是相同结构的式子的结构, 根据“相同结构”构造辅助函数.

例 4 设 a, b 都是正数, 若 $ae^{a+1} + b < b \ln b$ (其中 e 是自然对数的底数), 则 ()
A. $ab > e$; B. $b > e^{a+1}$; C. $ab < e$; D. $b < e^{a+1}$.

【答案】B

【解析】由已知 $ae^{a+1} + b < b \ln b$ 移项整理得 $ae^{a+1} < b \ln \frac{b}{e}$,

为了实现“一边一个变量”, 两边同时除以 e 得 $ae^a < \frac{b}{e} \ln \frac{b}{e}$,

为了实现“两边结构相同”, 对左边“降阶”得 $ae^a = e^a \cdot \ln e^a$

故 $e^a \cdot \ln e^a < \frac{b}{e} \ln \frac{b}{e}$ (#)

设 $f(x) = x \cdot \ln x$, (#) 即为 $f(e^a) < f(\frac{b}{e})$

$\because a > 0, \therefore e^a > 1$

$\because b(\ln b - 1) > 0, b > 0, \therefore \ln b > 1$, 故 $b > e, \frac{b}{e} > 1$

当 $x > 1$ 时, $f'(x) = 1 + \ln x > 0, f(x)$ 单增

$\therefore e^a < \frac{b}{e}$, 即 $e^{a+1} < b$, 选 B.

例 5 已知函数 $f(x) = ae^x + \ln \frac{a}{x+2} - 2$ ($a > 0$), 若 $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(e, +\infty)$

【解析】 $\because f(x) = ae^x + \ln \frac{a}{x+2} - 2 > 0$

$\therefore e^{x+\ln a} + \ln a > \ln(x+2) + 2$

两边加上 x 得 $e^{x+\ln a} + (x + \ln a) > \ln(x+2) + (x+2) = \ln(x+2) + e^{\ln(x+2)}$

设 $g(x) = x + e^x$ ，则其单增

$\therefore x + \ln a > \ln(x+2)$ ，即 $\ln a > \ln(x+2) - x$

令 $k(x) = \ln(x+2) - x$ ，则 $k'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = -\frac{x+1}{x+2}$

$\therefore f(x)$ 的定义域是 $(-2, +\infty)$

\therefore 当 $x \in (-2, -1)$ 时， $k'(x) > 0$ ， $k(x)$ 单增；当 $x \in (-1, +\infty)$ 时， $k'(x) < 0$ ， $k(x)$ 单减

\therefore 当 $x = -1$ 时， $k(x)$ 取得极大值即为最大值，且 $k(x)_{\max} = k(-1) = 1$

$\therefore \ln a > k(x)_{\max} = k(-1) = 1$ ， $\therefore a > e$ 即为所求.

例 6 设实数 $\lambda > 0$ ，若对任意的 $x \in (0, +\infty)$ ，不等式 $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0$ 恒成立，则 λ 的取值范围是_____.

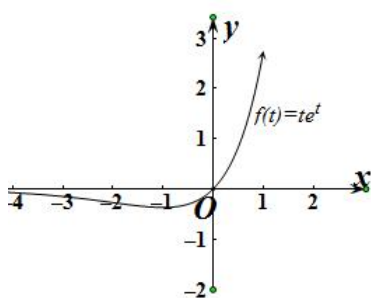
【答案】 $[\frac{1}{e}, +\infty)$

【解析】 由 $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0$ 得 $e^{\lambda x} \geq \frac{\ln x}{\lambda}$ ，即 $\lambda x e^{\lambda x} \geq \ln x \cdot e^{\ln x}$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

设 $f(t) = t e^t$ ，则 $f(\lambda x) \geq f(\ln x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，

又 $f'(t) = t e^t + e^t = (t+1)e^t$ ，

\therefore 当 $t < -1$ 时， $f'(t) < 0$ ， $f(t)$ 单调递减；当 $t > -1$ 时， $f'(t) > 0$ ， $f(t)$ 单调递增. 画出图象为



① 当 $x \geq \frac{1}{e}$ 时， $t_1 = \lambda x > 0$ ， $t_2 = \ln x > -1$ ，此时函数 $f(t)$ 单调递增， $\therefore f(t_1) > f(t_2)$ ，

即 $f(\lambda x) \geq f(\ln x)$ ，所以 $\lambda x \geq \ln x$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立， $\therefore \lambda \geq \frac{\ln x}{x}$ 对任意的 $x \in$

$(0, +\infty)$ 恒成立.

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 则当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, $\therefore g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$, $\therefore \lambda \geq \frac{1}{e}$.

②当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $t_1 = \lambda x > 0$, $t_2 = \ln x < -1$,

由 $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$, 结合函数 $f(t)$ 的图象可得 $f(t_1) > 0 > f(t_2)$, 即 $f(\lambda x) \geq f(\ln x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

综上可得 $\lambda \geq \frac{1}{e}$, \therefore 实数 λ 的取值范围是 $[\frac{1}{e}, +\infty)$.

【解析二】由 $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0$ 得 $e^{\lambda x} \geq \frac{\ln x}{\lambda}$, 即 $\lambda x e^{\lambda x} \geq \ln x \cdot e^{\ln x}$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

当 $x \in (0, 1]$ 时, 总有 $\lambda x e^{\lambda x} > 0$, $x \ln x \leq 0$.

只需考虑 $x > 1$ 的情形, 亦即 $\lambda x e^{\lambda x} \geq \ln x \cdot e^{\ln x}$.

设 $f(t) = te^t (t > 0)$, 则 $f'(t) = te^t + e^t = (t+1)e^t > 0$,

$f(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上为增函数.

由 $f(\lambda x) \geq f(\ln x)$ 得, $\lambda x \geq \ln x$, 即 $\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$, 故 $\lambda \geq \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}$

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

$g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$, $\therefore \lambda \geq \frac{1}{e}$.

【解析三】由 $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0$ 得 $e^{\lambda x} \geq \frac{\ln x}{\lambda}$, $\lambda e^{\lambda x} \geq \ln x$, 即 $(\lambda x) e^{\lambda x} \geq x \ln x$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

当 $x \in (0, 1]$ 时, 总有 $\lambda x e^{\lambda x} > 0$, $x \ln x \leq 0$.

只需考虑 $x > 1$ 的情形, 亦即 $e^{\lambda x} \ln e^{\lambda x} \geq x \ln x$.

设 $f(t) = t \ln t (t > 1)$, 则 $f'(t) = 1 + \ln t > 0$,

$f(t)$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上为增函数.

由 $f(e^{\lambda x}) \geq f(x)$ 得, $e^{\lambda x} \geq x$, 即 $\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$, 故 $\lambda \geq \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}$

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

$$g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}, \therefore \lambda \geq \frac{1}{e}.$$

【解析四】由 $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0$ 得 $e^{\lambda x} \geq \frac{\ln x}{\lambda}$, $\lambda e^{\lambda x} \geq \ln x$, 即 $(\lambda x) e^{\lambda x} \geq x \ln x$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

当 $x \in (0, 1]$ 时, 总有 $\lambda x e^{\lambda x} > 0$, $x \ln x \leq 0$.

只需考虑 $x > 1$ 的情形, 得 $(\lambda x) + \ln(\lambda x) \geq \ln x + \ln(\ln x)$.

设 $f(t) = t + \ln t (t > 1)$, 则 $f'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0$,

$f(t)$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上为增函数.

由 $f(\lambda x) \geq f(\ln x)$ 得, $\lambda x \geq \ln x$, 即 $\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$, 故 $\lambda \geq \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}$

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

$$g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}, \therefore \lambda \geq \frac{1}{e}.$$

例 7 对于任意实数 $x > 0$, 不等式 $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \geq \frac{1}{2e}$

【解析一】将 $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0$ 变形为 $2ae^{2x} \geq \ln \frac{x}{a}$, $2e^{2x} \geq \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a}$ (说明: 将参数移至一边)

两边同时乘 x 得 $2xe^{2x} \geq \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a}$ (说明: 目的是凑右边的结构)

即 $2xe^{2x} \geq \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} = e^{\ln \frac{x}{a}} \ln \frac{x}{a}$ (说明: 目的是凑左右两边的结构相同) (#)

设 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (1+x)e^x > 0$, $g(x)$ 单增

故由 (#) 得 $2x \geq \ln \frac{x}{a}$, $\ln a \geq \ln x - 2x$

再令 $h(x) = \ln x - 2x$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 2$, 易知当 $h(x)_{\max} = h\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - 1$

所以 $\ln a \geq -\ln 2 - 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2e}$.

【解析二】将 $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0$ 变形为 $e^{\ln 2a + 2x} - \ln x + \ln a \geq 0$, 即 $e^{\ln 2a + 2x} + \ln 2a \geq \ln 2x$
 $e^{\ln 2a + 2x} + 2x + \ln 2a \geq 2x + \ln 2x = e^{\ln 2x} + \ln 2x$

设 $g(x) = e^x + x$, 易知 $g(x)$ 单增

故 $2x + \ln 2a \geq \ln 2x$ (以下同解法一, 从略).

点评:

(1) 为了实现不等式两边“结构”相同的目的，需时时对指对式进行“改头换面”，常用的恒等变形的方法有： $x = e^{\ln x} (x > 0)$ ， $x = \ln e^x (x \in \mathbb{R})$.

1. $xe^x = e^{x+\ln x}$; $x + \ln x = \ln xe^x$.

2. $\frac{x}{e^x} = e^{\ln x - x}$; $x - \ln x = \ln \frac{e^x}{x}$.

3. $x^2 e^x = e^{x+2\ln x}$; $x + 2\ln x = \ln x^2 e^x$.

4. $\frac{e^x}{x^2} = e^{x-2\ln x}$; $x - 2\ln x = \ln \frac{e^x}{x^2}$.

有时也需要对两边同时加、乘某式等.

(2) $x \ln x$ 与 xe^x 为常见同构式： $x \ln x = \ln xe^{\ln x}$ ， $xe^x = e^{\ln x} e^x$ ； $x + \ln x$ 与 $x + e^x$ 为常见同构式： $x + \ln x = \ln x + e^{\ln x}$ ， $x + e^x = e^{\ln x} + e^x$.

【巩固训练】

1. 设实数 $m > 0$ ，若对任意的 $x \in (0, +\infty)$ ，不等式 $e^{mx} - \frac{\ln x}{m} \geq 0$ 成立，则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $[e, +\infty)$ D. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

2. 设实数 $m > 0$ ，若对任意的 $x \geq e$ ，不等式 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 恒成立，则 m 的最大值是 () .

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{e}{3}$ C. e D. $2e$

3. 若 $e^{x-a} \geq \ln x + a$ 对一切正实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, \frac{1}{e}]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, e]$

4. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x$ ，(其中 a 为参数)，若对任意 $x \in (0, +\infty)$ ，不等式 $f(x) > a \ln a$ 成立，则正实数 a 的取值范围是_____.

5. 对于任意实数 $x > 0$ ，不等式 $e^{\frac{x}{\lambda}} - \lambda \ln x \geq 0$ 恒成立，则 λ 的最大值是_____.

6. 关于 x 的不等式 $xe^{x+1} \geq k \ln x + k(x+1)$ 对任意 $x > 0$ (其中 $k > 0$) 恒成立，则 k 的取值范围是_____.

7. 关于 x 的不等式 $x^2 e^{3x} \geq (k+3)x + 2 \ln x + 1$ 对任意 $x > 0$ 恒成立，则 k 的取值范围是_____.

8. 已知函数 $f(x) = (x + \frac{1}{x}) \ln x$, $g(x) = me^{mx} + m$ 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式

$2f(x) - g(x) \leq 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是_____.

9. (2022 · 江苏数学基地校联考 · 22 改编) 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - \ln a$, 当 $x > 0$ 时, $f(x)$

$\geq \frac{5}{2}$, 则 a 的取值范围是_____.

10. (2022 · 江苏天一中学) 已知关于 x 的不等式 $\frac{(e^{\lambda x} + 1)\lambda x}{x+1} > \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

则实数 λ 的取值范围为_____.

【答案与提示】

1. 【答案】D

【分析】把不等式 $e^{mx} - \frac{\ln x}{m} \geq 0$ 成立, 转化为 $mx e^{mx} \geq x \ln x = e^{\ln x} \cdot \ln x$ 恒成立, 设函数

$g(x) = x e^x$, 进而转化为 $g(mx) \geq g(\ln x)$ 恒成立, 得出 $mx \geq \ln x$ 恒成立, 构造函数

$h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 利用导数求得函数的单调性与最值, 即可求解.

【解析】因为 $m > 0$, 不等式 $e^{mx} - \frac{\ln x}{m} \geq 0$ 成立, 即 $e^{mx} \geq \frac{\ln x}{m}$ 成立, 即 $m e^{mx} \geq \ln x$,

进而转化为 $mx e^{mx} \geq x \ln x = e^{\ln x} \cdot \ln x$ 恒成立,

构造函数 $g(x) = x e^x$, 可得 $g'(x) = e^x + x e^x = (x+1)e^x$,

当 $x > 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

则不等式 $e^{mx} - \frac{\ln x}{m} \geq 0$ 恒成立等价于 $g(mx) \geq g(\ln x)$ 恒成立, 即 $mx \geq \ln x$ 恒成立,

进而转化为 $m \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立,

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 可得 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以当 $x = e$, 函数 $h(x)$ 取得最大值, 最大值为 $h(e) = \frac{1}{e}$,

所以 $m \geq \frac{1}{e}$, 即实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. 故选: D.

2. 【答案】C

【提示】 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 变形为 $\ln x \cdot e^{\ln x} \geq \frac{m}{x} \cdot e^{\frac{m}{x}}$, 构造函数 $g(x) = xe^x (x > 0)$, 等价

转化为 $\ln x \geq \frac{m}{x}$, 即 $m \leq x \ln x$, 只需 $m \leq (x \ln x)_{\min} = e$, 答案为 C.

3. 【答案】B

【解析】(利用同构) 由 $e^{x-a} \geq \ln x + a$ 得 $e^{x-a} - a \geq \ln x$, 两边同时加 $e^{x-a} + x - a \geq \ln x + x$

即 $e^{x-a} + (x-a) \geq e^{\ln x} + \ln x$

设 $f(x) = e^x + x$, 则 $f'(x) = e^x + 1 > 0$, $f(x) = e^x + x$ 单增

$e^{x-a} + (x-a) \geq e^{\ln x} + \ln x$, 即 $f(x-a) \geq f(\ln x)$, 故 $x-a \geq \ln x$ 恒成立

$a \leq x - \ln x$ 恒成立

设 $g(x) = x - \ln x$, 易得 $g(x)_{\max} = g(1) = 1$, 所以 $a \leq 1$.

4. 【答案】(0, e)

【解析】构建同构式处理不等式

由 $f(x) > a \ln a$ 得 $\frac{e^x}{a} - \ln a > \ln x$, 即 $e^{x-\ln a} - \ln a > \ln x$,

两边同时加 x 得 $e^{x-\ln a} + x - \ln a > e^{\ln x} + \ln x$

令 $g(t) = e^t + t$, 则 $g(x - \ln a) > g(\ln x)$,

$\because g(t)$ 为单调增函数 $\therefore x - \ln a > \ln x$, 即 $\ln a < x - \ln x$,

令 $h(x) = x - \ln x$, 则 $h'(x) = \frac{x-1}{x}$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore h(x)_{\min} = h(1) = 0$,

$\therefore \ln a < 1$ ，解得 $0 < a < e$ 。

5. 【答案】 e

【提示】变形为 $\frac{x}{\lambda} e^{\frac{x}{\lambda}} \geq x \ln x$ 。

6. 【答案】 $(0, e]$

【提示】变形为 $e^{\ln x + x + 1} \geq k(\ln x + x + 1)$ 。

7. 【答案】 $(-\infty, 0]$

【提示】变形为 $e^{2\ln x + 3x} - (3x + 2\ln x) \geq kx + 1$ ，利用 $e^x \geq x + 1$ 。

8. 【答案】 $[\frac{2}{e}, +\infty)$

【解析】 $2f(x) - g(x) \leq 0$ 转化为 $(x^2 + 1) \ln x^2 \leq mxe^{mx} + mx$ ，即 $x^2 \ln x^2 + \ln x^2 \leq mxe^{mx} + mx$ ，设 $f(t) = te^t + t$ ，则 $f(\ln x^2) \leq f(mx)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，

又 $f'(t) = te^t + e^t + 1 = (t + 1)e^t + 1 > 0$ ， $f(t)$ 单调递增

所以 $\ln x^2 \leq mx$ ， $m \geq \frac{2\ln x}{x}$ ，易求得 $m \geq \frac{2}{e}$

\therefore 实数 m 的取值范围是 $[\frac{2}{e}, +\infty)$ 。

9. 【答案】 $\left(0, \frac{1}{2e^2}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$

10. 【答案】 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

【分析】由题可得 $(e^{\lambda x} + 1)\lambda x > (x + 1)\ln x = (e^{\ln x} + 1)\ln x$ ，可构造函数 $f(x) = (e^x + 1)x, x > 0$ 则 $\lambda > \frac{\ln x}{x}$ ，再求函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的最大值即可。

【解析】关于 x 的不等式 $\frac{(e^{\lambda x} + 1)\lambda x}{x + 1} > \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，则

$(e^{\lambda x} + 1)\lambda x > (x + 1)\ln x = (e^{\ln x} + 1)\ln x$ ，

设 $f(x) = (e^x + 1)x, x > 0$ ， $\therefore f(\lambda x) > f(\ln x)$

$\therefore f'(x) = e^x(x + 1) + 1 > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\therefore \lambda x > \ln x \text{ 即 } \lambda > \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0,$$

$$\therefore g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = e,$$

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$ 函数 $g(x)$ 单调递增,

当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$ 函数 $g(x)$ 单调递减,

$$\therefore g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e},$$

$$\therefore \lambda > \frac{1}{e}.$$

故答案为: $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

专题 18 几类函数的对称中心及应用

【方法点拨】

1. 三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 的对称中心为 $(x_0, f(x_0))$, 其中 $f''(x_0) = 0$,

$$\text{即 } f''(x_0) = 6ax_0 + 2b = 0, \quad x_0 = -\frac{b}{3a}.$$

记忆方法: 类比于二次函数的对称轴方程 $x_0 = -\frac{b}{2a}$, 分母中 $2 \rightarrow 3$.

2. 一次分式函数 (或称双曲函数) $f(x) = \frac{cx-d}{ax-b} (ac \neq 0)$ 的对称中心为 $(\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$.

记忆方法: 横下零, 纵系数 (即横坐标是使分母为 0 的值, 而纵坐标是分母、分子中的一次项系数分别作为分母、分子的值).

3. 指数复合型函数 $f(x) = \frac{n}{a^x + m} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, mn \neq 0)$ 的对称中心为 $(\log_a |m|, \frac{n}{2m})$.

记忆方法: 横下对, 纵半分 (即横坐标是使分母取对数的值, 但真数为保证有意义, 取的是绝对值而已, 而纵坐标是分母、分子中的常数分别作为分母、分子的值的一半).

【典型题示例】

例 1 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3^x + 1} - 2x$, 则满足不等式 $f(a) + f(3a+2) > 2$ 的实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

【解析】 $y = \frac{2}{3^x + 1}$ 的对称中心是 $(0, 1)$ ，其定义域为 \mathbf{R} 且单减

令 $g(x) = f(x) - 1 = \frac{2}{3^x + 1} - 2x - 1$ ，则 $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的单调递减的奇函数

由 $f(a) + f(3a+2) > 2$ 得 $f(3a+2) - 1 > 1 - f(a)$

即 $g(3a+2) > -g(a)$

因为 $g(x)$ 为奇函数，故 $-g(a) = g(-a)$

所以 $g(3a+2) > g(-a)$

又 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单减，所以 $3a+2 < -a$ ，解之得 $a < -\frac{1}{2}$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 。

例 2 设 $f'(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的导数， $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x) = 0$ 有实数解 x_0 ，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”。已知：任何三次函数都有拐点，

又有对称中心，且拐点就是对称中心。设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1$ ，数列 $\{a_n\}$ 的通项公

式为 $a_n = 2n - 7$ ，则 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_8) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解析】令 $f''(x) = 2x - 4 = 0$ 得 $x = 2$ ， $f(2) = 1$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1$ 对称中心为 $(2, 1)$ ，

所以 $f(x) + f(4-x) = 2$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立

因为 $a_n = 2n - 7$ ，所以 $a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5 = 4$

所以 $f(a_1) + f(a_8) = f(a_2) + f(a_7) = f(a_3) + f(a_6) = f(a_4) + f(a_5) = 2$

所以 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_8) = 8$ 。

例 3 已知函数 $y = \sin x + 1$ 与 $y = \frac{x+2}{x}$ 在 $[-a, a]$ ($a \in \mathbf{Z}$ ，且 $a > 2017$) 上有 m 个交点

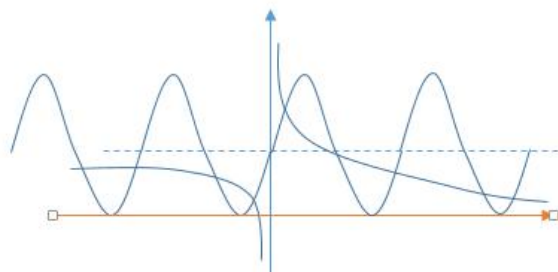
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_m + y_m) =$

- A. 0 B. m C. $2m$ D. 2017

【答案】B

【解

析】



由图可知交点成对出现，每对交点关于点 $(0, 1)$ 对称，横坐标和为 0，纵坐标和为 2，所以

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_m + y_m) = \frac{m}{2} \times 2 = m, \text{ 选 B.}$$

【巩固训练】

1. 对于定义在 D 上的函数 $f(x)$ ，点 $A(m, n)$ 是 $f(x)$ 图像的一个对称中心的充要条件是：对

任意 $x \in D$ 都有 $f(x) + f(2m - x) = 2n$ ，判断函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 的对称中心_____.

2. 函数 $y = \frac{-x+2}{x-4}$ 的对称中心是_____.

3. 设函数 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$ ，数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列，

$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_7) = 14$ ，则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 =$ ()

A、0

B、7

C、14

D、21

4. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+2-a}{x+1}$ (其中 $a \in R$) 图象关于点 $P(-1, 3)$ 成中心对称，则不等式

$f(x) > x - 1$ 的解集是_____.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y = kx + 2 - 2k$ 与曲线 $y = 2(x-2)^3 + x$ 依次交于

A, B, C 三点，若点 P 使 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}| = 2$ ，则 $|\overrightarrow{PB}|$ 的值为_____.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$ 的图象关于坐标原点对称，则实数 a 的值为_____.

7. 已知函数 $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2x$ ，则满足不等式 $f(a) + f(3a + 2) > 0$ 的实数 a 的取值范围

是_____.

8. 已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，则 $f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + f\left(\frac{3}{1001}\right) + \cdots + f\left(\frac{1000}{1001}\right)$ 的值为_____.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{-x+2}{x-a}$ ，若对 $\forall x \in N^*$ ， $f(x) \leq f(5)$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} + e^x - e^{-x}$ ，若不等式 $f(ax^2) + f(1 - 2ax) \geq 1$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则

实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, e]$ B. $[0, e]$ C. $(0, 1]$ D. $[0, 1]$

11. 已知函数 $f(x) = x - \frac{e}{2} + \ln \frac{ex}{e-x}$ ，若

$f\left(\frac{e}{2020}\right) + f\left(\frac{2e}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018e}{2020}\right) + f\left(\frac{2019e}{2020}\right) = \frac{2019}{2}(a+b)$ ，其中 $b > 0$ ，则 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的

最小值为

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{|x-1|} + 2\sin\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$ 在 $x \in [-3, 5]$ 上的所有零点之和等于_____.

【答案与提示】

1. 【答案】 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{70}{27}\right)$

【分析】根据点 $A(m, n)$ 是 $f(x)$ 图像的一个对称中心的充要条件，列出式子，即可得出结果.

解：因为 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ ，由于

$$f(x) + f\left(-\frac{2}{3} \times 2 - x\right) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + \left(-\frac{2}{3} \times 2 - x\right)^3 + 2\left(-\frac{2}{3} \times 2 - x\right)^2 +$$

$$3\left(-\frac{2}{3} \times 2 - x\right) + 4 = \frac{70}{27} \times 2 = \frac{140}{27}. \text{即 } m = -\frac{2}{3}, n = \frac{70}{27}. \text{所以 } \left(-\frac{2}{3}, \frac{70}{27}\right) \text{ 是 } f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \text{ 的}$$

一个对称中心.

故答案为: $\left(-\frac{2}{3}, \frac{70}{27}\right)$.

2. 【答案】 (4, -1)

【解析】 $y = \frac{-x+2}{x-4} = \frac{6}{x-4} - 1$

3. 【答案】 D

【提示】 根据函数值之和 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_7) = 14$ 求自变量之和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$, 很自然会去考虑函数的性质, 而等式常常考查对称性, 从而尝试去寻求函数 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$ 的对称中心.

函数 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$ 可以视为由 $y = (x-3)^3$ 与 $y = x - 1$ 构成, 它们的对称中心不一样, 可以考虑对函数的图象进行平移, 比如 $f(x) - 2 = (x-3)^3 + (x-3)$, 引入函数 $F(x) = f(x+3) - 2 = x^3 + x$, 则该函数是奇函数, 对称中心是坐标原点, 由图象变换知识不难得出 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$ 的图象关于点 $(3, 2)$ 中心对称.

4. 【答案】 $\{x | x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$

【解析】 函数 $f(x) = \frac{ax+2-a}{x+1}$ 的对称中心为 $(-1, a)$, 与 $P(-1, 3)$ 比较得 $a=3$. 此时

$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$, 不等式 $f(x) > x-1$, 即 $\frac{3x-1}{x+1} > x-1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} - (x-1) > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-3) < 0$, 由序轴标根法即得解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$.

5. 【答案】 1

【提示】 $y = kx + 2 - 2k$ 过定点 $(2, 2)$, 对于三次函数 $y = 2(x-2)^3 + x$, 令 $f''(x) = 12(x-2) = 0$ 得 $x = 2$, 又 $f(2) = 2$, 所以 $y = 2(x-2)^3 + x$ 也关于点 $(2, 2)$ 对称, 所以 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PB}$, $|\overrightarrow{PB}| = 1$.

6. 【答案】 -1

7. 【答案】 $\left(-\frac{1}{2} + \infty\right)$

【解析】 $f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1} + 2x = \frac{3^x+1-2}{3^x+1} + 2x = 1 - \frac{2}{3^x+1} + 2x$ 的对称中心是 $(0, 0)$, 其定义

域为 \mathbf{R} 且单增 (下略).

8. 【答案】 500

【思路一】 从所求式中自变量的特征, 被动发现函数的对称性. 设若 $0 < a < 1$, 尝试去求

$f(a)+f(1-a)$ 的值, 易得 $f(a)+f(1-a)=1$.

【思路二】主动发现函数的对称性, $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}=1-\frac{2}{4^x+2}$, 设 $g(x)=\frac{2}{4^x+2}$, 则其对称中心为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 则 $f(x)$ 的对称中心也为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 故 $f(x)+f(1-x)=1$.

9. 【答案】 $5 < a < 6$

10. 【答案】 D

【分析】构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$, 判断函数的奇偶性与单调性, 将所求不等式转化为 $f(ax^2)-\frac{1}{2} \geq -\left[f(1-2ax)-\frac{1}{2}\right]$, 即 $g(ax^2) \geq g(2ax-1)$, 再利用函数单调性解不等式即可.

【解析】Q $f(x)=\frac{1}{2^x+1}+e^x-e^{-x}$,

$$\therefore f(x)+f(-x)=\frac{1}{2^x+1}+e^x-e^{-x}+\frac{1}{2^{-x}+1}+e^{-x}-e^x=\frac{1}{2^x+1}+\frac{1}{2^{-x}+1}=1$$

令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$, 则 $g(x)+g(-x)=0$, 可得 $g(x)$ 是奇函数,

$$\text{又 } g'(x)=\left(\frac{1}{2^x+1}\right)' + (e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x} - \frac{2^x \ln 2}{(2^x+1)^2} = e^x + \frac{1}{e^x} - \frac{\ln 2}{2^x + \frac{1}{2^x} + 2},$$

又利用基本不等式知 $e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2$ 当且仅当 $e^x = \frac{1}{e^x}$, 即 $x=0$ 时等号成立;

$$\frac{\ln 2}{2^x + \frac{1}{2^x} + 2} \leq \frac{\ln 2}{4} \text{ 当且仅当 } 2^x = \frac{1}{2^x}, \text{ 即 } x=0 \text{ 时等号成立;}$$

故 $g'(x) > 0$, 可得 $g(x)$ 是单调增函数,

$$\text{由 } f(ax^2)+f(1-2ax) \geq 1 \text{ 得 } f(ax^2)-\frac{1}{2} \geq -f(1-2ax)+\frac{1}{2} = -\left[f(1-2ax)-\frac{1}{2}\right],$$

即 $g(ax^2) \geq -g(1-2ax) = g(2ax-1)$, 即 $ax^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a=0$ 时显然成立; 当 $a \neq 0$ 时, 需 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4a^2 - 4a \leq 0 \end{cases}$, 得 $0 < a \leq 1$,

综上可得 $0 \leq a \leq 1$, 故选: D.

11. 【答案】 A

【分析】通过函数 $f(x)$ 解析式可推得 $f(x)+f(e-x)=2$, 再利用倒序相加法求得

$f\left(\frac{e}{2020}\right)+f\left(\frac{2e}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2018e}{2020}\right)+f\left(\frac{2019e}{2020}\right)$, 得到 $a+b$ 的值, 然后对 a 分类讨论利用

基本不等式求最值即可得出答案.

【解析】因为 $f(x) = x - \frac{e}{2} + \ln \frac{ex}{e-x}$,

所以 $f(x) + f(e-x) = x - \frac{e}{2} + \ln \frac{ex}{e-x} + (e-x) - \frac{e}{2} + \ln \frac{e(e-x)}{e-(e-x)}$

$$= \ln \frac{ex}{e-x} + \ln \frac{e(e-x)}{x} = \ln \left(\frac{ex}{e-x} \cdot \frac{e(e-x)}{x} \right) = \ln e^2 = 2,$$

$$\text{令 } S = f\left(\frac{e}{2020}\right) + f\left(\frac{2e}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018e}{2020}\right) + f\left(\frac{2019e}{2020}\right)$$

$$\text{则 } 2S = \left(f\left(\frac{e}{2020}\right) + f\left(\frac{2019e}{2020}\right) \right) + \left(f\left(\frac{2e}{2020}\right) + f\left(\frac{2018e}{2020}\right) \right) + \cdots + \left(f\left(\frac{2019e}{2020}\right) + f\left(\frac{e}{2020}\right) \right)$$

$$= 2 \times 2019, \text{ 所以 } S = 2019$$

所以 $\frac{2019}{2}(a+b) = 2019$, 所以 $a+b=2$, 其中 $b>0$, 则 $a=2-b$.

当 $a>0$ 时

$$\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{1}{2a} + \frac{2-b}{b} = \frac{1}{2a} + \frac{2}{b} - 1 = \left(\frac{1}{2a} + \frac{2}{b} \right) \cdot \frac{(a+b)}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} + \frac{b}{2a} + \frac{2a}{b} \right) - 1 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{b}{2a} \cdot \frac{2a}{b}} \right) - 1 = \frac{5}{4}$$

当且仅当 $\frac{b}{2a} = \frac{2a}{b}$, 即 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}$ 时等号成立;

当 $a<0$ 时,

$$\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{1}{-2a} + \frac{-a}{b} = \frac{1}{-2a} + \frac{b-2}{b} = \frac{1}{-2a} + \frac{-2}{b} + 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-2a} + \frac{-2}{b} \right) \cdot (a+b) + 1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2} + \frac{b}{-2a} + \frac{-2a}{b} \right) + 1$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{b}{-2a} \cdot \frac{-2a}{b}} \right) + 1 = \frac{3}{4},$$

当且仅当 $\frac{b}{-2a} = \frac{-2a}{b}$, 即 $a = -2, b = 4$ 时等号成立; 因为 $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$, 所以 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值

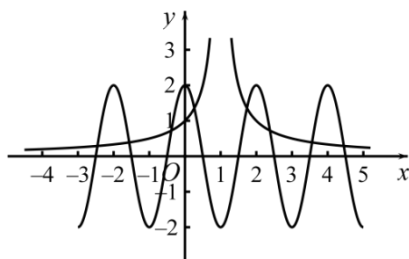
为 $\frac{3}{4}$. 故选: A.

12. 【答案】8

【分析】通过化简函数表达式, 画出函数图像, 分析图像根据各个对称点的关系求得零点的和.

【解析】零点即 $f(x) = 0$, 所以 $\frac{1}{|x-1|} = -2\sin\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$

即 $\frac{1}{|x-1|} = 2\cos\pi x$ ，画出函数图像如图所示



函数零点即为函数图像的交点，由图可知共有 8 个交点

图像关于 $x=1$ 对称，所以各个交点的横坐标的和为 8

专题 19 取对数

【方法点拨】

取对数是最易为学生所忽视的运算，当已知中出现复杂的指数式时，取对数往往就起到了“柳暗花明”的作用。

【典型题示例】

例 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} + mx^2, & x < 0, \\ e^x + mx^2, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 有四个不同的零点，则实数 m 的取值范围是_____。

【答案】 $(-\infty, -\frac{e^2}{4})$

【解析】 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} + mx^2, & x < 0, \\ e^x + mx^2, & x > 0 \end{cases}$ 是偶函数，问题转化为 $e^x + mx^2 = 0$ ，即 $e^x = -mx^2$ ($x > 0$)

有两个零点

易知 $m < 0$ ，两边均为曲线，较难求解。

两边取自然对数， $x = \ln(-m) + 2\ln x$ ，即 $x - \ln(-m) = 2\ln x$

问题即为： $g(x) = x - \ln(-m)$ 与 $h(x) = 2\ln x$ 有两个交点

先考察直线 $y = x + b$ 与 $h(x) = 2\ln x$ 相切，即只有一点交点的“临界状态”

设切点为 $(x_0, 2\ln x_0)$ ，则 $h'(x_0) = \frac{2}{x_0} = 1$ ，解得 $x_0 = 2$ ，此时切点为 $(2, 2\ln 2)$

代入 $b = 2\ln 2 - 2$

再求 $g(x) = x - \ln(-m)$ 与 $h(x) = 2\ln x$ 有两个交点时， m 的取值范围

由图象知，当 $g(x) = x - \ln(-m)$ 在直线 $y = x + b$ 下方时，满足题意

故 $-\ln(-m) < b = 2\ln 2 - 2$ ，解之得 $m < -\frac{e^2}{4}$ ，此时也符合 $m < 0$

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{e^2}{4})$ 。

点评：取对数的目的在于“化双曲为一直一曲”，简化了运算、难度，取对数不影响零点的个数。

例 2 设正实数 x ，则 $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^{\ln x}}$ 的值域为_____。

【答案】 $[0, \frac{1}{e}]$

【分析】所求函数结构是商的形式，分子、分母又是指对运算，让人“雾里看花”一头雾水，无从下手.联想到“取对数”、“换元”，就可以“拨开浓雾终见日”了。

【解析】当 $\ln x \neq 0$ 时，两边取对数得： $\ln y = \ln(\ln^2 x) - \ln(x^{\ln x}) = 2\ln(\ln x) - \ln^2 x$

令 $\ln x = t$ 设 $g(t) = \ln y = 2\ln t - t^2$

$$\therefore g'(t) = \frac{2}{t} - 2t = \frac{2(1-t)(1+t)}{t}$$

\therefore 当 $0 < t < 1$ 时， $g'(t) > 0$ ；当 $t > 1$ 时， $g'(t) < 0$

$$\therefore g(t)_{\max} = g(1) = -1,$$

$$\therefore \ln y \leq -1, \quad 0 < y \leq \frac{1}{e}$$

又 $\ln x \neq 0$ 时， $y = 0$

$$\therefore f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^{\ln x}} \text{ 的值域为 } [0, \frac{1}{e}],$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^{\ln x}} \text{ 的值域为 } [0, \frac{1}{e}].$$

例 3 已知实数 x_1, x_2 满足 $x_1 e^{x_1} = e^3$ ， $x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5$ ，则 $x_1 x_2 =$ _____。

【答案】 e^5

【分析】由已知条件考虑将两个等式转化为统一结构形式，令 $\ln x_2 - 2 = t, x_2 = e^{t+2}$ ，得到

$te^t = e^3$ ，研究函数 $f(x) = xe^x$ 的单调性，求出 x_1, t 关系，即可求解.

【解法一】对 $x_1 e^{x_1} = e^3$ 两边取自然对数得： $\ln x_1 + x_1 = 3$ ，

对 $x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5$ 两边取自然对数得： $\ln x_2 + \ln (\ln x_2 - 2) = 5$ (※)

为使两式结构相同，将 (※) 进一步变形为： $(\ln x_2 - 2) + \ln (\ln x_2 - 2) = 3$

设 $f(x) = \ln x + x$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增， $f(x) = 3$ 的解只有一个.

$\therefore x_1 = \ln x_2 - 2$ ， $\therefore x_1 x_2 = (\ln x_2 - 2) x_2 = e^5$

【解析二】实数 x_1, x_2 满足 $x_1 e^{x_1} = e^3$ ， $x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5$ ，

$x_1 > 0, x_2 > e^2$ ， $\ln x_2 - 2 = t > 0, x_2 = e^{t+2}$ ，则 $te^t = e^3$ ，

$f(x) = xe^x (x > 0), f'(x) = (x+1)e^x > 0 (x > 0)$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，而 $f(x_1) = f(t) = e^3$ ，

$\therefore x_1 = t = \ln x_2 - 2, \therefore x_1 x_2 = x_2 (\ln x_2 - 2) = e^5$.

点评：两种解法实质相同，其关键是对已知等式进行变形，使其“结构相同”，然后构造函数，利用函数的单调性，利用是同一方程求解.

【巩固训练】

1. 已知 $5^5 < 8^4$ ， $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3$ ， $b = \log_8 5$ ， $c = \log_{13} 8$ ，则 ()

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

2. 设实数 $m > 0$ ，若对任意的 $x \geq e$ ，不等式 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 恒成立，则 m 的最大值是 () .

A. $\frac{1}{e}$

B. $\frac{e}{3}$

C. e

D. $2e$

3. 若存在正实数 x, y, z 满足 $3y^2 + 3z^2 \leq 10yz$, 且 $\ln x - \ln z = \frac{ey}{z}$, 则 $\frac{x}{y}$ 的最小值为_____.
4. 若函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域 $[m, n]$ 上的值域是 $[m^2, n^2]$ ($1 < m < n$), 则实数 a 的取值范围是_____.
5. 若函数 $f(x) = a^x - x^2$ ($a > 1$) 有且只有三个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.
6. 已知变量 $x_1, x_2 \in (0, m)$ ($m > 0$), 且 $x_1 < x_2$, 若 $x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$ 恒成立, 则实数 m 的最大值是_____.

【答案或提示】

1. 【答案】A

2. 【答案】C

【提示一】 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 变形为 $\ln x \cdot e^{\ln x} \geq \frac{m}{x} \cdot e^{\frac{m}{x}}$, 构造函数 $g(x) = xe^x$ ($x > 0$), 等价转化为 $\ln x \geq \frac{m}{x}$, 即 $m \leq x \ln x$, 只需 $m \leq (x \ln x)_{\min} = e$, 答案为 C.

【提示二】 $x^2 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 变形为 $\ln x \cdot e^{\ln x} \geq \frac{m}{x} \cdot e^{\frac{m}{x}}$, 两边取对数

$\ln(\ln x) + \ln x \geq \ln \frac{m}{x} + \frac{m}{x}$, 构造函数 $g(x) = x + \ln x$ ($x > 0$), 该函数单增, 故等价转化为

$\ln x \geq \frac{m}{x}$, 即 $m \leq x \ln x$, 只需 $m \leq (x \ln x)_{\min} = e$, 答案为 C.

3 【答案】 e^2

【提示】 $\frac{1}{3} \leq \frac{y}{z} \leq 3$, $\ln \frac{x}{z} = \frac{ey}{z}$, 令 $\frac{y}{z} = t$, $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$, $\ln \frac{x}{y} = \ln \frac{x}{z} + \ln \frac{z}{y} = et - \ln t$.

4. 【答案】 $(1, e^{\frac{2}{e}})$

【提示】方法同例 1.

5. 【答案】 $(1, e^{\frac{2}{e}})$

【提示】 $a^x = x^2$ ，取对数得 $\ln ax = 2 \ln x$ ，即 $\ln a = \frac{2 \ln x}{x}$ ，分离函数转化为 $y = \frac{2 \ln x}{x}$ 、

$y = \ln a$ 有三个交点.

6. 【答案】 e

【提示】 $x_1^{x_2} < x_2^{x_1} \Leftrightarrow x_2 \ln x_1 < x_1 \ln x_2 \Leftrightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$ ，则 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 单增.

