

树德中学高 2020 级数学月考模拟试题(理科)试题

2022.10

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 全集 $U = \mathbf{R}$ ，且 $A = \{x \mid |x-1| > 2\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$ ，则 $(\complement_U A) \cup B =$ ()

- A. $\{x \mid -1 \leq x < 4\}$ B. $\{x \mid 2 < x < 3\}$
C. $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$ D. $\{x \mid -1 < x < 4\}$

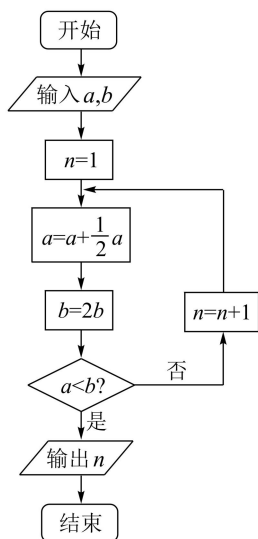
2. 已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 为单位向量，则 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = |\lambda \vec{a} - \vec{b}| (\lambda \neq 0)$ 是 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 下面关于复数 $z = -1 + i$ （其中 i 为虚数单位）的结论正确的是 ()

- A. $\frac{1}{z}$ 对应的点在第一象限 B. $|z| < |z+1|$
C. z 的虚部为 i D. $z + \bar{z} = -2 < 0$

4. 宋元时期，中国数学鼎盛时期中杰出的数学家有“秦〔九韶〕、李〔冶〕、杨〔辉〕、朱〔世杰〕四大家”，朱世杰就是其中之一.他的著作《算学启蒙》中，记载有这样一个“松竹并生”的问题：松长四尺，竹长两尺，松日自半，竹日自倍，松竹何日而长等.如图是源于其思想的一个程序框图.若输入的 a, b 分别为 3, 1，则输出的 $n =$ ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x+y-5 \geq 0 \\ x+2y-7 \leq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \end{cases}$ ，若 $(x-1)^2 + (y-1)^2$ 的最大值为 m ，最小值为 n ，则 $m-n =$ ()

- A. 4 B. $\frac{21}{5}$ C. $\sqrt{5}-1$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

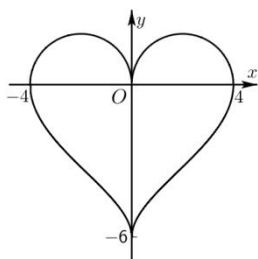
6. 已知变量 y 关于变量 x 的回归方程为 $\hat{y} = b \ln x + 0.24$ ，其一组数据如下表所示：

x	e	e^3	e^4	e^6	e^7
y	1	2	3	4	5

若 $x = e^{10}$ ，则 y 的值大约为（ ）

- A. 4.94 B. 5.74 C. 6.81 D. 8.04

7. 某数学爱好者以函数图像组合如图“爱心”献给在抗疫一线的白衣天使，向他们表达崇高的敬意！爱心轮廓是由曲线 $C_1: y = \sqrt{a|x| - x^2}$ 与 $C_2: y = b\sqrt{c - \sqrt{|x|}}$ 构成，若 $a, \lambda b, c$ 依次成等比数列，则 $\lambda =$ （ ）

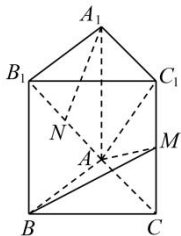


- A. $\pm \frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\pm \frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) + x + 1$ ，若 $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a + b = 2023$ ，则 $f(b - 2025) + f(a + 2) =$ （ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{9}{4}$ D. 4

9. 如图，已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等， M 是侧棱 CC_1 的中点， N 是 AB_1 的中点，则（ ）



- A. $A_1N \parallel C_1A$ B. $A_1N \parallel$ 平面 BAM
C. $AB_1 \perp$ 平面 ABM D. $BM \perp AB_1$

10. 设 $a = \sqrt[3]{10}$ ， $b = 9\sin\frac{1}{10}$ ， $c = \sqrt[5]{3}$ ，则（ ）

- A. $b < a < c$ B. $b < c < a$
C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

11. 平面直角坐标系 xOy 中， $A(2, 0), B(1, \sqrt{3}), C(3, \sqrt{3})$ ，下列说法不正确的是（ ）

- A. 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + (1-x)\overrightarrow{OB} (x \in \mathbb{R})$ ，则 $|\overrightarrow{OP}|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$
B. 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + (1-x-y)\overrightarrow{OC} (x, y, x+y \in [0, 1])$ ，则 $|\overrightarrow{OP}|$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$

C. 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, $|x| + |y| \leq 1$, 则点 P 表示的平面区域的面积为 $4\sqrt{3}$

D. 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, $|x| + |y| + |z| \leq 1, z \geq 0$, 则点 P 表示平面区域的面积为 $8\sqrt{3}$

12. 已知 e 是自然对数的底数. 若 $\exists x \in [1, +\infty)$, 使 $me^{mx} - 6x^5 \ln x \leq 0$, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{6}{e}\right]$ B. $\left[0, \frac{6}{e}\right]$ C. $\left[0, \frac{36}{e^2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{36}{e^2}\right]$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^3 的系数为_____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 点 P 在双曲线上, 若

$|F_1F_2| = 2|OP|$, $|PF_2| = 2|PF_1|$, 则此双曲线的渐近线方程为_____.