专题 20 用数形结合法求解零点问题

【方法点拨】

1. 函数的零点的实质就是函数图象与 x 轴交点的横坐标，解决实际问题时，往往需分离函数，将零点个数问题转化为两个函数图象交点个数问题，将零点所在区间问题，转化为交点的横坐标所在区间问题.
2. 分离函数的基本策略是：一静一动，一直一曲，动直线、静曲线，要把构造“好函数”作为第一要务.
3. 作图时要注意运用导数等相关知识分析函数的单调性、奇偶性、以及关键点线(如渐进线)，以保证图像的准确.

【典型题示例】

例 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbb{R}$) 恰有 4 个

零点，则 k 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2\sqrt{2})$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

【答案】D

【分析】由 $g(0) = 0$ ，结合已知，将问题转化为 $y = |kx - 2|$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 有 3 个不同交

点，分 $k = 0, k < 0, k > 0$ 三种情况，数形结合讨论即可得到答案.

【解析】注意到 $g(0)=0$ ，所以要使 $g(x)$ 恰有 4 个零点，只需方程 $|kx-2|=\frac{f(x)}{|x|}$ 恰有 3

个实根即可，

令 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$ ，即 $y=|kx-2|$ 与 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$ 的图象有 3 个不同交点。

因为 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$ ，

当 $k=0$ 时，此时 $y=2$ ，如图 1， $y=2$ 与 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$ 有 2 个不同交点，不满足题意；

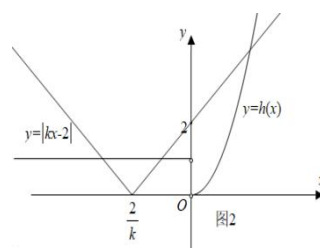
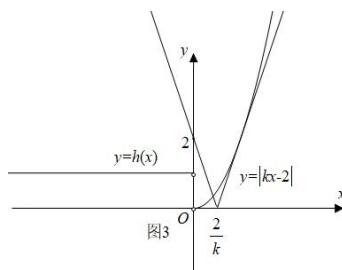
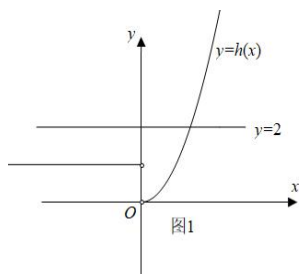
当 $k<0$ 时，如图 2，此时 $y=|kx-2|$ 与 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$ 恒有 3 个不同交点，满足题意；

当 $k>0$ 时，如图 3，当 $y=kx-2$ 与 $y=x^2$ 相切时，联立方程得 $x^2-kx+2=0$ ，

令 $\Delta=0$ 得 $k^2-8=0$ ，解得 $k=2\sqrt{2}$ （负值舍去），所以 $k>2\sqrt{2}$ 。

综上， k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ 。

故选：D。



点评：

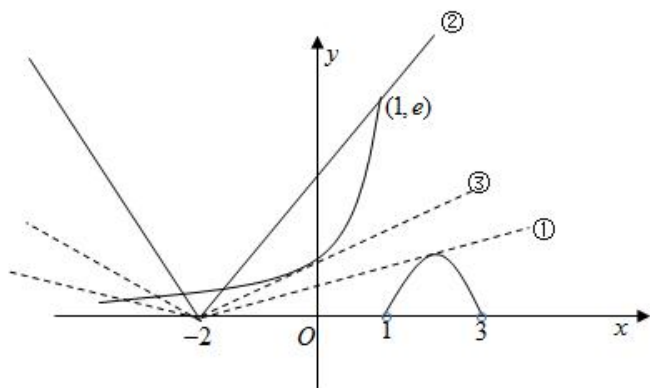
本题是一道由函数零点个数求参数的取值范围的问题，其基本思路是运用图象，将零点个数问题转化为两函数图象交点个数，考查函数与方程的应用、数形结合思想、转化与化归思想、导数知识、一元二次方程、极值不等式、特值等进行分析求参数的范围。

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 1 \\ \sqrt{-x^2+4x-3}, & 1<x<3 \end{cases}$ ，若函数 $g(x)=f(x)-k|x+2|$ 有三个

零点，则实数 k 的取值范围是_____。

【答案】 $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, \frac{e}{3}\right]$

【解析】作 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1 \\ \sqrt{-x^2 + 4x - 3}, & 1 < x < 3 \end{cases}$ 与 $y = k|x+2|$ 图象，



由 $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = k(x+2), k > 0, x > -2$ 得 $(k^2 + 1)x^2 + (4k^2 - 4)x + 4k^2 + 3 = 0$

由 $\Delta = (4k^2 - 4)^2 - 4(k^2 + 1)(4k^2 + 3) = 0$ 得 $k^2 = \frac{1}{15}$ 且 $k > 0 \therefore k = \frac{\sqrt{15}}{15}$ ，对应图中分界线①；

①；

由 $y = k(x+2), k > 0, x > -2$ 过点 $(1, e)$ 得 $k = \frac{e}{3}$ ，对应图中分界线②；

当 $y = k(x+2), k > 0, x > -2$ 与 $y = e^x$ 相切于 (x_0, e^{x_0}) 时，因为 $y' = e^x$ ，所以

$k = e^{x_0} = k(x_0 + 2)$ 且 $k > 0 \therefore x_0 = -1, k = \frac{1}{e}$ ，对应图中分界线③；

因为函数 $g(x) = f(x) - k|x+2|$ 有三个零点，所以实数 k 的取值范围是 $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, \frac{e}{3}\right]$

故答案为： $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, \frac{e}{3}\right]$

例3 已知函数 $f(x) = x^2 - (m+1)x - 1$ 与 $g(x) = \ln x - 2x - 2m$ 的零点分别为 x_1, x_2 和 x_3, x_4 。若 $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ ，则实数 m 的取值范围是_____。

【答案】 $(-\infty, -1)$

【分析】将问题转化为函数 $y = m$ 与函数 $h(x) = x - \frac{1}{x} - 1$ 和 $e(x) = \frac{1}{2} \ln x - x$ 交点的大小问题，作出函数图像，观察图像可得结果。

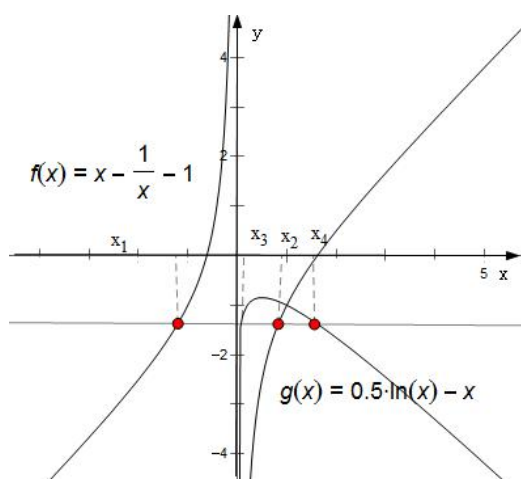
【解析】由 $f(x) = x^2 - (m+1)x - 1 = 0$ ，得 $m = x - \frac{1}{x} - 1$ ，

对于函数 $h(x) = x - \frac{1}{x} - 1$ ，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

由 $g(x) = \ln x - 2x - 2m = 0$ ，得 $m = \frac{1}{2} \ln x - x$ ，

对于 $e(x) = \frac{1}{2} \ln x - x$ ， $y' = \frac{1}{2x} - 1 = \frac{1-2x}{2x}$ 得 $y = \frac{1}{2} \ln x - x$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在

$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减，最大值为 $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ ，其图像如图，



令 $x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{2} \ln x - x$ 得 $A(1, -1)$ ，

要 $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ ，则直线 $y = m$ 要在 A 点下方，

$\therefore m < -1$ ，

\therefore 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1)$ 。

例 4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} k(1 - \frac{2}{x}), & x < 0 \\ x^2 - 2k, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(-x) + f(x)$ 有且仅有四个不同

的零点，则实数 k 的取值范围是_____。

【答案】 $(27, +\infty)$

【分析】 由 $g(x) = f(-x) + f(x)$ 知， $g(x) = f(-x) + f(x)$ 是偶函数，研究“一半”，问

题转化为 $g(x) = x^2 + \frac{2k}{x} - k, x > 0$ 有且仅有两个不同的零点，分离函数得

$\frac{1}{k} x^2 = -\frac{2}{x} + 1 (x > 0)$ ，两边均为基本初等函数，当曲线在一点相切时，两曲线只有一

个交点，利用导数知识求出切点坐标，当抛物线开口变大，即函数值小于切点的纵坐标

即可.

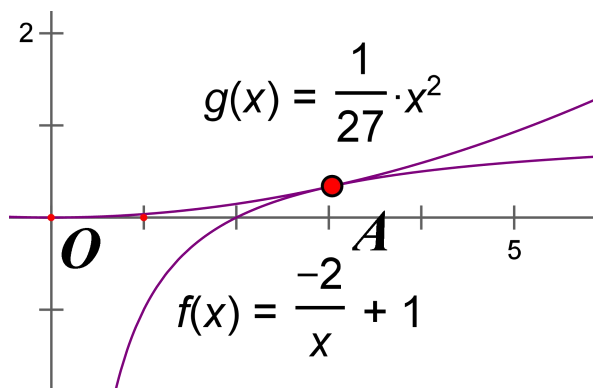
【解析】易知 $g(x) = f(-x) + f(x)$ 是偶函数,

问题可转化为 $g(x) = x^2 + \frac{2k}{x} - k, x > 0$ 有且仅有两个不同的零点.

分离函数得 $\frac{1}{k}x^2 = -\frac{2}{x} + 1 (x > 0)$, 由图形易知 $k > 0$,

问题进一步转化为 $y = \frac{1}{k}x^2, y = -\frac{2}{x} + 1 (x > 0)$ 有两个交点问题.

先考察两曲线相切时的“临界状态”, 此时, 两曲线只有一个交点



设两个函数图象的公切点为 $\left(x_0, -\frac{2}{x_0} + 1\right) (x_0 > 0)$

$$\text{则} \begin{cases} \frac{2}{x_0^2} = \frac{2}{k} x_0 \\ -\frac{2}{x_0} + 1 = \frac{1}{k} x_0^2, \text{解得 } x_0 = 3, \text{切点为 } \left(3, \frac{1}{3}\right) \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

再考虑两曲线有两个交点, 当且仅当对于二次函数 $y = \frac{1}{k}x^2$, 当 $x = 3$ 时, 其函数值

$y < \frac{1}{3}$, 即图象在 $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ 的下方

所以当 $\frac{1}{k} \times 3^2 < \frac{1}{3}$ 时, 即 $k > 27$ 时, 上述两个函数图象有两个交点

综上所述, 实数 k 的取值范围是 $(27, +\infty)$.

点评:

1. 本题解法较多，但利用“形”最简单，只要函数分离的恰当，这种题实现“分分钟”解决也是可及的.
2. 有关函数零点的问题解法灵活，综合考察函数的图象与性质、导数的几何意义、分离函数的意识、分离参数的意识等，综合性强，较难把握.
3. 利用“数学结合法”求解零点问题的要点有二. 一是分离函数，基本策略是“一静一动、一直一曲，动直线、定曲线”，函数最好是基本初等函数；二是求解过程中的“临界状态”的确定，若是一直一曲，一般相切是“临界状态”，若是两曲，一般公切是“临界状态”（曲线的凸凹性相反，即曲线在公切线的两侧）

例 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} + mx^2, & x < 0, \\ e^x + mx^2, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 有四个不同的零点，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -\frac{e^2}{4})$

【解析】 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} + mx^2, & x < 0, \\ e^x + mx^2, & x > 0 \end{cases}$ 是偶函数，问题转化为 $e^x + mx^2 = 0$ ，即 $e^x = -mx^2$ ($x > 0$)

有两个零点

易知 $m < 0$ ，两边均为曲线，较难求解.

两边取自然对数， $x = \ln(-m) + 2 \ln x$ ，即 $x - \ln(-m) = 2 \ln x$

问题即为： $g(x) = x - \ln(-m)$ 与 $h(x) = 2 \ln x$ 有两个交点

先考察直线 $y = x + b$ 与 $h(x) = 2 \ln x$ 相切，即只有一点交点的“临界状态”

设切点为 $(x_0, 2 \ln x_0)$ ，则 $h'(x_0) = \frac{2}{x_0} = 1$ ，解得 $x_0 = 2$ ，此时切点为 $(2, 2 \ln 2)$

代入 $b = 2 \ln 2 - 2$

再求 $g(x) = x - \ln(-m)$ 与 $h(x) = 2 \ln x$ 有两个交点时， m 的取值范围

由图象知，当 $g(x) = x - \ln(-m)$ 在直线 $y = x + b$ 下方时，满足题意

故 $-\ln(-m) < b = 2 \ln 2 - 2$ ，解之得 $m < -\frac{e^2}{4}$ ，此时也符合 $m < 0$

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{e^2}{4})$.

点评：

取对数的目的在于“化双曲为一直一曲”，简化了运算、难度，取对数不影响零点的个

数.

例 6 若函数 $f(x) = \frac{|x|}{x+2} - kx^3$ 有三个不同的零点, 则实数 k 的取值范围为_____.

【答案】 $(-\infty, -\frac{27}{32}) \cup (0, +\infty)$

【分析】 本题的难点是“分离函数”, 函数分离的是否恰当、易于进一步解题, 是分离时应综合考虑的重要因素, 也是学生数学素养、能力的综合体现. 本例中, 可将已知变形为下

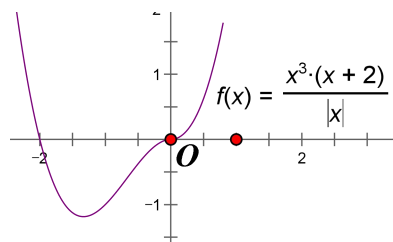
列多种形式: $\frac{|x|}{x+2} = kx^3 \Rightarrow \frac{|x|}{x(x+2)} = kx^2$ 、 $\frac{|x|}{x^3} = k(x+2)$, $\frac{1}{k} = \frac{x^3(x+2)}{|x|}$, \dots , 但利用

$\frac{1}{k} = \frac{x^3(x+2)}{|x|}$ 较简单.

【解析】 易知 0 是函数 $f(x) = \frac{|x|}{x+2} - kx^3$ 一个的零点,

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{|x|}{x+2} - kx^3 = 0$ 可化为 $\frac{1}{k} = \frac{x^3(x+2)}{|x|}$, 考虑 $y = \frac{1}{k}$ 与 $g(x) = \frac{x^3(x+2)}{|x|}$ 有

且只有两个非零零点. 如下图,



利用导数知识易得: $g(x)_{\min} = g(-\frac{4}{3}) = -\frac{32}{27}$

由图象得: $-\frac{32}{27} < \frac{1}{k} < 0$ 或 $\frac{1}{k} > 0$, 解之得: $k < -\frac{27}{32}$ 或 $k > 0$

所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{27}{32}) \cup (0, +\infty)$.

例 7 已知函数 $f(x) = \ln(e^{2|x|-4} + 1)$, $g(x) = |x| + a - 2$. 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有四个不相等的实数解, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(\ln 2, \ln(e^4 + 1) - 2)$

【分析】 从结构上看, 首先考虑“对化指”, 方程 $\ln(e^{2|x|-4} + 1) = |x| + a - 2 \Leftrightarrow e^{2|x|-4} + 1 - e^{|x|+a-2} = 0$, 属于复合函数的零点问题, 内函数是指数型, 外函数是二次函数. 设 $h(x) = e^{2|x|-4} + 1 - e^{|x|+a-2}$, $x \in R$, 则 $h(x)$ 为偶函数, 研究“一

半”，令 $t = e^{x-2}$ ， $x > 0$ ，则关于 t 的方程 $t^2 - e^a t + 1 = 0$ 在 $(e^{-2}, +\infty)$ 内有两个不相等的实根，分离参数，利用“形”立得.

【解析】方程 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2|x|-4} + 1) = |x| + a - 2 \Leftrightarrow e^{2|x|-4} + 1 - e^{|x|+a-2} = 0$

令 $h(x) = e^{2|x|-4} + 1 - e^{|x|+a-2}$ ， $x \in R$ ，则显然 $h(x)$ 为偶函数，

所以方程 $f(x) = g(x)$ 有四个实根 \Leftrightarrow 函数 $h(x) = e^{2x-4} + 1 - e^{x+a-2}$ ， $x > 0$ 有两个零点，

令 $t = e^{x-2}$ ， $x > 0$ ，则关于 t 的方程 $t^2 - e^a t + 1 = 0$ ，

即 $e^a = t + \frac{1}{t}$ 在 $(e^{-2}, +\infty)$ 内有两个不相等的实根，

结合函数 $y = t + \frac{1}{t}$ ， $t > e^{-2}$ 的图像，得 $2 < e^a < e^2 + e^{-2}$ ，

即 $\ln 2 < a < \ln(e^4 + 1) - 2$ ，

则实数 a 的取值范围是 $(\ln 2, \ln(e^4 + 1) - 2)$.

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x) = a(2a-1)e^{2x} - (3a-1)(x+2)e^x + (x+2)^2$ 有四个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

B. $\left(1, \frac{e+1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{e+1}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{e+1}{2}\right)$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \end{cases}$ ， $g(x) = me^x$ (其中 m 是非零实数)，若函数 $y = f(x)$

与函数 $y = g(x)$ 的图象有且仅有两个交点，则 m 的取值范围为_____.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2e \ln x, & x > 0 \\ x^3 + x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax^2$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

4. 已知 e 为自然对数的底数, 若方程 $|x \ln x - ex + e| = mx$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e^2]$ 上有三个不同实数根, 则实数 m 的取值范围是_____.

5. 已知关于 x 的方程 $\frac{|x|}{x-2} = kx$ 有三个不同的实数解, 则实数 k 的取值范围是_____.

6. 已知关于 x 的方程 $\frac{|x|}{x+3} = kx^3$ 有三个不同的实数解, 则实数 k 的取值范围是_____.

7. 若函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1 (a \in R)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值的和为_____.

8. 若函数 $f(x) = a^x - x - a (a > 0)$, 且 $a \neq 1$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

9. 已知函数 $f(x) = e^x - 2x + a$ 有零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

10. 已知函数 $f(x) = ax$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 其中 a 为实数. 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有两个实数解, 则实数 a 的取值范围为_____.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax + |x+2|, & x < 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(1-x) + f(x-1)$ 有且仅有四个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

12. 已知函数 $f(x) = |x-a| - \frac{3}{x} + a$, $a \in R$, 若关于 x 的方程 $f(x) = 2$ 有且仅有三个不同的实根, 且它们成等差数列, 则实数 a 取值的集合为_____.

【答案与提示】

1. 【答案】 D

【提示】 $f(x) = [ae^x - (x+2)][(2a-1)e^x - (x+2)]$ ，根据对称性，只需考察

$e^x = \frac{1}{a}(x+2)$ 有两个零点，得 $0 < a < e$ ，故有 $\begin{cases} 0 < a < e \\ 0 < 2a-1 < e \\ a \neq 2a-1 \end{cases}$ ，前两者是保证两方程各自

有两解，这里（*）易漏，它是保证两方程解不相同的。

2. 【答案】 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[1, \frac{3}{e}\right)$

【提示】转化为函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{e^x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & x < 0 \end{cases}$ 与函数 $G(x) = m$ 的图象有且仅有两个交点最

简。

3. 【答案】 $(0,1) \cup \{-2\}$

【提示】易知 0 是其中一个零点，问题转化为 $y = a$ 与函数 $k(x) = \begin{cases} \frac{2e \ln x}{x^2}, & x > 0 \\ x + \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 有两个不同的零点。

4. 【答案】 $\left(\frac{e}{e-2}, \frac{e}{e-2} - 2, e-2\right)$

【解析】方程两边同时除以 x ，令 $f(x) = \ln x - e + \frac{e}{x}$ ，问题转化为 $y = |f(x)|$ 与 $y = m$ 的

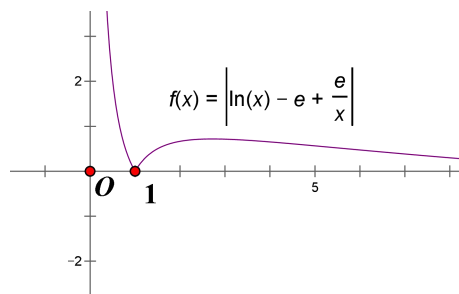
图象在区间 $\left[\frac{1}{e}, e^2\right]$ 上有三个交点。

$$\because f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2},$$

\therefore 当 $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 减；当 $x \in (e, e^2)$ 时，

$f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 增。

故当 $x = e$ 时， $f(x)$ 取得极小值，且 $f(e) = 2 - e < 0$ 。



又 $f(1) = 0$, $f(\frac{1}{e}) = e^2 - e - 1 > 0$, $f(e^2) = \frac{1}{e} - e + 2 < 0$

作出 $y = |f(x)|$ 的图象, 由图象知实数 m 的取值范围是: $(\frac{1}{e} - \frac{1}{e} - 2, e - 2)$.

5. 【答案】 $0 < k < \frac{1}{2}$

【解析】 $k = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, x > 0 \\ -\frac{1}{x-2}, x < 0 \\ R, x = 0 \end{cases}$, 画图得出 k 的取值范围.

6. 【答案】 $k > 0$ 或 $k < -\frac{1}{4}$.

【提示】 参见例 6.

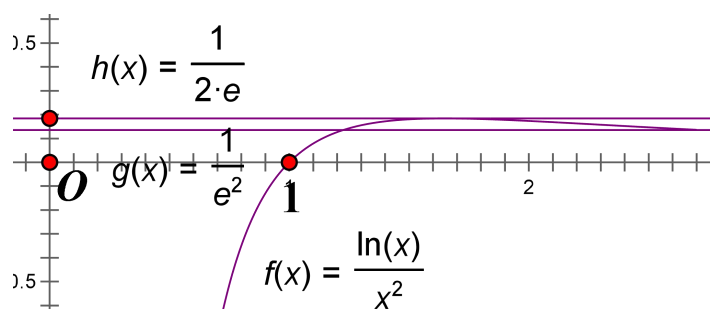
7. 【答案】 -3

8. 【答案】 $a > 1$

9. 【答案】 $(-\infty, 2\ln 2 - 2]$

10. 【答案】 $[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{2e})$

【提示】 完全分参 $a = \frac{\ln x}{x^2}$, 利用 $y = a$ 与 $y = \frac{\ln x}{x^2}$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有两个交点即可.



11. 【答案】 $(2, +\infty)$

【提示】 设 $h(x) = f(-x) + f(x)$, 则

$g(x) = f(1-x) + f(x-1) = f[-(x-1)] + f(x-1) = h(x-1)$, 故 $g(x)$ 有且仅有四个不

同的零点, 即等价于 $h(x) = f(-x) + f(x)$ 有且仅有四个不同的零点,

即 $t^3 - at + |2 - t| = 0, t > 0$ 有两个零点

思路一：（全分） $a = \begin{cases} t^2 + \frac{2}{t} - 1, & 0 < t < 2 \\ t^2 - \frac{2}{t} + 1, & t \geq 2 \end{cases}$

思路二：（半分） $t^3 - at = -|2 - t|, t > 0$

12. 【答案】 $\left\{ -\frac{9}{5}, \frac{5+3\sqrt{33}}{8} \right\}$

【提示】变形为 $|x - a| + a = \frac{3}{x} + 3$ 转化为 $y = |x - a| + a$ 与 $y = \frac{3}{x} + 3$ 有且仅有三个不同的交

点，而函数 $y = |x - a| + a$ 的图象是定点在直线 $y = x$ 上、开口向上的 V 形折线.

专题 21 有关等高线求值、求范围问题

【方法点拨】

1. 函数在两点或两点以上点处的函数值相等，我们称之为等高线，此类题常以求取值范围的形式出现，其基本方法是“减元”，即充分利用函数值相等这一条件实施“消元”.
2. 对于函数 $f(x) = |\log_a x|$ ，若存在正数 $m, n (m < n)$ ，满足 $f(m) = f(n)$ ，则 $0 < m < 1 < n$ ，且 $mn = 1$.
3. 等高线问题重在“减元”，要充分利用“函数值相等”，树立目标意识，预设“消谁留谁”，利用“函数值相等”的逆向使用，探究出自变量间的等量关系.

【典型题示例】

例 1 (2022 · 新高考 I · 22 改编) 已知函数 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$ ，存在直线 $y = b$ ，其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 ，则 $\frac{x_1 + x_3}{x_2} =$ _____.

【答案】 2

【分析】由“等高”得 $b = f(x_1) = f(x_2) = g(x_2) = g(x_3)$ ，即

$e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3$ ，这样就建立 x_1, x_2, x_3 间的等量关系，为达到

“减元”之目的，需在纷杂的关系中，梳理出 $e^{x_1} - x_1 = x_2 - \ln x_2$ 、 $e^{x_2} - x_2 = x_3 - \ln x_3$ 两组关系，发现“指对同现”想“同构”，从而得到 $x_1 = \ln x_2$ ， $x_3 = e^{x_2}$ ，代入求解即得解。

【解析】令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$ 得 $x = 0$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，且 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$ 。

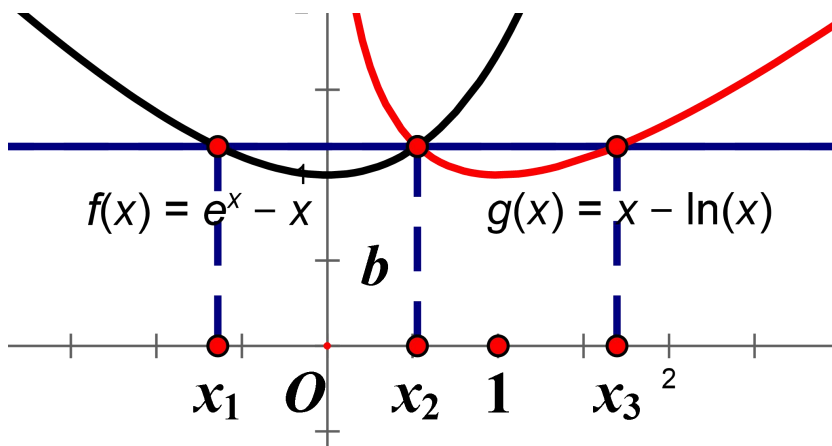
令 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0$ 得 $x = 1$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数，在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，且 $g(x)_{\min} = g(1) = 1$ 。

故函数 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$ 有相同的最小值 1

如下图所示，当直线 $y = b$ 过函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的交点时，满足题意，

此时 $b > 1$ ，故 $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$



由 $b = f(x_1) = f(x_2) = g(x_2) = g(x_3)$ ，

得 $e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3$

$$\text{即} \begin{cases} e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 \\ x_3 - \ln x_3 = e^{x_2} - x_2 \\ e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2 \end{cases}$$

一方面 $e^{x_1} - x_1 = x_2 - \ln x_2$ ，而 $e^{x_1} - x_1 = e^{x_1} - \ln e^{x_1} = g(e^{x_1})$

所以 $g(x_2) = g(e^{x_1})$

又因为 $0 < e^{x_1} < 1$ ， $0 < x_2 < 1$ ，且 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数

所以 $x_2 = e^{x_1}$ ，所以 $x_1 = \ln x_2$

另一方面，由 $e^{x_2} - x_2 = x_3 - \ln x_3$ ，同理可得 $x_3 = e^{x_2}$

所以 $\frac{x_1 + x_3}{x_2} = \frac{\ln x_2 + e^{x_2}}{x_2}$

再由 $b = f(x_2) = e^{x_2} - x_2$ 和 $b = g(x_2) = x_2 - \ln x_2$ 得 $b = e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$

据果移项得 $e^{x_2} + \ln x_2 = 2x_2$ ，所以 $\frac{\ln x_2 + e^{x_2}}{x_2} = 2$

综上， $\frac{x_1 + x_3}{x_2} = 2$ 。

例2 设函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ -x + 7, & x > 2 \end{cases}$ ，若互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，

则 $2^a + 2^b + 2^c$ 的取值范围是（ ）

A. (8,9)

B. (65,129)

C. (64,128)

D. (66,130)

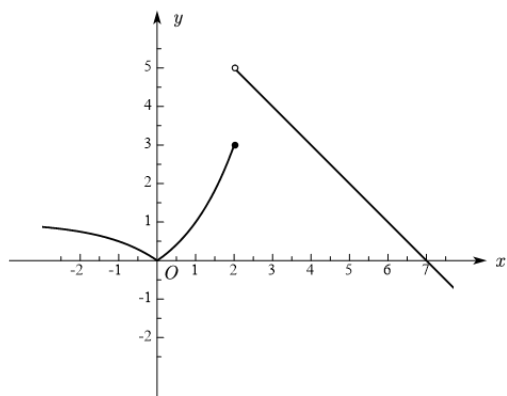
【答案】D

【分析】

画出函数 $f(x)$ 的图象，不妨令 $a < b < c$ ，则 $2^a + 2^b = 2$ 。结合图象可得 $6 < c < 7$ ，从而可得结果。

【详解】

画出函数 $f(x)$ 的图象如图所示。



不妨令 $a < b < c$ ，则 $1 - 2^a = 2^b - 1$ ，则 $2^a + 2^b = 2$ 。

结合图象可得 $6 < c < 7$ ，故 $2^6 < 2^c < 2^7$ 。

$\therefore 66 < 2^a + 2^b + 2^c < 130$ 。

故选：D。

例 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 3 \\ f(6-x), & 3 < x < 6 \end{cases}$ ，方程 $f(x) = m$ 有四个不相等的实数根

x_1, x_2, x_3, x_4 ，则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ 的最小值为_____。

【答案】50

【分析】 设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，则 $x_2 = \frac{1}{x_1}$ ， $x_3 = 6 - x_2 = 6 - \frac{1}{x_1}$ ， $x_4 = 6 - x_1$ ，且 $\frac{1}{3} < x_1 < 1$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + (6 - x_1)^2 + \left(6 - \frac{1}{x_1}\right)^2 = 2x_1^2 + \frac{2}{x_1^2} - 12x_1 - 12\frac{1}{x_1} + 72$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 - 12\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + 68$$

$$\text{令 } x_1 + \frac{1}{x_1} = t \left(2 < t < \frac{10}{3}\right)$$

$$\text{则 } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2t^2 - 12t + 68 = 2(t-3)^2 + 50$$

$$\text{故当 } t = 3 \in \left(2, \frac{10}{3}\right) \text{ 时，} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)_{\min} = 50$$

所以 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ 的最小值为 50。

例4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，若存在实数 m, n ($m < n$) 满足 $f(m) = f(n)$ ，则

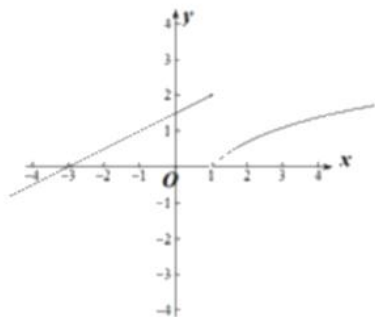
$2n - m$ 的取值范围为_____.

【答案】 $(5, 2e^2 - 1]$

【分析】由 $f(m) = f(n)$ 得 $\frac{1}{2}m + \frac{3}{2} = \ln n$ ($1 < n \leq e^2$)，即 $m = 2\ln n - 3$ ，代入

$2n - m = 2n - 2\ln n + 3$ ，设 $g(x) = 2x - 2\ln x + 3$ ($x \in (1, e^2]$)，问题转化为求 $g(x)$ 取值范围问题，利用导数知识易得.

【解析】作出函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 的图像如下图所示：



若存在实数 m, n ($m < n$) 满足 $f(m) = f(n)$ ，

根据图像可得 $-3 < m \leq 1, 1 < n \leq e^2$ ，

所以 $\frac{1}{2}m + \frac{3}{2} = \ln n$ ，即 $m = 2\ln n - 3$ ，则 $2n - m = 2n - 2\ln n + 3$ ，

令 $g(x) = 2x - 2\ln x + 3$ ($x \in (1, e^2]$)， $g'(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x}$

当 $x \in (1, e^2]$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 在区间 $(1, e^2]$ 上单调递增，

$g(1) = 2 - 2\ln 1 + 3 = 5$ ， $g(e^2) = 2e^2 - 4 + 3 = 2e^2 - 1$ ，

所以 $g(x) \in (5, 2e^2 - 1]$ ，即 $2n - m \in (5, 2e^2 - 1]$.

例5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln(-x)|, & x < 0, \\ x^2 - 4x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$. 若 x_1, x_2, x_3, x_4 是方程 $f(x) = t$ 的四个互

不相等的解，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 的取值范围是（ ）

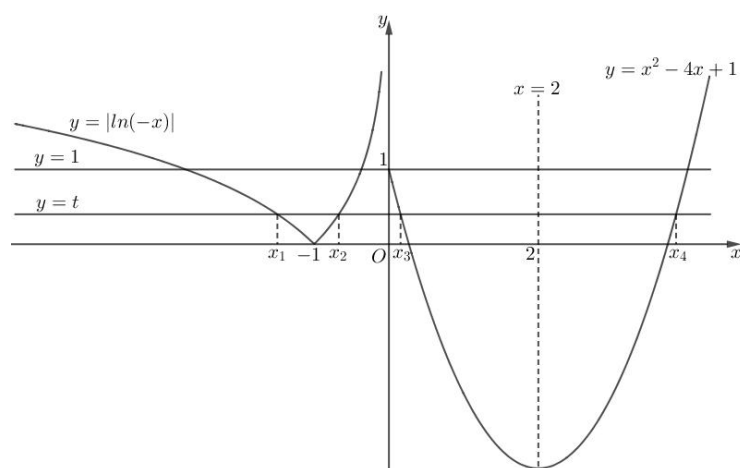
- A. $[6, +\infty)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $\left(4 - e - \frac{1}{e}, 2\right]$ D.

$$\left[4 - e - \frac{1}{e}, 2\right)$$

【答案】D

【分析】根据给定函数画出其图象，结合图象可得 $|\ln(-x_1)| = |\ln(-x_2)|$, $x_3 + x_4 = 4$ ，再借助对勾函数的单调性即可计算判断作答.

【解析】作出函数 $f(x)$ 的图象，如图， $f(x)$ 的递减区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $[0, 2]$ ，递增区间是 $(-1, 0)$ 和 $(2, +\infty)$



因 x_1, x_2, x_3, x_4 是方程 $f(x) = t$ 的四个互不相等的解，则 $0 < t \leq 1$ ，不妨令 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，

则有 x_3, x_4 是方程 $x^2 - 4x + 1 = t, x \geq 0$ 的两个根，必有 $x_3 + x_4 = 4$ ，

x_1, x_2 是方程 $|\ln(-x)| = t, x < 0$ 的两个不等根，则 $|\ln(-x_1)| = |\ln(-x_2)|$ ，

$$\ln(-x_1) + \ln(-x_2) = 0,$$

整理得 $x_1 x_2 = 1$ ，即 $x_1 = \frac{1}{x_2}$ ，由 $|\ln(-x)| = 1$ 得： $x = -e$ 或 $x = -\frac{1}{e}$ ，因此有 $x_1 = \frac{1}{x_2}$ ，

$$-1 < x_2 \leq -\frac{1}{e},$$

则有 $x_1 + x_2 = \frac{1}{x_2} + x_2$, $-1 < x_2 \leq -\frac{1}{e}$, 而函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(-1, -\frac{1}{e}]$ 上单调递减, 从而得

$$-e - \frac{1}{e} \leq \frac{1}{x_2} + x_2 < -2 ,$$

于是得 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_2} + x_2 + 4 \in [4 - e - \frac{1}{e}, 2)$,

所以 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 的取值范围是 $[4 - e - \frac{1}{e}, 2)$.

故选: D

【巩固训练】

1. (多选题) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 则下列结论正确的是()

- A. $x_1 + x_2 = -1$ B. $x_3 x_4 = 1$ C. $1 < x_4 < 2$ D. $0 < x_1 x_2 x_3 x_4 < 1$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x < e \\ -x + e + 1, & x \geq e \end{cases}$, 若存在 $0 < a < b < c$, 使得 $f(a) = f(b) = f(c)$,

则 $Z = a + b + c$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{3} - \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + e + 1$ B. 1 C. $\sqrt{5} - \ln \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + e + 1$ D. 无最小值

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 4 \\ 6 - x, & x \geq 4 \end{cases}$ 存在三个互不相等的正实数 a, b, c 且 $a < b < c$ 时有 $f(a) =$

$f(b) = f(c)$, 则 $abcf(a)$ 取值范围是_____.

4. 已知函数 $f(x) = |\log_a |x - 1||$ ($a > 0, a \neq 1$) , 若 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$

$= f(x_3) = f(x_4)$, 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} =$ _____.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x < 1, \\ 2^x + \frac{1}{2}, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $a > b \geq 0$, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $bf(a)$ 的取值范围是_____.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & 0 \leq x < 4, \\ \log_2^{(x-2)} + 2, & 4 \leq x \leq 6, \end{cases}$ 若存在 $x_1, x_2 \in R$, 当 $0 \leq x_1 < 4 \leq x_2 \leq 6$ 时,

$f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 \cdot f(x_2)$ 的取值范围是_____.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2^{x-1}, & x \in [\frac{1}{2}, 2) \end{cases}$ 若存在 x_1, x_2 , 当 $0 \leq x_1 < x_2 < 2$ 时, $f(x_1) = f(x_2)$,

则 $x_1 f(x_2)$ 的取值范围是_____.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2, \\ -x + 5, & x > 2, \end{cases}$ 若互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 $2^a + 2^b + 2^c$ 的取值范围为_____.

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|x+3|+1), & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若存在实数 $a < b < c$, 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$,

则 $af(a) + bf(b) + cf(c)$ 的最大值是_____.

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10, \\ -\frac{1}{2}x + 6, & x > 10, \end{cases}$ 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc

的取值范围是_____.

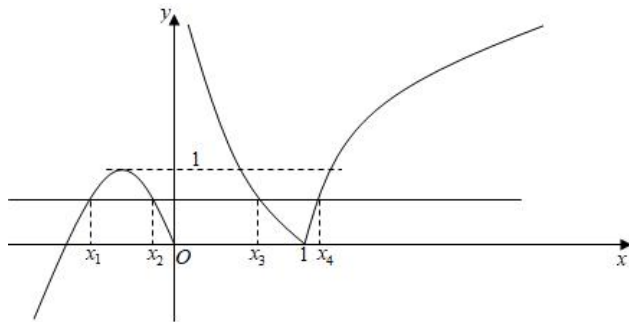
11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ e^{x-2}, & x \in (1, 3] \end{cases}$, 其中 e 为自然对数的底数, 若存在实数 x_1, x_2 满足 0

$\leq x_1 < x_2 \leq 3$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_2 - 2x_1$ 的取值范围为_____.

【答案与提示】

1. 【分析】作出函数的图象分析出 $x_1 + x_2 = -2$, $-2 < x_1 < -1$, $x_3 x_4 = 1$; 再对答案进行分析.

【解答】解：由函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$ ，作出其函数图象：



由图可知， $x_1 + x_2 = -2$ ， $-2 < x_1 < -1$ ；

当 $y = 1$ 时， $|\log_2 x| = 1$ ，有 $x = \frac{1}{2}, 2$ ；

所以 $\frac{1}{2} < x_3 < 1 < x_4 < 2$ ；

由 $f(x_3) = f(x_4)$ 有 $|\log_2 x_3| = |\log_2 x_4|$ ，即 $\log_2 x_3 + \log_2 x_4 = 0$ ；

所以 $x_3 x_4 = 1$ ；

则 $x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 = x_1(-2 - x_1) = -(x_1 + 1)^2 + 1 \in (0, 1)$ ；

故选：BCD．

2.2. 【答案】C．

【解析】由图及 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，

可知 $0 < a < 1 < b < e < c$ ，且 $ab = 1$ ， $c = -\ln b + e + 1$ ．

则 $Z = a + b + c = \frac{1}{b} + b - \ln b + e + 1$ ．($1 < b < e$)．

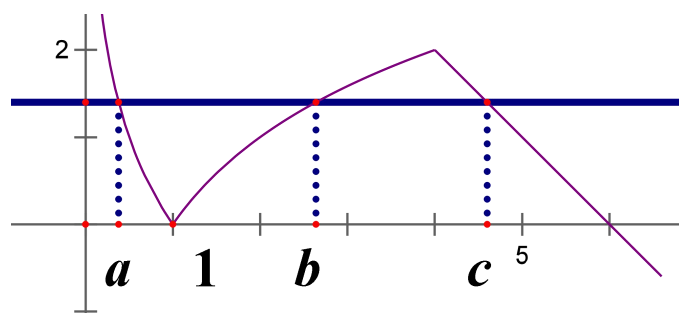
设 $g(x) = \frac{1}{x} + x - \ln x + e + 1$ ．($1 < x < e$)．

$$\therefore g'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})}{x^2},$$

可得函数 $g(x)$ 在 $(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, e)$ 上单调递增．

$\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}) = \sqrt{5} - \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + e + 1$ ． 故选：C．

3. 【答案】 $(0, 8)$



【提示】易知 $ab=1$ ，且 $4 < c < 6$

所以 $abcf(a) = cf(a) = cf(c) = c(6-c) \in (0, 8)$

4. 【答案】 2

5. 【答案】 $\left[\frac{5}{4}, 3\right)$

6. 【答案】 $\left[3, \frac{256}{27}\right]$

7. 【答案】 $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right)$

8. 【答案】 $(18, 34)$

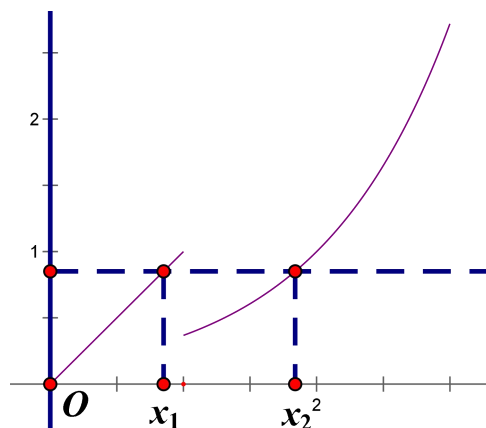
9. 【答案】 $2e^2 - 12$

10. 【答案】 $(10, 12)$

【提示】不妨设 $a < b < c$ ，则 $0 < a < 1 < b$ ， $ab=1$ ，故 $abc=c$ ，只需确定 c 的范围即可，利用图象立得解.

11. 【答案】 $[0, 1 - \ln 2]$

【分析】利用已知 $f(x_1) = f(x_2)$ 进行减元，构造函数，转化为区间上的最值问题.



【解答】由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得: $x_1 = e^{(x-2)}$, 所以 $x_2 - 2x_1 = x_2 - 2e^{x-2}$, 易知 $1 < x_2 \leq 2$,

设 $g(x) = x - 2e^{(x-2)}$ ($1 < x \leq 2$),

则由 $g'(x) = 1 - 2e^{(x-2)} = 0$, 得 $x = 2 - \ln 2$

当 $x \in (1, 2 - \ln 2)$, 则 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (2 - \ln 2, 2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

所以当 $x = 2 - \ln 2$ 时, $g(x)$ 取极大值也是最大值, 即 $g(x)_{\max} = g(2 - \ln 2) = 1 - \ln 2$, 又 $g(1) = 1 - 2e^{-1} < 0$, $g(2) = 0$.

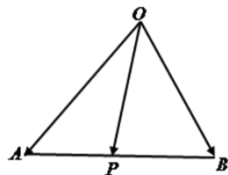
故 $g(x)$ 的值域为 $[0, 1 - \ln 2]$.

即 $x_2 - 2x_1$ 的取值范围为 $[0, 1 - \ln 2]$.

专题 22 三点共线充要条件的应用

【方法点拨】

在平面内, $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 是不共线向量, 设 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ($x, y \in \mathbb{R}$), P, A, B 三点共线 $\Leftrightarrow x + y = 1$



说明:

1. 上述结论可概括为“起点一致, 终点共线, 系数和为 1”, 利用此结论, 可求交点位置向量或者两条线段长度的比值.

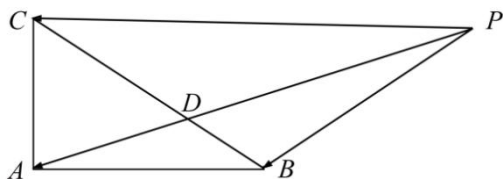
2. 当条件中出现共起点的两个向量的线性组合时, 应往三点共线方向考虑, 特别的, 当系数和不是“1”时, 应化“1”.

3. 遇到条件“两条线段相交于一点”时, 可转化成两次向量共线, 进而确定交点位置.

【典型题示例】

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $AC = 3$, $\angle BAC = 90^\circ$, D 在边 BC 上, 延长 AD 到 P , 使得 $AP = 9$,

若 $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + (\frac{3}{2} - m)\overrightarrow{PC}$ (m 为常数), 则 CD 的长度是_____.



【答案】0 或 $\frac{18}{5}$.

【分析】条件 $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + (\frac{3}{2} - m)\overrightarrow{PC}$ 中向量共起点, 可联想到三点共线, 但其系数和不是 1, 应先变形为系数和是 1 的情形, 求出 $AD = 3$. 继而, 在 $\triangle ACD$ 直接利用余弦定理或直接利用 $\triangle ACD$ 是等腰三角形求出其底边 CD .

【解析】 $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + (\frac{3}{2} - m)\overrightarrow{PC}$ 可化为 $\frac{2}{3}\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}m\overrightarrow{PB} + (1 - \frac{2}{3}m)\overrightarrow{PC}$

当 $m \neq 0$, 且 $m \neq \frac{3}{2}$ 时

$\therefore B, D, C$ 三点共线

$\therefore \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD}$, 故 $DP = 6$, $AD = 3$,

在 $\triangle ACD$, $AD = AC = 3$, $\cos \angle CAD = \frac{3}{5}$

$CD = 2AC \times \cos \angle CAD = \frac{18}{5}$.

当 $m = 0$ 时, $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PC}$, C, D 重合, 此时 CD 的长度为 0,

当 $m = \frac{3}{2}$ 时, $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PB}$, B, D 重合, 此时 $PA = 12$, 不合题意, 舍去.

故答案为: 0 或 $\frac{18}{5}$.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, E 为 AC 上一点, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$, P 为 BE 上任一点, 若

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m > 0, n > 0$), 则 $\frac{3}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值是 ()

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

【答案】D

【分析】使用“三点共线”的向量充要条件, 探究出 m, n 间的等量关系, 再使用基本不等式求解.



【解析】因为 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$ ， $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$

所以 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + 3n\overrightarrow{AE}$

又因为 B 、 P 、 E 三点共线

所以 $m + 3n = 1$

所以 $\frac{3}{m} + \frac{1}{n} = \left(\frac{3}{m} + \frac{1}{n}\right)(m + 3n) = \frac{9n}{m} + \frac{m}{n} + 6 \geq 2\sqrt{\frac{9n}{m} \cdot \frac{m}{n}} + 6 = 12$ ，当且仅当 $m = 3n$ 时，

“=” 成立

所以 $\frac{3}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值是 12.

例 3 已知点 M 是边长为 2 的正 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ ，若 $\lambda + \mu = \frac{1}{3}$ ，

则 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】凑系数使其代数和为 1， $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = 3\lambda\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + 3\mu\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ ，取

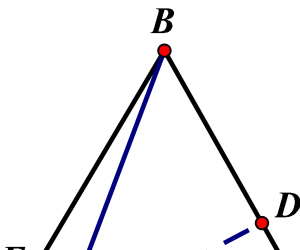
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，即 $\overrightarrow{AM} = 3\lambda\overrightarrow{AE} + 3\mu\overrightarrow{AF}$ ，而 $3\lambda + 3\mu = 1$ 可得 M 、 E 、 F 三点

共线.再由极化恒等式得 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MD^2 - \frac{1}{4}BC^2 = MD^2 - 1$ （其中 D 是 BC 的中点），

$$MD_{\min} = \frac{2}{3}AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}，所$$

以 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ 的最

小值为 $\frac{1}{3}$.



例 4 在平面直角坐标系 xOy 中, A 和 B 是圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 上两点, 且 $AB = \sqrt{2}$,

点 P 的坐标为 $(2, 1)$, 则 $|\overrightarrow{2PA} - \overrightarrow{PB}|$ 的取值范围为_____.

【答案】 $[\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{5} + \sqrt{2}]$

【分析】 设 $2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$$

如图, 延长 BA 至 D , 使 $AD = AB$

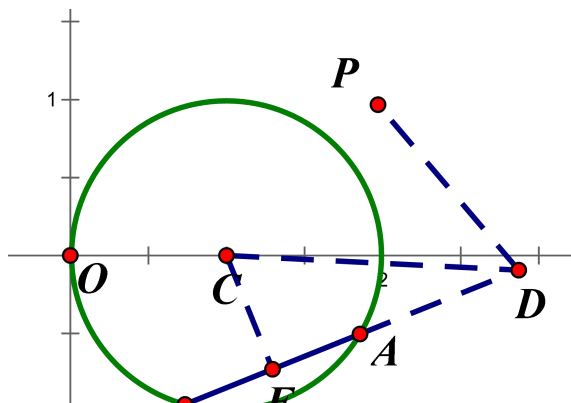
为求 $|\overrightarrow{2PA} - \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PD}|$ 的取值范围, 只需求点 D 的轨迹.

遇到圆的弦想中点、垂径定理, 取 AB 中点为 E , 设 $D(x, y)$

$Rt\triangle CDE$ 中, $CE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $DE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故 $CD = \sqrt{5}$, 即 D 的轨迹是以 C 为圆心, $\sqrt{5}$

为半径的圆

$\therefore |\overrightarrow{PD}| \in [\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{5} + \sqrt{2}]$, 即 $|\overrightarrow{2PA} - \overrightarrow{PB}|$ 的取值范围为 $[\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{5} + \sqrt{2}]$.



点评：（1）本题的关键是：逆用三点共线的充要条件，构造出向量 \overrightarrow{PD} ，其起点为定点，转

化为探究终点轨迹问题；

（2）遇到圆的弦，应联想“取中点、垂径定理”；

（3）已知条件不变，若所求变为求 $|3\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|$ 的取值范围，此时应设 $3\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PD}$ ，

则 $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PD}$ ，想一想，为什么？

例 5 若 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心， $AB = 6$ ， $AC = 10$ ， $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，

$2x + 10y = 5$ ，则 $\cos \angle BAC =$ _____.

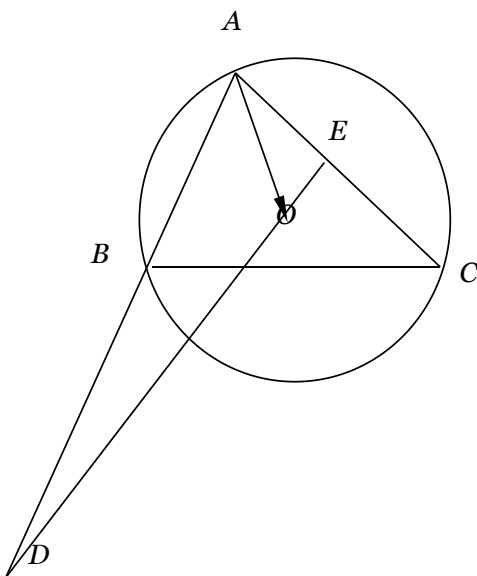
【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】由 $2x + 10y = 5$ 得 $\frac{2}{5}x + 2y = 1$ ，将 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ 变形为

$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{5}x \times \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2y \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 如图，作 $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ，则 D 、 O 、 E

三点共线，且 $OE \perp AC$.

在 $Rt\triangle ADE$ 中， $AD = 15$ ， $AE = 5$ ，故 $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$.



例 6 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 1$ ，且 $|\lambda\overrightarrow{AB} + 3(1-\lambda)\overrightarrow{AC}|$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) 的最小值为

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 若 P 为边 AB 上任意一点, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值是 _____.

【答案】 $-\frac{25}{16}$

【解析】由条件 $\lambda \overrightarrow{AB} + 3(1-\lambda) \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda)(3 \overrightarrow{AC})$,

设 $3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ ，则 $\lambda\overrightarrow{AB}+3(1-\lambda)\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}$ ，其系数和为 1

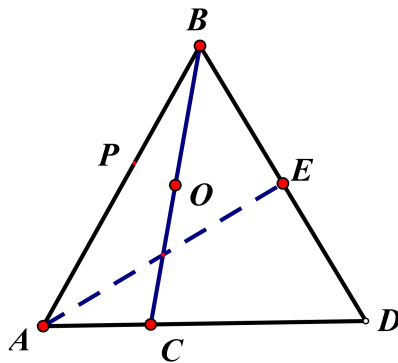
设 $\lambda \overrightarrow{AB} + 3(1-\lambda) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ ，则 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda) \overrightarrow{AD}$ ，故 B 、 D 、 E 三点共线

由 $|\lambda \overrightarrow{AB} + 3(1-\lambda)\overrightarrow{AC}|$ ($\lambda \in R$) 的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，即点 A 到 BD 的距离是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

故 $A = \frac{\pi}{3}$

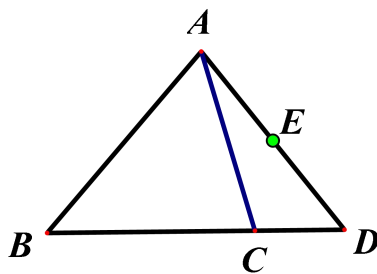
$\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $BC = \sqrt{7}$, 设 BC 的中点为 O , 由极化恒等式得

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PO}|^2 - \frac{7}{4}, \text{ 而 } |\overrightarrow{PO}|_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} \text{ 的最小值是 } -\frac{25}{16} .$$


【巩固练习】

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D 是 BC 延长线上一点，点 E 是 AD 的中点，若 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$ ，且 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda =$ _____.



2. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $DE = \frac{1}{2}EC$ ， F 为 BC 的中点， G 为线段 EF 上一点，

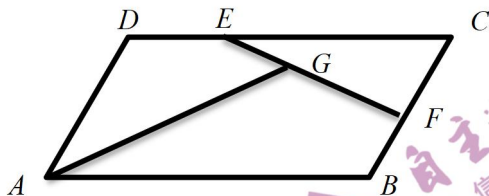
且满足 $\overrightarrow{AG} = \frac{7}{9} \overrightarrow{AB} + m \overrightarrow{AD}$ ，则实数 $m =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$



3. 正方形

ABCD 的边长为 1，

O 为正方形 ABCD 的中心，过中心 O 的直线与边 AB 交于点 M，与边 CD 交于点 N，P

为平面上一点，满足 $2\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC}$ ，则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值为_____.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中， A, B 是圆 $C: x^2 - 4x + y^2 = 0$ 上两动点，且 $AB = 2$ ，点 P 坐

标为 $(4, \sqrt{3})$ ，则 $|3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA}|$ 的取值范围为_____.

5. 已知 $\triangle ABC$ 中， AB 边上的中线 $CM = 2$ ，若动点 P 满足

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cdot \overrightarrow{AB} + \cos^2 \theta \cdot \overrightarrow{AC} (\theta \in R)$ ，则 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值是_____.

6. 在四边形 ABCD 中， $AB = 8$. 若 $\overrightarrow{DA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CB}$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为线段 AC 的中点, 点 E 在边 BC 上, 且 $BE = \frac{1}{2}EC$, AE 与 BD 交于点 O ,

则 \overrightarrow{AO} 等于()

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 过中线 AD 的中点 E 任作一直线分别交 AB, AC 于 M, N 两点, 设 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$ ($xy \neq 0$), 则 $4x + y$ 的最小值是_____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的三等分点, $|\overrightarrow{OC}| = 2|\overrightarrow{OB}|$, 过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于点 E, F , 且 $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AF}$ ($m > 0, n > 0$), 若 $\frac{1}{m} + \frac{t}{n}$ 的最小值为 $\frac{8}{3}$, 则正数 t 的值为()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{11}{3}$

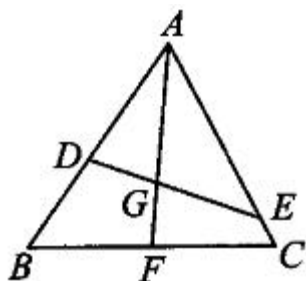
10. 已知点 P 是 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\overrightarrow{CP} = m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB}$, $\frac{3}{2}m + 2n = 1$ ($m, n \in \mathbb{R}$), 若 $CA = 2CB$, 则 $\cos C$ 的值为_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, BC 是定长, 且 $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}| = 3|\overrightarrow{BC}|$, 若 $\triangle ABC$ 面积的最大值为2, 则边 BC 的长为_____.

12. 已知 A, B, C 为圆 O 上的三点, 线段 CO 的延长线与线段 BA 的延长线交于圆 O 外的一点 D , 若 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 则 $m + n$ 的取值范围为

- A. $(0, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-1, 0)$

13. 如图所示, 过 $\triangle ABC$ 的重心 G 作一直线分别交 AB, AC 于点 D, E . 若 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = y\overrightarrow{AC}$ ($xy \neq 0$), 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的值为()



- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

14. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, CD 与 BE 交于点 P , $AP=1$, $BC=4$,

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值是 _____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AC = \frac{3}{2}BC$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, BM 与 AN 交于点 P ,

则 $\frac{CP}{AB}$ 的取值范围是 _____.

16. 已知 A, B 是圆 $C: x^2 + y^2 = 10$ 上的动点, $AB = 4\sqrt{2}$, $P(a, 4-a)$ 满足 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| \leq 24$

对于任意 A, B 两点恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案与提示】

1. 【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】因为 E 是 AD 的中点

所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{AD} = 2\lambda\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

因为 B, C, D 三点共线, 所以 $2\lambda + \frac{3}{2} = 1$, $\lambda = -\frac{1}{4}$.

2. 【答案】 A

【分析】从 D, E, F 三点共线入手, 将 \overrightarrow{AG} 用 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ 线性表示, 再转化为目标向量, 比较系数即可.

【解析】 $\because D, E, F$ 三点共线

$\therefore \overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AE} + (1-\lambda)\overrightarrow{AF}$ (其中 $0 \leq \lambda \leq 1$)

又 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

所以 $\overrightarrow{AG} = \lambda\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + (1-\lambda)\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{3-2\lambda}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AD}$

所以 $\begin{cases} \frac{3-2\lambda}{3} = \frac{7}{9} \\ \frac{1+\lambda}{2} = m \end{cases}$, 解之得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 选 A.

3. 【答案】 $-\frac{7}{16}$

【解析】根据题意, $2\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC}$, $\therefore 2\overrightarrow{OP}$ 的终点在线段 BC 上,

$$\therefore |2\overrightarrow{OP}| \geq \frac{1}{2}, \therefore |\overrightarrow{OP}| \geq \frac{1}{4}, \therefore \overrightarrow{OP}^2 \geq \frac{1}{16};$$

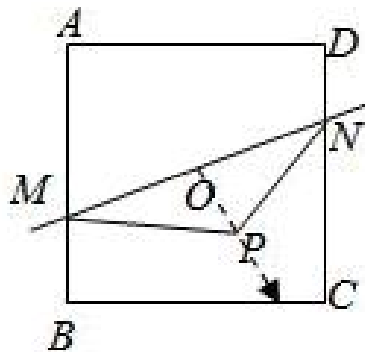
又 O 是 MN 的中点, $\therefore \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$,

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \pi = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP})$$

$$= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) + \overrightarrow{OP}^2 \geq -\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{16} = -\frac{7}{16},$$

$\therefore \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值是 $-\frac{7}{16}$.

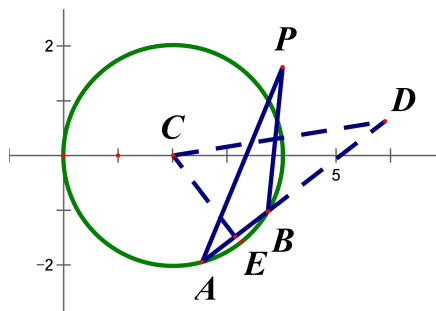


4. 【答案】 $[\sqrt{7}, 3\sqrt{7}]$

【简析】设 $3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD}$, 则 $\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$,

如图, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$, 设 $D(x, y)$

则 $Rt\triangle CDE$ ，由勾股定理得 $CD = 2\sqrt{7}$ ，故 $|\overrightarrow{PD}| \in [\sqrt{7}, 3\sqrt{7}]$ 。



5. 【答案】 -2

【分析】由 $\overrightarrow{AP} = \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \cos^2 \theta \cdot \overrightarrow{AC} = \sin^2 \theta \overrightarrow{AM} + \cos^2 \theta \overrightarrow{AC}$ 可得 P 在线段 CM

上，故 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PC} = -2|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{PC}|$ ，而 $|\overrightarrow{PM}| + |\overrightarrow{PC}| = CM = 2$ ，有基本不等式立得。

【解析】由 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\sin^2 \theta \cdot \overrightarrow{AB} + \cos^2 \theta \cdot \overrightarrow{AC} (\theta \in R)$ ，得 $\overrightarrow{AP} = \sin^2 \theta \overrightarrow{AM} + \cos^2 \theta \overrightarrow{AC}$ ，

因为 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，所以 P 在线段 CM 上

所以 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PC} = -2|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{PC}|$ ，

又因为 $|\overrightarrow{PM}| + |\overrightarrow{PC}| = CM = 2$ ，

则 $|\overrightarrow{PM}| |\overrightarrow{PC}| \leq \left(\frac{|\overrightarrow{PM}| + |\overrightarrow{PC}|}{2}\right)^2 = 1$ （当且仅当 $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PC}|$ ，即 P 为 CM 中点时，“=”成立）。

故 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值是 -2。

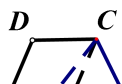
6. 【答案】 -16

【解析】由 $\frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ 中向量满足“共起点，系数和为 1”联想到“三点共线”

设 E 为 AB 上一点，且 $BE = 3AE$ ，则 $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

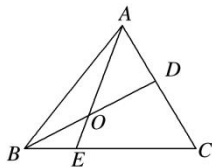
所以 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA}$ ，则四边形 $AECD$ 是平行四边形， $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EA}$

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} = -16$ 。



7. 【答案】 A

【解析】 如图, 设 $\vec{AO} = \lambda \vec{AE} (\lambda > 0)$,



$$\text{又 } \vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC},$$

$$\therefore \vec{AO} = \frac{2}{3}\lambda \vec{AB} + \frac{1}{3}\lambda \vec{AC} = \frac{2}{3}\lambda \vec{AB} + \frac{2}{3}\lambda \vec{AD}.$$

$$\text{又 } B, O, D \text{ 三点共线, } \therefore \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{3}\lambda = 1,$$

$$\therefore \lambda = \frac{3}{4}, \therefore \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}.$$

8. 【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】 由 D 为 BC 的中点知, $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$,

又 $\vec{AM} = x\vec{AB}$, $\vec{AN} = y\vec{AC} (xy \neq 0)$, E 为 AD 的中点,

$$\text{故 } \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{4x}\vec{AM} + \frac{1}{4y}\vec{AN},$$

$$\because M, E, N \text{ 三点共线, } \therefore \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} = 1,$$

$$\therefore 4x + y = (4x + y) \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} \right) = \frac{y}{4x} + \frac{x}{y} + \frac{5}{4}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{4x} \cdot \frac{x}{y}} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4},$$

当且仅当 $\frac{y}{4x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{3}{4}$ 时取等号.

$$\therefore 4x + y \text{ 的最小值为 } \frac{9}{4}.$$

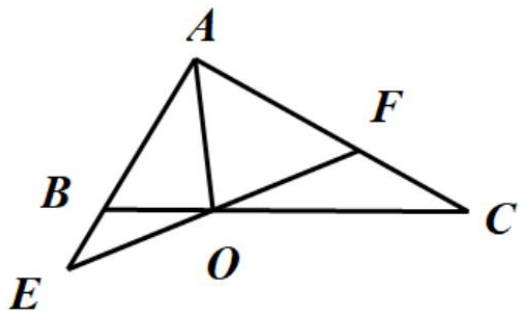
9. 【答案】 B

【分析】 利用平面向量的线性运算法则求得 $\vec{AO} = \frac{2m}{3}\vec{AE} + \frac{n}{3}\vec{AF}$, 可得 $\frac{2m}{3} + \frac{n}{3} = 1$, 则

$$\frac{1}{m} + \frac{t}{n} = \left(\frac{2m}{3} + \frac{n}{3} \right) \left(\frac{1}{m} + \frac{t}{n} \right), \text{ 展开后利用基本不等式可得 } \frac{1}{m} + \frac{t}{n} \text{ 的最小值为}$$

$\left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) + 2\sqrt{\frac{2t}{9}}$, 结合 $\frac{1}{m} + \frac{t}{n}$ 的最小值为 $\frac{8}{3}$ 列方程求解即可.

【解析】



因为点 O 是 BC 的三等分点, $|\overrightarrow{OC}| = 2|\overrightarrow{OB}|$ 则

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{n}{3}\overrightarrow{AF},$$

又由点 E, O, F 三点共线, 则 $\frac{2m}{3} + \frac{n}{3} = 1$,

$$\frac{1}{m} + \frac{t}{n} = \left(\frac{2m}{3} + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{1}{m} + \frac{t}{n}\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) + \frac{2mt}{3n} + \frac{n}{3m}$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) + 2\sqrt{\frac{2mt}{3n} \times \frac{n}{3m}} = \left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) + 2\sqrt{\frac{2t}{9}},$$

当且仅当 $2tm^2 = n^2$ 时, 等号成立,

即 $\frac{1}{m} + \frac{t}{n}$ 的最小值为 $\left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) + 2\sqrt{\frac{2t}{9}}$, 则有 $\left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) + 2\sqrt{\frac{2t}{9}} = \frac{8}{3}$,

解可得 $t = 2$ 或 -18 (舍), 故 $t = 2$,

故选: B.

10. 【答案】 $\frac{3}{8}$

【提示】解法同例 5.

11. 【答案】 2

【解析】 $\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right| = 3\left|\overrightarrow{BC}\right|$ 两边同时除以 3 得 $\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$

设 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\text{故 } |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$\therefore BC$ 是定长, 且 V_{ABC} 面积的最大值为 2

\therefore 当 AD 为 BC 边上的高时, 面积取得最大值, 此时 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|^2 = 2$

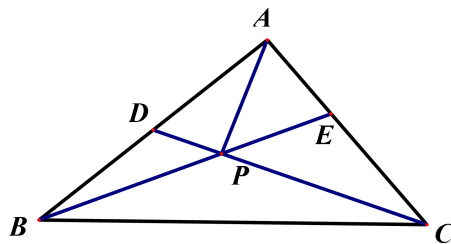
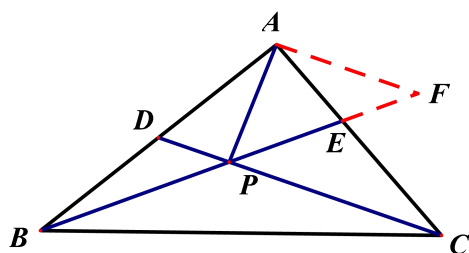
$$\text{故 } |\overrightarrow{BC}| = 2.$$

12. 【答案】D

【解析】因为 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 所以 $\frac{1}{m+n}\overrightarrow{OC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OB}$, 由此可知, 向量 $\frac{1}{m+n}\overrightarrow{OC}$ 与向量 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} 的一端三点共线, 由图及平面向量共线定理易知 $m+n$ 的取值范围为 $(-1, 0)$.

13. 【答案】B

【解析】欲求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的值, 可依据题设建立关于 x, y 的等式(方程思想). 因为 D, G, E 三点共线, 所以可设 $\overrightarrow{DE} = \gamma \overrightarrow{DG}$. 因为 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = y\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$. 因为 G 为 V_{ABC} 的重心, 所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \right] = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 又 $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}$, 故可得 $y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB} = \gamma \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB} \right)$, 整理得 $x = \frac{\frac{1}{3}\gamma}{\gamma - 1}$, $y = \frac{1}{3}\gamma$, 由此可得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$, 故选 B.



14. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】关键是求出点 P 分线段 CD 所成的比, 方法有二, 一是利用相似三角形、成比例线段, 通过作平行线, 二是抓住 CD, BE 相交于 P , 两次使用三点共线.

【解析一】如图中, 过点 A 作 $AF \parallel CD$, 交 BP 的延长线于 F

由平面几何知识易得: $AF = 2DP$, $PC = 2AF$, 故 $PC = 4DP$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{4}{25}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{25}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{4}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \quad ①$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 \quad ②$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \quad ③$$

由①②③解得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}$.

【解析二】如上图右中，

$$\because D、P、C \text{ 三点共线} \quad \therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AD} + (1-\lambda)\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AC} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\because B、P、E \text{ 三点共线} \quad \therefore \overrightarrow{AP} = \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu)\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AB} + \frac{1-\mu}{3}\overrightarrow{AC} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\lambda}{2} = \mu \\ 1-\lambda = \frac{1-\mu}{3} \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \quad (\text{下略}).$$

15. 【答案】 $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$

$$\text{【提示】} \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$$

$$\left(\frac{CP}{AB}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\right)^2}{(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos\alpha}{\frac{13}{4} - 3\cos\alpha} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{33}{13-12\cos\alpha} \quad (\text{其中 } \alpha = \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle).$$

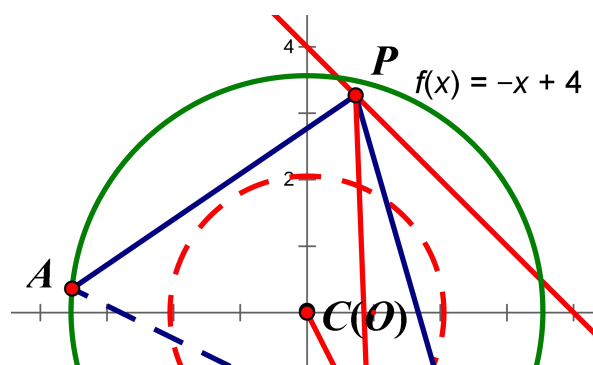
16. 【答案】 $[0, 4]$

【提示】设 $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = 4\overrightarrow{PD}$ ，则 $\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD}$ ，故 A, B, D 三点共线，且 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB}$ ，

$$|\overrightarrow{PD}| \leq 6, \quad \text{易}$$

$$\text{知 } |\overrightarrow{CD}| = 2, \quad \text{只需}$$

$$|\overrightarrow{PC}| \leq 4.$$



专题 23 极化恒等式

【方法点拨】

极化恒等式: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$.

说明:

(1) 极化恒等式的几何意义是: 设点 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 的中点, 则

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{BC}|^2 = AD^2 - BD^2, \text{ 即: 向量的数量积可转化为中线长与半底边长的平方差.}$$

(2) 具有三角几何背景的数学问题利用极化恒等式考虑尤为简单, 让“秒杀”向量数量积问题成为一种可能, 此恒等式的精妙之处在于建立向量与几何长度(数量)之间的桥梁, 实现向量与几何、代数的巧妙结合.

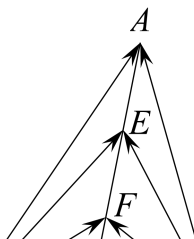
(3) 遇到共起点的两向量的数量积问题, 常取第三边的中点, 从而运用极化恒等式加以解决. 特别适合于以三角形为载体, 含有线段中点的向量问题.

【典型例题】

例 1 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$,

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1,$$

则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{7}{8}$

【解析】设 $BD = x$ ， $DF = y$

由极化恒等式得 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = 9y^2 - x^2 = 4$ ，

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = y^2 - x^2 = -1$$

解之得可得 $9\overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2 = 4$ ， $\overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2 = -1$ ，因此 $x^2 = \frac{13}{8}$ ， $y^2 = \frac{5}{8}$ ，

因此 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = 4y^2 - x^2 = \frac{4 \times 5}{8} - \frac{13}{8} = \frac{7}{8}$ 。

点评：

紧紧把握极化恒等式使用条件，三次使用极化恒等式求解。

例2 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形， P 是平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot (2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值为_____。

【答案】 $-\frac{7}{3}$

【分析】本题的难点在于如何将 $2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ “二合一”？注意到两向量共起点且其系数和为 3，可利用三点共线的方法将其“二合一”，然后使用极化恒等式。

【解析】设 $2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PD}$ ，则 $\overrightarrow{PD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ ， D 在 BC 上

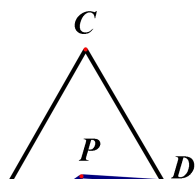
所以 $\overrightarrow{PA} \cdot (2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 3\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$

如图，取 BC 中点为 E ，由极化恒等式得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = |\overrightarrow{PE}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2$

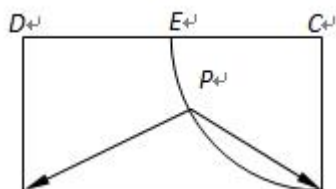
在 $\triangle ABD$ ，由余弦定理得 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \angle ABD = 4 + \frac{4}{9} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{28}{9}$

所以当 $|\overrightarrow{PE}| = 0$ ，即 P 为 AD 中点时， $(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD})_{\min} = -\frac{7}{9}$

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot (2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值 $-\frac{7}{3}$ ，此时 P 为 AD 中点。



例 3 如图所示，矩形 $ABCD$ 的边 $AB=4$ ， $AD=2$ ，以点 C 为圆心， CB 为半径的圆与 CD 交于点 E ，若点 P 是圆弧 \widehat{EB} (含端点 B 、 E) 上的一点，则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的取值范围是_____.



【答案】 $[8-8\sqrt{2}, 0]$

【分析】 取 AB 的中点设为 O ，则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PO}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{AB}|^2 = |\vec{PO}|^2 - 4$ ，然后利用平几知识确定 PO 的取值范围，代入即可.

【解析】 取 AB 的中点设为 O ，则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PO}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{AB}|^2 = |\vec{PO}|^2 - 4$ ，

当 O 、 P 、 C 共线时， PO 取得最小值为 $PO = 2\sqrt{2} - 2$ ；当 P 与 B (或 E) 重合时， PO 取得最大值为 $PO=2$ ，

所以 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的取值范围是 $[8-8\sqrt{2}, 0]$.

例 4 半径为 2 的圆 O 上有三点 A ， B ， C ，满足 $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$ ，点 P 是圆内一点，则 $\vec{PA} \cdot \vec{PO} + \vec{PB} + \vec{PC}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-4, 14)$ B. $(-4, 14]$ C. $[-4, 4)$ D. $(-4, 4]$

【答案】 A

【分析】 直接两次使用极化恒等式即可.

【解析】 由 $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$ 得 $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AO}$

在平行四边形 $ABOC$ 中， $OB = OC$ ，

故易知四边形 $ABOC$ 是菱形，且 $BC = \sqrt{3}$

设四边形 $ABOC$ 对角线的交点为 E

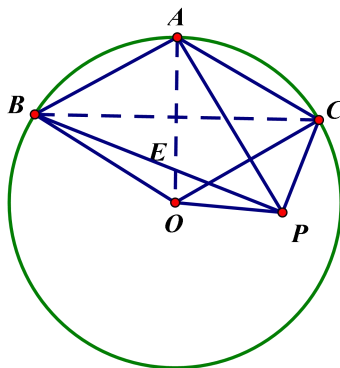
由极化恒等式得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PE}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{AO}^2 = \overrightarrow{PE}^2 - 1$

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PE}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{PE}^2 - 3$$

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PE}^2 - 4$

因为 P 是圆内一点，所以 $0 \leq |\overrightarrow{PE}| < 3$

所以 $-4 \leq 2\overrightarrow{PE}^2 - 4 < 14$ ，即 $-4 \leq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} < 14$ ，选 A 。



例 5 在 $\triangle ABC$ 中， $AC=2BC=4$ ， $\angle ACB$ 为钝角， M, N 是边 AB 上的两个动点，且 $MN=1$ ，若 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$ ，则 $\cos \angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{1-3\sqrt{5}}{8}$

【分析】取 MN 的中点 P ，由极化恒等式将 “ $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$ ” 转化为 AB 边上的高 $CH=1$ ，然后利用两角差的余弦公式求解。

【解析】取 MN 的中点 P ，则由极化恒等式得 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} = |\overrightarrow{CP}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{MN}|^2 = |\overrightarrow{CP}|^2 - \frac{1}{4}$

$$\because \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} \text{ 的最小值为 } \frac{3}{4} \quad \therefore |\overrightarrow{CP}|_{\min} = 1$$

由几何知识知：当 $CP \perp AB$ 时， CP 最小。

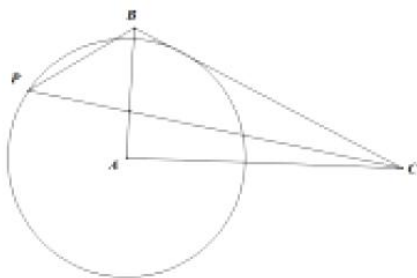
如图，作 $CH \perp AB$ ， H 为垂足，则 $CH=1$

又 $AC=2BC=4$ ，所以 $\angle B=30^\circ$ ， $\sin A = \frac{1}{4}$

$$\text{所以 } \cos \angle ACB = \cos (150^\circ - A) = \frac{1-3\sqrt{5}}{8}.$$

例 6 已知直角三角形 ABC 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB=2$ ， $AC=4$ ，点 P 在以 A 为圆心且与边 BC 相切的圆上，则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值为（ ）

- A. $\frac{16+16\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{16+8\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{56}{5}$



【答案】D

【解析】 设 BC 中点为 D ，

$$\text{则 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 - \frac{1}{4} \times 20 = |\overrightarrow{PD}|^2 - 5,$$

$$\text{又因为 } |\overrightarrow{PD}|_{\max} = |\overrightarrow{AD}| + r = \sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})_{\max} = \frac{81}{5} - 5 = \frac{56}{5},$$

故选：D.

例 7 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2， E 是棱 AB 的中点， F 是四边形 AA_1D_1D 内一点

（包含边界），且 $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD} = -\frac{3}{4}$ ，当三棱锥 $F-AED$ 的体积最大时， EF 与平面 ABB_1A_1 所成

角的正弦值为（ ）

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】A

【分析】 由条件 $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD} = -\frac{3}{4}$ 及极化恒等式入手，设 DE 的中点为 G ，则

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FG}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{DE}^2 = \overrightarrow{FG}^2 - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}, \text{ 所以 } \overrightarrow{FG}^2 = \frac{1}{2}, \text{ 故点 } F \text{ 的轨迹是以 } G \text{ 为球心，}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的球被面 AA_1D_1D 所截得的半圆，当点 F 在半圆弧的最高点时，三棱锥 $F-AED$ 的

体积最大，此时易求得 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$ 。

【解析】设 DE 的中点为 G ，

则由极化恒等式得 $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FG}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{DE}^2 = \overrightarrow{FG}^2 - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$ ，

所以 $\overrightarrow{FG}^2 = \frac{1}{2}$ ，

故点 F 的轨迹是以 G 为球心， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的球被面 AA_1D_1D 所截得的半圆，

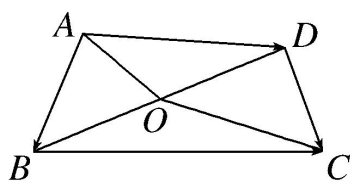
当点 F 在半圆弧的最高点时，三棱锥 $F-AED$ 的体积最大，

此时易求得 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$ 。

【巩固练习】

1. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， O 为 BD 的中点，且 $OA=3$ ， $OC=5$ 。若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -7$ ，

则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} =$ _____。



2. 矩形 $ABCD$ 中， P 为矩形 $ABCD$ 所在平面内一点， $PA=3$ ， $PC=4$ ，矩形对角线

$AC=6$ ，则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$ 值为_____。

3. 若平面向量 a, b 满足 $|2a-b| \leq 3$ ，则 $a \cdot b$ 的最小值为_____。

4. 已知平面向量 a, b, e 满足 $|e|=1$ ， $a \cdot e=1$ ， $b \cdot e=-2$ ， $|a+b|=2$ ，那么 $a \cdot b$ 的最大值为_____。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC=2$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=1$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____。

6. 已知单位向量 \overrightarrow{PA} ， \overrightarrow{PB} ， \overrightarrow{PC} 满足 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值为 ()

- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{9}$ D. 1

7. 已知 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 2$ ，且向量 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的夹角为 120° ，又 $|\overrightarrow{PO}| = 1$ ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的取值范围为 ()

- A. $[-1, 1]$ B. $[-1, 3]$ C. $[-3, 1]$ D. $[-3, 3]$

8. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$ ， $|2\vec{b} - \vec{c}| = 2$ ，那么 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 的最小值为 _____.

9. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 1， $\angle B = \frac{\pi}{6}$ ，则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围为 _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，若 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点，且 $AP = 2$ ，则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值为 _____.

11. 已知点 P 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形 ABC 内切圆上的一点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 _____.

12. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，中心为 O ，直线 l 经过中心 O ，交 AB 于点 M ，交 CD 于点 N ， P 为平面上一点，若 $2\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC}$ ，则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值为 _____.

13. 设点 P 为正三角形 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一个动点，当 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最小值时， $\sin \angle PAC$ 的值为 _____.

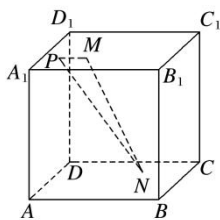
14. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A ， B 分别在 x 轴， y 轴正半轴上移动， $AB = 2$ ，若点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2$ ，则 OP 的取值范围为 _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中， E ， F 分别是线段 AB ， AC 的中点，点 P 在直线 EF 上，若 $\triangle ABC$ 的面积为 2，则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC}^2$ 的最小值是 _____.

16. 在半径为 1 的扇形 AOB 中，若 $\angle AOB = 60^\circ$ ， C 为弧 AB 上的动点， AB 与 OC 交于点 P ，
 $\rightarrow \rightarrow$
 则 $OP \cdot BP$ 的最小值是 _____.

17. 如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， MN 是它的内切球的一条弦 (我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦)， P 为正方体表面上的动点，当弦 MN 的长度最大时， $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$

的取值范围是_____.