15. 在单调递增数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$ 成等比数列, $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ 成等差数列 ($n \in N^*$), 那么 $a_{100} =$ _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 3, \tan A = \frac{4}{3}$, 点 M, N 分别在边 AB, BC 上移动, 且 $MN = BN$, 沿 MN 将 $\triangle BMN$ 折起来得到棱锥 $B-AMNC$, 则该棱锥的体积的最大值是_____.

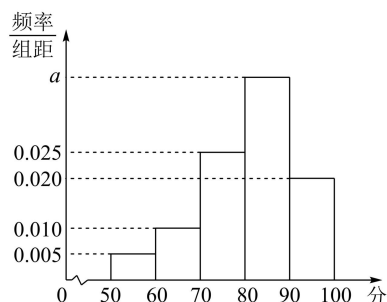
三、解答题: 共 70 分解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

17. 已知: $f(x) = \sqrt{3} \sin(\pi + x) \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \cos^2(\frac{\pi}{2} + x) - \frac{1}{2}$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = 1, a = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. 某花圃为提高某品种花苗质量, 开展技术创新活动, A, B 在实验地分别用甲、乙方法培训该品种花苗. 为观测其生长情况, 分别在实验地随机抽取各 50 株, 对每株进行综合评分, 将每株所得的综合评分制成如图所示的频率分布直方图. 记综合评分为 80 及以上的花苗为优质花苗.



(1) 求图中 a 的值, 并求综合评分的中位数.

(2) 用样本估计总体，以频率作为概率，若在 A, B 两块试验地随机抽取 3 棵花苗，求所抽取的花苗中的优质花苗数的分布列和数学期望；

(3) 填写下面的列联表，并判断是否有 99% 的把握认为优质花苗与培育方法有关。

	优质花苗	非优质花苗	合计
甲培优法	20		
乙培优法		10	
合计			

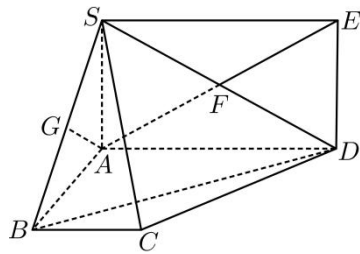
附：下面的临界值表仅供参考。

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$)

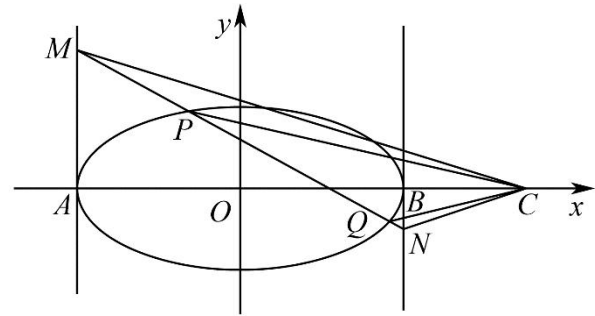
19. 如图，已知 SA 垂直于梯形 $ABCD$ 所在的平面，矩形 $SADE$ 的对角线交于点 F ， G 为 SB 的中点，

$$\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}, \quad SA = AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1.$$



- (1) 求平面 SCD 与平面 ESD 形成的钝二面角的余弦值；
- (2) 在线段 EG 上是否存在一点 H ，使得 BH 与平面 SCD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$ ？若存在，求出 GH 的长；若不存在，说明理由。

20. 如图所示，已知 A, B 两点的坐标分别为 $(-2, 0), (2, 0)$ ，直线 AP, BP 的交点为 P ，且它们的斜率之积 $-\frac{1}{4}$ 。



- (1) 求点 P 的轨迹 E 的方程；

(2) 设点 C 为 x 轴上 (不同于 A, B) 一定点, 若过点 P 的动直线与 E 的交点为 Q , 直线 PQ 与 直线 $x = -2$ 和 直线 $x = 2$ 分别交于 M, N 两点, 当 $\angle ACM = \angle ACN$ 时, 请比较 $\angle ACP$ 与 $\angle ACQ$ 大小并说明理由.