18. 已知球 O 的半径为 1 , A, B 是球面上的两点, 且 $AB = \sqrt{3}$, 若点 P 是球面上任意一

点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ C. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

【答案或提示】

1. 【答案】9

【提示】两次使用极化恒等式, 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = OA^2 - \frac{BD^2}{4}$ 得 $BD=8$,

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} = OC^2 - \frac{BD^2}{4} = 9.$$

2. 【答案】 $-\frac{11}{2}$

【提示】设矩形的对角线交点为 O , 由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = PO^2 - \frac{AC^2}{4} = PO^2 - 9 = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2}$, 得

$$PO^2 = \frac{7}{2}, \quad \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} = PO^2 - \frac{BD^2}{4} = \frac{7}{2} - 9 = -\frac{11}{2}.$$

3. 【答案】 $-\frac{9}{8}$

【解析】根据极化恒等式得: $8a \cdot b = (2a+b)^2 - (2a-b)^2 = (2a+b)^2 - 9 \geq -9$,

故 $a \cdot b \geq -\frac{9}{8}$, 所以 $a \cdot b$ 的最小值为 $-\frac{9}{8}$.

4. 【答案】 $-\frac{5}{4}$

【提示】由 $a \cdot e = 1$, $b \cdot e = -2$ 得: $a \cdot e - b \cdot e = 3$, 即 $(a-b) \cdot e = 3$, $|a-b|\cos\theta = 3$

$$a \cdot b = \frac{1}{4}[|a+b|^2 - |a-b|^2] \leq -\frac{5}{4}$$

5. 【答案】 $\sqrt{2}$

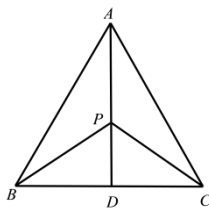
【提示】取 BC 的中点为 D ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2 - \frac{BC^2}{4}$ ，所以 $AD = \sqrt{2}$

因为 BC 边上的高线长不大于中线长，当中线就是高线时，面积最大，故 $\triangle ABC$ 面积的最大值 $\sqrt{2}$ 。

6. 【答案】 A

【解析】 $\because 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ ， $\therefore \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$ ，

如图，



设 BC 中点为 D ，则 $\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$ ，且 $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 1$ ，

$\therefore P, A, D$ 三点共线， $PD \perp BC$ ， $|\overrightarrow{PD}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{PC}| = \frac{1}{3}$ ， $|\overrightarrow{AD}| = \frac{4}{3}$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{|\overrightarrow{PC}|^2 - |\overrightarrow{PD}|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{CD}|^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ 。故选：A。

7. 【答案】 C

【解析】连结 A, B ，则 $AB = 2\sqrt{3}$ 设 AB 的中点为 T ，

由 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = PT^2 - \frac{1}{4}AB^2 = PT^2 - 3$ ，易知 $0 \leq PT \leq 2$ ，所以 $-3 \leq PT^2 - 3 \leq 1$

故 $-3 \leq \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 1$ ，故选：C

8. 【答案】 $\frac{5}{8}$

【解析】由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$ 得 $2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ ，即 $\vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c}) = 3$

又 $\vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| |2\vec{b} + \vec{c}| \cos \theta$ （其中 θ 为向量 \vec{a} 与 $2\vec{b} + \vec{c}$ 的夹角）

所以 $|2\vec{b} + \vec{c}| = \frac{3}{\cos \theta}$

所以 $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{8}[(2\vec{b} + \vec{c})^2 - (2\vec{b} - \vec{c})^2] = \frac{1}{8}\left(\frac{9}{\cos^2 \theta} - 4\right) \geq \frac{5}{8}$.

9. 【答案】 $\left(3, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right]$

10. 【答案】 $10 + 2\sqrt{37}$

【提示】方法同上.

11. 【答案】 $[-3, 6]$

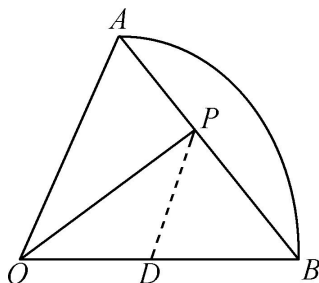
12. 【答案】 $-\frac{7}{16}$

13. 【答案】 $\frac{\sqrt{39}}{26}$

14. 【答案】 $[\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1]$

15. 【答案】 $4\sqrt{3}$

16. 【解析】如图，取 OB 的中点 D ，连接 PD ，



$\vec{OP} \cdot \vec{BP} = PD^2 - OD^2 = PD^2 - \frac{1}{4}$ ，即求 PD 的最小值.

由图可知，当 $PD \perp OB$ 时， $PD_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

$\vec{OP} \cdot \vec{BP}$ 的最小值是 $-\frac{1}{16}$.

17. 【答案】 $[0, 2]$

【解析】由正方体的棱长为 2，得内切球的半径为 1，正方体的体对角线长为 $2\sqrt{3}$. 当弦 MN 的长度最大时， MN 为球的直径. 设内切球的球心为 O ，则 $\vec{PM} \cdot \vec{PN} = \vec{PO}^2 - \vec{ON}^2 = \vec{PO}^2 - 1$. 由于

P 为正方体表面上的动点, 故 $OP \in [1, \sqrt{3}]$, 所以 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} \in [0, 2]$.

18. 【答案】B

【解析】设 A, B 的中点为 C , 则 $OC = \frac{1}{2}$

由极化恒等式得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PC}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 - \frac{3}{4}$

因为 $OC = \frac{1}{2}$, 点 P 是球面上任意一点

所以 $\frac{1}{2} \leq |\overrightarrow{PC}| \leq \frac{3}{2}$

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, 故选 B.

专题 24 利用向量的形解题

【方法点拨】

向量兼具“形”与“数”的双重属性, 在解题中适时构造“形”, 可以起到事半功倍的作用, 可提高解题的迅捷度.

【典型题示例】

例 1 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$,

$|x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| \geq |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|$ 恒成立, 则 $\cos \angle ABC =$ _____.

【答案】 $\frac{5\sqrt{13}}{26}$

【分析】设 $x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$, 则点 P 在过点 B 且平行于 AC 的直线上, 而

$|x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| \geq |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}|$ 恒成立的几何意义是: 过点 B 且平行于 AC 的直线上的任

意一点与点 A 的距离以 BD 最小, 根据平面几何知识知, 必有 $BD \perp AC$, 即 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$,

进而可得 AB 、 BC 的值, 结合余弦定理计算可得.

【解析】根据题意, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$.

设 $AD = 2t$ ，则 $AC = 3t$ 。

$$\because \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$$

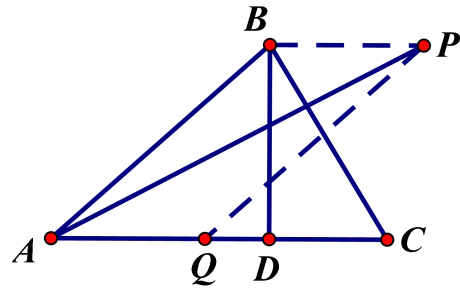
\therefore 对任意 $x \in \mathbf{R}$ ， $|x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| \geq |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|$ 恒成立，必有 $BD \perp AC$ ，即 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ 。

$$\because \angle A = \frac{\pi}{3} \quad \therefore AB = 2AD = 4t, \quad BD = \sqrt{3}AD = 2\sqrt{3}t$$

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{13}t.$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$$

$$\text{故 } \cos \angle ABC = \frac{5\sqrt{13}}{26}.$$



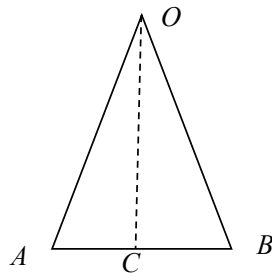
例 2 若非零向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$ ，则 \vec{a}, \vec{b} 夹角的余弦值为_____。

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【分析】 注意到条件 $|\vec{a}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$ ，构造如图所示等腰直角三角形 $\triangle OAB$ ， OC 为底边上的

中线. 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + 2\vec{b}$. 在 $Rt\triangle OAC$ ， $\cos \angle OAD = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}$ 。

所以 \vec{a}, \vec{b} 夹角的余弦值为 $-\frac{1}{3}$ 。



例 3 已知 \vec{a} , \vec{b} 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 \vec{c} 满足 $(\vec{a}-\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{c}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是_____.

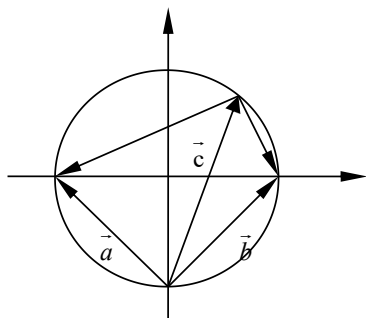
【答案】 $\sqrt{2}$

【解法一】 $\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 展开 $(\vec{a}-\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{c}) = 0$ 得

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}| \cos \theta$$

$\therefore |\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| \cos \theta = \sqrt{2} \cos \theta$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 $\sqrt{2}$.

【解法二】 注意到题目中两个垂直, $\vec{a} \perp \vec{b}$ 及 $(\vec{a}-\vec{c}) \perp (\vec{b}-\vec{c})$, 利用数形结合, 如图, \vec{c} 对应的点在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上即可.

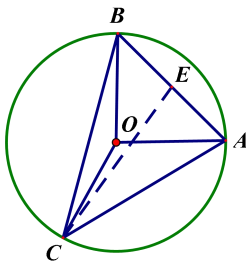


例 4 设向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都是单位向量, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $(\vec{a}-\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{c})$ 的最小值是_____.

【答案】 $1 - \sqrt{2}$

【解析】 如下图, 设 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, 则 A, B, C 在圆 O 上, 且

$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{CA}, \vec{b} - \vec{c} = \vec{CB}$$



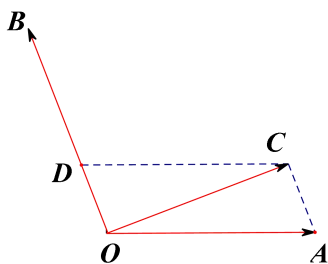
取 AB 中点为 E , 则由极化恒等式得

$$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CE^2-\frac{1}{4}AB^2=CE^2-\frac{1}{2}$$

易知 $(CE)_{\min}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\left[(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})\right]_{\min}=1-\sqrt{2}$ 。

例 5 已知向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角为 135° ，且 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ ，设 $\vec{c}=\vec{a}+x\vec{b}$ (其中 $x\in R$)，当 $|\vec{c}|$ 取最小值时，向量 \vec{c} 与 \vec{b} 的夹角大小为_____。

【答案】 $\frac{\pi}{2}$



【解析】 如上图，

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \quad \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \quad \overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

则满足条件 $\vec{c}=\vec{a}+x\vec{b}$ 的点 C 的轨迹是过 A 且平行于 \overrightarrow{OB} 的直线

由平几知识知，当 $|\vec{c}|$ 取最小值时， $OC \perp AC$ ，即 $OC \perp OB$

此时，向量 \vec{c} 与 \vec{b} 的夹角大小为 $\frac{\pi}{2}$ 。

【巩固训练】

1. 已知向量 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ， $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$ ，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知在 $\triangle OAB$ 中， $OA=\sqrt{2}$ ， $OB=2$ ， $\angle AOB=135^\circ$ ， P 为平面 OAB 上一点，且

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}(\lambda\in R), \text{ 当 } OP \text{ 最小时, 向量 } \overrightarrow{OP} \text{ 与 } \overrightarrow{OB} \text{ 的夹角为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=5$ ， $AC=10$ ， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=25$ ，点 P 为 $\triangle ABC$ 内（包含边界）一点，

$$\text{且 } \overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in R), \text{ 则 } |\overrightarrow{AP}| \text{ 的最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 已知向量 \vec{a} , \vec{b} ，满足 $|\vec{b}|=3$ ， $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|$ ，则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最小值为_____。

5. 已知平面向量 α , β ($\alpha\neq 0$, $\alpha\neq\beta$) 满足 $|\beta|=1$ ，且 α 与 $\beta-\alpha$ 的夹角为 120° ，则 $|\alpha|$ 的取值范围

是_____.

6. 已知 a, b 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 c 满足 $(a-c) \cdot (b-c) = 0$, 则 $|c|$ 的最大值是_____.

7. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} , 满足 $|\vec{a}| = 1, (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$, 则 $|\vec{b}|$ 的取值范围为_____.

8. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$, 设 $\vec{c} = \vec{a} + x\vec{b}$ (其中 $x \in \mathbb{R}$), 若 $|\vec{c}|$ 最小值为 $\frac{3}{2}$, 向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角大小为_____.

9. (1) 已知 $\triangle ABC$, 若对任意 $t \in \mathbb{R}$, $|\vec{BA} - t\vec{BC}| \geq |\vec{AC}|$, 则 $\triangle ABC$ 为_____三角形. (在锐角、直角、钝角中选择一个填写)

(2) 已知 $\triangle ABC$, 若对任意 $t \in \mathbb{R}$, $|\vec{BA} - t\vec{BC}| \geq |\vec{BA}|$, 则 $\triangle ABC$ 为_____三角形 (在锐角、直角、钝角中选择一个填写)

(3) 已知 $\triangle ABC$, 若对任意 $t \in \mathbb{R}$, $|\vec{BA} - t\vec{BC}| \geq |\vec{BA} - 2\vec{BC}|$, 则 $\triangle ABC$ 为_____三角形 (在锐角、直角、钝角中选择一个填写)

10. 已知向量 a, b, c 满足 $|a| = |b| = 2, |c| = 1, (a-c) \cdot (b-c) = 0$, 则 $|a-b|$ 的取值范围是_____.

11. 已知 a, b 都是非零向量, 满足 $|a-b| = |a|, (a-b) \cdot a = 0$, 则 $a-b$ 与 b 的夹角大小是().

A. 45° B. 60° C. 135° D. 120°

12. 已知向量 $\vec{a} \neq \vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$, 且对任意 $t \in \mathbb{R}$, $|\vec{a} - t\vec{e}| \geq |\vec{a} - \vec{e}|$ 恒成立, 则()

A. $\vec{a} \perp \vec{e}$ B. $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{e})$
C. $\vec{e} \perp (\vec{a} - \vec{e})$ D. $(\vec{a} + \vec{e}) \perp (\vec{a} - \vec{e})$

【答案或提示】

1. 【答案】 $-\frac{9}{2}$

【解析】 仿例 2, 构造三角形, 易知 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$, 而 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 使用投影易得

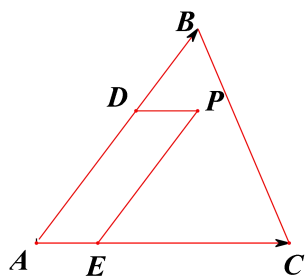
$\vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{9}{2}$, 故 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{9}{2}$.

2. 【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【提示】解法同例 5.

3. 【答案】 3

【提示】如图, $AD=3$, $PD \parallel AC$, 易知 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 3.



4. 【答案】 $2\sqrt{2}$

【提示】解法同例 2.

5. 【答案】 $\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

【解析】设 $|\vec{\alpha}| = x$, $|\vec{\beta} - \vec{\alpha}| = y$, 由余弦定理可知: $\frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy} = \frac{1}{2}$, 要求 $|\vec{\alpha}| = x$ 的取值范围, 则将方程视为以 y 为主元的一元二次方程, 由判别式可得 $\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$.

6. 【答案】 $\sqrt{2}$

【提示】解法同例 4.

7. 【答案】 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

【提示】解法同例 4.

8. 【答案】 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

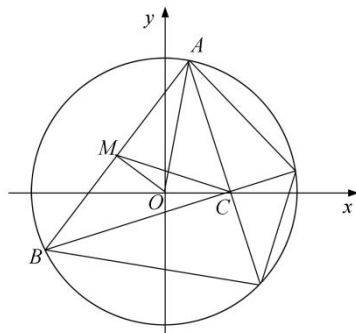
【提示】解法同例 5.

9. 【答案】 (1) 直角 (2) 直角 (3) 钝角

10. 【答案】 $[\sqrt{7}-1, \sqrt{7}+1]$.

【解析】如图, 设 $c=(1, 0)$, 设 A, B 是以 O 为圆心, 2 为半径的圆上两点,

且 $AC \perp BC$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = AB = 2MC$.



$\because MO^2 + MA^2 = OA^2$, 而 $MA = MC$, $\therefore MO^2 + MC^2 = 4$.

设 $M(x, y)$, 则 $x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4$,

即 $x^2 + y^2 - x = \frac{3}{2}$ (*),

$$\begin{aligned} |a-b| &= AB = 2MC = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} = 2\sqrt{\frac{3}{2} + x - 2x + 1} = \sqrt{10 - 4x}. \end{aligned}$$

由(*)知, $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$,

$$\therefore \sqrt{8-2\sqrt{7}} \leq \sqrt{10-4x} \leq \sqrt{8+2\sqrt{7}},$$

$$\text{即 } \sqrt{7}-1 \leq \sqrt{10-4x} \leq \sqrt{7}+1. \therefore \sqrt{7}-1 \leq |a-b| \leq \sqrt{7}+1.$$

即 $|a-b|$ 的取值范围为 $[\sqrt{7}-1, \sqrt{7}+1]$.

11. 【答案】C

12. 【答案】C

【分析】由已知两边平方得 $\vec{a} \cdot \vec{e} = 1$, 可判断 A; 再由 $|\vec{e}| = 1$ 得 $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle = 1$, 结合

$\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{e}) = |\vec{a}|^2 - 1$ 可判断 B; 由 $\vec{e} \cdot (\vec{a} - \vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{a} - \vec{e} \cdot \vec{e}$ 可判断 C; 由 $(\vec{a} + \vec{e}) \cdot (\vec{a} - \vec{e}) = |\vec{a}|^2 - 1$

可判断 D.

【解析】由 $|\vec{a} - t\vec{e}| \geq |\vec{a} - \vec{e}|$ 得

$$(\vec{a})^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{e} + (t\vec{e})^2 \geq (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{e} + (\vec{e})^2,$$

即 $t^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{e} + 2\vec{a} \cdot \vec{e} - 1 \geq 0$ 对任意 $t \in R$ 恒成立,

$$\text{所以 } (-2\vec{a} \cdot \vec{e})^2 - 4(2\vec{a} \cdot \vec{e} - 1) \leq 0, \quad (\vec{a} \cdot \vec{e} - 1)^2 \leq 0,$$

所以 $\vec{a} \cdot \vec{e} = 1$,

所以 A 错误;

由 $|\vec{e}|=1$ 得 $\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \cos \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle = |\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle = 1$,

由 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{e}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}|^2 - 1 \neq 0$, 所以 B 错误;

由 $\vec{e} \cdot (\vec{a} - \vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{a} - \vec{e} \cdot \vec{e} = 1 - 1 = 0$, 得 $\vec{e} \perp (\vec{a} - \vec{e})$, 所以 C 正确;

由 $(\vec{a} + \vec{e}) \cdot (\vec{a} - \vec{e}) = (\vec{a})^2 - (\vec{e})^2 = |\vec{a}|^2 - 1 \neq 0$, 所以 D 错误.

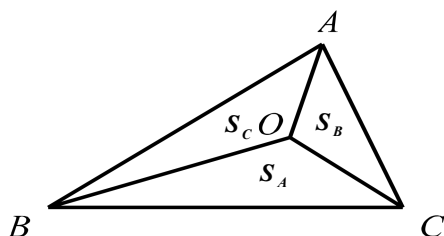
故选: C.

专题 25 奔驰定理与三角形的四心

【方法点拨】

奔驰定理: 设 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\triangle BOC, \triangle AOC, \triangle AOB$ 的面积分别记作 S_A, S_B, S_C , 则

$$S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$



说明:

1. 本定理图形酷似奔驰的车标而得名.
2. 奔驰定理在三角形四心中的具体形式:

$$(1) O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的重心} \Leftrightarrow S_A : S_B : S_C = 1 : 1 : 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

$$(2) O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的内心}$$

$$\Leftrightarrow S_A : S_B : S_C = a : b : c \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

(3) O 是 $\triangle ABC$ 的外心

$$\Leftrightarrow S_A : S_B : S_C = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \Leftrightarrow$$

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

(4) O 是 $\triangle ABC$ 的垂心

$$\Leftrightarrow S_A : S_B : S_C = \tan A : \tan B : \tan C \Leftrightarrow$$

$$\tan A \cdot \overrightarrow{OA} + \tan B \cdot \overrightarrow{OB} + \tan C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

3. 需记忆三角形的四心与向量关系:

$$(1) \quad O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 重心} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \quad P \text{ 是平面 } ABC \text{ 内任一点}, \\ \overrightarrow{PG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \Leftrightarrow G \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 重心}.$$

$$(2) \quad O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 垂心} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \quad \text{若 } O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 垂心, 则} \\ \tan A \overrightarrow{OA} + \tan B \overrightarrow{OB} + \tan C \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

$$(3) \quad O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 外心} \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|, \quad \text{若 } O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 外心, 则} \\ \sin 2A \overrightarrow{OA} + \sin 2B \overrightarrow{OB} + \sin 2C \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

若 O 是 $\triangle ABC$ 外心, 则对于平面内任意点 P , 均有:

$$\overrightarrow{PO} = \frac{\cos A}{2 \sin B \sin C} \overrightarrow{PA} + \frac{\cos B}{2 \sin A \sin C} \overrightarrow{PB} + \frac{\cos C}{2 \sin A \sin B} \overrightarrow{PC}.$$

(4) O 是 $\triangle ABC$ 内心

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \overrightarrow{OB} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} - \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \right) = \overrightarrow{OC} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} - \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} \right) = 0,$$

$$O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 内心} \Leftrightarrow a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \quad O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 内心}$$

$$\Leftrightarrow \sin A \overrightarrow{OA} + \sin B \overrightarrow{OB} + \sin C \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

4. 奔驰定理是三角形四心向量式的完美统一.

5. 奔驰定理对于利用平面向量解决平面几何问题, 尤其是解决跟三角形的面积和“四心”相关的问题, 有着决定性的基石作用.

【典型例题】

例1 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, O 为 $\triangle ABC$ 的外心,

且有 $AB+BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}AC$, $\sin C(\cos A-\sqrt{3})+\cos A\sin A=0$, 若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,

$x, y \in R$, 则 $x-2y=$ _____.

【答案】 -3 或 $-\frac{43}{33}$

【解析】由正弦定理得 $c(\cos A-\sqrt{3})+a\cos A=0$, 所以 $2b\cos A=3c$, 即 $b^2=a^2+2c^2$,

由条件得 $c+a=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$, 联立解得 $a=c, b=\sqrt{3}c$, 或 $a=5c, b=3\sqrt{3}c$.

当 $a=c, b=\sqrt{3}c$ 时, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos A = \frac{3}{2}c^2$

由 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB}^2 + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$,

即 $\frac{1}{2}c^2 = x \cdot c^2 + y \cdot \frac{3}{2}c^2$, 所以 $2x+3y=1$. ①

同理, 由 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC}^2$,

即 $\frac{1}{2}b^2 = x \cdot \frac{3}{2}c^2 + y \cdot b^2$, 即 $\frac{1}{2}b^2 = x \cdot \frac{1}{2}b^2 + y \cdot b^2$,

所以 $x+2y=1$. ②

联立①②解得 $x=-1, y=1$. 故 $x-2y=-3$.

当 $a=5c, b=3\sqrt{3}c$ 时, 同理可得 $2x+3y=1$ ③, $x+18y=9$ ④

解得 $x-2y=-\frac{43}{33}$.

例2 O 为三角形内部一点, a, b, c 均为大于1的正实数, 且满足

$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$, 若 $S_{\triangle OAB}, S_{\triangle OAC}, S_{\triangle OBC}$ 分别表示 $\triangle OAB, \triangle OAC, \triangle OBC$ 的面

积, 则 $S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OAC}:S_{\triangle OBC}$ 为()

A. $(c+1):(b-1):a$

B. $c:b:a$

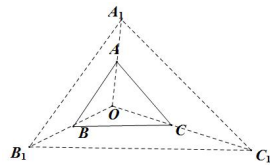
C. $\frac{1}{a}:\frac{1}{b-1}:\frac{1}{c+1}$

D. $c^2:b^2:a^2$

【答案】 A

【解析一】由 $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$ ， $\therefore a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ ，

$$\therefore a\overrightarrow{OA} = (1-b)\overrightarrow{OB} - (1+c)\overrightarrow{OC}, \therefore a\overrightarrow{OA} + (b-1)\overrightarrow{OB} + (1+c)\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$



如图设 $\overrightarrow{OA_1} = a\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = (b-1)\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1} = (1+c)\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$ ，即 O 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心， $\therefore S_{\triangle OBC_1} = S_{\triangle OA_1B_1} = S_{\triangle OA_1C_1}$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OA_1B_1}} = \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \angle AOB}{\frac{1}{2}OA_1 \cdot OB_1 \sin \angle A_1OB_1} = \frac{OA \cdot OB}{OA_1 \cdot OB_1} = \frac{1}{a(b-1)}$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{a(b-1)} S_{\triangle OA_1B_1} \text{ 同理可得 } S_{\triangle OAC} = \frac{1}{a(1+c)} S_{\triangle OA_1C_1},$$

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{(b-1)(1+c)} S_{\triangle OB_1C_1},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} : S_{\triangle OAC} : S_{\triangle OBC} = \frac{1}{a(b-1)} : \frac{1}{a(1+c)} : \frac{1}{(b-1)(1+c)}$$

所以 $S_{\triangle OAB} : S_{\triangle OAC} : S_{\triangle OBC} = (c+1) : (b-1) : a$ 。故选：A。

【解析二】由 $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$ ， $\therefore a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ ，

$$\therefore a\overrightarrow{OA} = (1-b)\overrightarrow{OB} - (1+c)\overrightarrow{OC}, \therefore a\overrightarrow{OA} + (b-1)\overrightarrow{OB} + (1+c)\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

由奔驰定理得： $S_{\triangle OAB} : S_{\triangle OAC} : S_{\triangle OBC} = (c+1) : (b-1) : a$ 。故选：A。

例3 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边为 a, b, c ， $a=b=4, c=6$ ， I 是 $\triangle ABC$ 中内切圆的圆心，若 $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则 $x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】 $x = \frac{2}{7}, y = \frac{3}{7}$

【解析一】（向量的线性表示、数量积、三角形内切圆半径求法）

易求得 $r = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ ，而 $\overrightarrow{AI} = t\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$ ，所以 $x = \frac{t}{6}, y = \frac{t}{4}$

另一方面，对上式两边同时作数量积得： $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} = t\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \cdot \overrightarrow{AI}$ ，

易知 $|\overrightarrow{AI}|^2 = 3^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)^2 = \frac{72}{7}$ ， $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{AI} = 3$ ， $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \cdot \overrightarrow{AI} = 3$

所以 $t = \frac{12}{7}$ ，所以 $x = \frac{2}{7}, y = \frac{3}{7}$ 。

【解析二】（奔驰定理）联想到奔驰定理，将 $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ 转化为

$$-\overrightarrow{IA} = x(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) + y(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA})$$

整理为： $(1-x-y)\overrightarrow{IA} + x\overrightarrow{IB} + y\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

由奔驰定理得 $(1-x-y):x:y = 4:4:6$

解之得 $x = \frac{2}{7}, y = \frac{3}{7}$ 。

点评：

解法一中的很多知识点并不为学生所熟悉，解决起来有较大难度，而解法二直接使用奔驰定理十分简洁。

例 4 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，且满足

$$56\sin A \cdot \overrightarrow{GA} + 40\sin B \cdot \overrightarrow{GB} + 35\sin C \cdot \overrightarrow{GC} = \vec{0}，则 B = \underline{\hspace{2cm}}。$$

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【分析】要牢记 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 前面的系数之比为 1:1:1，求得三内角的正弦比，再利用正、余弦定理求得。

【解析】 $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心

$$\therefore \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\therefore 56\sin A : 40\sin B : 35\sin C = 1:1:1$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = 5:7:8$$

由正弦定理, $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C = 5:7:8$

由余弦定理, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$

$\because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}.$

例 5 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $3\overrightarrow{HA} + 4\overrightarrow{HB} + 5\overrightarrow{HC} = \vec{0}$, 则 $\cos \angle BHC$ 的值为 ()

A. $-\frac{\sqrt{30}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $-\frac{\sqrt{70}}{14}$

【答案】D

【解析】因为 $3\overrightarrow{HA} + 4\overrightarrow{HB} + 5\overrightarrow{HC} = \vec{0}$, 由三角形垂心的向量定理得

$$\tan A : \tan B : \tan C = 3 : 4 : 5$$

设 $\tan A = 3x$, $\tan B = 4x$, $\tan C = 5x$

由 $\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$ 代入得 $60x^3 = 12x$, 解之得 $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

所以 $\tan A = \frac{3}{\sqrt{5}}$

又因为 $\angle BHC = \pi - A$, 所以 $\cos \angle BHC = -\cos A = -\frac{\sqrt{70}}{14}.$

例 6 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则下列选项正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

B. 直线 AO 必过 BC 边的中点

C. $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOC} = 3 : 2$

D. 若 $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$, 且 $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$, 则 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{13}$

【答案】ACD

【解析】对于 A, 插入点 A, $\overrightarrow{AO} + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$, 所以

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC};$$

对于 B ，若直线 AO 过 BC 边的中点，则 $\overrightarrow{AO} = \lambda \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right)$ ，由上知

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}, \text{ 不成立;}$$

对于 C ，由奔驰定理知 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOC} = 3 : 2$;

对于 D ，由 $\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ 得 $2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{AO}$ ，两边平方得 $|\overrightarrow{AO}| = |2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}|$

$$= \sqrt{(2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC})^2} = \sqrt{4\overrightarrow{OB}^2 + 9\overrightarrow{OC}^2 + 12\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}} = \sqrt{13}.$$

例 7 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $b = 2a - 2c \cos B$ ，若 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O ，且满足 $\frac{\cos B}{\sin A} \overrightarrow{CB} + \frac{\cos A}{\sin B} \overrightarrow{CA} = 2m \overrightarrow{CO}$ ，则 m 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 $\because b = 2a - 2c \cos B$

$$\therefore b = 2(c \cos B + b \cos C) - 2c \cos B, \text{ 即 } b = 2b \cos C$$

$$\because b \neq 0, \therefore \cos C = \frac{1}{2}$$

$$\because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{\pi}{3}$$

对 $\frac{\cos B}{\sin A} \overrightarrow{CB} + \frac{\cos A}{\sin B} \overrightarrow{CA} = 2m \overrightarrow{CO}$ 两边同时点乘 \overrightarrow{CO} 得:

$$\frac{\cos B}{\sin A} \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO} + \frac{\cos A}{\sin B} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO} = 2m \overrightarrow{CO}^2$$

$$\because \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{CB} \cdot (2\overrightarrow{CO})] = \frac{1}{2} a^2, \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{CA} \cdot (2\overrightarrow{CO})] = \frac{1}{2} b^2$$

$$\therefore \frac{1}{2} \frac{\cos B}{\sin A} a^2 + \frac{1}{2} \frac{\cos A}{\sin B} b^2 = 2m \overrightarrow{CO}^2,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \sin A \cos B \frac{a^2}{\sin^2 A} + \frac{1}{2} \cos A \sin B \frac{b^2}{\sin^2 B} = 2m \overrightarrow{CO}^2$$

$$\text{由正弦定理知 } \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = 4\overrightarrow{CO}^2$$

$$\therefore m = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【巩固练习】

1. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 若 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PC} \cdot \vec{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的()

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

2. 已知 O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\vec{OP} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} +$

$\lambda \vec{AP}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 则 P 点的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的()

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

3. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内部, 满足 $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \mathbf{0}$, 则 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle APC}$ 为()

- A. 2 : 1 B. 3 : 2 C. 3 : 1 D. 5 : 3

4. 点 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 若 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 4 : 3 : 2$, 设 $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$, 则实数 λ 和 μ 的值分别为()

- A. $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$

5. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, 若 $\vec{AO} = \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{AC}$ 则()

- A. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b}{c}$ B. $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{b}{c}$ C. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c^2}{b^2}$ D. $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{c}{b}$

6. 已知 O 为正 $\triangle ABC$ 内的一点, 且满足 $\vec{OA} + \lambda \vec{OB} + (1+\lambda) \vec{OC} = \vec{0}$, 若 $\triangle OAB$ 的面积与 $\triangle OBC$ 的面积比值为 3, 则 λ 的值为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 2 D. 3

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , $a=5$, $b=12$, $c=13$, I 是 $\triangle ABC$ 内切圆的

圆心, 若 $\vec{AI} = t \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, 则 $t =$ _____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=4$, $AC=5$, I 是 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心, 若 $\vec{AI} = \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{BC}$,

则 $\lambda_1 + \lambda_2 =$ _____.

9. 已知 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, $\angle A = 60^\circ$, $\frac{\cos B}{\sin C} \overrightarrow{AB} + \frac{\cos C}{\sin B} \overrightarrow{AC} = 2m \overrightarrow{AO}$, 则实数

m 的值为_____.

10. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} =$ _____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 5$, 点 G, O 分别为 $\triangle ABC$ 的重心和外心, 且 $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} = 5$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是()

A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 上述三种情况都有可能

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 经过 F_1 的直线与椭圆交于 A, B

两点, $\triangle ABF_2$ 的内切圆的圆心为 I , 若 $3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IF_2} = \mathbf{0}$, 则该椭圆的离心率为_____.

13. (多选题) 对于给定的 $\triangle ABC$, 其外心为 O , 重心为 G , 垂心为 H , 则下列结论正确的有 ()

A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2$

B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$

C. 过点 G 的直线 l 交 AB, AC 于 E, F , 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$

D. \overrightarrow{AH} 与 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C}$ 共线

14. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, 则 $\cos \angle BAC$ 的值为_____.

15. 设 P 是 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\overrightarrow{CP} = m \overrightarrow{CA} + n \overrightarrow{CB}$, $\frac{3}{2}m + 2n = 1$ ($m, n \in \mathbb{R}$), 若 $CA = 2CB$, 则 $\cos C$ 的值为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心, 若

$\sqrt{2}a \cos B = \sqrt{2}c - b$, 且 $\frac{\cos B}{\sin C} \overrightarrow{AB} + \frac{\cos C}{\sin B} \overrightarrow{AC} = m \overrightarrow{AO}$, 则 m 的值是()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

17. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $AG \perp BG$, 则 $\frac{(\tan A + \tan B) \tan C}{\tan A \cdot \tan B}$ 的值为_____.

18. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $CG \perp BG$, $BC = \sqrt{2}$, 则 $AB + AC$ 的最大值为_____.

19. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, 已知点 O 、 G 分别是的外心、重心, 且 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

20. 已知 A, B, C 为圆 O 上的三点, 线段 CO 的延长线与线段 BA 的延长线交于圆 O 外的一点 D , 若 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 则 $m + n$ 的取值范围为

- A. $(0, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-1, 0)$

【答案与提示】

1. 【答案】 D

【解析】 由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$, 可得 $\overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = 0$, 即 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, $\therefore \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{CA}$, 同理可证 $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{BC}$. $\therefore P$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

2. 【答案】 C

【解析】 设 BC 的中点为 M , 则 $\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \overrightarrow{OM}$,

则有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \lambda \overrightarrow{AP}$, 即 $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{AP}$.

$\therefore P$ 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的重心.

3. 【答案】 C

【解析】 根据奔驰定理得, $S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PAC} : S_{\triangle PAB} = 1 : 2 : 3$. $\therefore S_{\triangle ABC} : S_{\triangle APC} = 3 : 1$.

4. 【答案】 A

【解析】 根据奔驰定理, 得 $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 即 $3\overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \mathbf{0}$,

整理得 $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$, 故选 A.

5. 【答案】 A

【分析】 根据奔驰定理的内心恒等式 $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 利用向量的线性运算可以求

得 $\overrightarrow{AO} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$. 进而根据平面向量基本定理中的唯一性可得到

λ_1, λ_2 的值, 进而得解.

【解析】 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, $AB=c, AC=b, BC=a$

则 $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$,

所以 $a\overrightarrow{OA} + b(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + c(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$,

所以 $(a+b+c)\overrightarrow{AO} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$,

所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$.

又 $\overrightarrow{AO} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$, 所以 $\lambda_1 = \frac{b}{a+b+c}, \lambda_2 = \frac{c}{a+b+c}$

所以 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b}{c}$.

6. 【答案】C

【解析】由奔驰定理得 $S_{\triangle OAB} : S_{\triangle OBC} = (1+\lambda) : 1 = 3$, 解之得 $\lambda = 2$, 选 C.

7. 【答案】 $\frac{26}{5}$

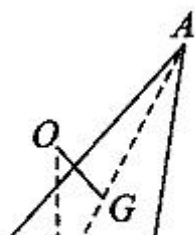
8. 【答案】 $\frac{5}{6}$

9. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 【答案】 $\frac{1}{2}$

11. 【答案】B

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 点 G, O 分别为 $\triangle ABC$ 的重心和外心, 取 BC 的中点 D , 连接 AD, OD , 则 A, D, G 三点共线, 如图所示,



$OD \perp BC, GD = \frac{1}{3}AD$. $\because \vec{OG} = \vec{OD} + \vec{DG}$, $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, $\vec{OG} \cdot \vec{BC} = 5$,
 $\therefore (\vec{OD} + \vec{DG}) \cdot \vec{BC} = \vec{DG} \cdot \vec{BC} = -\frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = 5$, 即 $-\frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 5$,
 $\therefore |\vec{AC}|^2 - |\vec{AB}|^2 = -30$. 又 $BC = 5$, $\therefore |\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + \frac{6}{5}|\vec{BC}|^2 > |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2$. 由余弦定理, 得
 $\cos C < 0$, $\therefore \frac{\pi}{2} < C < \pi$, $\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形. 故选 B.

12. 【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】 因为 $3\vec{IB} + 4\vec{IA} + 5\vec{IF}_2 = \vec{0}$, 所以 $\frac{3}{8}\vec{IB} + \frac{5}{8}\vec{IF}_2 = -\frac{1}{2}\vec{IA}$. 如图, 在 BF_2 上取一点 M , 使得
 $|\vec{BM}| : |\vec{MF}_2| = 5 : 3$, 连接 IM , 则 $\vec{IM} = -\frac{1}{2}\vec{IA}$, 则点 I 为 AM 上靠近点 M 的三等分点,
 所以 $S_{\triangle IAF_2} : S_{\triangle IF_2B} : S_{\triangle IBA} = 3 : 4 : 5$, 所以 $|\vec{AF}_2| : |\vec{F}_2B| : |\vec{BA}| = 3 : 4 : 5$. 不妨设 $|\vec{AF}_2| = 3$, 则
 $|\vec{F}_2B| = 4, |\vec{BA}| = 5$, 则 $|\vec{AF}_1| + |\vec{AF}_2| = |\vec{BF}_1| + |\vec{BF}_2| = 2a = 6$, 所以 $|\vec{AF}_1| = 3, |\vec{BF}_1| = 2$, 设 $|\vec{F}_1F_2| = x$,
 由余弦定理得 $\cos \angle ABF_2 = \frac{|\vec{BF}_1|^2 + |\vec{BF}_2|^2 - |\vec{F}_1F_2|^2}{2|\vec{BF}_1||\vec{BF}_2|} = \frac{25 + 16 - 9}{2 \times 5 \times 4}$, 即 $\frac{2^2 + 4^2 - x^2}{2 \times 2 \times 4} = \frac{4}{5}$, 得

$$x = \frac{6}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

13. 【答案】 ACD

【解析】 对于 A, 由垂径定理可知, 外心 O 在 \overline{AB} 上的射影为线段 AB 的中点,

所以 $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}|\vec{AB}|^2$, 故 A 正确;

对于 B, 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OB} \cdot \vec{OC}$,

由 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OC}$, 则 $\vec{OA} \cdot (\vec{OB} - \vec{OC}) = 0$, 即 $\vec{OA} \cdot \vec{CB} = 0$,

同理 $\vec{OB} \cdot \vec{CA} = 0$, $\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$, 即点 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

又 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 则有 $\vec{HA} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{AC} = \vec{HC} \cdot \vec{AB} = 0$, 故 B 不正确;

对于 C, 因为 G 、 E 、 F 三点共线,

故存在实数 t ，使得 $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AE} + (1-t)\overrightarrow{AF} = t\lambda\overrightarrow{AB} + (1-t)\mu\overrightarrow{AC}$ ，

又 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，故 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，

所以 $\begin{cases} t\lambda = \frac{1}{3} \\ (1-t)\mu = \frac{1}{3} \end{cases}$ ，则 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$ ，故 C 正确；

对 于 D ， 因 为

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C} \right) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C} = -|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}| = 0,$$

所以 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$ 与 \overrightarrow{BC} 垂直，又 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，则 \overrightarrow{AH} 与 \overrightarrow{BC} 垂直，

所以 \overrightarrow{AH} 与 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$ 共线，故 D 正确，

故选 ACD.