21. 已知函数 $f(x) = xe^x - ax + 1, x \in (-1, +\infty), (a > 0), g(x) = bx - \frac{\ln x}{x}$.

(1) 当 $b = 1$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的最小值, 求 a 的值;

(2) 若 $g(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 x_2 > e$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t + 2\sqrt{2} \\ y = -t + 2\sqrt{2} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半

轴为极轴建立极坐标系, 曲线 F 的极坐标方程为 $\rho = 1$.

(1) 求曲线 F 的直角坐标方程和直线 l 的极坐标方程;

(2) 射线 $\theta = \frac{2\pi}{3} (\rho > 0)$, $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho > 0)$ 和曲线 F 分别交于点 A, B , 与直线 l 分别交于 D, C 两点, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

23. 已知函数 $f(x) = |x + m| + |x - 3|$.

(1) 若 $m = 1$, 求 $f(x) - 5 \leq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq |a^2 - 6| + |x + m| - |x + 1|$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

树德中学高 2020 级数学月考模拟试题(理科)试题 参考答案

2022.10

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 全集 $U = \mathbf{R}$ ，且 $A = \{x \mid |x-1| > 2\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$ ，则 $(\complement_U A) \cup B =$ ()

- A. $\{x \mid -1 \leq x < 4\}$ B. $\{x \mid 2 < x < 3\}$
C. $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$ D. $\{x \mid -1 < x < 4\}$

【答案】A

【解析】

【分析】化简集合 A ，根据集合的补集、并集运算即可.

【详解】全集 $U = \mathbf{R}$ ， $A = \{x \mid |x-1| > 2\} = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 < 0\} = \{x \mid 2 < x < 4\}$ ，

所以 $\complement_U A = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ ，所以 $(\complement_U A) \cup B = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$ ，

故选：A.

2. 已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 为单位向量，则 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = |\lambda \vec{a} - \vec{b}| (\lambda \neq 0)$ 是 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】解：因为向量 \vec{a} 、 \vec{b} 为单位向量，所以 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，

若 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = |\lambda \vec{a} - \vec{b}| (\lambda \neq 0)$ ，则 $(\vec{a} + \lambda \vec{b})^2 = (\lambda \vec{a} - \vec{b})^2$ ，

则 $\vec{a}^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda^2 \vec{b}^2 = \lambda^2 \vec{a}^2 - 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ，即 $|\vec{a}|^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda^2 |\vec{b}|^2 = \lambda^2 |\vec{a}|^2 - 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ ，

即 $4\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，所以 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，故充分性成立，

若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，所以 $\vec{a}^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda^2 \vec{b}^2 = \lambda^2 \vec{a}^2 - 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ，

即 $(\vec{a} + \lambda \vec{b})^2 = (\lambda \vec{a} - \vec{b})^2$ ，所以 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = |\lambda \vec{a} - \vec{b}|$ ， $\lambda \in \mathbf{R}$ ，

所以 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = |\lambda \vec{a} - \vec{b}| (\lambda \neq 0)$ 成立，故必要性成立，

故 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = |\lambda \vec{a} - \vec{b}| (\lambda \neq 0)$ 是 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 充分必要条件；

故选：C

3. 下面关于复数 $z = -1 + i$ （其中 i 为虚数单位）的结论正确的是 ()

- A. $\frac{1}{z}$ 对应的点在第一象限 B. $|z| < |z+1|$
C. z 的虚部为 i D. $z + \bar{z} = -2 < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的有关概念，复数的几何意义，以及复数的加法，除法运算逐个进行判断即可.

【详解】 $\because z = -1 + i$ ，则有：

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ 则 } \frac{1}{z} \text{ 对应的点 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ 在第三象限, 故 A 错误;}$$

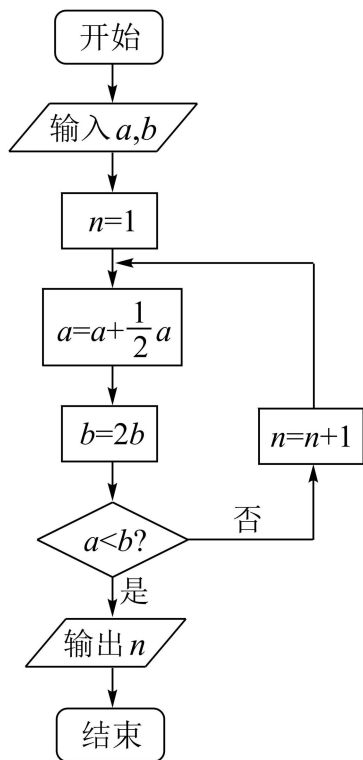
$$z+1 = -i, \text{ 则 } |z| = \sqrt{2}, |z+1| = 1, \text{ 故 B 错误;}$$

z 的虚部为 1, 故 C 错误;

$$\bar{z} = -1-i, \text{ 则 } z + \bar{z} = -2 < 0, \text{ 故 D 正确.}$$

故选：D.