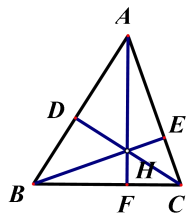
14. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析一】（利用三点共线）

$$\because \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

如图，取 AB 的中点为 D ，则 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

故 H 、 C 、 D 三点共线，



$\because H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $\therefore CD \perp AB$

$$\text{在 } Rt\triangle ADC \text{ 中, } \cos \angle BAC = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}c}{b} = \frac{c}{2b} \quad ①$$

另一方面, $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

同理得 $\cos \angle BAC = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{2}{3}b}{c} = \frac{2b}{3c}$ ②

① ②联立得 $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析二】(抓住垂心概念, 充分利用垂直, 点乘, 三化二)

对 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 两边点乘 \overrightarrow{AB} 得 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\because \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$ ①

同理, 对 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 两边点乘 \overrightarrow{AC} 得 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2$

$\therefore \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

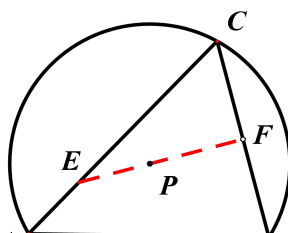
$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2$ ②.

由①②联立得 $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

15. 【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析一】 $\overrightarrow{CP} = \left(\frac{3}{2}m\right)\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right) + (2n)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$, $\frac{3}{2}m + 2n = 1$

取 $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$



$$\text{则 } \overrightarrow{CP} = \left(\frac{3}{2}m\right)\overrightarrow{CE} + (2n)\overrightarrow{CF}, \quad \frac{3}{2}m + 2n = 1$$

所以 E, F, P 三点共线

又 F 是弦 BC 的中点, 故 $EF \perp BC$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{CF}{CE} = \frac{\frac{1}{2}CB}{\frac{2}{3}CA} = \frac{\frac{1}{2}CB}{\frac{4}{3}CB} = \frac{3}{8}.$$

【解析二】(点乘作数量积)

$$\text{对 } \overrightarrow{CP} = m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB} \text{ 两边点乘 } \overrightarrow{CA} \text{ 得 } \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} = m\overrightarrow{CA}^2 + n\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2, \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2 = m\overrightarrow{CA}^2 + n\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\because CA = 2CB \quad \therefore 2 = 4m + 2n \cos C \quad \text{①}$$

$$\text{对 } \overrightarrow{CP} = m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB} \text{ 两边点乘 } \overrightarrow{CB} \text{ 得 } \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + n\overrightarrow{CB}^2$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2, \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2 = m\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + n\overrightarrow{CB}^2$$

$$\because CA = 2CB \quad \therefore \frac{1}{2} = 2m + n \cos C \quad \text{②}$$

16. 【答案】C

【解析】因为 $\sqrt{2}a \cos B = \sqrt{2}c - b$, 由余弦定理得 $\sqrt{2}a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \sqrt{2}c - b$, 整理得

$$b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{2}bc, \text{ 所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{4}, \text{ 因为 } O \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的外}$$

心, 则对于平面内任意点 P , 均有:

$$\overrightarrow{PO} = \frac{\cos A}{2\sin B \sin C} \overrightarrow{PA} + \frac{\cos B}{2\sin A \sin C} \overrightarrow{PB} + \frac{\cos C}{2\sin A \sin B} \overrightarrow{PC}, \text{ 令 } P \text{ 与 } A \text{ 重合, 及 } A = \frac{\pi}{4} \text{ 得}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\cos B}{\sqrt{2}\sin C} \overrightarrow{AB} + \frac{\cos C}{\sqrt{2}\sin B} \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\cos B}{\sin C} \overrightarrow{AB} + \frac{\cos C}{\sin B} \overrightarrow{AC} \right), \quad \therefore$$

$$\frac{\cos B}{\sin C} \overrightarrow{AB} + \frac{\cos C}{\sin B} \overrightarrow{AC} = m \overrightarrow{AO}, \quad \therefore m = \sqrt{2}. \text{ 故选 C.}$$

17. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $CO = 3GO = \frac{3}{2}c$ (其中 O 是边 BC 的中点), 由中线长定理得

$$2(a^2 + b^2) = c^2 + 4OC^2 = 10c^2,$$

$$\frac{(\tan A + \tan B) \tan C}{\tan A \cdot \tan B} = \frac{\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}\right) \frac{\sin C}{\cos C}}{\frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B \cos C} = \frac{c^2}{ab \cos C} = \frac{1}{2}.$$

18. 【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】 取边 BC 的中点为 O , 则 $AO = 3GO = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 由中线长定理得

$$2(b^2 + c^2) = a^2 + 4OA^2 = 20, \text{ 即 } b^2 + c^2 = 10,$$

$$(AB + AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \leq AB^2 + AC^2 + (AB^2 + AC^2) = 20$$

故 $AB + AC \leq 2\sqrt{5}$ (当且仅当 $AB = AC$ 时, “=” 成立)

所以 $AB + AC$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$.

19. 【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2), \quad \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2)$$

所以 $b^2 + c^2 = \frac{3}{2}a^2 = 6$,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 + c^2} = \frac{1}{3}$ (当且仅当 $b=c$ 时, “=” 成立)

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \frac{b^2 + c^2}{2} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \text{ (当且仅当 } b=c \text{ 时, “=” 成立)}$$

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{2}$.

20. 【答案】 D

【解析】因为 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ ，所以 $\frac{1}{m+n}\overrightarrow{OC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OB}$ ，由此可知，向量 $\frac{1}{m+n}\overrightarrow{OC}$ 与向量 \overrightarrow{OA} ， \overrightarrow{OB} 的一端三点共线，由图象及平面向量共线定理易知 $m+n$ 的取值范围为 $(-1, 0)$ 。

专题 26 有关三角形中的范围问题

【方法点拨】

1. 正弦平方差公式 $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)$.
2. 化边、化角、作高三个方向如何选择是难点，但一般来说，涉及两内角正切间的等量关系时作高更简单些.

【典型题示例】

例 1 在锐角 $\triangle ABC$ 中， $a^2 - b^2 = bc$ ，则 $\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A} + 2\sin A$ 的取值范围为 _____.

【答案】 $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 3\right)$

【解析】 $\because a^2 - b^2 = bc$ ，利用正弦定理可得： $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C$ ，

由正弦平方差公式得 $\sin(A - B)\sin(A + B) = \sin B \sin C$ ，

即 $\sin(A - B)\sin C = \sin B \sin C$ ，

易知 $\sin C \neq 0$ ，故 $\sin(A - B) = \sin B$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形， $\therefore A - B = B$ ，即 $A = 2B$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0 < 2B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3B < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A} + 2\sin A = \frac{\sin(A-B)}{\sin B \sin A} + 2\sin A = \frac{1}{\sin A} + 2\sin A$$

又 $\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin A < 1$, 令 $t = \sin A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} < t < 1 \right)$, 则

$$f(t) = \frac{1}{t} + 2t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} < t < 1 \right),$$

由对勾函数性质知, $f(t) = \frac{1}{t} + 2t$ 在 $t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$ 上单调递增,

$$\text{又 } f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad f(1) = \frac{1}{1} + 2 \times 1 = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{\sin A} + 2\sin A \in \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 3 \right).$$

例 2 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【分析】 将已知和所求都“化边”, 然后使用基本不等式即可. 所求 $\cos C$ 的最值可想到余

弦定理用边进行表示, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 考虑 $\sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$ 角化边得到:

$a + \sqrt{2}b = 2c$, 进而消去 c 计算表达式的最值即可

【解析】 $\therefore \sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$.

由正弦定理可得 $a + \sqrt{2}b = 2c$, 即 $c = \frac{a + \sqrt{2}b}{2}$,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \left(\frac{a + \sqrt{2}b}{2} \right)^2}{2ab} = \frac{3a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab}{8ab} \geq \frac{2\sqrt{6}ab - 2\sqrt{2}ab}{8ab} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

当且仅当 $3a^2 = 2b^2$ 即 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 时等号成立.

$$\therefore \cos C \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

例 3 在锐角三角形 ABC 中, 已知 $2\sin^2 A + \sin^2 B = 2\sin^2 C$, 则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的最小值为_____.

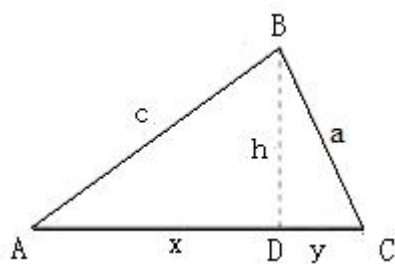
【答案】 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

【解析一】（作高线，化斜为直，角化边）由正弦定理，得： $2a^2 + b^2 = 2c^2$ ，

如图，作 $BD \perp AC$ 于 D ，设 $AD=x$ ， $CD=y$ ， $BD=h$ ，

因为 $2a^2 + b^2 = 2c^2$ ，所以， $2(y^2 + h^2) + (x + y)^2 = 2(x^2 + h^2)$ ，化简，得：

$$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \text{ 解得: } x=3y$$



$$\tan(A+C) = -\tan B, \quad \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C} = -\tan B, \quad \frac{1 - \tan A \tan C}{\tan A + \tan C} = -\frac{1}{\tan B},$$

$$\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} + \frac{\tan A \tan C - 1}{\tan A + \tan C} = \frac{x}{h} + \frac{y}{h} + \frac{\frac{h^2}{x} - 1}{\frac{h}{x} + \frac{h}{y}}$$

$$= \frac{4y}{h} + \frac{h^2 - 3y^2}{4yh} = \frac{13y}{4h} + \frac{h}{4y} \geq \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

【解析二】（边化角）

由正弦定理，得： $2a^2 + b^2 = 2c^2$ ，即 $2(b^2 + c^2 - a^2) = 3b^2$ ，

由余弦定理得： $4bc \cos A = 3b^2$ ，即 $4c \cos A = 3b$ ，

由正弦定理，得： $4 \sin C \cos A = 3 \sin B$ ，即 $4 \sin C \cos A = 3 \sin(A+C)$ ，化简得 $\tan C = 3 \tan A$ ，

$$\text{以 } \tan A \text{ 主元，化简 } \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} \text{ 得 } \frac{3}{4} \tan A + \frac{13}{12 \tan A} \geq 2 \sqrt{\frac{3}{4} \tan A \cdot \frac{13}{12 \tan A}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析一】（余弦定理+二次函数）

看到式子 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$ 的结构特征，联想余弦定理得：

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 8}{4ab} \geq \frac{3}{2} - \frac{2}{ab}$$

$$\text{所以 } S^2 = \frac{1}{4}(ab)^2 \sin^2 C \leq \frac{1}{4}(ab)^2 \left[1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{ab} \right)^2 \right] = -\frac{5}{16}(ab)^2 + \frac{3}{2}ab - 1$$

$$\text{当 } ab = \frac{12}{5} \text{ 时, } [S^2]_{\max} = \frac{4}{5}, \Delta ABC \text{ 的面积的最大值为 } \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

【解析二】（三角形中线长定理+基本不等式）

设 BC 边上的中线为 AM ，则 $2(a^2 + b^2) = c^2 + 4AM^2$

$$\because a^2 + b^2 + 2c^2 = 8 \quad \therefore a^2 + b^2 = 8 - 2c^2$$

$$\text{代人得: } 2(8 - 2c^2) = c^2 + 4AM^2, \text{ 即 } 5c^2 + 4AM^2 = 16$$

$$\text{根据基本不等式得: } 5c^2 + 4AM^2 = 16 \geq 2\sqrt{5c^2 \times 4AM^2} = 4\sqrt{5}AM \cdot c$$

又因为三角形一边上的中线不小于该边上的高

$$\text{所以 } 4\sqrt{5}AM \cdot c \geq 8\sqrt{5}S$$

$$\text{所以 } 16 \geq 8\sqrt{5}S, S \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 当且仅当中线等于高, 即中线垂直于底边时, 等号成立, 此}$$

$$\text{时 } \Delta ABC \text{ 的面积的最大值为 } \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

【解法三】（隐圆）

以 AB 的中点为原点， AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系。

$$\text{设 } A\left(-\frac{c}{2}, 0\right), B\left(\frac{c}{2}, 0\right), C(x, y), \text{ 则由 } a^2 + b^2 + 2c^2 = 8, \text{ 得 } \left[x - \frac{c}{2}\right]^2 + y^2 + \left[x + \frac{c}{2}\right]^2 + y^2 + 2c^2 = 8,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 = 4 - \frac{5}{4}c^2, \text{ 所以点 } C \text{ 在以原点}(0,0)\text{为圆心, } \sqrt{4 - \frac{5}{4}c^2} \text{ 为半径的圆上, 所以}$$

$$S \leq \frac{c}{2} \sqrt{4 - \frac{5}{4}c^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\left(4 - \frac{5}{4}c^2 \right) + \frac{5}{4}c^2 \right] \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

【巩固训练】

1. (多选题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 = b^2 + bc$, 则角 A 可为 ()

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{7\pi}{12}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2}$, 则 $\cos B$ 的最小值是_____.

3. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + 2 \sin B \cos C = 0$, 则 $\tan A$ 的最大值是 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

4. 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sin B = 2 \sin C$, 则角 C 的最大值是_____.

5. 已知在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b^2 = a(a+c)$, 则

$\frac{a \sin A}{b \cos A - a \cos B}$ 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , $a=1$, $b \cos A - \cos B = 1$, 当

A, B 则变化时, $\sin B - 2\lambda \sin^2 A$ 存在最大值, 则正数 λ 的取值范围为_____.

A. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 设角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\sqrt{2}a, b, c$ 成等差数列, 则

$\frac{3}{\sin A} + \frac{\sqrt{2}}{\sin C}$ 的最小值为_____.

8. 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $b^2 - a^2 = ac$, 则

$\frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\tan B}$ 的取值范围为_____.

9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 S , 若 $\sin(A+C) = \frac{2S}{b^2 - c^2}$,

则 $\tan C + \frac{1}{2 \tan(B-C)}$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 1

D. $2\sqrt{2}$

【答案或提示】

1. 【答案】BC

【解析】 $\because a^2 = b^2 + bc$ ，利用正弦定理可得： $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C$ ，

由正弦平方差公式得 $\sin(A-B)\sin(A+B) = \sin B \sin C$ ，

即 $\sin(A-B)\sin C = \sin B \sin C$ ，

易知 $\sin C \neq 0$ ，故 $\sin(A-B) = \sin B$

$\therefore A-B=B$ ，即 $A=2B$

$\because 0 < A+B < \pi$ ， $\therefore 0 < A + \frac{1}{2}A < \pi$ ， $\therefore 0 < A < \frac{2}{3}\pi$ ，故选：BC.

2. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【提示】已知可化为 $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{\pi - A - C}{2} = 2 \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right)$

$= 2 \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$ ，弦化切得 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{\tan \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right)} = \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2}} \leq \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}}{2 \sqrt{\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \frac{B}{2} \leq \frac{\pi}{6}$ ， $B \leq \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore \cos B \geq \frac{1}{2}$.

3. 【答案】A

【提示】化边、化角、作高三个方向均可解决.

4. 【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】由 $\sin A + \sin B = 2\sin C$ 可得： $a + b = 2c$ ， $\therefore c = \frac{a+b}{2}$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2ab} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}{2ab} \geq \frac{2\sqrt{\frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{3}{4}b^2} - \frac{1}{2}ab}{2ab} = \frac{1}{2}$$

$\because \cos C$ 在 $(0, \pi)$ 递减， $\therefore 0 < C \leq \frac{\pi}{3}$

5. 【答案】C

【解析】由 $b^2 = a(a+c)$ 得： $\sin^2 B = \sin^2 A + \sin A \sin C$ ，即 $\sin^2 B - \sin^2 A = \sin A \sin C$

即 $\sin(B+A)\sin(B-A) = \sin A \sin C$ ，

而 $\sin(B+A) = \sin C \neq 0$ ，所以 $\sin(B-A) = \sin A$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形， $\therefore B-A = A$ ，即 $B = 2A$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0 < 2A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a \sin A}{b \cos A - a \cos B} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \cos A - \sin A \cos B} = \frac{\sin^2 A}{\sin(B-A)} = \sin A \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

6. 【答案】A

【解析】由 $a = 1$ ， $b \cos A - \cos B = 1$ 得： $b \cos A - a \cos B = a$

根据正弦定理得： $\sin B \cos A - \sin A \cos B = \sin A$ ，即 $\sin(B-A) = \sin A$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形， $\therefore B-A = A$ ，即 $B = 2A$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0 < 2A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} < 2A < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin B - 2\lambda \sin^2 A = \sin 2A - \lambda(1 - \cos 2A) = \sin 2A + \lambda \cos 2A - \lambda$$

$$= \sqrt{1+\lambda^2} \sin(2A+\varphi) - \lambda \quad (\tan \varphi = \lambda)$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < 2A < \frac{\pi}{2}$$

\therefore 欲使 $\sin B - 2\lambda \sin^2 A$ 存在最大值, 必有 $2A + \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\therefore 0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$, 故 $\tan 0 < \tan \varphi = \lambda < \tan \frac{\pi}{6}$, 即 $0 < \lambda < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 【答案】 $2(\sqrt{3} + 1)$

【解析】由题得 $2b = \sqrt{2}a + c$, $\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{c}{2})^2}{2ac}$,

所以 $\cos B = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}c^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}ac}{2ac} \geq \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{3}{4}c^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, 所以 $0 < B \leq 75^\circ$, $\therefore 0 < \sin B \leq \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

因为 $2\sin B = \sqrt{2}\sin A + \sin C$, $\therefore \sqrt{2}\sin A + \sin C \leq \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$, $\therefore \frac{\sqrt{2}\sin A + \sin C}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} \leq 1$.

所以 $\frac{3}{\sin A} + \frac{\sqrt{2}}{\sin C} \geq (\frac{3}{\sin A} + \frac{\sqrt{2}}{\sin C}) \cdot \frac{\sqrt{2}\sin A + \sin C}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2} + \frac{2\sin A}{\sin C} + \frac{3\sin C}{\sin A}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} \geq \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{2\sin A}{\sin C} \cdot \frac{3\sin C}{\sin A}}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} =$

$2(\sqrt{3} + 1)$.

故答案为: $2(\sqrt{3} + 1)$.

8. 【答案】 $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

【分析】由余弦定理化简已知式, 再由正弦定理化边为角, 由三角函数恒等变换得 $B = 2A$,

由锐角三角形求得 A, B 的范围, 待求式切化弦, 通分后利用已知条件化为 $\frac{1}{\sin B}$, 由正弦函数性质可得范围.

【解析】因为 $b^2 - a^2 = ac$, 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

所以 $ac = c^2 - 2ac \cos B$, $c = 2a \cos B + a$,

由正弦定理得 $\sin C = 2\sin A \cos B + \sin A$,

所以

$$\sin A = \sin(A + B) - 2\sin A \cos B = \sin A \cos B + \cos A \sin B - 2\sin A \cos B$$

$$= \cos A \sin B - \sin A \cos B = \sin(B - A),$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $A = B - A$, $B = 2A$, $C = \pi - 3A$,

由 $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $A \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, $B \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\tan B} = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin B \cos A - \cos B \sin A}{\sin A \sin B} = \frac{\sin(B - A)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin A}{\sin A \sin B} = \frac{1}{\sin B},$$

$\sin B \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, 所以 $\frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\tan B} \in \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

故答案为: $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. 【答案】A

【分析】 $\sin(A+C) = \frac{2S}{b^2-c^2}$ 结合面积公式, 可得出 $b^2 = c^2 + ac$, 由余弦定理得出

$a - 2c \cos B = c$, 再用正弦定理化边为角, 得出 $B = 2C$, 把所求式子用角 C 表示, 并求出角 C 范围, 最后用基本不等式求最值.

【解析】因为 $\sin(A+C) = \frac{2S}{b^2-c^2}$, 即 $\sin B = \frac{2S}{b^2-c^2}$,

所以 $\sin B = \frac{ac \sin B}{b^2-c^2}$, 因为 $\sin B \neq 0$,

所以 $b^2 = c^2 + ac$, 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

可得 $a - 2c \cos B = c$,

再由正弦定理得 $\sin A - 2 \sin C \cos B = \sin C$,

因为 $\sin A - 2 \sin C \cos B = \sin(B+C) - 2 \sin C \cos B = \sin(B-C)$,

所以 $\sin(B-C) = \sin C$, 所以 $B-C = C$ 或 $B-C+C = \pi$,

得 $B = 2C$ 或 $B = \pi$ (舍去). 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

所以 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < 2C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 得 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4}$, 即 $\tan C \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$,

所以 $\tan C + \frac{1}{2 \tan(B-C)} = \tan C + \frac{1}{2 \tan C} \geq \sqrt{2}$,

当且仅当 $\tan C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 取等号. 故选: A

专题 27 以图形为背景的两角和与差的正切

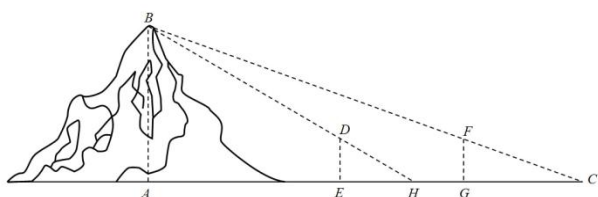
【方法点拨】

1. 利用作垂线, 可以化斜三角形为直角三角形, 往往两次解直角三角形较直接使用正余弦定理来的简单.

2. 图形中的张定角问题，往往作垂线后，在两个直角三角形中，求出角的正切值，再使用两角和与差的正切公式，从而布列方程求解；求张角最值问题，方法同上，从而建立目标函数求解.

【典型题示例】

例 1 (2021 · 全国乙卷 · 理 9) 魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高. 如图，点 E, H, G 在水平线 AC 上， DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”， EG 称为“表距”， GC 和 EH 都称为“表目距”， GC 与 EH 的差称为“表目距的差”则海岛的高 $AB =$ ()

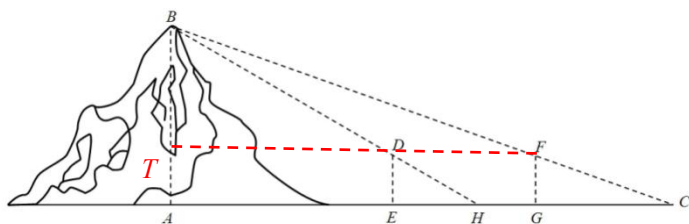


- A. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ B. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
 C. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ D. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

【答案】A

【分析】化斜为直，两次解直角三角形即可解出.

【解析】如图所示：



$$\text{在 } Rt\triangle BDT \text{ 中, } \tan \angle BDT = \frac{BT}{TD}, \quad TD = \frac{BT}{\tan \angle BDT}$$

$$\text{在 } Rt\triangle BFT \text{ 中, } \tan \angle BFT = \frac{BT}{TF}, \quad TF = \frac{BT}{\tan \angle BFT}$$

$$\because TF - TD = DF = EG$$

$$\therefore EG = \frac{BT}{\tan \angle BFT} - \frac{BT}{\tan \angle BDT}$$

$$\therefore BT = \frac{EG}{\frac{1}{\tan \angle BFT} - \frac{1}{\tan \angle BDT}}$$

另一方面, $\tan \angle BFT = \tan \angle BCA = \frac{FG}{CG}$, $\tan \angle BDT = \tan \angle BHA = \frac{DE}{EH}$

$$\therefore BT = \frac{EG}{\frac{CG}{FG} - \frac{EH}{DE}} = \frac{EG}{CG - EH} \times DE$$

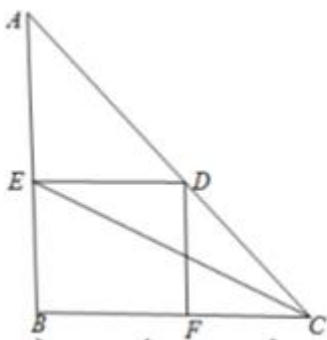
$$\therefore AB = BT + AT = BT + DE = \frac{EG}{CG - EH} \times DE + DE = \frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}.$$

故选: A.

点评:

本题难度并不大, 主要以数学文化为背景, 考查学生分析问题的能力, 但在应试的背景下, 学生往往找不到方向, 不会化斜为直, 而使用正、余弦定理等去解决, 这无疑给解题带来了难度, 甚至误入死胡同.

例 2 《九章算术》是我国古代著名数学经典, 其对勾股定理的论述比西方早一千多年. 其中有这样一个问题: “今有勾五步, 股十二步, 问勾中容方几何?” 其意为: 今有直角三角形 ABC , 勾 (短直角边) BC 长 5 步, 股 (长直角边) AB 长 12 步, 问该直角三角形能容纳的正方形 $DEBF$ 边长为多少? 在如图所示中, 求得正方形 $DEBF$ 的边长后, 可求得 $\tan \angle ACE =$ _____.



【答案】 $\frac{144}{229}$

【分析】 利用平凡中的三角形相似或三角函数知识, 不难求出正方形 $DEBF$ 的边长 a , 这

里，应化斜为直，将 $\angle ACE$ 看作 $\angle ACB$ 、 $\angle ECB$ 的差，在直角三角形 $\triangle ACB$ 、 $\triangle ECB$ 求出 $\tan \angle ECB$ 、 $\tan \angle ACB$ ，再利用两角差正切公式计算即可。

【解析】设正方形 $DEBF$ 的边长 a ，由题知： $\frac{a}{5} = \frac{12-a}{12}$ ，解得 $a = \frac{60}{17}$ 。

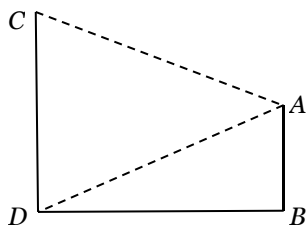
$$\text{所以 } \tan \angle ECB = \frac{\frac{60}{17}}{5} = \frac{12}{17}, \quad \tan \angle ACB = \frac{12}{5}.$$

$$\text{故 } \tan \angle ACE = \tan(\angle ACB - \angle ECB) = \frac{\frac{12}{5} - \frac{12}{17}}{1 + \frac{12}{5} \times \frac{12}{17}} = \frac{144}{229}.$$

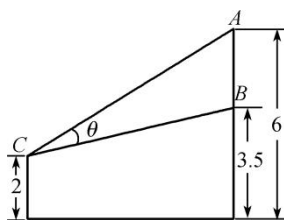
$$\text{即 } \tan \angle ACE \text{ 的值为 } \tan \angle ACE = \frac{144}{229}.$$

【巩固训练】

- 1.如图，两座建筑物 AB ， CD 的高度分别是 9m 和 15m，从建筑物 AB 的顶部 A 看建筑物 CD 的张角 $\angle CAD = 45^\circ$ ，则这两座建筑物 AB 和 CD 的底部之间的距离 $BD =$ _____ m.



- 2.如图，有一壁画，最高点 A 处离地面 6 m，最低点 B 处离地面 3.5 m. 若从离地高 2 m 的 C 处观赏它，则 C 离墙 _____ m 时，视角 θ 最大.

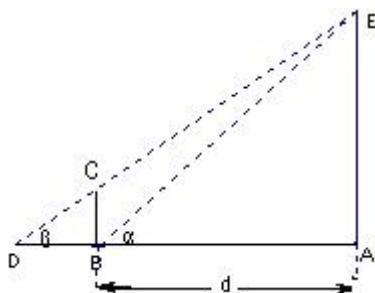


- 3.某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位: m)，如示意图，垂直放置的标杆 BC 的高度

$h=4\text{m}$ ，仰角 $\angle ABE=\alpha$ ， $\angle ADE=\beta$ 。

(1) 该小组已经测得一组 α 、 β 的值， $\tan \alpha=1.24$ ， $\tan \beta=1.20$ ，请据此算出 H 的值是 _____m；

(2) 该小组分析若干测得的数据后，认为适当调整标杆到电视塔的距离 d (单位：m)，使 α 与 β 之差较大，可以提高测量精确度。若电视塔的实际高度为 125m ，当 $d=$ _____m 时， $\alpha - \beta$ 最大。



【答案或提示】

1. 【答案】18

【提示】过 A 作 CD 的垂线，利用两角和的正切公式布列方程。

2. 【答案】 $\sqrt{6}$

【提示】过 C 作 AB 的垂线，利用两角差的正切公式建立关于两点地面间距离的目标函数，再利用基本不等式。

3. 【答案】(1) 124m ； (2) $55\sqrt{5}\text{ m}$ 。

【解析】本题主要考查解三角形的知识、两角差的正切及不等式的应用。

$$(1) \frac{H}{AD} = \tan \beta \Rightarrow AD = \frac{H}{\tan \beta}, \text{ 同理: } AB = \frac{H}{\tan \alpha}, BD = \frac{h}{\tan \beta}.$$

$$AD - AB = DB, \text{ 故得 } \frac{H}{\tan \beta} - \frac{H}{\tan \alpha} = \frac{h}{\tan \beta}, \text{ 解得: } H = \frac{h \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} = \frac{4 \times 1.24}{1.24 - 1.20} = 124.$$

因此，算出的电视塔的高度 H 是 124m 。

(2) 由题设知 $d = AB$, 得 $\tan \alpha = \frac{H}{d}$, $\tan \beta = \frac{H}{AD} = \frac{h}{DB} = \frac{H-h}{d}$,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{H}{d} - \frac{H-h}{d}}{1 + \frac{H}{d} \cdot \frac{H-h}{d}} = \frac{\frac{H - (H-h)}{d}}{\frac{d^2 + H(H-h)}{d^2}} = \frac{hd}{d^2 + H(H-h)} = \frac{h}{d + \frac{H(H-h)}{d}}$$

$$d + \frac{H(H-h)}{d} \geq 2\sqrt{H(H-h)}, \quad (\text{当且仅当 } d = \sqrt{H(H-h)} = \sqrt{125 \times 121} = 55\sqrt{5} \text{ 时, 取等})$$

号)

故当 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\tan(\alpha - \beta)$ 最大.

因为 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以当 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\alpha - \beta$ 最大.

故所求的 d 是 $55\sqrt{5}$ m.

专题 28 有关三角形中线、角平分线、高线问题

【方法点拨】

1. 中线长定理: $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的中线, 则 $AD^2 + BD^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.

2. 内角平分线定理: AD 为 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle BAD$ 平分线, 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

说明: 三角形内角平分线性定理将对边所成的线段比转化为对应的两边之比, 再结合爪形结构, 就可以转化为向量了, 一般的, 涉及到三角形中的“定比”类问题, 运用向量知识解决起来都较为简捷.

【典型题示例】

例 1 如图所示, 在平面四边形 $ABCD$ 中, 已知 $S_{\triangle ABD} = |AD|^2 + |BD|^2 - |AB|^2$,

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$, $\angle ABC = \angle BCD$, 记 BD 的中垂线与 AC 的中垂线交于一点 P ,

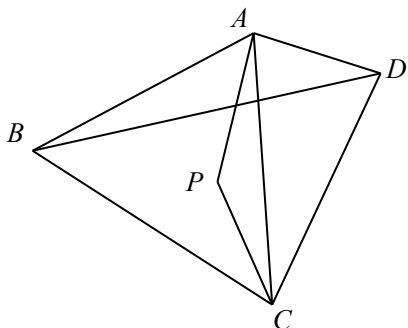
恰好 CP 为 $\angle ACB$ 的角平分线, 则 $\left| \frac{BD}{AP} \right|^2 =$

A. $\frac{14+\sqrt{14}}{34}$

B. $\frac{34+2\sqrt{17}}{17}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{28+2\sqrt{17}}{17}$



【答案】B

【解析】题目暗示明显，易知四边形 $ABCD$ 是以 P 为圆心的圆内接四边形，因为

$\angle ABC = \angle BCD$ ，所以 $BD = AC$ ， $CP = AP = BP = DP$ ，所以 $\left|\frac{BD}{AP}\right|^2 = \left|\frac{AC}{PC}\right|^2$ ，又由

题目条件可知， $S_{\triangle ABD} = |AD|^2 + |BD|^2 - |AB|^2 = \frac{1}{2}|AD| \cdot |BD| \sin \angle ADB =$

$2|AD| \cdot |BD| \cos \angle ADB$ ，

所以 $\sin \angle ADB = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ ， $\cos \angle ADB = \frac{\sqrt{17}}{17} = \cos \angle ACB$ ，所以

$$\cos^2 \angle ACP = \frac{1 + \cos \angle ACB}{2} = \frac{17 + \sqrt{17}}{34} = \left(\frac{|PC|^2 + |AC|^2 - |PA|^2}{2|PC| \cdot |AC|} \right)^2 = \frac{|AC|^2}{4|PC|^2},$$

所以 $\left|\frac{BD}{AP}\right|^2 = \frac{34 + 2\sqrt{17}}{17}$ 。

例2 在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 是 BC 的 2 倍，则 $\frac{\sin B \sin C}{\sin 2A}$ 的最大值为_____。

【答案】 $\frac{17}{15}$

【解析】由中线长定理得 $2(b^2 + c^2) = a^2 + 4AD^2 = 17a^2$ ，

所以 $2(b^2 + c^2 - a^2) = 15a^2$ ，由余弦定理得 $4bc \cos A = 15a^2$ ，

所以 $\sin B \sin C = \frac{15 \sin^2 A}{4 \cos A}$ ， $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{15}{17} \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq \frac{15}{17}$

所以 $0 < \sin A \leq \frac{8}{17}$

$$\frac{\sin B \sin C}{\sin 2A} = \frac{\sin B \sin C}{2 \sin A \cos A} = \frac{\frac{15 \sin^2 A}{4 \cos A}}{2 \sin A \cos A} = \frac{15 \sin A}{8 \cos^2 A} = \frac{15}{8} \frac{1}{\sin A - \frac{1}{\sin A}} \geq \frac{17}{15}.$$

例3 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 角 A 的角平分线交 BC 于点 D , 若 $a \sin A = b \sin B + (c-b) \sin C$, 且 $AD = \sqrt{3}$, $b = 3c$, 则 a 的值为()

A. $\frac{7}{2}$

B. $\frac{4\sqrt{7}}{3}$

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】易求得 $A = \frac{\pi}{3}$, 利用内角平分线定理及爪形结构将向量 \overrightarrow{AD} 用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 线性表示为 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 这是本题之关键.

【解析】由 $a \sin A = b \sin B + (c-b) \sin C$ 、正弦定理得: $a^2 = b^2 + (c-b)c$,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, $A = \frac{\pi}{3}$

由三角形内角平分线定理得: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$

所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

两边取模方得: $|\overrightarrow{AD}|^2 = \left| \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \right|^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2$

即 $\sqrt{3}^2 = \frac{9}{16}c^2 + \frac{3}{8}c \cdot 3c \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16}(3c)^2$, 解得 $c = \frac{4}{3}$

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \times 4 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{112}{9}$, $a = \frac{4\sqrt{7}}{3}$.

例4 在 $\triangle ABC$ 中, 若角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为_____.

【答案】9

【分析】本题的关键是探究出 a, c 间的关系.

【解析一】(由等面积法探究 a, c 间关系)

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$, 即 $\frac{1}{2}ac \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times a \times 1 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times c \times 1 \times \sin 60^\circ$

$$\therefore ac = a + c, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$$

$$\text{所以 } 4a + c = (4a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 5 + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}} = 9 \quad (\text{当且仅当 } c = 2a \text{ 时, “=” 成立})$$

所以 $4a + c$ 的最小值为 9.

【解析二】(由三角形内角平分线定理、向量法探究 a 、 c 间关系)

$$\text{由三角形内角平分线定理得: } \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BD} = \frac{a}{a+c} \overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+c} \overrightarrow{BC},$$

$$\text{两边取模得: } 1 = \left(\frac{a}{a+c} \right)^2 c^2 + \left(\frac{c}{a+c} \right)^2 a^2 + 2 \times \left(\frac{a}{a+c} \right) \times \left(\frac{c}{a+c} \right) \times ac \times \cos 120^\circ$$

$$\text{化简得: } ac = a + c, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$$

$$\text{所以 } 4a + c = (4a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 5 + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}} = 9 \quad (\text{当且仅当 } c = 2a \text{ 时, “=” 成立})$$

所以 $4a + c$ 的最小值为 9.

【解析三】(利用建系、三点共线法探究 a 、 c 间关系)

以 B 为坐标原点, BD 作为 x 轴正半轴, 建立直角坐标系, 则 $D(1, 0)$, $A\left(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$,

$$C\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

$$\because A, C, D \text{ 三点共线} \quad \therefore \frac{\frac{\sqrt{3}c}{2}}{\frac{c}{2} - 1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2} - 1} \quad \text{化简得 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$$

$$\text{所以 } 4a + c = (4a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 5 + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}} = 9 \quad (\text{当且仅当 } c = 2a \text{ 时, “=” 成立})$$

所以 $4a+c$ 的最小值为 9.

例 5 在三角形 ABC 中, D 为 BC 边上一点, 且 $BD=2CD$, $AD=BD$, 则

$\tan \angle BAC \cdot \cos^2 B$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【分析一】为将已知中相关线段间的关系往所求之角的关系转化, 利用“爪形结构”得出

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 从而将已知中所有条件“据于一式”之中, 为出现所求, 对其进行

“求模”运算起到“化边”的作用, 最后运用三角函数知识解决.

【解析一】在 ABC 中, 由 $BD=2CD$ 得: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

两边取模得: $|\overrightarrow{AD}|^2 = \left| \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right|^2$, 又 $AD=BD$

代入都转化为边得: $\frac{4}{9}a^2 = \frac{1}{9}c^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{4}{9}bc \cos \angle BAC$

即 $4a^2 = c^2 + 4b^2 + 4bc \cos \angle BAC$, $4(c^2 + b^2 - a^2) - 3c^2 + 4bc \cos \angle BAC = 0$

由余弦定理得: $8bc \cos \angle BAC - 3c^2 + 4bc \cos \angle BAC = 0$, 即 $4b \cos \angle BAC = c$

再由余弦定理得: $4 \sin B \cos \angle BAC = \sin C = \sin(\angle B + \angle BAC)$

即 $4 \sin B \cos \angle BAC = \sin B \cos \angle BAC + \cos B \sin \angle BAC$,

所以 $\tan \angle BAC = 3 \tan B$

所以 $\tan \angle BAC \cdot \cos^2 B = 3 \tan B \cos^2 B = \frac{3}{2} \sin 2B \leq \frac{3}{2}$ (当 $B = \frac{\pi}{4}$ 时, “=” 成立).

【分析二】设 $BD=x$, 则 $AD=x, CD=\frac{x}{2}$, 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理化简可得

$\frac{\frac{3x}{2} \cdot \sin B}{\sin \angle BAC} = \frac{\frac{x}{2} \cdot 2 \sin B \cos B}{\sin(\angle BAC - B)}$, 由两角差的正弦公式, 化简可得

$\tan \angle BAC \cdot \cos^2 B = \frac{3}{2} \sin 2B$, 根据正弦函数的值域即可求解 $\tan \angle BAC \cdot \cos^2 B$ 的最

大值.

【解析二】如图,由已知,设 $BD = x$, 则 $AD = x$, $CD = \frac{x}{2}$,

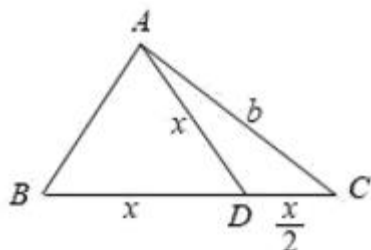
在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理可得: $\frac{\frac{3x}{2}}{\sin \angle BAC} = \frac{b}{\sin B}$,

在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理可得: $\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\angle BAC - B)} = \frac{b}{\sin 2B}$.

$$\text{所以 } \frac{\frac{3x}{2} \cdot \sin B}{\sin \angle BAC} = \frac{\frac{x}{2} \cdot 2 \sin B \cos B}{\sin(\angle BAC - B)} = \frac{\frac{x}{2} \cdot 2 \sin B \cos B}{\sin \angle BAC \cos B - \cos \angle BAC \sin B}$$

化简可得: $\tan \angle BAC \cdot \cos B = 3 \sin B$, 可得: $\tan \angle BAC \cdot \cos^2 B = \frac{3}{2} \sin 2B \leq \frac{3}{2}$.

可得 $\tan \angle BAC \cdot \cos^2 B$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.



【分析三】注意到三角形 ABD 是等腰三角形, 联想所

求, 作底边 AB 上的高, 过 C 作 AB 上的高, “化斜为直”, 充分运用“平几”知识解题.

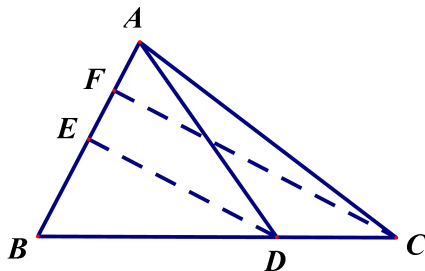
【解析三】如下图, 分别过 D 、 C 作 AB 边上的高 DE 、 CF , 故 $DE \parallel CF$

在 $\triangle ABD$ 中, 由三线合一知 $BE = AE$

由 $DE \parallel CF$, $BD = 2CD$ 得 $BF = 2AF$, $DE : CF = 2 : 3$

$$\text{所以 } \tan \angle BAC = \frac{CF}{AF} = \frac{\frac{3}{2} DE}{\frac{1}{2} BE} = 3 \tan B,$$

所以 $\tan \angle BAC \cdot \cos^2 B = 3 \tan B \cos^2 B = \frac{3}{2} \sin 2B \leq \frac{3}{2}$ (当 $B = \frac{\pi}{4}$ 时, “=” 成立).



例 6 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, 平分线与边 BC 的交点为 D , 点 E

$AC = 15$, $\angle A$ 的为边 BC 的中点,

若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 90$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{175}{2}$

【分析】基底法, 由于已知 AB, AC 的长度, 应考虑以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 为基底. 本题的关键是将向量 \overrightarrow{AD} 如何用基底向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 线性表示? ——利用三角形内角平分线性质定理为最

简途径, 易求得 $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$, 用“爪形”结构即可.

【解析】由角平分线定理可知 $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$

在 $\triangle ABC$ 中, 由“爪形”结构得: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$

$$\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 90$$

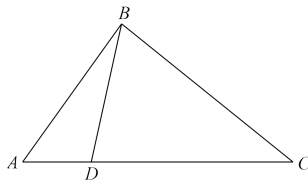
$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{2}{5} \overrightarrow{AC} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AB} \right) = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ 求得 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 75$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{175}{2}.$$

例 7 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点, 且 $CD = 3AD$, $BD = \sqrt{2}$, $\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$, 则

$3AB + BC$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$



【解析一】设 $AD = t$, 则 $CD = 3t$, $AC = 4t$,

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \cos \angle ADB = \frac{t^2 + (\sqrt{2})^2 - c^2}{2\sqrt{2}t},$$

$$\text{在 } \triangle BDC \text{ 中, } \cos \angle BDC = \frac{(3t)^2 + (\sqrt{2})^2 - a^2}{2\sqrt{2} \cdot 3t},$$

$$\text{又 } \cos \angle ADB = -\cos \angle BDC,$$

所以 $\frac{t^2 + (\sqrt{2})^2 - c^2}{2\sqrt{2}t} = -\frac{(3t)^2 + (\sqrt{2})^2 - a^2}{2\sqrt{2} \cdot 3t}$, 解得 $12t^2 = 3c^2 + a^2 - 8$, ①

在 $\triangle ABC$ 中, $AC^2 = (4t)^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $16t^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2}ac$, ②

由①②可得 $a^2 + 9c^2 + \frac{3}{2}ac = 32$.

所以 $32 = (a+3c)^2 - \frac{3}{2}a(3c) \geq (a+3c)^2 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{a+3c}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}(a+3c)^2$,

即 $(a+3c)^2 \leq \frac{8 \times 32}{5}$, 所以 $a+3c \leq \frac{16\sqrt{5}}{5}$,

当且仅当 $a=3c$, 即 $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}, c = \frac{8\sqrt{5}}{15}$ 时等号成立, 所以 $3AB+BC$ 的最大值为 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

【解析二】因为 $CD=3AD$, 所以 $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{DA}$, 即 $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=3(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD})$,

整理得到 $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, 两边平方后有 $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$,

所以 $2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 即 $2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{3}{8}|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \times \frac{1}{4}$,

整理得到 $32 = 9|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + \frac{3}{2}|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$,

设 $c = |\overrightarrow{BA}|, a = |\overrightarrow{BC}|$, 所以 $32 = 9c^2 + a^2 + \frac{3}{2}ac = (3c+a)^2 - \frac{9}{2}ac$,

因为 $\frac{9ac}{2} = \frac{3 \cdot 3a \cdot c}{2} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{3c+a}{2}\right)^2$,

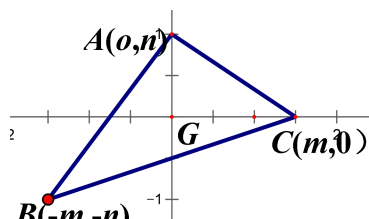
所以 $32 = (3c+a)^2 - \frac{9}{2}ac \geq (3c+a)^2 - \frac{3}{8}(3c+a)^2 = \frac{5}{8}(3c+a)^2$,

$3c+a \leq \sqrt{\frac{8 \times 32}{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$, 当且仅当 $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}, c = \frac{8\sqrt{5}}{15}$ 时等号成立,

所以 $3AB+BC$ 的最大值为 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

例 8 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $GA \perp GC$, 若 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = 1$, 则 $\tan B$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$



【分析】由已知中的垂直条件想建系设点，角的关系转化为边的关系，利用余弦定理求 $\cos B$.

【解析】建立如图所示直角坐标系（其中 G 是坐标原点），设 $A(0, n)$ ， $C(m, 0)$ ，则

$$B(-m, -n), \text{ 将 } \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = 1 \text{ 切化弦得: } \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} = 1,$$

$$\text{即 } \frac{\cos A \sin C + \cos C \sin A}{\sin A \sin C} = 1, \text{ 故 } \sin A \sin C = \sin B$$

$$\begin{aligned} \text{又由余弦定理得 } \cos B &= \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{(m^2 + 4n^2) + (4m^2 + n^2) - (m^2 + n^2)}{2BA \cdot BC} \\ &= \frac{4(m^2 + n^2)}{2BA \cdot BC} = \frac{2AC^2}{BA \cdot BC} = \frac{2\sin^2 B}{\sin A \cdot \sin C}, \text{ 所以 } \cos B = \frac{2\sin^2 B}{\sin B} = 2\sin B, \text{ 故} \end{aligned}$$

$$\tan B = \frac{1}{2}.$$

【巩固训练】

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， D 是 BC 的中点. 若 $AD \leq \frac{\sqrt{2}}{2} BC$ ，则 $\sin B \sin C$ 的最大值为_____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 为边 BC 上的高， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 E ，已知 $AB = 4$ ，

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{144}{25}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{48}{7}, \text{ 则 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 已知 $\triangle ABC$ 中， AD, BE 分别为 BC, AC 边的中线且 $AD \perp BE$ ，则 $\cos C$ 的最小值为_____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a^2 + c^2 = b^2 - ac$ ，若 $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 边于点 D ， $AD = 2\sqrt{3}$ ， $BD = 1$ ，则 $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点， A 是椭圆上一点， $M(2, 0)$ ，且 AM 平分 $\angle F_1 A F_2$ ，则 $|AF_2| = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC=5$, $AB=12$, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, D 在 BC 上, $CD=\frac{65}{17}$, 则

$$AD=.$$

7. (2021·浙江·14) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=60^\circ$, $AB=2$, M 是 BC 的中点, $AM=2\sqrt{3}$,

$$\text{则 } AC=, \cos \angle MAC=.$$

8. 已知点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 点 D, E, F 分别为 AB, BC, CA 的中点. 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GD}=6$,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{GF}=\frac{3}{2}, \text{ 则 } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GE}=.$$

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且

$$(a-\sqrt{2}b)\sin A=(c+b)(\sin C-\sin B), \text{ 设 } D \text{ 是 } AB \text{ 的中点, 若 } CD=1, \text{ 则 } \triangle ABC \text{ 面积的最}$$

$$\text{大值是}.$$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且有

$$AB+BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}AC, \sin C(\cos A-\sqrt{3})+\cos A\sin A=0, \text{ 若 } \overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}, x, y \in R, \text{ 则}$$

$$x-2y=.$$

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心且满足向量

$$\overrightarrow{BG} \perp \overrightarrow{CG}, \text{ 若 } a \tan A = \lambda c \sin B, \text{ 则实数 } \lambda = ()$$

- A. 3 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案或提示】

1. **【答案】** $\frac{3}{8}$

【解析】 $a^2+bc=b^2+c^2=2AD^2+\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{3}{2}a^2$

$$\Rightarrow bc \leq \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow \sin B \sin C \leq \frac{1}{2} \sin^2 A = \frac{3}{8}.$$

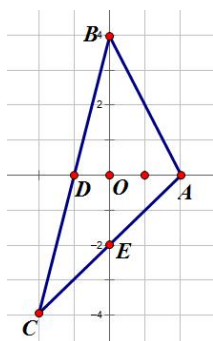
【答案】 -16

3. **【答案】** $\frac{4}{5}$.

【解法一】 如下图建立直角坐标系, 设 $A(a, 0), B(0, b)$ 则 $C(-a, -b)$,

$$\overrightarrow{CA}=(2a, b), \overrightarrow{CB}=(a, 2b), \therefore \cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{4a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+4b^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{4(a^2+b^2)^2}{4a^4+4b^4+17a^2b^2}} = \sqrt{\frac{4a^4+4b^4+8a^2b^2}{4a^4+4b^4+17a^2b^2}} = \sqrt{1 - \frac{9a^2b^2}{4a^4+4b^4+17a^2b^2}} \\
&= \sqrt{1 - \frac{9}{4(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}) + 17}} \in \left[\frac{4}{5}, 1\right), \therefore (\cos C)_{\min} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

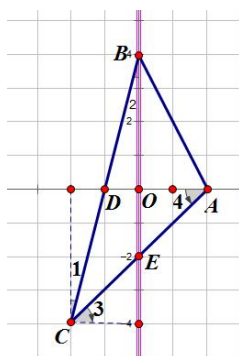


【解法二】如下图，设 $OD = a, OE = b$, 则 $OA = 2a, OB = 2b$,

$$\tan \angle 1 = \tan \angle 2 = \frac{a}{2b}, \tan \angle 3 = \tan \angle 4 = \frac{b}{2a}, \text{要使得 } \cos C \text{ 最小, 只要角 } C \text{ 最大.}$$

$$\therefore \tan(\angle 1 + \angle 3) = \frac{\tan \angle 1 + \tan \angle 3}{1 - (\tan \angle 1) \cdot (\tan \angle 3)} = \frac{\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \frac{4}{3}$$

$$\sin(\angle 1 + \angle 3) \geq \frac{4}{5}, \text{即 } \cos C \geq \frac{4}{5}, \text{所以 } \cos C \text{ 的最小值为 } \frac{4}{5}.$$

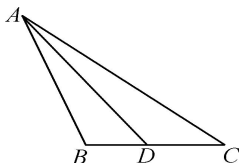


$$\text{【解法三】} \because \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) = 0,$$

$$\frac{5}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AC}^2), \therefore \cos C = \frac{2}{5}\left(\frac{BC}{AC} + \frac{AC}{BC}\right) \geq \frac{4}{5}.$$

点评：解题的切入点很重要“中线”、“垂直”对向量工具的使用是一种强烈的暗示，无疑，法三是我们追求的方法。

4. 【答案】 $\frac{7+3\sqrt{5}}{16}$



【解析】因为 $a^2+c^2=b^2-ac$ ，所以 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{ac}{2ac} = -\frac{1}{2}$.

因为 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{2\pi}{3}$.

如图，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$ ，则 $\sin \angle BAD = \frac{BD \sin B}{AD} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$ ，

所以 $\cos \angle BAC = \cos 2\angle BAD = 1 - 2\sin^2 \angle BAD = 1 - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$ ，所以 $\sin \angle BAC =$

$\sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ，所以 $\cos C = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \angle BAC\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \angle BAC + \sin$

$\frac{\pi}{3} \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{7+3\sqrt{5}}{16}$.

5. 【答案】 $\frac{5}{2}$

6. 【答案】 $\frac{60\sqrt{2}}{17}$

【解析】在 $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 中，由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$, $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$.

又 $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ ，所以有 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{12}{5}$ ，即 $BD = \frac{156}{17}$ ，

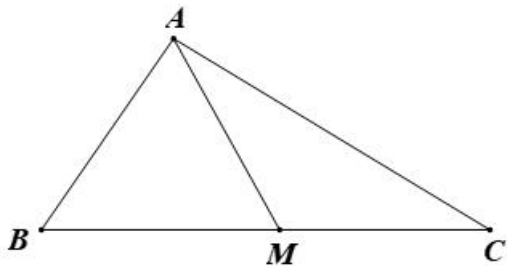
故 $BC = \frac{65}{17} + \frac{156}{17} = 13$.

即 $AC^2 + AB^2 = 144 + 25 = 169 = BC^2$ ，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形且 $A = \frac{\pi}{2}$.

在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理可得 $\frac{CD}{\sin \angle DAC} = \frac{AD}{\sin C}$ ，即 $AD = \frac{12}{13} \times \frac{\frac{65}{17}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{60\sqrt{2}}{17}$.

【答案】 (1). $2\sqrt{13}$ (2). $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

【解析一】由题意作出图形，如图，



在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理得 $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2BM \cdot BA \cdot \cos B$ ，

即 $12 = 4 + BM^2 - 2BM \times 2 \times \frac{1}{2}$ ，解得 $BM = 4$ （负值舍去），

所以 $BC = 2BM = 2CM = 8$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 4 + 64 - 2 \times 2 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52，$$

所以 $AC = 2\sqrt{13}$ ；

在 $\triangle AMC$ 中，由余弦定理得

$$\cos \angle MAC = \frac{AC^2 + AM^2 - MC^2}{2AM \cdot AC} = \frac{52 + 12 - 16}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

故答案为： $2\sqrt{13}$ ； $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ 。

8. 【答案】 $-\frac{9}{2}$

【解析】 $\because \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$ ，

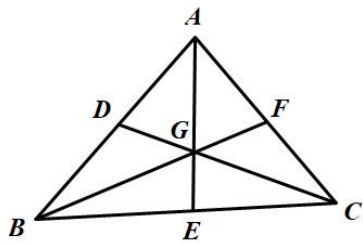
$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \text{ ①},$$

$$\because \overrightarrow{GF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB})，$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC} \cdot \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \text{ ②},$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GE} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2)，$$

$$\text{②} - \text{①} \text{得：} \frac{1}{6}(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = -\frac{9}{2}， \text{所以} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GE} = -\frac{9}{2}。$$



9. 【答案】 $\sqrt{2}-1$

【提示】易求得 $C = \frac{\pi}{4}$ ，由中线长定理得 $2(a^2 + b^2) = c^2 + 4$ ，而 $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$

所以 $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab - 4 = 0$ ， $0 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab - 4 \geq 2ab + \sqrt{2}ab - 4$ ， $ab \leq \frac{4}{2 + \sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$

$S = \frac{1}{2}ab \sin C \leq \sqrt{2} - 1$ （当且仅当 $a = b$ 时，“=”成立）.或求得 $C = \frac{\pi}{4}$ 后，利用“形”易得，

当中线即为高线时，面积最大，下一步求出此时的面积，则更简单.

10. 【答案】 -3 或 $-\frac{43}{33}$

【分析】由边角互化可得 $c + a = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$ ， $c(\cos A - \sqrt{3}) + a \cos A = 0$ ，所以 $2b \cos A = 3c$ ，

即 $b^2 = a^2 + 2c^2$ ，联立解得 $a = c$ ， $b = \sqrt{3}c$ ，或 $a = 5c$ ， $b = 3\sqrt{3}c$.分两种情况将 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

两边分别同乘以向量得方程组，解得结果.

【解析】由正弦定理得 $c(\cos A - \sqrt{3}) + a \cos A = 0$ ，所以 $2b \cos A = 3c$ ，即 $b^2 = a^2 + 2c^2$ ，

由条件得 $c + a = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$ ，联立解得 $a = c$ ， $b = \sqrt{3}c$ ，或 $a = 5c$ ， $b = 3\sqrt{3}c$.

当 $a = c$ ， $b = \sqrt{3}c$ 时， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos A = \frac{3}{2}c^2$ 由 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，得

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB}^2 + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}c^2 = x \cdot c^2 + y \cdot \frac{3}{2}c^2, \text{ 所以 } 2x + 3y = 1. \quad \textcircled{1}$$

同理，由 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC}^2$ ，

$$\text{即 } \frac{1}{2}b^2 = x \cdot \frac{3}{2}c^2 + y \cdot b^2, \text{ 即 } \frac{1}{2}b^2 = x \cdot \frac{1}{2}b^2 + y \cdot b^2, \text{ 所以 } x + 2y = 1. \quad \textcircled{2}$$

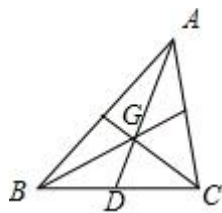
联立①②解得 $x = -1$ ， $y = 1$. 故 $x - 2y = -3$.

当 $a = 5c$ ， $b = 3\sqrt{3}c$ 时，同理可得 $2x + 3y = 1$ ③， $x + 18y = 9$ ④

解得 $x - 2y = -\frac{43}{33}$. 故答案为: -3 或 $-\frac{43}{33}$.

11. 【答案】C

【解析】



如图, 连接 AG , 延长交 BC 于 D ,

由于 G 为重心, 故 D 为中点, $\therefore CG \perp BG, \therefore DG = \frac{1}{2}BC$,

由重心的性质得, $AD = 3DG$, 即 $AD = \frac{3}{2}BC$,

由余弦定理得,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC, \quad AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB,$$

$$\because \angle ADC + \angle BDC = \pi, \quad CD = BD, \therefore AC^2 + AB^2 = 2BD^2 + 2AD^2,$$

$$\therefore AC^2 + AB^2 = \frac{1}{2}BC^2 + \frac{9}{2}BC^2 = 5BC^2,$$

$$\therefore b^2 + c^2 = 5a^2, \text{ 可得: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4a^2}{2bc} = \frac{2a^2}{bc},$$

$$\therefore a \tan A = \lambda c \sin B,$$

$$\therefore \lambda = \frac{a \sin A}{c \sin B \cos A} = \frac{a^2}{bc \cos A} = \frac{a^2}{bc \cdot \frac{2a^2}{bc}} = \frac{1}{2}.$$

故选 C.

专题 29 三角形三内角正切积等于正切和的应用

【方法点拨】

斜三角形 $\triangle ABC$ 中, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

【典型题示例】

例 1 在锐角三角形 ABC 中, $\sin A = 2 \sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值是_____.

【答案】8

【解析】由 $\sin A = \sin(\pi - A) = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, $\sin A = 2 \sin B \sin C$,

可得 $\sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin B \sin C$ (*),

由三角形 ABC 为锐角三角形, 则 $\cos B > 0, \cos C > 0$,

在 (*) 式两侧同时除以 $\cos B \cos C$ 可得 $\tan B + \tan C = 2 \tan B \tan C$,

又 $\tan A = -\tan(\pi - A) = -\tan(B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$ (#),

则 $\tan A \tan B \tan C = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \times \tan B \tan C$,

由 $\tan B + \tan C = 2 \tan B \tan C$ 可得 $\tan A \tan B \tan C = -\frac{2(\tan B \tan C)^2}{1 - \tan B \tan C}$,

令 $\tan B \tan C = t$, 由 A, B, C 为锐角可得 $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$,

由(#)得 $1 - \tan B \tan C < 0$, 解得 $t > 1$

$$\tan A \tan B \tan C = -\frac{2t^2}{1-t} = -\frac{2}{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}},$$

$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, 由 $t > 1$ 则 $0 > \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \geq -\frac{1}{4}$, 因此 $\tan A \tan B \tan C$ 最小值为 8,

当且仅当 $t = 2$ 时取到等号, 此时 $\tan B + \tan C = 4$, $\tan B \tan C = 2$,

解得 $\tan B = 2 + \sqrt{2}, \tan C = 2 - \sqrt{2}, \tan A = 4$ (或 $\tan B, \tan C$ 互换), 此时 A, B, C 均为锐角.

例 2 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{a}{2\cos A} = \frac{b}{3\cos B} = \frac{c}{6\cos C}$, 则 $\cos A \cos B \cos C =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{10}$

【分析】由已知联想到正弦定理, 得到三内角正切间的关系, 求出正切值即可.

【解析】由 $\frac{a}{2\cos A} = \frac{b}{3\cos B} = \frac{c}{6\cos C}$ 及正弦定理得: $\frac{\tan A}{2} = \frac{\tan B}{3} = \frac{\tan C}{6}$

代入 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ 解得 $\tan A = \frac{\sqrt{11}}{3}$, $\tan B = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $\tan C = \sqrt{11}$

所以 $\cos A = \frac{3}{\sqrt{20}}$, $\cos B = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{12}}$

故 $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{10}$.

【巩固训练】

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 依次成等差数列, 则 $\tan A \tan C$ 的值为_____.
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A = 13 \sin B \sin C$, $\cos A = 13 \cos B \cos C$, 则 $\tan A + \tan B + \tan C$ 的值为_____.
3. 设 $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $A + B + C = \pi$, 若 $\sin B = 2 \sin A \sin C$, $\cos B = 2 \cos A \cos C$, 则 $\tan A \tan B \tan C =$ _____.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{a}{2 \cos A} = \frac{b}{3 \cos B} = \frac{c}{5 \cos C}$, 则 $\angle B$ 的大小是 ()
 A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

【答案或提示】

1. 【答案】3

【解析】依题意 $2 \tan B = \tan A + \tan C$, 因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$, 所以 $\tan A \tan B \tan C = 3 \tan B$, 所以 $\tan A \tan C = 3$.

2. 【答案】196

【解析】依题意 $\cos A - \sin A = 13 \cos B \cos C - 13 \sin B \sin C$, 即 $\cos A - \sin A = 13 \cos(B + C)$, 即 $\cos A - \sin A = -13 \cos A$, 所以 $\tan A = 14$, 又易得 $\tan A = \tan B \tan C$, 而 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$, 所以 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan^2 A = 196$.

3. 【答案】

【提示】① $\sin B = 2 \sin A \sin C \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{1}{\tan B} = 2(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C})$,

② $\cos B = 2 \cos A \cos C \Rightarrow \dots \Rightarrow \tan B = 2 \tan A \tan C$,

又由 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ 立得: $\tan A \tan B \tan C = 9$.

4. 【答案】D

【解析】由正弦定理可知, $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, (R 为三角形外接圆半径),

因为 $\frac{a}{2\cos A} = \frac{b}{3\cos B} = \frac{c}{5\cos C}$,

所以 $\frac{\sin A}{2\cos A} = \frac{\sin B}{3\cos B} = \frac{\sin C}{5\cos C}$

且 A, B, C 都为锐角,

所以 $\frac{1}{2}\tan A = \frac{1}{3}\tan B = \frac{1}{5}\tan C$,

所以 $-\tan B = \tan(A+C) = \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C} = \frac{\frac{2\tan B}{3} + \frac{5\tan B}{3}}{1 - \frac{2\tan B}{3} \cdot \frac{5\tan B}{3}}$

整理可得, $\tan^2 B = 3$

故 $\tan B = \sqrt{3}$, $B = \frac{\pi}{3}$.

专题 30 通过缩小参数范围求参数值

【方法点拨】

遇到最值求参, 优先考虑利用“特殊值缩小参数范围”, 这种意识必须牢牢把握, 一般来说都能起到“事半功倍”的作用.

【典型题示例】

例 1 已知实数 $a > 0$, 函数 $f(x) = |x^2 + |x - a| - 3|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值是 2, 则 $a =$ _____.

【答案】3 或 $\frac{5}{4}$

【分析】这是一个含双绝对值问题, 从里至外去绝对值是常规思路, 要想实施分类讨论, 层次较多, 似乎无从下手! 仍然是先利用特殊值缩参, 如取 $x=0$, 则 $f(0) \leq 2$, 即 $|a - 3| \leq 2$, 解得 $1 \leq a \leq 5$, 即有 $f(x) = |x^2 - x + a - 3|$, 去掉一个绝对值啦! 而接下来, 其内函数的对称轴为定直线, 只需再由最值的取得只能在顶点和端点处, 计算得 a 的值, 再检验可得 a 的值, 思路则豁然洞开!

【解析】因为函数 $f(x) = |x^2 + |x - a| - 3|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值是 2,

取 $x=0$, 可得 $f(0) \leq 2$, 又 $a > 0$, 得 $|a - 3| \leq 2$,

解得 $1 \leq a \leq 5$, 即有 $f(x) = |x^2 - x + a - 3|$, $-1 \leq x \leq 1$,

故 $f(x)$ 的最大值在顶点或端点处取得.

当 $f(-1) = 2$, 即 $|a - 1| = 2$, 解得 $a = 3$ 或 -1 (舍去);

当 $f(1) = 2$, 即 $|a - 3| = 2$, 解得 $a = 5$ 或 $a = 1$;

当 $f(\frac{1}{2}) = 2$, 即 $|a - \frac{13}{4}| = 2$, 解得 $a = \frac{5}{4}$ 或 $\frac{21}{4}$ (舍去).

当 $a = 1$ 时, $f(x) = |x^2 - x - 2|$, 因为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} > 2$, 不符合题意; (舍去).

当 $a = 5$ 时, $f(x) = |x^2 - x + 2|$, 因为 $f(-1) = 4 > 2$, 不符合题意; (舍去).

当 $a = 3$ 时, $f(x) = |x^2 - x|$, 显然当 $x = -1$ 时, 取得最大值 2, 符合题意;

当 $a = \frac{5}{4}$ 时, $f(x) = |x^2 - x - \frac{7}{4}|$, $f(1) = \frac{7}{4}$, $f(-1) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$, 符合题

意.

点评:

1. 得出 $f(x)$ 的最大值在顶点或端点处取得后, 也可以直接布列不等式组
$$\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(-1) \geq f(\frac{1}{2}) \\ f(-1) \geq f(1) \end{cases}$$
 等

来解, 但远远不如上述方法简洁, 这里要理解检验的必要性.

2. 遇到最值求参, 优先考虑利用“特殊值缩小参数范围”的意识必须牢牢把握, 切切!!!

例 2 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{x}$ ($m \in \mathbf{R}$) 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值 4, 则 $m =$ _____.

【答案】 $-3e$

【分析】 由 $f'(x) = \frac{x+m}{x^2} = 0$ 得 $x = -m$, 将该极值点 $-m$ 与区间的端点值 $1, e$ 比较, 分 $-m \leq 1$

即 $m \geq -1$, $1 < -m < e$ 即 $-e < m < -1$, 以及 $-m \geq e$ 即 $m \leq -e$ 三类进行讨论, 这是解决该题的常规思路. 解题中, 若能利用特殊值将参数 m 的范围缩小则可达到事半功半之效果. 如利用 $f(1) \geq 4, f(e) \geq 4$, 则可得到 $m \leq -3e$, 而此时 $f'(x) < 0$, 故有

$$f(x)_{\min} = f(e) = 1 - \frac{m}{e} = 4, \text{ 立得 } m = -3e.$$

【解析】 因为 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值 4,

所以至少满足 $f(1) \geq 4, f(e) \geq 4$, 解得 $m \leq -3e$.

又 $f'(x) = \frac{x+m}{x^2}$ 且 $x \in [1, e]$ ，所以 $x+m \leq -2e < 0$ ，即 $f'(x) < 0$ ，

故 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min} = f(e) = 1 - \frac{m}{e} = 4$ ，即 $m = -3e$ 。

所以所求 m 的值为 $m = -3e$ 。

点评：

直接运用最小值通过取特殊值的方法来达到缩小参数的取值范围。

例 3 已知函数 $f(x) = x^2 - 2|x| + 4$ 定义域为 $[a, b]$ ，其中 $a < b$ ，值域 $[3a, 3b]$ ，则满足条件的数组 (a, b) 为_____。

【答案】 $(1, 4)$

【分析】 直接运用函数的最值缩参。

【解析】 因为 $f(x) = x^2 - 2|x| + 4 = (|x| - 1)^2 + 3 \geq 3$

所以 $3a \geq 3$ ，即 $a \geq 1$

故由函数图象知： $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增

$$\text{所以 } \begin{cases} f(a) = 3a \\ f(b) = 3b \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a^2 - 2a + 4 = 3a \\ b^2 - 2b + 4 = 3b \\ a > b \geq 1 \end{cases}, \text{ 解之得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

点评：

已知定义域及对应值域的题型，往往利用函数本身所隐含的值域，将参数的范围缩小，从而避免对参数的讨论。

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域是 $[3m, 3n]$ ，则 $m+n$ 的值为_____。
2. 若函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $\frac{3}{2}$ ，则实数 a 的值为_____。
3. 已知函数 $f(x) = \left| x^2 + mx + \frac{1}{2} \right|$ ($x \in \mathbb{R}$)，且 $y = f(x)$ 在 $x \in [0, 2]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$ ，

若函数 $g(x) = f(x) - a|x|$ 有四个不同的零点, 则实数 a 的取值范围值是_____.

4. 设函数 $f(x) = ax^3 - 3x + 1 (x \in R)$, 若对于任意的 $x \in [-1, 1]$ 都有 $f(x) \geq 0$ 成立, 则实数 a 的值为_____.

5. 已知 $t \in R$, 记函数 $f(x) = |x + \frac{4}{x+2} - t|$ 在 $[-1, 2]$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 则实数 t 的值是_____.

6. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx (a, b \text{ 为常数, 且 } a \neq 0)$ 满足条件: $f(-x+5) = f(x-3)$, 且方程 $f(x) = x$ 有等根, 若 $f(x)$ 的定义域和值域分别是 $[m, n]$ 和 $[3m, 3n]$, 则 $m+n$ 的值为_____.

【答案与提示】

1. 【答案】 -4

【提示】 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x \leq \frac{1}{2}$, 故 $3n \leq \frac{1}{2}$, $n \leq \frac{1}{6}$

故 $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上单调递增,
$$\begin{cases} f(m) = -\frac{1}{2}m^2 + m = 3m \\ f(n) = -\frac{1}{2}n^2 + n = 3n \\ m < n \leq \frac{1}{6} \end{cases}, \text{立得} \begin{cases} m = -4 \\ n = 0 \end{cases}.$$

2. 【答案】 $-\sqrt{e}$

【提示】 由 $f(1) = \ln 1 - a \geq \frac{3}{2}$ 得 $a \leq -\frac{3}{2}$, 所以当 $-e \leq a \leq -\frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = f(a) = \ln a - 1 = \frac{3}{2}$, 此时无解; 当 $a < -e$ 时, $f(x)_{\min} = f(e) = 1 - \frac{a}{e} = \frac{3}{2}$, 解得 $a = -\sqrt{e}$.

3, 【答案】 $(0, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$

【提示】 取区间内特殊值 $x=1$ 、 $x=2$, 夹逼缩得 $m = -2$, 再完全分参即可.

4. 【答案】 4

【解析】 取特值 $x=1, x=-1$ 代人得:

$$f(1) = a - 2 \geq 0 \Rightarrow a \geq 2, \quad f(-1) = -a + 4 \geq 0 \Rightarrow a \leq 4.$$

令 $f'(x) = 3ax^2 - 3 = 0$ 得: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \in [-1, 1]$

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ 处求得极小值, 故 $f(\frac{1}{\sqrt{a}}) = -\frac{2}{\sqrt{a}} + 1 \geq 0 \Rightarrow a \geq 4$,

综上得 $a = 4$.

点评:

$$\text{若取 } x = \frac{1}{2}, x = -1, \text{ 则由 } \begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{8} - \frac{1}{2} \geq 0 \\ f(-1) = -a + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4, \text{ 则更简!}$$

5. 【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】函数 $f(x) = |x + \frac{4}{x+2} - t|$ 在 $[-1, 2]$ 的最大值为 $H(t)$, $-1 \leq x \leq 2$ 时, $x+2 \in [1, 4]$,

由 $x + \frac{4}{x+2} = (x+2) + \frac{4}{x+2} - 2 \geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{4}{x+2}} - 2 = 2$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 取得最小值 2,

当 $-t \geq -2$ 即 $t \leq 2$ 时, $x + \frac{4}{x+2} - t \geq 0$, 函数 $f(x) = x + \frac{4}{x+2} - t$ 在 $(-1, 0)$ 递减, $(0, 2)$ 递增,

且 $f(x)$ 的最大值为 $3 - t$, 由 $3 - t = \frac{1}{2}$, 可得 $t = \frac{5}{2} > 2$ 不成立;

当 $-t < -2$ 即 $t > 2$ 时, $x + \frac{4}{x+2} - t < 0$, 由于 $f(0) = |2 - t|$, $f(-1) = |3 - t|$, $f(2) = |3 - t|$,

且 $f(x)$ 的最大值为区间的端点处取得, 或 $f(0)$ 取得,

当 $-3 < -t < -2$ 即 $2 < t < 3$ 时, $f(x)$ 的最大值 $|2 - t| = \frac{1}{2}$, 解得 $t = \frac{5}{2}$ 满足题意;

当 $-t \leq -3$ 即 $t \geq 3$ 时, $f(x)$ 的最大值大于等于 1, 不满足题意.

综上实数 t 的值为: $\frac{5}{2}$.

6. 【答案】-4

【提示】易求得 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x \leq \frac{1}{2}$, 故 $3n \leq \frac{1}{2}$, $n \leq \frac{1}{6}$

$$\text{故 } f(x) \text{ 在区间 } [m, n] \text{ 上单调递增, } \begin{cases} f(m) = -\frac{1}{2}m^2 + m = 3m \\ f(n) = -\frac{1}{2}n^2 + n = 3n \\ m < n \leq \frac{1}{6} \end{cases}, \text{立得 } \begin{cases} m = -4 \\ n = 0 \end{cases}.$$

专题 31 对数单身狗 指数找朋友

【方法点拨】

对数单身狗（提公因式，让 $\ln x$ 落单），指数找朋友（等价转化，让 e^x 在分母上）：

①在证明或处理含对数函数的不等式时，通常要将对数型的函数“独立分离”出来，这样再对新函数求导时，就不含对数了，只需一次就可以求出它的极值点，从而避免了多次求导. 这种相当于让对数函数“孤军奋战”的变形过程，我们形象的称之为“对数单身狗”。

由 $f(x)\ln x + g(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + \frac{g(x)}{f(x)} > 0$ （这里设 $f(x) > 0$ ），则

$$\left[\ln x + \frac{g(x)}{f(x)} \right]' = \frac{1}{x} + \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right]' \text{ 不含超越函数，求解过程简单.}$$

②在证明或处理含指数函数的不等式时，通常要将指数型的函数“结合”起来，即让指数型的函数乘以或除以一个多项式函数，这样再对新函数求导时，只需一次就可以求出它的极值点，从而避免了多次求导. 这种相当于让指数函数寻找“合作伙伴”的变形过程，我们形象的称之为“指数找朋友”。

由 $e^x + f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{f(x)}{e^x} > 0$ ，则 $\left[1 + \frac{f(x)}{e^x} \right]' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ 是一个多项式函数，变形

后可大大简化运算。

【典型题示例】

例 1 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$ ，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ ，则 a 的取值范围是_____。

【答案】 $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty \right)$

【分析】遇到 $f(x)e^x + g(x)$ 的形式变形为 $e^x \cdot h(x)$ ，其求导后的结果是 $[e^x \cdot h(x)]' = e^x \cdot [h(x) + h'(x)]$ ，其导数方程是多项式形式，所以它的根与指数函数无关，有利于更快捷地解决问题。

【解析】 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 等价于 $(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1)e^{-x} \leq 1$ 。

设函数 $g(x) = (\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1)e^{-x} (x \geq 0)$ ，则

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1 - \frac{3}{2}x^2 + 2ax - 1)e^{-x} = -\frac{1}{2}x[x^2 - (2a+3)x + 4a+2]e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2)e^{-x}. \end{aligned}$$

(i) 若 $2a+1 \leq 0$ ，即 $a \leq -\frac{1}{2}$ ，则当 $x \in (0, 2)$ 时， $g'(x) > 0$ 。所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增，而 $g(0) = 1$ ，故当 $x \in (0, 2)$ 时， $g(x) > 1$ ，不合题意。

(ii) 若 $0 < 2a+1 < 2$ ，即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ ，则当 $x \in (0, 2a+1) \cup (2, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ；当 $x \in (2a+1, 2)$ 时， $g'(x) > 0$ 。所以 $g(x)$ 在 $(0, 2a+1)$ ， $(2, +\infty)$ 单调递减，在 $(2a+1, 2)$ 单调递增。由于 $g(0) = 1$ ，所以 $g(x) \leq 1$ 当且仅当 $g(2) = (7-4a)e^{-2} \leq 1$ ，即 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$ 。

所以当 $\frac{7-e^2}{4} \leq a < \frac{1}{2}$ 时， $g(x) \leq 1$ 。

(iii) 若 $2a+1 \geq 2$ ，即 $a \geq \frac{1}{2}$ ，则 $g(x) \leq (\frac{1}{2}x^3 + x + 1)e^{-x}$ 。

由于 $0 \in [-\frac{7-e^2}{4}, \frac{1}{2})$ ，故由 (ii) 可得 $(\frac{1}{2}x^3 + x + 1)e^{-x} \leq 1$ 。

故当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时， $g(x) \leq 1$ 。

综上， a 的取值范围是 $[\frac{7-e^2}{4}, +\infty)$ 。

点评：

解决形如 $f(x)e^x + g(x)$ 常见结论 $e^x \geq x+1$ （有时甚至 $e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ ），从形的角度看，它揭示了曲线与其切线的位置关系，从数的角度看，它提供了一种将指数型结构转化为多项式型结构的方法，从而顺利突破难点。

例 2 若不等式 $x \ln x \geq a(x-1)$ 对所有 $x \geq 1$ 都成立，则实数 a 的取值范围是_____。

【答案】 $(-\infty, 1]$

【解析】原问题等价于 $\ln x - \frac{a(x-1)}{x} \geq 0$ 对所有 $x \geq 1$ 都成立，

令 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x}$ ， $x \geq 1$ ，则 $f'(x) = \frac{x-a}{x^2}$ 。

(1) 当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) = \frac{x-a}{x^2} \geq 0$ 恒成立, 即 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 因而 $f(x) \geq f(1) =$

0 恒成立;

(2) 当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = a$, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(a) = \ln a - a + 1 < 0$, 不合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

点评:

上述解法优势在于, 将 $\ln x$ 的系数化“1”后, 就可以有效避免求导后再出现对数函数, 避免了隐性零点的出现, 这是解决对数型函数的精华所在.

【巩固训练】

1. 已知 $e^x \geq 1 + ax$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
2. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.
3. 已知 $e^x > x^2 - 2ax + 1$ 对任意的 $x > 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.
4. 已知关于 x 的方程 $x \ln x - a(x^2 - 1) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个实数根, 则实数 a 的取值范围是_____.
5. 已知 $f(x) = e^x - \frac{1}{4}x^2 + ax - a^2$ 的零点不少于两个, 则实数 a 的取值范围是_____.
6. 已知 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.
7. 已知当 $x \geq 1$ 时, $x^2 \ln x - x + 1 \geq m(x-1)^2$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案与提示】

1. 【答案】 $(-\infty, 1]$

【解析】根据常用不等式 $e^x \geq x+1$, 且 $y=x+1$ 与 $y=e^x$ 相切于 $(0,1)$, 又 $y=ax+1$ 也过点 $(0,1)$,

观察图象可知,要使 $e^x \geq 1+ax$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 成立,则 $a \leq 1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

2. 【答案】 $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$

【解析一】 由 $f(x) = e^x - 1 - 2ax$, 又 $e^x \geq x + 1$, 所以 $f(x) = e^x - 1 - 2ax \geq x - 2ax = (1 - 2a)x$,

所以当 $1 - 2a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) \geq 0 (x \geq 0)$, 而 $f(0) = 0$, 于是当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 满足题意; 又

$x \neq 0$ 时, $e^x > x + 1$, 所以可得 $e^{-x} > 1 - x$, 从而当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = e^x - 1 - 2ax \leq e^x - e^x \cdot e^{-x} +$

$2a(e^{-x} - 1) = (1 - e^{-x}) \cdot (e^x - 2a)$, 故当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f(x) < 0$, 而 $f(0) = 0$, 于是当 $x \in$

$(0, \ln 2a)$ 时, $f(x) < 0$, 不合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

【解析二】 因为 $e^x \geq x + 1$, 所以当 $a \leq 0$ 时, $e^x \geq ax^2 + x + 1$ 恒成立, 故只需讨论 $a > 0$ 的情形. 令

$F(x) = e^{-x}(1 + x + ax^2) - 1$, 问题等价于 $F(x) \leq 0$, 由 $F'(x) = e^{-x}[-ax^2 + (2a - 1)x] = 0$ 得 x_1

$$= 0, x_2 = \frac{2a - 1}{a}.$$

② 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $F(x) \leq F(0) = 0$ 恒成立;

② 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 因为 $F(x)$ 在 $[0, x_2]$ 上单调递增, 所以 $F(x_2) \geq F(0) = 0$ 恒成立, 此时 $F(x) \leq 0$ 不

恒成立. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

3. 【答案】 $\left(\frac{2-e}{2}, +\infty\right)$

【提示】 $e^x > x^2 - 2ax + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2ax + 1}{e^x} - 1 < 0$

设 $g(x) = \frac{x^2 - 2ax + 1}{e^x} - 1$, 则 $g'(x) = \frac{-(x-1)(x-2a-1)}{e^x}$

分类讨论, 将导函数的零点、定义域的端点比较, 分 $2a+1 \geq 0$ 、 $0 < 2a+1 < 1$ 、 $2a+1 = 1$ 、 $2a+1 > 1$ 四种情况.

4. 【答案】 $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

5. 【答案】 $(-\infty, -1]$

【提示】 $e^x - \frac{1}{4}x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x}{2} - a\right)^2}{e^x} - 1 = 0$

6. 【答案】 $(0, +\infty)$

【提示】 $(x-2)e^x + a(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(x-2)e^x} - \frac{1}{a} = 0$

7. 【答案】 $(-\infty, \frac{3}{2}]$

【解析】 原不等式等价于 $\ln x - \frac{m(x-1)^2 + (x-1)}{x^2} \geq 0$,

令 $f(x) = \ln x - \frac{m(x-1)^2 + (x-1)}{x^2}$, $x \geq 1$, 则 $f'(x) = \frac{(x-1)[x-(2m-2)]}{x^3}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1$, $x_2 = 2m - 2$.