4. 宋元时期，中国数学鼎盛时期中杰出的数学家有“秦〔九韶〕、李〔冶〕、杨〔辉〕、朱〔世杰〕四大家”，朱世杰就是其中之一.他的著作《算学启蒙》中，记载有这样一个“松竹并生”的问题：松长四尺，竹长两尺，松日自半，竹日自倍，松竹何日而长等.如图是源于其思想的一个程序框图.若输入的 a, b 分别为 3, 1，则输出的 $n =$ ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】按流程图逐一执行即可.

【详解】输入的 a, b 分别为 3, 1 时，依次执行程序框图可得：

$$\text{第一次: } a = 3 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{9}{2}, b = 2 \times 1 = 2, a < b \text{ 不成立, } n = 1 + 1 = 2;$$

$$\text{第二次: } a = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{4}, b = 2 \times 2 = 4, a < b \text{ 不成立, } n = 2 + 1 = 3;$$

第三次: $a = \frac{27}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{27}{4} = \frac{81}{8}$, $b = 2 \times 4 = 8$, $a < b$ 不成立, $n = 3 + 1 = 4$;

第四次: $a = \frac{81}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{81}{8} = \frac{243}{16}$, $b = 2 \times 8 = 16$, $a < b$ 成立, 输出 $n = 4$.

故选:C

5. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x + y - 5 \geq 0 \\ x + 2y - 7 \leq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$, 若 $(x-1)^2 + (y-1)^2$ 的最大值为 m , 最小值为 n , 则 $m - n =$ ()

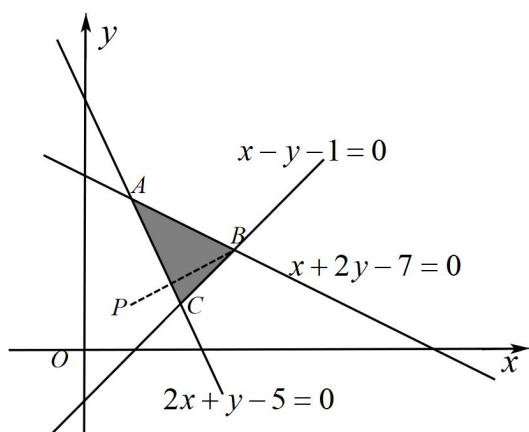
- A. 4 B. $\frac{21}{5}$ C. $\sqrt{5} - 1$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】先作出不等式组表示的平面区域, 求出平面区域顶点的坐标, 再根据 $(x-1)^2 + (y-1)^2$ 的几何意义分别求出 m, n , 即可得到结果.

【详解】作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示:



由 $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$, 可解得: $A(1, 3)$, 同理可求: $B(3, 2), C(2, 1)$.

设 $P(1, 1)$, 则数形结合可知 $m = |PB|^2 = (3-1)^2 + (2-1)^2 = 5$.

$n = (d_{P-AC})^2$ (其中 d_{P-AC} 为点 P 到直线 $2x + y - 5 = 0$ 的距离, $d_{P-AC} = \frac{|2+1-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$),

所以 $n = (d_{P-AC})^2 = \frac{4}{5}$.

所以 $m - n = 5 - \frac{4}{5} = \frac{21}{5}$.

故选: B

6. 已知变量 y 关于变量 x 的回归方程为 $\hat{y} = b \ln x + 0.24$, 其一组数据如下表所示:

x	e	e^3	e^4	e^6	e^7
-----	-----	-------	-------	-------	-------

y	1	2	3	4	5
-----	---	---	---	---	---

若 $x = e^{10}$ ，则 y 的值大约为 ()

A. 4.94

B. 5.74

C. 6.81

D. 8.04

【答案】C

【解析】

【分析】令 $t = \ln x$ ，把 $\hat{y} = b \ln x + 0.24$ 转化为 $\hat{y} = bt + 0.24$ 的线性回归方程，再用线性回归的方法处理即可

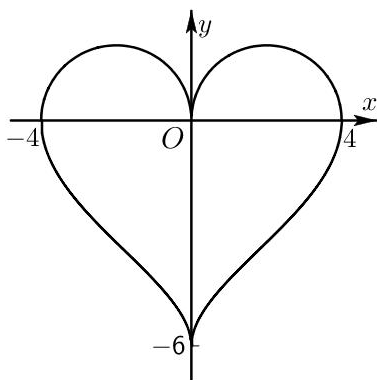
【详解】由 $\hat{y} = b \ln x + 0.24$ ，令 $t = \ln x$ ，则 $\hat{y} = bt + 0.24$ ，由题意， $\bar{t} = \frac{1+3+4+6+7}{5} = 4.2$ ，

$\bar{y} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ，所以 $3 = b \times 4.2 + 0.24$ ，解得 $b = \frac{23}{35}$ ，所以 $\hat{y} = \frac{23}{35} \ln x + 0.24$ ，所以 $x = e^{10}$ ，解得

$\hat{y} \approx 6.81$ 。

故选：C

7. 某数学爱好者以函数图像组合如图“爱心”献给在抗疫一线的白衣天使，向他们表达崇高的敬意！爱心轮廓是由曲线 $C_1: y = \sqrt{a|x| - x^2}$ 与 $C_2: y = b\sqrt{c - \sqrt{|x|}}$ 构成，若 $a, \lambda b, c$ 依次成等比数列，则 $\lambda =$ ()



A. $\pm \frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\pm \frac{3}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】由“爱心”图 C_1 经过点 $(\pm 4, 0)$ ，可求出 a ，再由“爱心”图 C_2 过点 $(\pm 4, 0)$ 与 $(0, -6)$ ，可求出 b, c ，再由 $a, \lambda b, c$ ，依次成等比数列可得 $\lambda^2 = \frac{ac}{b^2}$ 代入即可求出答案。

【详解】解：由“爱心”图知 $C_1: y = \sqrt{a|x| - x^2}$ 经过点 $(\pm 4, 0)$ ，
即 $\sqrt{4a - 16} = 0$ ， $\therefore a = 4$ 。

由“爱心”图知 $C_2: y = b\sqrt{c - \sqrt{|x|}}$ 必过点 $(\pm 4, 0)$ 与 $(0, -6)$ ，

所以 $\begin{cases} b\sqrt{c-2} = 0 \\ b\sqrt{c-0} = -6 \end{cases}$ ，得 $c = 2$ ， $b = -3\sqrt{2}$ ，

若 $a, \lambda b, c$, 依次成等比数列, 则 $\lambda^2 b^2 = ac$,

从而 $\lambda^2 = \frac{ac}{b^2} = \frac{4}{9}$, 所以 $\lambda = \pm \frac{2}{3}$.

故选: A.

8. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{9x^2+1}-3x) + x + 1$, 若 $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b=2023$, 则 $f(b-2025) + f(a+2) = (\quad)$

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $\frac{9}{4}$

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】计算出 $f(x) + f(-x) = 2$, 再根据 $(b-2025) + (a+2) = 0$, 由此可得出结果.

【详解】 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{9x^2+1} > 3|x| \geq 3x$, 则 $\sqrt{9x^2+1} - 3x > 0$ 恒成立,

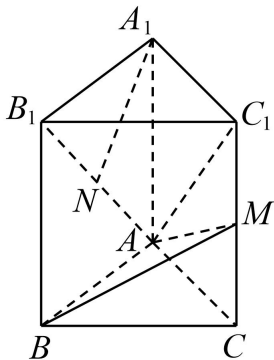
$$\begin{aligned} \text{又因为 } f(x) + f(-x) &= \ln(\sqrt{9x^2+1}-3x) + \ln(\sqrt{9x^2+1}+3x) + x - x + 2 \\ &= \ln(9x^2+1-9x^2) + 2 = 2, \end{aligned}$$

因为 $a+b=2023$, 则 $(b-2025) + (a+2) = 0$,

因此, $f(b-2025) + f(a+2) = 2$.

故选: B

9. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, N 是 AB_1 的中点, 则 (\quad)



A. $A_1N \parallel C_1A$

B. $A_1N \parallel$ 平面 BAM

C. $AB_1 \perp$ 平面 ABM

D. $BM \perp AB_1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据空间中的平行和垂直的判定方法, 结合选项逐一验证.

【详解】因为 A_1N 与 C_1A 异面, 所以 A 项错误;

因为 A_1N 的延长线必过点 B , 所以 B 项错误;

因为 AB_1 与 AB 不垂直, 所以 C 项错误;

【分析】根据向量的线性运算，分别确定点 P 的位置或轨迹，求出最值或面积即可得解.

【详解】对 A，若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + (1-x)\overrightarrow{OB} (x \in \mathbf{R})$ ，则点 P 在直线 AB 上，由于 $\triangle OAB$ 是边长为 2 的等边三角形，故点 O 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{3}$ ，故 A 正确；

对 B，若 $x=0$ ，则 $\overrightarrow{OP} = y\overrightarrow{OB} + (1-y)\overrightarrow{OC}$ ，点 P 是线段 BC 上任意一点；

若 $y=0$ ，则 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + (1-x)\overrightarrow{OC}$ ，点 P 是线段 AC 上任意一点；

若 $x+y=1$ ，则 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ，则点 P 是线段 AB 上任意一点.