(1) 当 $2m - 2 \leq 1$ 时, 即 $m \leq \frac{3}{2}$ 时, 对 $x \geq 1$, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(1) = 0$, 满足题意;

(2) 当 $2m - 2 > 1$ 时, 即 $m > \frac{3}{2}$ 时, 对 $x \in (1, 2m - 2)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, 2m - 2)$ 上

单调递减, 所以 $f(2m - 2) < f(1) = 0$, 不合题意;

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, \frac{3}{2}]$.

专题 32 关于指对的两个重要不等式

【方法点拨】

1. 重要不等式:

(1) 对数形式: $x \geq 1 + \ln x (x > 0)$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立.

(2) 指数形式: $e^x \geq x + 1 (x \in \mathbf{R})$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立. 进一步可得到一组不等式链:

$e^x > x + 1 > x > 1 + \ln x (x > 0, \text{ 且 } x \neq 1)$.

2. 树立一个转化的意识, 即“等”与“不等”间的互化, 运用“两边夹逼”的方法, 将不等式转化为等式, 关注等号成立的条件.

【典型题示例】

例 1 (2022 · 江苏扬州中学 · 下学期开学检测) 已知实数 a, b, c 满足 $e^{a+c} + e^{4b-c-1} \leq a + 4b + 1$ (其中 e 为自然对数的底数), 则 $a^2 + b^2$ 的最小值是_____.

【答案】 $\frac{1}{17}$

【解析】根据常见不等式 $e^x \geq x+1$ (当且仅当 $x=0$, 等号成立)

所以 $e^{a+c} \geq a+c+1$ (当且仅当 $a+c=0$, 等号成立)

$e^{4b-c-1} \geq 4b-c$ (当且仅当 $4b-c-1=0$, 等号成立)

所以 $e^{a+c} + e^{4b-c-1} \geq a+4b+1$

又因为 $e^{a+c} + e^{4b-c-1} \leq a+4b+1$

所以 $e^{a+c} + e^{4b-c-1} = a+4b+1$ (当且仅当 $a+c=0$, $4b-c-1=0$ 时成立)

所以 $a^2 + b^2 = c^2 + \frac{(c+1)^2}{16} = \frac{17}{16}c^2 + \frac{1}{8}c + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}(c + \frac{1}{17})^2 + \frac{1}{17} \geq \frac{1}{17}$.

例 2 已知 $a = \frac{1}{101}, b = e^{-\frac{99}{100}}, c = \ln \frac{101}{100}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < a < c$

【答案】B

【分析】由 $e^x > x+1 (x \neq 0)$, 从而得到 $b = e^{-\frac{99}{100}} > -\frac{99}{100} + 1 = \frac{1}{100} > \frac{1}{101} = a$, 由

$\ln x < x-1 (x \neq 1)$, 从而得到 $b > c$ 和 $c > a$, 即可得到答案.

【解析】设 $f(x) = e^x - x - 1$, $f'(x) = e^x - 1$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$. $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数,

$x \in (0, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$, 即 $e^x - x - 1 \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号.

所以 $e^x > x+1 (x \neq 0)$.

故 $b = e^{-\frac{99}{100}} > -\frac{99}{100} + 1 = \frac{1}{100} > \frac{1}{101} = a$, 即 $b > a$.

设 $g(x) = \ln x - x + 1$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 1$. $x \in (0, 1)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数, $x \in (1, +\infty)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$

为减函数.

所以 $g(x) \leq g(1) = 0$, 即 $\ln x - x + 1 \leq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号. 所以 $\ln x < x-1 (x \neq 1)$.

所以 $c = \ln \frac{101}{100} < \frac{101}{100} - 1 = \frac{1}{100}$ ，又因为 $b > \frac{1}{100}$ ，所以 $b > c$

又因为 $-\ln x > -x + 1 (x \neq 1)$ ，所以 $c = \ln \frac{101}{100} = -\ln \frac{100}{101} > -\frac{100}{101} + 1 = \frac{1}{101} = a$ ，即 $c > a$ ，

综上 $b > c > a$ 。故选：B.

例3 若实数 a, b 满足 $2\ln a + \ln(2b) \geq \frac{a^2}{2} + 4b - 2$ ，则 ()

A. $a + b = \sqrt{2} + \frac{1}{4}$

B. $a - 2b = \sqrt{2} - \frac{1}{4}$

C. $a^2 + b > 3$

D. $a^2 - 4b < 1$

【答案】A

【分析】思路一：据果变形，直接使用重要不等式 $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$ ，两边夹逼将不等式转化为等式.

思路二：一边一个变量，构造两个函数，分别求出其最值，夹逼将不等式转化为等式.

【解析一】 $\because 2\ln a + \ln(2b) = \ln a^2 + \ln(2b) = \ln \frac{a^2}{2} + \ln(4b)$

$$\therefore \ln \frac{a^2}{2} + \ln(4b) \geq \frac{a^2}{2} + 4b - 2$$

易知 $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$ ，当且仅当 $x=1$ 时，“=”成立

$$\therefore \frac{a^2}{2} - 1 \geq \ln \frac{a^2}{2}, \quad 4b - 1 \geq \ln(4b) \text{ 当且仅当 } a = \sqrt{2}, \quad b = \frac{1}{4} \text{ 时, “=” 成立}$$

根据不等式性质有 $\frac{a^2}{2} + 4b - 2 \geq \ln \frac{a^2}{2} + \ln(4b)$

$$\text{所以 } \ln \frac{a^2}{2} + \ln(4b) = \frac{a^2}{2} + 4b - 2$$

此时必有 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \frac{1}{4}$ (下略)。

【解析二】 $\because 2\ln a + \ln(2b) \geq \frac{a^2}{2} + 4b - 2$

$$\therefore 2\ln a - \frac{a^2}{2} + \geq 4b - \ln(2b) - 2$$

$$\text{令 } f(a) = 2\ln a - \frac{a^2}{2}, \quad g(b) = 4b - \ln(2b) - 2$$

利用导数知识易求得 $f(a)_{\max} = f(\sqrt{2}) = \ln 2 - 1$ ， $g(b)_{\min} = g(b) = \ln 2 - 1$

所以 $f(a) \leq g(b)$ ，即 $2\ln a + \ln(2b) \leq \frac{a^2}{2} + 4b - 2$

故 $2\ln a + \ln(2b) = \frac{a^2}{2} + 4b - 2$ ，此时 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \frac{1}{4}$ （下略）。

例4 已知 a, b, c, d 都是正数， $e(\ln c + \ln d) \geq cd$ ， $4e^{\sqrt{a+b}-2} \leq (a+b)$ ，则 $\sqrt{ab} + \frac{cd}{c+d}$ 的最大值是_____。

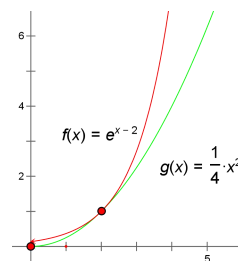
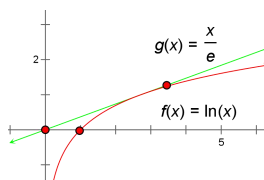
【答案】 $2 + \frac{\sqrt{e}}{2}$

【分析】由 $e(\ln c + \ln d) \geq cd \Leftrightarrow \ln(cd) \geq \frac{cd}{e}$ ，换元令 $cd = t (t > 0)$ ，则 $\ln t \geq \frac{t}{e}$ ，考虑“形”， $\ln t \leq \frac{t}{e}$ 恒成立，夹逼得 $cd = e$ ，同理处置 $4e^{\sqrt{a+b}-2} \leq (a+b)$ ，最后使用基本不等式求解。

【解析】 $e(\ln c + \ln d) \geq cd \Leftrightarrow \ln(cd) \geq \frac{cd}{e}$ ，令 $cd = t (t > 0)$ ，则 $\ln t \geq \frac{t}{e}$

事实上 $\ln t \leq \frac{t}{e}$ （当且仅当 $t = e$ 时，“=”成立），故 $cd = e$ ；

$4e^{\sqrt{a+b}-2} \leq (a+b) \Leftrightarrow e^{\sqrt{a+b}-2} \leq \frac{a+b}{4}$ ，令 $\sqrt{a+b} = u (u > 0)$ ，则 $e^{u-2} \leq \frac{u^2}{4}$



事实上 $e^{u-2} \geq \frac{u^2}{4}$ （当且仅当 $u = 2$ 时，“=”成立），故 $\sqrt{a+b} = 2$ ；

所以 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 2$ ， $\frac{cd}{c+d} \leq \frac{cd}{2\sqrt{cd}} = \frac{\sqrt{cd}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$ （当且仅当 $a = b$ ， $c = d$ 时，“=”成立）

故 $\sqrt{ab} + \frac{cd}{c+d}$ 的最大值是 $2 + \frac{\sqrt{e}}{2}$ 。

【分析】将已知变形为 $e^{a+c} + e^{2b-c-1} \leq [(a+c) + 1] + [(2b-c-1) + 1]$ ，联系重要不等式 $e^x \geq x + 1$ ，夹逼得 $a+c=0, 2b-c+1=0$ 。

【解析】 $\because e^x \geq x+1 \quad \therefore e^{a+c} \geq a+c, \quad e^{2b-c+1} \geq 2b-c+1$

所以 $e^{a+c} + e^{2b-c+1} \geq (a+c) + (2b-c+1) = a+2b+1$

又 $\because e^{a+c} + e^{2b-c+1} \leq a+2b+1 \quad \therefore e^{a+c} + e^{2b-c+1} = a+2b+1$

当且仅当 $a+c=0, 2b-c+1=0$ 时成立

$\therefore a^2 + b^2 = (-c)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}c^2 - \frac{c}{2} + \frac{1}{4}$ ，所以 $[a^2 + b^2]_{\min} = \frac{1}{5}$ 。

3. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【提示】由 $e^{x+y-2} \geq (x+y-2)+1$ ， $e^{x-y-2} \geq (x-y-2)+1$ 得

$e^{x+y-2} + e^{x-y-2} + 2 \geq (x+y-2)+1 + (x-y-2)+1 = 2x \geq 4ax$ ，所以 $a \leq \frac{1}{2}$ 。

4. 【答案】1

【提示】由 $2\ln a = \ln a^2 \leq a^2 - 1$ ， $e^{2b} \geq 2b+1$ 得

$2\ln a - e^{2b} \leq (a^2 - 1) - (2b+1) = a^2 - 2b - 2$ ，而 $2\ln a - e^{2b} \geq a^2 - 2b - 2$

故 $2\ln a - e^{2b} = a^2 - 2b - 2$ ，此时 $a^2 = 1$ ， $2b = 0$ ，所以 $a+2b=1$ 。

5. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】不等式变形为 $e^{x-2y-1} \leq x-2y$ ，引入新函数后，由导数确定函数的单调性与极值，从而确定结论。

【解析】原不等式可化为 $e^{x-2y-1} \leq x-2y$ ，令 $x-2y=t$ ， $t>0$ ，则 $e^{t-1} \leq t$ ，

令 $f(t) = e^{t-1} - t$ ，则 $f'(t) = e^{t-1} - 1$ ，

$0 < t < 1$ 时， $f'(t) < 0$ ， $f(t)$ 递减， $t > 1$ 时， $f'(t) > 0$ ， $f(t)$ 递增，

所以 $f(t)_{\min} = f(1) = 0$ ，对 $t > 0$ 有 $f(t) \geq f(1) = 0$ ，所以 $e^{t-1} \geq t$ 恒成立，

因此，由 $e^{t-1} \leq t$ 得 $e^{t-1} = t$ ，且 $t=1$ 。

$$x-2y=1, \quad \frac{x}{2}-y=\frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

6. 【答案】 $a \leq 1$

【解析】 因为 $xe^x = e^{x+\ln x} \geq \ln x + x + 1$, 当且仅当 $\ln x + x = 0$ 时, “=” 成立

所以不等式 $xe^x - \ln x - ax \geq 1$ 恒成立转化为 $xe^x \geq \ln x + x + 1 \geq \ln x + ax + 1$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 解之得 $a \leq 1$.

7. 【答案】 ACD

【分析】 先根据对称中心求解出 a 的值, 再根据 $f(-1) = 2$ 求解出 b 的值, 由此可求 $f(x)$ 的

解析式; 根据不等式恒成立, 通过分离参数得到 $m \leq \frac{\frac{e^x}{x^e} - x - e - 1}{\ln x + 1}$, 借助不等式 $e^x > x + 1$

得到 $\frac{e^x}{x^e} - x - e - 1 \geq -e \ln x + x + 1$, 由此求解出 m 的范围并判断.

【解析】 由题意可得 $f(-1) = -1 + a - 1 + b = 2$,

因为 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$, 所以 $f''(x) = 6x + 2a$,

所以 $f''(-1) = -6 + 2a = 0$,

解得 $a = 3, b = 1$, 故 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$.

因为 $x > 1$, 所以 $e^x - mx^e(\ln x + 1) \geq [f(x) - x^3 - 3x^2 + e]x^e$ 等价于

$$m \leq \frac{x^{-e}e^x - (x + 1 + e)}{\ln x + 1}.$$

设 $g(x) = e^x - x - 1 (x > 0)$, 则 $g'(x) = e^x - 1 > 0$,

从而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $g(0) = 0$, 所以 $g(x) > 0$, 即 $e^x > x + 1$,

则 $x^{-e}e^x = e^{\ln x^{-e} + x} \geq x - e \ln x + 1$ (当且仅当 $x = e$ 时, 等号成立),

从而 $\frac{x^{-e}e^x - (x + 1 + e)}{\ln x + 1} \geq \frac{-e \ln x - e}{\ln x + 1} = -e$, 故 $m \leq -e$.

故选：ACD

专题 33 与导数相关的极值、最值

【方法点拨】

1. 极值问题转化为(二次)方程根的问题, 为求某个表达式的范围, 其难点在于消元、新元的范围.

2. 利用导数解决函数零点问题的方法:

(1) 直接法: 先对函数求导, 根据导数的方法求出函数的单调区间与极值, 根据函数的基本性质作出图象, 然后将问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题, 突出导数的工具作用, 体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用;

(2) 构造新函数法: 将问题转化为研究两函数图象的交点问题;

(3) 参变量分离法: 由 $f(x)=0$ 分离变量得出 $a=g(x)$, 将问题等价转化为直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象的交点问题.

【典型题示例】

例 1 (2022·全国乙卷·17) 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的极小值点和极大值点. 若 $x_1<x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right)$

【分析】由 x_1, x_2 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$ 的极小值点和极大值点, 可得 $x\in(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $x\in(x_1, x_2)$ 时, $f'(x)>0$, 再分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况讨论, 方程 $2\ln a\cdot a^x-2\mathrm{e}x=0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 即函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=\mathrm{e}x$ 的图象有两个不同的交点, 且满足 $x\in(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$ 时, $\ln a\cdot a^x<\mathrm{e}x$, $x\in(x_1, x_2)$ 时, $\ln a\cdot a^x>\mathrm{e}x$, 求出函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=\mathrm{e}x$ 相切时 a 的值, 结合图象即可得出答案.

【解析】 $f'(x) = 2 \ln a \cdot a^x - 2ex$,

因为 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ 的极小值点和极大值点,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上递减, 在 (x_1, x_2) 上递增,

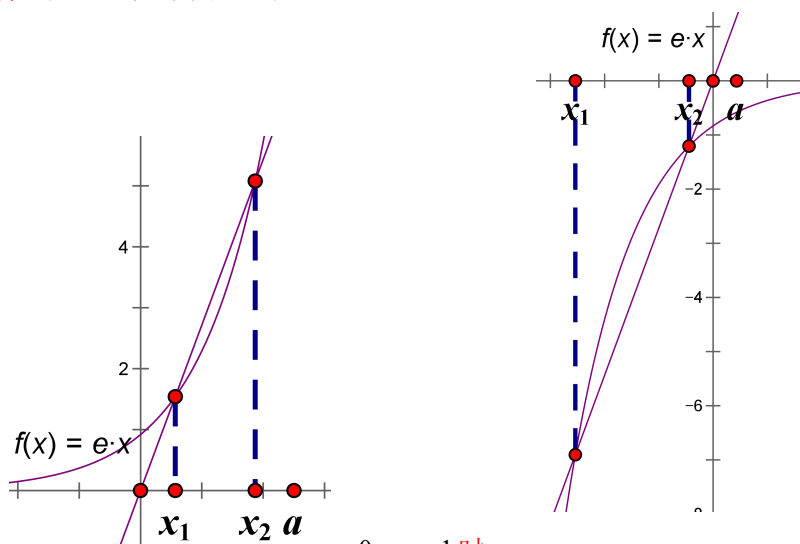
所以当 $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) > 0$,

若 $a > 1$ 时,

当 $x < 0$ 时, $2 \ln a \cdot a^x > 0, 2ex < 0$,

则此时 $f'(x) > 0$, 与前面矛盾,

故 $a > 1$ 不符合题意 (如下图左立知)



若

$0 < a < 1$ 时,

设函数 $y = \ln a \cdot a^x$ 与函数 $y = ex$ 的图象的切点为 (x_0, ex_0) ,

$$\text{则} \begin{cases} \ln^2 a \cdot a^{x_0} = e & \text{①} \\ \ln a \cdot a^{x_0} = ex_0 & \text{②} \end{cases},$$

$$\frac{\text{①}}{\text{②}} \text{得} \ln a = \frac{1}{x_0} \text{即} x_0 \ln a = 1, a^{x_0} = e$$

代入①得 $\ln^2 a = 1$, 解得 $a = e$ (不合题意, 舍去), 或 $a = \frac{1}{e}$

此时, 当 a 增大时, 函数 $y = \ln a \cdot a^x$ 与函数 $y = ex$ 的图象有两个不同的交点 (如上图右),

又 $0 < a < 1$, 所以 $\frac{1}{e} < a < 1$,

综上所述, a 的范围为 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

例 2 已知 $f(x) = (x-1)^2 + a \ln x$ 在 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 上恰有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则

$\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的取值范围为 ()

A. $\left(-3, \frac{1}{2} - \ln 2\right)$

B. $\left(\frac{1}{2} - \ln 2, 1\right)$

C. $\left(-\infty, \frac{1}{2} - \ln 2\right)$

D. $\left(\frac{1}{2} - \ln 2, \frac{3}{4} - \ln 2\right)$

【答案】D

【分析】由题意得导函数在区间 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 有两个零点, 根据二次函数的性质可得 $\frac{3}{8} < a < \frac{1}{2}$,

由根与系数的关系可得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{a}{2} \end{cases}$ 以及 $\frac{1}{2} < x_2 < \frac{3}{4}$, 求出 $\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的表达式, 将 x_1 用 x_2 表

示, 表示为关于 x_2 的函数, 利用导数与单调性的关系即可求出结果.

【解析】由题意得 $f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $2x^2 - 2x + a = 0$,

由题意知 $2x^2 - 2x + a = 0$ 在 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 上有两个根 x_1, x_2 ,

$$\therefore \begin{cases} a > 0, \\ 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{4} + a > 0, \text{ 得 } \frac{3}{8} < a < \frac{1}{2}. \\ \Delta = 4 - 8a > 0 \end{cases}$$

由根与系数的关系得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{a}{2} \end{cases}$, 由求根公式得 $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8a}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2a}}{2}$,

$$\because x_1 < x_2, \therefore x_2 = \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, \therefore \frac{3}{8} < a < \frac{1}{2}, \therefore \frac{1}{2} < x_2 < \frac{3}{4}.$$

则

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1)}{x_2} &= \frac{(x_1-1)^2 + a \ln x_1}{x_2} = \frac{x_2^2 + 2x_1x_2 \ln x_1}{x_2} = x_2 + 2(1-x_2) \ln(1-x_2) \\ &= x_2 - 1 + 2(1-x_2) \ln(1-x_2) + 1 \left(\frac{1}{2} < x_2 < \frac{3}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = 1 - x_2, \text{ 则 } \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}.$$

$$\text{设 } g(t) = -t + 2t \ln t + 1 \left(\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \right), \text{ 则 } g'(t) = 1 + 2 \ln t,$$

易知 $g'(t)$ 在 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

$$\therefore g'(t) = 1 + 2 \ln t < 1 - 2 \ln 2 = \ln \frac{e}{4} < 0,$$

\therefore 当 $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(t)$ 为减函数,

$$\therefore g(t) < -\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} - \ln 2, \text{ 且 } g(t) > -\frac{1}{2} + 2 \times \ln \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \ln 2,$$

$$\therefore \frac{f(x_1)}{x_2} \in \left(\frac{1}{2} - \ln 2, \frac{3}{4} - \ln 2 \right),$$

故选: D.

点评:

1. 根据极值点的概念, 结合根据系数的关系和二次函数的性质得到参数 a 的取值范围,

以及 x_1 与 x_2 之间的关系;

2. 将题意转化为关于 x_2 的函数, 构造出 $t = 1 - x_2$, 利用导数判断单调性.

例 3 已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = x^2 + m \ln x - 2x$, $m \in R$ 的两个极值点, 若 $x_1 < x_2$, 则 $\frac{f(x_1)}{x_2}$

的取值范围为_____.

【答案】 $\left(-\frac{3}{2}-\ln 2, 0\right)$

【分析】先由题得所以 $x_1+x_2=1, x_1 \cdot x_2=\frac{m}{2}$ ，化简得 $\frac{f(x_1)}{x_2}=(1-x_1)+2x_1 \ln x_1-\frac{1}{1-x_1}$ ，

再构造函数 $g(x)=(1-x)+2x \ln x_1-\frac{1}{1-x}(0 < x < \frac{1}{2})$ ，利用导数求函数的值域即得解.

【解析】 $f'(x)=2x+\frac{m}{x}-2=\frac{2x^2-2x+m}{x} \quad (x \in (0, +\infty))$

$\therefore x_1, x_2$ 是函数 $f(x)=x^2+m \ln x-2x$ 的两个极值点

$\therefore x_1, x_2$ 是 $2x^2-2x+m=0$ 两个根，

由韦达定理得 $x_1+x_2=1, x_1x_2=\frac{m}{2}$ ，且 $\Delta=4-8m>0$

故 $m < \frac{1}{2}$ ， $m=2x_1x_2=2x_2(1-x_2)$

所以
$$\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{x_1^2+m \ln x_1-2x_1}{x_2}=\frac{(x_1-1)^2+2x_1x_2 \ln x_1-1}{x_2}$$

$$=(1-x_1)+2x_1 \ln x_1-\frac{1}{1-x_1}$$

令 $g(x)=(1-x)+2x \ln x-\frac{1}{1-x}(0 < x < \frac{1}{2})$ ，

则 $g'(x)=-1+2 \ln x+2-\frac{1}{(x-1)^2}=\ln(ex^2)-\frac{1}{(x-1)^2}$

由 $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < ex^2 < \frac{e}{4} < 1, \therefore \ln(ex^2) < 0$ ，

所以 $g'(x) < 0, \therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递减，

又当 $x \rightarrow 0$ 时， $x \ln x \rightarrow 0$ ， $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\ln \frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}-\ln 2$ ，

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $\left(-\frac{3}{2}-\ln 2, 0\right)$.

即 $\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2}-\ln 2, 0\right)$.

点评：解决以极值为背景的范围问题，关键点有二，一是减元，二是构造函数，最终转化为区间上的最值问题.

例 4 已知函数 $f(x) = ax + \frac{1}{x} + (a-1)\ln x$ ($a \in \mathbb{R}$) 的最小值为 2，则实数 a 的值是 _____.

【答案】 $a=1$ 或 $a=e$

【解析】 $\because f'(x) = a - \frac{1}{x^2} + \frac{a-1}{x} = \frac{(x+1)(ax-1)}{x^2}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数,

\therefore 函数 $f(x)$ 无最小值, 舍去;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得, $x > \frac{1}{a}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增,

\therefore 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{1}{a}) = 1 + a + (1-a)\ln a$,

由 $1 + a + (1-a)\ln a = 2$, 得 $(a-1)(1-\ln a) = 0$,

解得 $a=1$ 或 $a=e$.

【巩固训练】

1. 设函数 $f(x) = ax + \frac{1}{x} + \ln x$ 有两个极值, 实数 a 的取值范围是_____.

2. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - e^x + 1$ 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 两处取得极值, 且 $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$, 则实数 a 的取值范围是_____.

3. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2x + \ln x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 若不等式 $\lambda > f(x_1) + f(x_2)$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是_____.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 2\ln x$ (其中 a 为常数), 设函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 若 $f(x_1) > mx_2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ (其中 a, b 为常数且 $a \neq 0$) 在 $x = 1$ 处取得极值, 若 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上的最大值为 1, 则 a 的值为_____.

6. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + t(\ln x - 2x - \frac{1}{x})$ 恰有两个极值点, 则实数 t 的取值范围是()

- A. $\{\frac{\sqrt{e}}{2}\} \cup (1, +\infty)$ B. $\{\frac{e}{3}\} \cup [1, +\infty)$ C. $\{\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{e}{3}\} \cup [1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

7. (2022·全国乙卷·17 改编) 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极大值点和极小值点. 若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

【答案或提示】

1. 【答案】 $(-\frac{1}{4}, 0)$

【解析】 $\because f'(x) = a - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{ax^2 + x - 1}{x^2},$

若函数 $f(x)$ 有两个极值, 则 $\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{1}{2a} > 0 \\ 1 + 4a > 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{1}{4} < a < 0$,

故 a 的取值范围是 $(-\frac{1}{4}, 0)$.

2. 【答案】 $[\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$

【解析】 \because 函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - e^x + 1$ 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 两处取得极值，且 $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$

\therefore 方程 $f'(x) = ax - e^x = 0$ 有两个根 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ ，且 $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$

考虑函数 $y = ax$ 和 $y = e^x$ 的图象，利用导数，不难得到 $a > e$ 时，方程 $f'(x) = ax - e^x = 0$

有两个根

进一步的，由
$$\begin{cases} ax_1 - e^{x_1} = 0 \\ ax_2 - e^{x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_2}}{x_2}$$

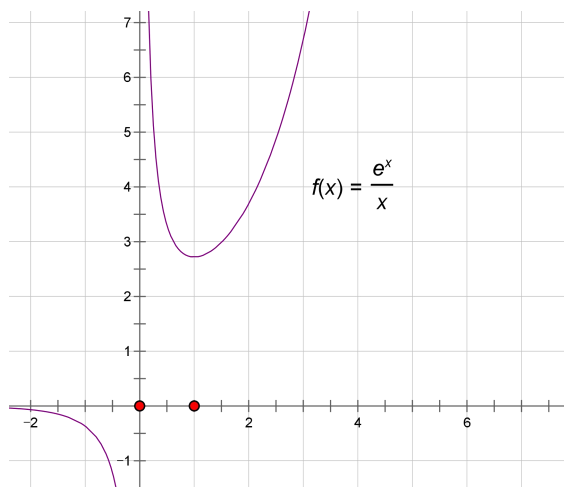
构造函数 $F(x) = \frac{e^x}{x}$ ，可知 $F(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上减，在区间 $[1, +\infty)$ 上增，且

$$x_2 > 1 > x_1 > 0$$

$\therefore \frac{e^{x_2}}{x_2} \geq \frac{e^{2x_1}}{2x_1}$ ，即 $\frac{e^{x_1}}{x_1} \geq \frac{e^{2x_1}}{2x_1}$ ，解之得 $0 < x_1 \leq \ln 2$

$\therefore \frac{e^{x_1}}{x_1} \geq \frac{e^{\ln 2}}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$ ，故 $a = \frac{e^{x_1}}{x_1} \geq \frac{2}{\ln 2}$

综上得：实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ 。



3. 【答案】 $[-3, +\infty)$

【解析】 $f'(x) = 2ax - 2 + \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 2x + 1}{x}$

不难得出： $0 < a < 1$ ， $x_1 + x_2 = \frac{1}{a} > 0$ ， $x_1 x_2 = \frac{1}{2a} > 0$

$$f(x_1) + f(x_2) = -\frac{1}{a} - \ln 2a - 1 \quad (\text{下略}).$$

4. 【答案】 $(-\infty, -3]$

【解析】 $f'(x) = \frac{2x^2 - ax + 2}{x} \quad (x > 0)$ ，

若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，则 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$ 的两个不等正实根，

易知 $a > 4$ 。则 $x_1 + x_2 = \frac{a}{2} > 2$ ， $x_1 x_2 = 1$ ，故 $0 < x_1 < 1 < x_2$ ，

要使 $f(x_1) > mx_2$ 恒成立，只需 $\frac{f(x_1)}{x_2} > m$ 恒成立。

因为 $\frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{x_1^2 - ax_1 + 2 \ln x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 - 2x_1^2 - 2 + 2 \ln x_1}{\frac{1}{x_1}} = -x_1^3 - 2x_1 + 2x_1 \ln x_1$ ，

令 $h(t) = -t^3 - 2t + 2t \ln t \quad (0 < t < 1)$ ，则 $h'(t) = -3t^2 + 2 \ln t$ ，

当 $0 < t < 1$ 时， $h'(t) < 0$ ， $h(t)$ 为减函数，所以 $h(t) > h(1) = -3$ 。

由题意，要使 $f(x_1) > mx_2$ 恒成立，只需满足 $m \leq -3$ 。

所以实数 m 的取值范围 $(-\infty, -3]$ 。

5. 【答案】 $a = \frac{1}{e-2}$ 或 $a = -2$

【解析】 因为 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ ，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + b$ ，

因为函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处取得极值，

所以 $f'(1) = 1 + 2a + b = 0$ ， $b = -2a - 1$

$$f'(x) = \frac{2ax^2 - 2a + 1}{x} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{2ax-1}{x} \cdot \frac{x-1}{x} \quad (x>0),$$

$$\text{令 } f'(x)=0, \text{ 得 } x_1=1, x_2=\frac{1}{2a},$$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 所以 $x_2=\frac{1}{2a} \neq x_1=1$.

①当 $a<0$, 即 $\frac{1}{2a}<0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1, e]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最大值为 $f(1)$, 令 $f(1)=1$, 解得 $a=-2$.

②当 $a>0$, 即 $x_2=\frac{1}{2a}>0$ 时,

若 $\frac{1}{2a}<1$, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$, $[1, e]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2a}, 1\right]$ 上单调递减, 所以最大值可能

$$\text{在 } x=\frac{1}{2a} \text{ 或 } x=e \text{ 处取得, 而 } f\left(\frac{1}{2a}\right) = \ln \frac{1}{2a} + a\left(\frac{1}{2a}\right)^2 - (2a+1) \cdot \frac{1}{2a} = \ln \frac{1}{2a} - \frac{1}{4a} - 1 < 0,$$

$$\text{令 } f(e) = \ln e + ae^2 - (2a+1)e = 1, \text{ 解得 } a = \frac{1}{e-2}.$$

若 $1 < \frac{1}{2a} < e$, $f(x)$ 在区间 $(0,1)$, $\left[\frac{1}{2a}, e\right]$ 上单调递增, 在 $\left[1, \frac{1}{2a}\right]$ 上单调递减,

所以最大值可能在 $x=1$ 或 $x=e$ 处取得,

$$\text{而 } f(1) = \ln 1 + a - (2a+1) < 0,$$

$$\text{令 } f(e) = \ln e + ae^2 - (2a+1)e = 1,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{e-2}, \text{ 与 } 1 < x_2 = \frac{1}{2a} < e \text{ 矛盾.}$$

若 $x_2 = \frac{1}{2a} \geq e$, $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1, e]$ 上单调递减, 所以最大值可能在 $x=$

1 处取得, 而 $f(1) = \ln 1 + a - (2a+1) < 0$, 矛盾.

综上所述, $a = \frac{1}{e-2}$ 或 $a = -2$.

6. 【答案】

【解析】求导得 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2} [e^x - (2x+1)t]$ 有两个零点等价于函数 $\varphi(x) = e^x - (2x+1)t$ 有一个

不等于 1 的零点, 分离参数得 $t = \frac{e^x}{2x+1} = h(x)$,

$$\text{令 } h(x) = \frac{e^x}{2x+1} \quad (x>0), \quad h'(x) = \frac{2x-1}{(2x+1)^2} e^x,$$

$h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 递增, 显然在 $x = \frac{1}{2}$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{e}}{2}$,

作 $h(x)$ 的图象, 并作 $y = t$ 的图象, 注意到 $h(0) = 1$, $h(1) = \frac{e}{3} < 1$,

(原定义域 $x > 0$, 这里为方便讨论, 考虑 $h(0)$),

当 $t = 1$ 时, 直线 $y = t$ 与 $h(x) = \frac{e^x}{2x+1}$ 只有一个交点即 $\varphi(x)$ 只有一个零点 (该零点值大于 1);

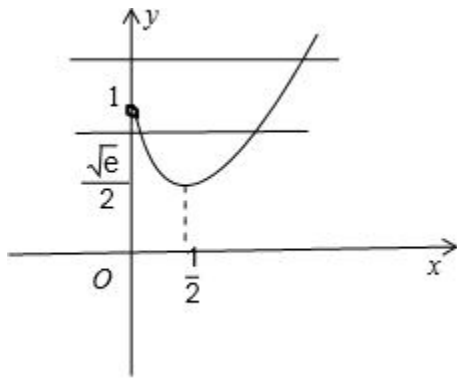
当 $t = \frac{\sqrt{e}}{2}$ 时 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}[e^x - (2x+1)t]$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 两侧附

近同号, $x = \frac{1}{2}$ 不是极值点;

当 $t = \frac{e}{3}$ 时函数 $\varphi(x) = e^x - (2x+1)t$ 有两个不同零点 (其

中一个零点等于 1), 但此时 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}[e^x - (2x+1)t]$

在 $x = 1$ 两侧附近同号, 使得 $x = 1$ 不是极值点不合.



故选: D.

7. 【答案】 $(1, e)$

【提示】方法同例 1.

专题 34 逆用导数的四则运算法则构造函数

【方法点拨】

1. 已知中同时出现关于 $f(x)$ 、 $f'(x)$ 的不等关系, 应考虑“逆用导数的四则运算法则”构造函数.

2. 常见的构造函数:

① 对于 $xf'(x) + f(x) > 0 (< 0)$, 构造 $h(x) = xf'(x)$; 一般的, 对于 $xf'(x) + nf(x) > 0 (< 0)$,

构造 $h(x) = x^n f(x)$.

② 对于 $xf'(x) - f(x) > 0 (< 0)$, 构造 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$; 一般的, 对于 $xf'(x) - nf(x) > 0 (< 0)$,

构造 $h(x) = \frac{f(x)}{x^n}$.

③对于 $f'(x) - f(x) > 0 (< 0)$, 构造 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$; 一般的, 对于 $f'(x) - nf(x) > 0 (< 0)$,

构造 $h(x) = \frac{f(x)}{e^{nx}}$.

④对于 $f'(x) + f(x) > 0 (< 0)$, 构造 $h(x) = e^x f(x)$; 一般的, 对于 $f'(x) + nf(x) > 0 (< 0)$,

构造 $h(x) = e^{nx} f(x)$.

⑤对于 $f'(x) > f(x) \tan x$ (或 $f'(x) < f(x) \tan x$), 即 $f'(x) \cos x - f(x) \sin x > 0 (< 0)$, 构造

$h(x) = f(x) \cos x$.

⑥对于 $f'(x) \cos x + f(x) \sin x > 0 (< 0)$, 构造 $h(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$.

⑦对于 $\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$, 构造 $h(x) = \ln f(x)$.

⑧对于 $f'(x) + \ln a f(x) > 0 (< 0)$, 构造 $h(x) = a^x f(x)$.

⑨对于 $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} > 0 (< 0)$, 构造 $h(x) = f(x) \ln x$.

导数构造不用慌, 遇和为乘差为商, 构得函数莫骄傲, 弄错奇偶白求忙.

【典型题示例】

例 1 已知函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 满足 $f'(x) \cos x + f(x) \sin x > 0$ (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 则下列不等式不成立的是()

A. $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right) < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

B. $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(0) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

D. $f(0) < 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】 A

【解析】 构造 $F(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$ 形式,

$$\text{则 } F'(x) = \frac{f'(x) \cos x + f(x) \sin x}{\cos^2 x},$$

导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) \cos x + f(x) \sin x > 0$,

则 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增.

把选项转化后可知选 A.

例 2 已知 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 且满足 $f(0)=1$, 对任意的 x 总有

$2f'(x)-f(x)>2$, 则不等式 $f(x)+2\geq 3e^{\frac{x}{2}}$ 的解集为_____.

【答案】 $[0, +\infty)$

【分析】 结合已知 “ $2f'(x)-f(x)>2$ ” 及所求 “ $f(x)+2\geq 3e^{\frac{x}{2}}$ ”, 构造新函数

$g(x)=\frac{f(x)+2}{e^{\frac{x}{2}}}$, 利用已知条件 $2f'(x)-f(x)>2$, 可以判断 $g(x)$ 单调递增, 利用 $g(x)$

的单调性即可求出不等式的解集

【解析】 设函数 $g(x)=\frac{f(x)+2}{e^{\frac{x}{2}}}$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot [f(x)+2]}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{2f'(x)-f(x)-2}{2e^{\frac{x}{2}}}$$

又 $\because 2f'(x)-f(x)>2 \quad \therefore g'(x)>0$

所以 $g(x)$ 在 R 上单调递增, 又 $g(0)=f(0)+2=3$

故不等式 $f(x)+2\geq 3e^{\frac{x}{2}}$ 可化为 $g(x)\geq g(0)$

由 $g(x)$ 的单调性可得该不等式的解集为 $[0, +\infty)$.

故答案为: $[0, +\infty)$

例 3 已知偶函数 $f(x)$ ($x \neq 0$) 的导函数为 $f'(x)$, $f(e)=e$, 当 $x>0$ 时,

$xf'(x)-2f(x)>0$, 则使 $f(x-1)>\frac{1}{e}(x-1)^2$ 成立的 x 的取值范围是_____. (其中 e 为自然对数的底数)

【答案】 $(-\infty, 1-e) \cup (1+e, +\infty)$

【分析】 利用 $xf'(x)-2f(x)>0$ 构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, 再使用函数的单调性、奇偶性即可.

【解析】 设 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, 则 $F'(x)=\frac{f'(x)x^2-2xf(x)}{x^4}=\frac{f'(x)x-2f(x)}{x^3}$

$\because x > 0$ 时, $xf'(x) - 2f(x) > 0$

\therefore 当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$, 故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增

又 $f(e) = e$, 所以 $F(e) = \frac{1}{e}$

$\because f(x)$ 是偶函数 $\therefore F(x)$ 也是偶函数, 且 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单减

$f(x-1) > \frac{1}{e}(x-1)^2$ 等价于 $\frac{f(x-1)}{(x-1)^2} > \frac{1}{e}$, 即 $F(x-1) > F(e)$

由 $F(x)$ 是偶函数且 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增

得 $|x-1| > e$, 解之得 $x > e+1$ 或 $x < 1-e$.

例 4 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 对不等式 $2f(x) < xf'(x) < 3f(x)$ 恒成立, 且 $f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则下面正确的是 ()

A. $4 < \frac{f(2)}{f(1)} < 16$; B. $4 < \frac{f(2)}{f(1)} < 8$; C. $3 < \frac{f(2)}{f(1)} < 4$; D. $2 < \frac{f(2)}{f(1)} < 4$.

【答案】B

【解析】 设 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ($x \in (0, +\infty)$), 则 $F'(x) = \frac{f'(x)x^2 - 2xf(x)}{x^4} = \frac{f'(x)x - 2f(x)}{x^3}$

$\because 2f(x) < xf'(x)$

$\therefore F'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增

$\therefore F(2) > F(1)$, 即 $\frac{f(4)}{4} > \frac{f(1)}{1}$, 故 $\frac{f(2)}{f(1)} > 4$.

设 $G(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ ($x \in (0, +\infty)$), 则 $G'(x) = \frac{f'(x)x^3 - 3x^2f(x)}{x^6} = \frac{f'(x)x - 3f(x)}{x^4}$

$\because xf'(x) < 3f(x)$

$\therefore G'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单减

$\therefore G(2) < G(1)$, 即 $\frac{f(2)}{8} < \frac{f(1)}{1}$, 故 $\frac{f(2)}{f(1)} < 8$.

综上得, $4 < \frac{f(2)}{f(1)} < 8$.

例 5 (多选题) 定义域在 R 上函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $2f(x) < f'(x) - 2$,

$f(1) = e^2 - 1$, 则下列正确的是 ()

A. $f(0) > 0$

B. $f(2) > e^4 - 1$

C. $f(2021) - ef(2020) > 2(e-1)$

D. $f(2021) - e^2 f(2020) > e^2 - 1$

【答案】BCD

【分析】根据题意构造函数，利用导数判断单调性，即可求解.