若 $x, y, x+y \in (0, 1)$ ，则 $\overrightarrow{OP} = (x+y) \left(\frac{x}{x+y} \overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y} \overrightarrow{OB} \right) + (1-x-y)\overrightarrow{OC}$.

记 $\overrightarrow{OM} = \frac{x}{x+y} \overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y} \overrightarrow{OB}$ ，则点 M 是线段 AB 上任意一点，

$\overrightarrow{OP} = (x+y)\overrightarrow{OM} + (1-x-y)\overrightarrow{OC}$ ，点 P 是线段 CM 上任意一点.

综上，点 P 是 $\triangle ABC$ 内部及边界上任意一点， $|\overrightarrow{OP}|$ 的最大值为 $OC = 2\sqrt{3}$ ，故 B 正确；

对 C，记 $A'(-2, 0), B'(-1, -\sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}, |x| + |y| \leq 1$ ，则点 P 在以 AA' 和 BB' 为对角线的平行四边形内部及边界，其面积为 $S = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, |x| + |y| + z \leq 1, z \geq 0$ ，由选项 B 和 C 知点 P 是五边形 $CAB'A'B$ 内部及边界上一点，其面积为 $4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ，故 D 错误.

故选：D

12. 已知 e 是自然对数的底数. 若 $\exists x \in [1, +\infty)$ ，使 $me^{mx} - 6x^5 \ln x \leq 0$ ，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{6}{e}\right]$ B. $\left[0, \frac{6}{e}\right]$ C. $\left[0, \frac{36}{e^2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{36}{e^2}\right]$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意分类讨论，当 $m \leq 0$ 时显然成立，当 $m > 0$ 时，由原不等式同构函数，利用函数单调性可得 $mx \leq \ln x^6$ ，分离参数后利用导数求最大值即可得解.

【详解】当 $m \leq 0$ 时， $me^{mx} \leq 0, 6x^5 \ln x \geq 0$ ，显然 $me^{mx} - 6x^5 \ln x \leq 0$ 成立，符合题意；

当 $m > 0$ 时，由 $x \geq 1$ ， $me^{mx} - 6x^5 \ln x \leq 0$ ，可得 $mx e^{mx} - 6x^6 \ln x \leq 0$ ，

即 $mx e^{mx} \leq x^6 \ln x^6$ ， $mx e^{mx} \leq \ln x^6 e^{\ln x^6}$ ，

令 $f(x) = x e^x (x \geq 0)$ ， $f'(x) = (x+1)e^x > 0$ ， $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增，

又 $mx > 0, \ln x^6 \geq 0$ ，故 $mx e^{mx} \leq \ln x^6 e^{\ln x^6}$ ，即 $f(mx) \leq f(\ln x^6)$ ，即 $mx \leq \ln x^6$ ， $m \leq \frac{6 \ln x}{x}$ ，即 $\exists x \in [1, +\infty)$

使 $m \leq \frac{6 \ln x}{x}$ 成立，令 $g(x) = \frac{6 \ln x}{x}$ ，则 $g'(x) = \frac{6-6 \ln x}{x^2}$ ，

当 $x \in [1, e)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单减, 故 $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{6}{e}$, 故 $0 < m \leq \frac{6}{e}$;

综上: $m \leq \frac{6}{e}$.

故选: A.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^3 的系数为_____.

【答案】 26

【解析】

【分析】 运用二项展开式的通项公式求 $(1+x)^6$ 展开式中的 x^3 、 x^5 项即可.

【详解】 $(1+x)^6$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_6^r x^r$,

$r=3$ 时, $C_6^3 x^3 = 20x^3$, $r=5$ 时, $C_6^5 x^5 = 6x^5$,

$\therefore \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^3 系数 26.

故答案为: 26.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 点 P 在双曲线上, 若

$|F_1 F_2| = 2|OP|$, $|PF_2| = 2|PF_1|$, 则此双曲线的渐近线方程为_____.

【答案】 $y = \pm 2x$

【解析】

【分析】 由条件 $|F_1 F_2| = 2|OP|$ 可得 $PF_1 \perp PF_2$, 由条件 $|PF_2| = 2|PF_1|$ 结合定义可求 $|PF_1|, |PF_2|$, 由此可得 a, c 的关系, 由此可得 a, b 的关系, 再求双曲线渐近线方程.

【详解】 因为 $|F_1 F_2| = 2|OP|$, 所以 $|OF_1| = |OF_2| = |OP|$,

所以 $\angle PF_1 O = \angle OPF_1$, $\angle PF_2 O = \angle OPF_2$, 又 $\angle PF_1 O + \angle OPF_1 + \angle PF_2 O + \angle OPF_2 = 180^\circ$,

所以 $\angle OPF_1 + \angle OPF_2 = 90^\circ$, 所以 $PF_1 \perp PF_2$,

所以 $PF_1^2 + PF_2^2 = F_1 F_2^2$,

又 $|PF_2| = 2|PF_1|$, $|PF_2| - |PF_1| = 2a$,

所以 $|PF_2| = 4a$, $|PF_1| = 2a$,

所以 $(4a)^2 + (2a)^2 = 4c^2$, 所以 $c^2 = 5a^2$,

因为 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $b^2 = 4a^2$,

所以 $\frac{b}{a} = 2$,

所以双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$,

故答案为: $y = \pm 2x$.

15. 在单调递增数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$ 成等比数列, $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ 成等差数列 ($n \in N^*$), 那么 $a_{100} =$ _____.

【答案】 2550

【解析】

【分析】 根据条件, 推导出 $a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$ 之间的关系, 再计算出通项公式即可.

【详解】 因为数列 $\{a_n\}$ 单调递增, $a_1 = 1$, 故 $a_n > 0$,

由已知条件得 $2a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n+2}$, $a_{2n}^2 = a_{2n-1}a_{2n+1}$ ($n \in N^*$), $a_{2n+2}^2 = a_{2n+1}a_{2n+3}$,

化简可得 $2a_{2n+1} = \sqrt{a_{2n-1}a_{2n+1}} + \sqrt{a_{2n+1}a_{2n+3}}$,

在等式左右两边同时除以 $\sqrt{a_{2n+1}}$, 化简得 $2\sqrt{a_{2n+1}} = \sqrt{a_{2n-1}} + \sqrt{a_{2n+3}}$,

故数列 $\{\sqrt{a_{2n-1}}\}$ ($n \in N^*$) 为等差数列, $a_3 = \frac{a_2^2}{a_1} = 4$,

所以数列 $\{\sqrt{a_{2n-1}}\}$ 的首项为 $\sqrt{a_1} = 1$, 公差为 $\sqrt{a_3} - \sqrt{a_1} = 1$,

故 $\sqrt{a_{2n-1}} = 1 + n - 1 = n$, 即 $a_{2n-1} = n^2$,

因为 $a_{2n}^2 = a_{2n-1}a_{2n+1}$, 可得 $a_{2n} = \sqrt{n^2(n+1)^2} = n(n+1)$,

故当 n 为偶数时, $a_n = \frac{1}{4}n(n+2)$; 当 n 为奇数时, $a_n = \frac{1}{4}(n+1)^2$,

所以 $a_{100} = \frac{1}{4} \times 100 \times 102 = 2550$;

故答案为: 2550.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 3, \tan A = \frac{4}{3}$, 点 M, N 分别在边 AB, BC 上移动, 且 $MN = BN$, 沿 MN 将 $\triangle BMN$

折起来得到棱锥 $B-AMNC$, 则该棱锥的体积的最大值是 _____

【答案】 $\frac{16\sqrt{6}}{15}$ ## $\frac{16}{15}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 由题可得 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 由题可得当平面 $MNB \perp$ 平面 $AMNC$ 时, 棱锥 $B-AMNC$ 的体积最大, 设 $BM = 2x$, 结合条件可得体积的表达式, 然后利用导数求最值即得..

【详解】 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 3, \tan A = \frac{4}{3}$,

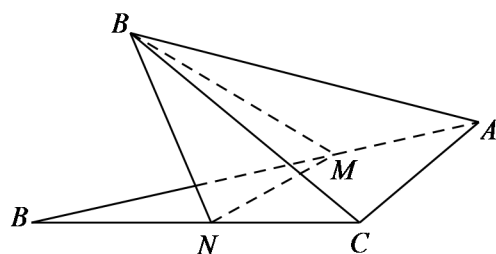
所以 $\cos A = \frac{3}{5}$,

$$\text{由余弦定理得 } CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \frac{3}{5} = 16,$$

$$\therefore BC = 4, \quad AB^2 = BC^2 + AC^2,$$

则 $\triangle ABC$ 是直角三角形, C 为直角,

对 MN 的任何位置, 当平面 $MNB \perp$ 平面 $AMNC$ 时, 此时的点 B 到底面 $AMNC$ 的距离最大, 此时 $\angle NMB$ 即为 MB 与底面 $AMNC$ 所成的角,