【解析】由题意，构造函数 $g(x) = \frac{f(x)+1}{e^{2x}}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x)-2(f(x)+1)}{e^{2x}}$ ，

由 $2f(x) < f'(x) - 2$ 可知 $g'(x) > 0$ ，

所以 $g(x) = \frac{f(x)+1}{e^{2x}}$ 在 R 上单调递增，且 $g(1) = \frac{f(1)+1}{e^2} = 1$ ，

故 $g(0) < g(1) = 1$ ，即 $f(0)+1 < 1$ ， $f(0) < 0$ ，A 错误；

由 $g(2) > g(1) = 1$ 可得 $f(2) > e^4 - 1$ ，故 B 正确；

当 $x > 1$ 时， $g(x) > g(1) = 1$ ，所以 $\frac{f(x)+1}{e^{2x}} > 1$ ， $f(x) > 0$ ，

所以 $f(x) < 2f(x) < f'(x) - 2$ ， $f'(x) - 2 - f(x) > 0$ ，

令 $h(x) = \frac{f(x)+2}{e^x}$ ， $x > 1$ ，则 $h'(x) = \frac{f'(x)-2-f(x)}{e^x} > 0$ ，

所以 $h(x)$ 单调递增， $h(2021) > h(2020)$ ，即 $\frac{f(2021)+2}{e^{2021}} > \frac{f(2020)+2}{e^{2020}}$ ，

所以 $f(2021) + 2 > ef(2020) + 2e$ ， $f(2021) - ef(2020) > 2(e-1)$ ，

故 C 正确；

由 $g(2021) > g(2020)$ 可得 $f(2021) - e^2 f(2020) > e^2 - 1$ ，故 D 正确；

故选：BCD.

例 6 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的可导函数，且满足 $f(x) + xf'(x) > 0$ ，则不等式 $f(\sqrt{x+1}) > \sqrt{x-1} \cdot f(\sqrt{x^2-1})$ 的解集为_____.

【答案】 $[1, 2)$

【解析】设 $F(x) = xf(x)$ ，

则由 $F'(x) = f(x) + xf'(x) > 0$ ，可得函数 $F(x)$ 是 R 上的增函数.

又 $\sqrt{x+1} > 0$ ，

\therefore 由 $f(\sqrt{x+1}) > \sqrt{x-1} \cdot f(\sqrt{x^2-1})$ 可变形得 $\sqrt{x+1}f(\sqrt{x+1}) > \sqrt{x^2-1}f(\sqrt{x^2-1})$ ，

即 $F(\sqrt{x+1}) > F(\sqrt{x^2-1})$ ， $\therefore \begin{cases} \sqrt{x+1} > \sqrt{x^2-1}, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 解得 $1 \leq x < 2$.

【巩固训练】

1. (多选题) 已知定义在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $f(0)=0$ ，

$f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$ ，则下列判断中正确的是()

A. $f(\frac{\pi}{6}) < \frac{\sqrt{6}}{2} f(\frac{\pi}{4})$

B. $f(\ln \frac{\pi}{3}) > 0$

C. $f(\frac{\pi}{6}) > 2f(\frac{\pi}{3})$

D. $f(\frac{\pi}{4}) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，其导函数为 $f'(x)$ ，且当 $x > 0$ 时， $f'(x) \cdot \ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ ，

则不等式 $(x^2 - 1)f(x) < 0$ 的解集为()

A. $(-1, 1)$

B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

3. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1, +\infty)$ 上的连续函数，且在 $x=0$ 处存在导数，若函数 $f(x)$ 及其导

函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)\ln(x+1) = x - \frac{f(x)}{x+1}$ ，则函数 $f(x)$ ()

A. 既有极大值又有极小值

B. 有极大值，无极小值

C. 有极小值，无极大值

D. 既无极大值也无极小值

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数，且 $f(x) < -xf'(x)$ ，则不等式

$f(x+1) > (x-1)f(x^2-1)$ 的解集是()

A. $(0, 1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, +\infty)$

5. 定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ ，当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $(x-1)f'(x) - f(x) > 0$ 恒成立，

$a = f(2), b = \frac{1}{2}f(3), c = (\sqrt{2}+1)f(\sqrt{2})$ ，则 a, b, c 的大小关系为()

A. $c < a < b$

B. $b < c < a$

C. $a < c < b$

D. $c < b < a$

6. 定义在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$ ， $f'(x)$ 是它的导函数，且恒有 $f'(x) > f(x) \cdot \tan x$ 成

立。则()

A. $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6}) < f(\frac{\pi}{3})$

B. $\sqrt{3} \cdot f(\frac{\pi}{6}) > 2\cos 1 \cdot f(1)$

C. $\sqrt{6}f(\frac{\pi}{6}) > 2f(\frac{\pi}{4})$ D. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{\pi}{3})$

7. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，对任意的 $x \in R$ ，都有 $f'(x) > f(x)$ 成立，则 ()

- A. $3f(\ln 2) > 2f(\ln 3)$ B. $3f(\ln 2) < 2f(\ln 3)$
C. $3f(\ln 2) = 2f(\ln 3)$ D. $3f(\ln 2)$ 与 $2f(\ln 3)$ 的大小不确定

8. 函数 $f(x)$ 的定义域是 R ， $f(0)=2$ ，对任意 $x \in R$ ， $f(x)+f'(x)>1$ ，则不等式 $e^x f(x) > e^x + 1$ 的解集为_____.

9. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ ，设其导函数为 $f'(x)$ ，当 $x \in (-\infty, 0]$ 时，恒有 $xf'(x) < f(-x)$ ，则满足 $\frac{1}{3}(2x-1)f(2x-1) < f(3)$ 的实数 x 的取值范围是_____.

10. 设奇函数 $f(x)$ 定义在 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上其导函数为 $f'(x)$ ，且 $f(\frac{\pi}{2})=0$ ，当 $0 < x < \pi$ 时， $f'(x)\sin x - f(x)\cos x < 0$ ，则关于 x 的不等式 $f(x) < 2f(\frac{\pi}{6})\sin x$ 的解集为_____.

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，记 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，当 $x > 0$ 时，满足 $f'(x) - f(x) > 0$ ，若存在 $x \in R$ ，使不等式 $f[e^x(x^2 - 2x + 2)] \leq f(ae^x + x)$ 成立，则实数 a 的最小值为_____.

12. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) > 0$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，且

$$2f(x) < xf'(x) < 3f(x) \text{ 对 } x \in (0, +\infty) \text{ 恒成立，则 } \frac{f(2)}{f(3)} \text{ 的取值范围是_____}.$$

13. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若 $f(x) < xf'(x) < 2f(x) - x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则下列不等式中，一定成立的是 ()

- A. $\frac{f(2)}{3} + \frac{1}{2} < f(1) < \frac{f(2)}{2}$; B. $\frac{f(2)}{4} + \frac{1}{2} < f(1) < \frac{f(2)}{2}$;
C. $\frac{3f(2)}{8} < f(1) < \frac{f(2)}{3} + \frac{1}{2}$; D. $\frac{f(2)}{4} + \frac{1}{2} < f(1) < \frac{3f(2)}{8}$.

14. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $xf'(x) = x^3 e^x + 2f(x)$ ，若 $f(2)$

$= 4e^2 + 4$ ，则函数 $g(x) = f(x) - 4$ 的零点个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

15. 函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f(-1)=2$ ，对任意 $x \in R$ ， $f'(x) > 2$ ，则 $f(x) > 2x + 4$ 的解集为_____.

16. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 上的可导函数, 其导函数为 $f'(x)$, 且有 $2f(x) + xf'(x) > x^2$, 则不等式 $(x+2020)^2 f(x+2020) - 4f(-2) > 0$ 的解集为_____.

【答案与提示】

1. 【答案】 CD

【分析】 结合已知可构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$, $x \in [0, \frac{1}{2}\pi)$, 结合已知可判断 $g(x)$ 的单调性, 结合单调性及不等式的性质即可判断.

【解答】 令 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$, $x \in [0, \frac{1}{2}\pi)$,

因为 $f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$,

则 $g'(x) = \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x} < 0$,

故 $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}\pi)$ 上单调递减,

因为 $f(0) = 0$, 则 $f(x) < 0$,

结合选项可知, $g(\frac{\pi}{6}) > g(\frac{\pi}{4})$, 从而有 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} > \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, 即 $f(\frac{\pi}{6}) > \frac{\sqrt{6}}{2} f(\frac{\pi}{4})$, 故 A 错误,

因为 $\ln \frac{1}{3}\pi > 0$, 结合 $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}\pi)$ 上单调递减可知 $g(\ln \frac{1}{3}\pi) < 0$, 从而有 $\frac{f(\ln \frac{1}{3}\pi)}{\cos \ln \frac{1}{3}\pi} < 0$,

由 $\cos \ln \frac{1}{3}\pi > 0$ 可得 $f(\ln \frac{1}{3}\pi) < 0$, 故 B 错误;

$g(\frac{\pi}{6}) > g(\frac{1}{3}\pi)$, 从而有 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} > \frac{f(\frac{1}{3}\pi)}{\frac{1}{2}}$, 且 $f(\frac{1}{3}\pi) < 0$, 即 $f(\frac{\pi}{6}) > \sqrt{3}f(\frac{1}{3}\pi) > 2f(\frac{1}{3}\pi)$. 故 C

正确;

$g(\frac{\pi}{4}) > g(\frac{1}{3}\pi)$, 从而有 $\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} > \frac{f(\frac{1}{3}\pi)}{\frac{1}{2}}$ 即 $f(\frac{\pi}{4}) > \sqrt{2}f(\frac{1}{3}\pi)$. 故 D 正确.

故选: CD.

2. 【答案】 B

【解析】令 $g(x) = f(x)\ln x$ ，则 $g'(x) = f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ ，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 时单调递增，又 $g(1) = f(1)\ln 1 = 0$ ，

$\therefore x \in (0, 1)$ 时， $g(x) < 0$ ， $x \in (1, +\infty)$ 时， $g(x) > 0$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $\ln x < 0$ ， $g(x) < 0$ ， $\therefore f(x) > 0$ ，

$x \in (1, +\infty)$ 时， $\ln x > 0$ ， $g(x) > 0$ ， $\therefore f(x) > 0$ ，

$\therefore f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

又 $f(x)$ 是奇函数， $f(0) = 0$ ，

$\therefore f(x) < 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒成立，

① 当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ， $\therefore x^2 - 1 < 0$ ，即 $0 < x < 1$ ，

② 当 $x < 0$ 时， $f(x) < 0$ ， $\therefore x^2 - 1 > 0$ ，即 $x < -1$ ，

由①②得不等式的解集是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ ，

故选：B。

3. 【答案】C

【解析】 \because 函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1, +\infty)$ 上的连续函数， $f'(x) \cdot \ln(x+1) = x - \frac{f(x)}{x+1}$ ，

令 $g(x) = f(x)\ln(x+1)$ ，则 $g'(x) = f'(x) \cdot \ln(x+1) + \frac{f(x)}{x+1} = x$ ， $\therefore g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ (c 为常数)，

\because 函数 $f(x)$ 是连续函数，且在 $x=0$ 处存在导数，

$\therefore g(0) = f(0)\ln 1 = 0$ ， $\therefore c = 0$ ， $\therefore g(x) = \frac{1}{2}x^2$ ，

$\therefore g(x) = f(x)\ln(x+1) = \frac{1}{2}x^2$ ， $\therefore f(x) = \frac{x^2}{2\ln(x+1)}$ ，

$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\ln^2(x+1)} \left[2x\ln(x+1) - \frac{x^2}{x+1} \right] = \frac{x}{2(x+1)\ln^2(x+1)} [2(x+1)\ln(x+1) - x]$ ，

令 $h(x) = 2(x+1)\ln(x+1) - x$, 则 $h'(x) = 2\ln(x+1) + 1$,

令 $h'(x) = 0$, 则 $x = \frac{\sqrt{e} - e}{e}$,

\therefore 当 $-1 < x < \frac{\sqrt{e} - e}{e}$ 时, $h'(x) < 0$, 此时 $h(x)$ 单调递减;

当 $x > \frac{\sqrt{e} - e}{e}$ 时, $h'(x) > 0$, 此时 $h(x)$ 单调递增,

\therefore 当 $x \rightarrow -1$ 时, $h(x) \rightarrow 1 > 0$, $h(\frac{\sqrt{e} - e}{e}) < 0$, $\therefore \exists x_0 \in (-1, \frac{\sqrt{e} - e}{e})$ 使 $h(x_0) = 0$,

又 $h(0) = 0$, \therefore 函数 $h(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 的两个零点, 分别为 x_0 和 0 ,

当 $x > -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = x_0$,

\therefore 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, x_0)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上有极小值, 无极大值.

故选: C .

4. 【答案】D

【解析】构造函数 $[xf(x)]' = f(x) + xf'(x) < 0$, 于是该函数递减,

$f(x+1) > (x-1)f(x^2-1)$ 变形为 $(x+1)f(x+1) > (x^2-1)f(x^2-1)$, 于是

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2-1 > 0 \\ x+1 < x^2-1 \end{cases} \quad , \text{得 } x > 2, \text{选 D.}$$

5. 【答案】A

【解析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x)}{(x-1)^2} > 0$, 即函数 $g(x)$ 单调递增,

则 $a = f(2) = \frac{f(2)}{2-1} = g(2)$, $b = \frac{1}{2}f(3) = \frac{f(3)}{3-1} = g(3)$,

$$c = (\sqrt{2} + 1)f(\sqrt{2}) = \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2} - 1} = g(\sqrt{2})$$

则 $g(\sqrt{2}) < g(2) < g(3)$, 即 $c < a < b$, 选 A.

6. 【答案】A

【解析】由 $f'(x) > f(x)\tan x$ 得 $f'(x)\cos x - f(x)\sin x > 0$,

构造函数 $F(x) = f(x)\cos x$, 则 $F'(x) > 0$, 故 $F(x)$ 单调递增,

有 $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} < f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} = F\left(\frac{\pi}{3}\right)$. 故选 A.

7. 【答案】B

【解析】令 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

因为 $f'(x) > f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) > 0$, 所以在 R 上 $h'(x) > 0$ 恒成立. 即函数 $h(x)$ 在 R 单调递增.

因为 $\ln 3 > \ln 2$,

所以 $h(\ln 3) > h(\ln 2)$

即 $\frac{f(\ln 3)}{e^{\ln 3}} > \frac{f(\ln 2)}{e^{\ln 2}} \Rightarrow \frac{f(\ln 3)}{3} > \frac{f(\ln 2)}{2} \Rightarrow 2f(\ln 3) > 3f(\ln 2)$. 答案选 B.

8. 【答案】 $(0, +\infty)$

【解析】构造函数 $g(x) = e^x \cdot f(x) - e^x$,

因为 $g'(x) = e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) - e^x = e^x[f(x) + f'(x)] - e^x > e^x - e^x = 0$,

所以 $g(x) = e^x \cdot f(x) - e^x$ 为 R 上的增函数. 又因为 $g(0) = e^0 \cdot f(0) - e^0 = 1$, 所以原不等式转化为 $g(x) > g(0)$, 解得 $x > 0$.

9. 【答案】 $(-1, 2)$

10. 【答案】 $(-\frac{\pi}{6}, 0) \cup (\frac{\pi}{6}, \pi)$

【分析】这是一道难度较大的填空题, 它主要考查奇函数的单调性在解不等式中的应用, 奇函数的图象关于坐标原点中心对称, 关于原点对称的区间上具有相同的单调性; 在公共定义域上两个奇函数的积与商是偶函数, 偶函数的图象关于 y 轴轴对称, 关于原点对称的区间上具有相反的单调性, 导数是研究函数单调性的重要工具, 大家知道 $(\frac{f}{g})' =$

$\frac{f'g - fg'}{g^2}$, $(\sin x)' = \cos x$, 于是本题的本质是构造 $\frac{f(x)}{\sin x}$ 来解不等式

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, 则 $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)' = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x}$,

所以当 $0 < x < \pi$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减

又由于在 $(0, \pi)$ 上 $\sin x > 0$, 考虑到 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 所以不等式 $f(x) < 2f(\frac{\pi}{6})\sin x$ 等价于 $\frac{f(x)}{\sin x} <$

$\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\sin \frac{\pi}{6}}$, 即 $g(x) < g(\frac{\pi}{6})$, 所以此时不等式等价于 $\frac{\pi}{6} < x < \pi$.

又因为 $f(x)$ 、 $\sin x$ 为奇函数, 所以 $g(x)$ 是偶函数, 且在 $(-\pi, 0)$ 上 $\sin x < 0$, 所以函数

$g(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 是单调递增函数, 原不等式等价于 $g(x) > g(-\frac{\pi}{6}) = \frac{f(-\frac{\pi}{6})}{\sin(-\frac{\pi}{6})}$, 所以此时不

等式等价于 $-\frac{\pi}{6} < x < 0$,

综上, 原不等式的解集是 $(-\frac{\pi}{6}, 0) \cup (\frac{\pi}{6}, \pi)$.

11. 【答案】 $1 - \frac{1}{e}$

【解析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} (x \geq 0)$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$ (当 $x \geq 0$ 时, 满足 $f'(x) - f(x) > 0$),

从而 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x > 0$ 时, $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} > g(0) = 0$, 从而当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$ (当 $x = 0$ 时取等号),

又当 $x < 0$ 时, $f'(x) - f(x) > 0$, 即 $f'(x) > f(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

由于 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

不等式 $f[e^x(x^2 - 2x + 2)] \leq f(ae^x + x) \Leftrightarrow e^x(x^2 - 2x + 2) \leq ae^x + x \Leftrightarrow a \geq x^2 - 2x + 2 - xe^{-x}$.

令 $h(x) = x^2 - 2x + 2 - xe^{-x}$, 则原问题等价于 $a \geq h(x)$ 有解, 从而 $a \geq h(x)_{\min}$,

$\therefore h'(x) = 2x - 2 - (e^{-x} - xe^{-x}) = (x - 1)(e^{-x} + 2)$,

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单减, 在 $(1, +\infty)$ 上单增,

$$\therefore a \quad h(x)_{\min} = h(1) = 1 - \frac{1}{e},$$

所以 a 的最小值为 $1 - \frac{1}{e}$.

12. 【解析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x^3 - 3x^2 f(x)}{x^6} = \frac{xf'(x) - 3f(x)}{x^4}$,

$$\therefore xf'(x) < 3f(x), \text{ 即 } xf'(x) - 3f(x) < 0,$$

$$\therefore g'(x) < 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 恒成立},$$

即有 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减, 可得

$$g(2) < g(1), \text{ 即 } \frac{f(2)}{8} < \frac{f(1)}{1},$$

$$\text{由 } 2f(x) < 3f(x), \text{ 可得 } f(x) > 0, \text{ 则 } \frac{f(2)}{f(1)} < 8;$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{f(x)}{x^2}, \quad h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x^2 - 2xf(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3},$$

$$\therefore xf'(x) > 2f(x), \text{ 即 } xf'(x) - 2f(x) > 0,$$

$$\therefore h'(x) > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 恒成立},$$

$$\text{即有 } h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 递增, 可得 } h(2) > h(1), \text{ 即 } \frac{f(2)}{4} > \frac{f(1)}{1}, \text{ 则 } \frac{f(2)}{f(1)} > 4.$$

$$\text{即有 } 4 < \frac{f(2)}{f(1)} < 8.$$

13. 【解析】设 $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^2}$, $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{[f'(x) - 1]x^2 - 2x[f(x) - x]}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x) + x}{x^3},$$

$$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2},$$

因为 $f(x) < xf'(x) < 2f(x) - x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $g'(x) < 0$, $h'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{则 } g(1) > g(2), \quad h(1) < h(2),$$

$$\text{即 } \frac{f(1) - 1}{1^2} > \frac{f(2) - 2}{2^2}, \quad \frac{f(1)}{1} < \frac{f(2)}{2}, \text{ 即 } \frac{f(2)}{4} + \frac{1}{2} < f(1) < \frac{f(2)}{2},$$

故选: B.

14. 【答案】 B

【分析】由 $xf'(x) = x^3e^x + 2f(x)$ 的结构特征，逆向使用导数的四则运算法则构造函数，求出 $f(x)$ 的解析式.

【解析】由 $xf'(x) = x^3e^x + 2f(x)$ ，可得 $x^2f'(x) - 2xf(x) = x^4e^x$ ，

则 $\frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = e^x$ ，即 $(\frac{f(x)}{x^2})' = e^x$ ，

设 $\frac{f(x)}{x^2} = e^x + C$ ， $f(x) = x^2(e^x + C)$ ，

又 $f(2) = 4e^2 + 4$ ，所以 $4e^2 + 4 = 4(e^2 + C)$ ，

所以 $C = 1$ ，所以 $f(x) = x^2(e^x + 1)$ ，

所以 $g(x) = f(x) - 4 = x^2(e^x + 1) - 4$ ， $g'(x) = 2x(e^x + 1) + x^2e^x = x(xe^x + 2e^x + 2)$ ，

令 $h(x) = xe^x + 2e^x + 2$ ， $h'(x) = e^x + xe^x + 2e^x = (x+3)e^x$ ，令 $h'(x) = 0$ ，得 $x = -3$ ，

当 $x \in (-\infty, -3)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减，当 $x \in (-3, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(-3) = -e^{-3} + 2 > 0$ ，

则对于 $g'(x) = x(xe^x + 2e^x + 2)$ ，

令 $g'(x) < 0$ ，可得 $x < 0$ ，令 $g'(x) > 0$ ，可得 $x > 0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(0) = -4 < 0$ ，当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $g(x) \rightarrow +\infty$ ，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $g(x) \rightarrow +\infty$ ，

所以函数 $g(x)$ 的零点个数为 2.

故选：B.

点评：

作为选择题，求出 $f(x) = x^2(e^x + 1)$ 后，欲判断零点个数，直接分离函数 $e^x + 1 = \frac{4}{x^2}$ 转化为 $y = e^x + 1$ 与 $y = \frac{4}{x^2}$ 交点的个数，则秒杀！

15. 【答案】 $(-1, +\infty)$

【分析】题目应归结为“解抽象函数型不等式”问题，解决方法是“逆用函数的单调性”.

题目中哪个条件能让你联想到“函数的单调性”呢？注意到已知中 $f'(x) > 2$ ，只需构造

函数 $g(x)$ ，使得 $g'(x) = f'(x) - 2$ ，不难得到 $g(x) = f(x) - 2x + c$ （这里 c 为常数，

本题中取 $c = 0$ ），进而利用 $g(x)$ 的单调性，即可找到解题的突破口.

【解析】构造函数 $g(x) = f(x) - 2x$ ，则 $g'(x) = f'(x) - 2 > 0$ ，故 $g(x)$ 单调递增，且

$$g(-1) = f(-1) - 2 \times (-1) = 4.$$

另一方面所求不等式 $f(x) > 2x + 4$ ，就转化为 $g(x) = f(x) - x > g(-1)$ ，逆用单调性

定义易知 $x > 1$ ，则不等式的解集为 $(-1, +\infty)$.

16. 【答案】 $(-\infty, -2\ 022)$

【解析】由 $2f(x) + xf'(x) > x^2$ ， $x < 0$ ，得 $2xf(x) + x^2 \cdot f'(x) < x^3$ ，即 $[x^2 f(x)]' < x^3 < 0$ ，

令 $F(x) = x^2 f(x)$ ，则当 $x < 0$ 时， $F'(x) < 0$ ，即 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

因为 $F(x + 2\ 020) = (2\ 020 + x)^2 f(x + 2\ 020)$ ， $F(-2) = 4f(-2)$ ，

所以 $F(2\ 020 + x) - F(-2) > 0$ ，即 $F(2\ 020 + x) > F(-2)$.

又 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，所以 $2\ 020 + x < -2$ ，即 $x < -2\ 022$

专题 35 基于切线的恒成立问题

【方法点拨】

1. 利用“形”解决恒成立问题（两个均为曲线），可考虑两曲线在公切点处的取值情况；

2. 解决零点问题的最常见思路是转化为两函数图象交点问题，而求解图象交点个数常常利用相切作为“临界状态”.

【典型题示例】

例 1 （2022·江苏南京市教研室考前指导·21 改编）已知函数 $f(x) = e^x - 2\ln(x+1)$ ，

若 $f(x) \geq ax + 1$ 恒成立，则实数 a 的值为_____.

【答案】 $a = -1$

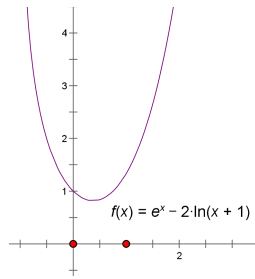
【分析】易发现函数 $f(x)$ 、 $y = ax + 1$ 均恒过点 $(0, 1)$ ，故当且仅当点 $(0, 1)$ 为函数 $f(x)$

的切点时， $f(x) \geq ax + 1$ 恒成立，所以 $a = f'(0) = -1$. 对于“切点型零点”问题往往通过

先猜后证的方式简化思维量、运算量. 构造 $g(x) = e^x - 2\ln(x+1) - ax - 1$ ， $x > -1$ ；则

$$g'(x) = e^x - \frac{2}{x+1} - a, \quad x > -1 \text{ 时, } g'(x) \text{ 在 } (-1, +\infty) \text{ 上为单调增函数, 分别讨论 } a = -1,$$

$a > -1$ ， $a < -1$ 即可.



【解析】令 $g(x) = f(x) - ax - 1$ ，则 $g(x) = e^x - 2\ln(x+1) - ax - 1$ ， $x > -1$ ；

则 $g'(x) = e^x - \frac{2}{x+1} - a$ ， $x > -1$ 时， $g'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为单调增函数

①当 $a = -1$ 时， $g'(x) = e^x - \frac{2}{x+1} + 1 > 0$ ，且 $g'(0) = 0$ ，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上为单调减函数，在区间 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数，

即 $g(x)_{\min} = g(0) = 0$ ，符合题意.

②当 $a < -1$ 时， $g'(x) = e^x - \frac{2}{x+1} - a$ ，所以 $g'(0) = -1 - a > 0$ ，

当 $x \in (-1, 0)$ 时， $g'(x) < 1 - a - \frac{2}{x+1}$ ，

所以 $g'\left(\frac{1+a}{1-a}\right) < 1 - a - \frac{2}{\frac{1+a}{1-a} + 1} = 0$ ，且 $\frac{1+a}{1-a} \in (-1, 0)$ ，

所以存在唯一的 $x_0 \in \left(\frac{1+a}{1-a}, 0\right)$ ，使得 $g'(x_0) = 0$ ，

且 $g(x)$ 在区间 $(-1, x_0)$ 上为单调减函数，在区间 $(x_0, +\infty)$ 上为单调增函数，

所以当 $x \in (x_0, 0)$ 时， $g(x) < g(0) = 0$ ，即 $g(x) \geq 0$ 不恒成立，不合题意.

③当 $a > -1$ 时， $g'(x) = e^x - \frac{2}{x+1} - a$ ，所以 $g'(0) = -1 - a < 0$ ，

当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $g'(x) > e^x - a - 2$ ，所以 $g'(\ln(|a|+2)) > |a| - a \geq 0$ ，

所以存在唯一的 $x_0 \in (0, \ln(2+|a|))$ ，使得 $g(x_0) = 0$ ，

且 $g(x)$ 在区间 $(-1, x_0)$ 上为单调减函数，在区间 $(x_0, +\infty)$ 上为单调增函数，

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时， $g(x) < g(0) = 0$ ，即 $g(x) \geq 0$ 不恒成立，不合题意.

综上， $a = -1$.

例 2 已知 $a > 0$ ，若不等式 $ax^2 + bx - 1 \geq \ln x$ 恒成立，则 $\frac{b}{a}$ 的最小值是_____.

【答案】 $-\frac{1}{e}$

【分析】 问题转化为 $ax^2 + bx \geq \ln x + 1$ ，设 $f(x) = ax^2 + bx$ 、 $g(x) = \ln x + 1$ ，则两函数左右两侧的凸凹性相反，从形上看，若 b ($b < 0$) 固定不变，当 a 变大时，抛物线的开口程度越大，此时 $\frac{b}{a}$ 越小，欲求使 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立时 $\frac{b}{a}$ 的最小值，则两函数图象相切即为“临界状态”；另一方面， $f(x) = x(ax + b)$ ，函数的零点为 $-\frac{b}{a}$ 、 0 ，故 $-\frac{b}{a}$ 的几何意义是函数 $f(x)$ 的一个零点，零点的最大值即 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点运动到最优时，从形上看不能知道，零点即“公切点”时满足题意.

【解析】 设 $f(x) = ax^2 + bx$ 、 $g(x) = \ln x + 1$

则函数 $f(x) = ax^2 + bx$ 的零点 $-\frac{b}{a}$ 即为两函数的“公切点”时满足题意

令 $g(x) = \ln x + 1 = 0$ 得， $x = \frac{1}{e}$ ，

所以 $-\frac{b}{a} = \frac{1}{e}$ ，即 $\frac{b}{a} = -\frac{1}{e}$ ，此即为所求 $\frac{b}{a}$ 的最小值.

【点评】

3. 本题解法的实质是，构造的两函数的零点相同.

4. 本题也可转化为 $ax + b \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 再利用“形”来求解.

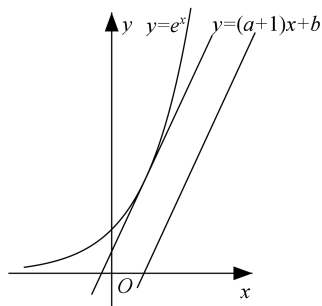
例 3 已知函数 $f(x) = e^x + x^3 - \frac{1}{2}x^2$ ，若对于任意实数 x ，恒有 $f'(x) \geq 3x^2 + ax + b$ ，则 $ab + b$ 的最大值是（ ）.

A. \sqrt{e} ； B. $\frac{\sqrt{e}}{2}$ ； C. $\frac{e}{2}$ ； D. e .

【答案】 C.

【分析】 由 $f'(x) \geq 3x^2 + ax + b$ 得， $e^x + 3x^2 - x \geq 3x^2 + ax + b$ ，即对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，

$e^x \geq (a+1)x + b$ 恒成立，设 $f(x) = e^x$ 、 $g(x) = (a+1)x + b$ ，从“形”上考察，若 b ($b > 0$) 固定不变（即直线的截距），当 $a+1$ 变大（即直线的斜率）时， $(a+1)b = ab + b$ 增大，当 $g(x)$ 与 $f(x)$ 相切时，可使 $ab + b$ 最大.



【解析】由 $f'(x) \geq 3x^2 + ax + b$ 得, $e^x + 3x^2 - x \geq 3x^2 + ax + b$,

即对任意 $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq (a+1)x + b$ 恒成立,

设 $f(x) = e^x$, $g(x) = (a+1)x + b$

则当 $g(x)$ 与 $f(x)$ 相切时, 可使 $ab+b$ 最大.

设切点为 (t, e^t) , 则有
$$\begin{cases} a+1 = e^t \\ b = (1-t)e^t \end{cases}$$

所以 $ab+b = (1-t)e^{2t}$

设 $h(t) = (1-t)e^{2t}$, 易求得 $h(t) = (1-t)e^{2t}$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$

所以 $ab+b$ 的最大值是 $\frac{e}{2}$.

选 C.

例 4 已知 e 为自然对数的底数, 函数 $f(x) = e^x - ax^2$ 的图像恒在直线 $y = \frac{3}{2}ax$ 上方,

则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(-\frac{2}{e}, 0]$

【解析】依题意, 有: $e^x - ax^2 > \frac{3}{2}ax$, 即 $e^x > ax^2 + \frac{3}{2}ax$ 恒成立,

$a=0$ 时显然成立,

$a>0$ 时, 右边为开口向上的抛物线, 不可能恒成立,

所以, 要使不等式恒成立, 需 $a \leq 0$.

当 $a < 0$ 时, 设 $f(x) = ax^2 + \frac{3}{2}ax$, $g(x) = e^x$

易知两函数的凸凹性相反，故只需考虑两函数图象有且仅有一个公共点，即有公切线的“临界状态”时的切点坐标.

设公切点为 (x_0, e^{x_0}) ，则
$$\begin{cases} e^{x_0} = ax_0^2 + \frac{3}{2}ax_0 \\ e^{x_0} = 2ax_0 + \frac{3}{2}a \end{cases}, \text{解之得 } x_0 = -1 \text{ 或 } x_0 = \frac{3}{2} \text{ (舍)}$$

\therefore 切点为 $(-1, e^{-1})$

为使 $f(x) < g(x)$ ，只需 $f(-1) = -\frac{1}{2}a < e^{-1}$ ，故 $a > -\frac{2}{e}$

又 $a < 0$ ，所以 $-\frac{2}{e} < a < 0$.

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\frac{2}{e}, 0]$.

【巩固训练】

1. 设函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ ，若不等式 $f(x) \geq 1 - a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上

恒成立，则 a 的取值范围为()

A. $[0, 1]$

B. $[0, 2]$

C. $[0, e]$

D. $[1, e]$

3. (2021·天津·20 改编) 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = ax - x \cdot e^x$ ，若存在 a ，使得 $f(x) \leq a + b$ 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 成立，则实数 b 的取值范围是_____.

4. 若不等式 $(ax^2 + bx + 1)e^x \leq 1$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，其中 $a, b \in \mathbf{R}$ ， e 为自然对数的底数，则 $a + b$ 的取值范围是_____.

5. (2021·八省联考·22 改编) 已知函数 $f(x) = e^x + \sin x + \cos x$ ，若 $f(x) \geq 2 + ax$ ，则 $a =$ _____.

6. 若存在实数 a, b ，使不等式 $2e \ln x \leq ax + b \leq \frac{1}{2}x^2 + e$ 对一切正数 x 都成立 (其中 e 为自然对数的底数)，则实数 a 的最大值是 ()

A. \sqrt{e}

B. $2e$

C. $2\sqrt{e}$

D. 2

【答案或提示】

1. 【答案】 $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$

【提示】即 $ax^2 \geq 1 + \ln x$ ，相切为下界值. 设切点为 $(x_0, 1 + \ln x_0)$

则有
$$\begin{cases} \ln x_0 + 1 = ax_0^2 \\ 2ax_0 = \frac{1}{x_0} \end{cases}, \text{解得 } a = \frac{e}{2}, \text{故有 } a \geq \frac{e}{2}.$$

2. 【答案】 C.

【提示】分离参数、分类讨论. 当 $x < 1$ 时, $2a \geq \frac{x^2}{x-1}$, 而 $\frac{x^2}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} + 2 \leq 0$,

故 $a \geq 0$ (当 $x = 1$ 时, $a \in \mathbb{R}$); 当 $x < 1$ 时, $a \ln x \leq x$, 利用相切求得 $a \leq e$.

3. 【答案】 $[-e, +\infty)$.

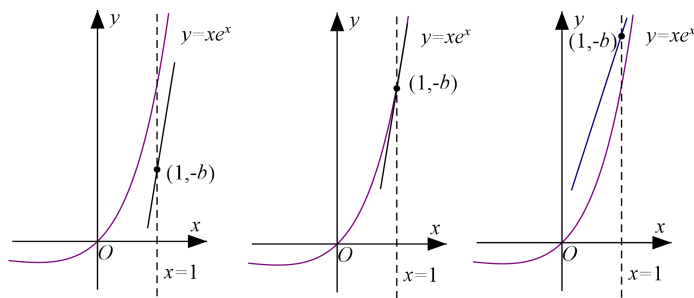
【分析】即存在 a , 使得 $xe^x \geq a(x-1) - b$ 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立

设 $g(x) = xe^x$, $h(x) = a(x-1) - b$

则 $g'(x) = (x+1)e^x$

易知当 $x > -1$ 时, $g'(x) > 0$, 故函数 $g(x) = xe^x$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单增

而函数 $h(x) = a(x-1) - b$ 过 $(1, -b)$, 如下图



欲使存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 只有当 $(1, -b)$ 不在 $g(x) = xe^x$ 在点 $x = 1$ 处的切点上方即可

所以 $-b \leq g(1) = e$, 所以 b 的取值范围为 $[-e, +\infty)$.

4. 【答案】 $(-\infty, -1]$

【分析】思路一: 直接转化为为最值问题;

思路二: 利用“形”, 不等式 $(ax^2 + bx + 1)e^x \leq 1$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 即 $ax^2 + bx + 1 \leq e^{-x}$,

设 $f(x) = ax^2 + bx + 1$, $g(x) = e^{-x}$, 因为 $f(x)$ 恒过点 $(0,1)$, 故只需 $f(x) = ax^2 + bx + 1$

开口朝下, 且在点 $(0,1)$ 与 $g(x) = e^{-x}$ 有相同的公切线即可.

【解析一】令 $f(x) = (ax^2 + bx + 1)e^x$, $f(x) \leq f(0)$ 恒成立, 显然 $a \leq 0$,

$$f'(x) = e^x[ax^2 + (2a+b)x + b+1], \text{ 则 } f'(0) = b+1 = 0 \Rightarrow b = -1,$$

$$f'(x) = e^x[ax^2 + (2a+1)x] = xe^x(ax + 2a - 1),$$

当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增, $(0, +\infty)$ 递减, $f(x) \leq f(0)$ 符合题意,

$a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1-2a}{a})$ 递减, $(\frac{1-2a}{a}, 0)$ 递增, $(0, +\infty)$ 递减

$x < \frac{1-2a}{a}$, $ax^2 - x + 1 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, 故 $f(x) \leq f(0)$ 符合题意,

综上, $a \leq 0$, $b = -1$, 因此 $a+b \in (-\infty, -1]$.

【解析二】不等式 $(ax^2 + bx + 1)e^x \leq 1$ 可化为 $ax^2 + bx + 1 \leq e^{-x}$,

$$\text{令 } f(x) = ax^2 + bx + 1, \quad g(x) = e^{-x}$$

当 $a=0$ 时, 因为 $f(x)$ 恒过点 $(0,1)$, 故只需直线 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 为 $g(x) = e^{-x}$ 在点

$(0,1)$ 处 $g(x) = e^{-x}$ 的切线即可, 易得 $b = -1$, 此时 $a+b = -1$.

当 $a \neq 0$ 时, 因为 $f(x)$ 恒过点 $(0,1)$, 为使 $ax^2 + bx + 1 \leq e^{-x}$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 只需

$f(x) = ax^2 + bx + 1$ 开口朝下, 且在点 $(0,1)$ 与 $g(x) = e^{-x}$ 有相同的公切线即可,

$$\text{故 } \begin{cases} a < 0 \\ f'(0) = b = -1 \end{cases}, \text{ 此时 } a+b \leq -1.$$

综上, $a+b$ 的取值范围是 $a+b \leq -1$.

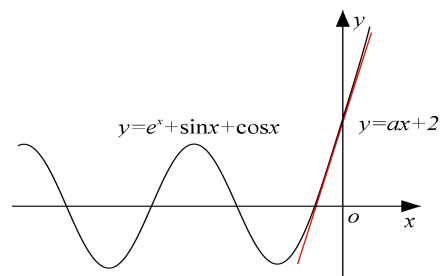
5. 【答案】 $a = 2$.

【分析】考察函数 $f(x) = e^x + \sin x + \cos x$, $g(x) = 2 + ax$

$$\text{易知 } f(0) = g(0) = 2$$

进行大胆的合情推理, 只有当 $(0,2)$ 为切点时, 满足题意

$$\text{所以 } a = f'(0) = (e^x + \cos x - \sin x)_{x=0} = 2.$$



6. 【答案】C

【解析】存在实数 a, b ，使不等式 $2e \ln x \leq ax + b \leq \frac{1}{2}x^2 + e$ 对一切正数 x 都成立，要求 a 的最大值，临界条件即为直线 $y = ax + b$ 恰为函数 $f(x) = 2e \ln x, g(x) = \frac{1}{2}x^2 + e$ 的公切线.

设 $f(x) = 2e \ln x$ 的切点为 $(x_1, y_1) (x_1 > 0)$ ， $f'(x) = \frac{2e}{x}, \therefore a = \frac{2e}{x_1}$.

设 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + e$ 的切点为 $(x_2, y_2) (x_2 > 0)$ ， $g'(x) = x, \therefore a = x_2$,

所以 $a = \frac{2e}{x_1} = x_2, \therefore x_1 x_2 = 2e$.

由题得 $\frac{2e \ln x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - e}{x_1 - x_2} = a = x_2, \therefore 2 \ln x_1 + \frac{2e}{x_1^2} - 3 = 0$.

设 $h(x_1) = 2 \ln x_1 + \frac{2e}{x_1^2} - 3 (x_1 > 0)$,

所以 $h'(x_1) = \frac{2}{x_1} - \frac{4e}{x_1^3} = \frac{2x_1^2 - 4e}{x_1^3}$,

所以函数 $h(x_1) = 2 \ln x_1 + \frac{2e}{x_1^2} - 3$ 在 $(0, 2\sqrt{e})$ 上单调递减，在 $(2\sqrt{e}, +\infty)$ 单调递增.

又 $h(\sqrt{e}) = 2 \ln \sqrt{e} + \frac{2e}{e} - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$,

当 $x_1 \rightarrow +\infty$ 时， $h(x_1) = 2 \ln x_1 + \frac{2e}{x_1^2} - 3 > 0$,

所以方程另外一个零点一定大于 $2\sqrt{e}$.

所以方程小的零点为 \sqrt{e} ,

所以 $a_{\max} = \frac{2e}{\sqrt{e}} = 2\sqrt{e}$.

故选：C.