设 $BM = 2x$,

$$\text{在 } \triangle MNB \text{ 中, } \tan B = \frac{3}{4}, \quad S_{\triangle MNB} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x \cdot \tan B = \frac{3}{4}x^2, \quad \sin \angle NMB = \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\text{则点 } B \text{ 到底面 } AMNC \text{ 的距离 } h = MB \sin \angle NMB = \frac{6x}{5},$$

所以该棱锥的体积为

$$V_{B-AMNC} = \frac{1}{3}(S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MNB})h = \frac{1}{3}\left(6 - \frac{3}{4}x^2\right) \cdot \frac{6x}{5} = \frac{24x - 3x^3}{10} \left(0 < x \leq \frac{5}{2}\right),$$

$$\text{则 } V'_{B-AMNC} = \frac{-9x^2 + 24}{10} = -\frac{9}{10}\left(x + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right),$$

$$\text{令 } V'_{B-AMNC} = 0, \text{ 解得 } x = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{ 或 } x = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (舍去),}$$

当 x 变化时, V'_{B-AMNC} , V_{B-AMNC} 变化如下:

x	$\left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{2}\right]$
V'_{B-AMNC}	+	0	-
V_{B-AMNC}	\nearrow	极大值	\searrow

故当 $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时, 该棱锥的体积最大, 为 $\frac{16\sqrt{6}}{15}$.

三、解答题: 共 70 分解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

$$17. \text{ 已知: } f(x) = \sqrt{3} \sin(\pi + x) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{2}$$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(A)=1, a=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】(1) $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right], (k \in \mathbb{Z})$; (2) $\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】(1) 首先化简 $f(x)$ 得到 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 通过整体代换求得 $f(x)$ 的单调增区间; (2) 由余弦定理及

基本不等式, 得 $A = \frac{\pi}{3}, bc \leq 4, (S_{\triangle ABC})_{\max} = \sqrt{3}$.

【详解】(1) 因为 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\pi + x) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{2}$,

所以 $f(x) = \sqrt{3}(-\sin x)(-\cos x) + \sin^2 x - \frac{1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 解得 $-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间: $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right], (k \in \mathbb{Z})$;

(2) 因为 $f(A)=1$, 所以 $f(A) = \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$,

在三角形 ABC 中,

利用余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - 4}{2bc} = \frac{1}{2}$,

整理得: $b^2 + c^2 - 4 = bc$,

又因为 $b^2 + c^2 \geq 2bc$,

所以 $b^2 + c^2 - 4 \geq 2bc - 4$, 即 $bc \geq 2bc - 4$,

所以 $bc \leq 4$, 当且仅当 $b=c$ 时等号成立,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} bc$$

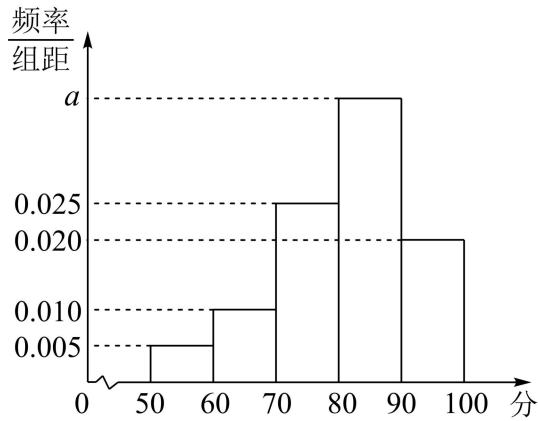
所以 $S_{\triangle ABC} \leq \sqrt{3}$,

当且仅当 $a = b = c = 2$ 时，

$S_{\triangle ABC}$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.

【点睛】解三角形的基本策略：一是利用正弦定理实现“边化角”，二是利用余弦定理实现“角化边”；求三角形面积的最大值也是一种常见类型，主要方法有两类，一是找到边之间的关系，利用基本不等式求最值，二是利用正弦定理，转化为关于某个角的函数，利用函数思想求最值.

18. 某花圃为提高某品种花苗质量，开展技术创新活动， A, B 在实验地分别用甲、乙方法培训该品种花苗. 为观测其生长情况，分别在实验地随机抽取各 50 株，对每株进行综合评分，将每株所得的综合评分制成如图所示的频率分布直方图. 记综合评分为 80 及以上的花苗为优质花苗.



- (1) 求图中 a 的值，并求综合评分的中位数.
- (2) 用样本估计总体，以频率作为概率，若在 A, B 两块试验地随机抽取 3 棵花苗，求所抽 取的花苗中的优质花苗数的分布列和数学期望；
- (3) 填写下面的列联表，并判断是否有 99% 的把握认为优质花苗与培育方法有关.

	优质花苗	非优质花苗	合计
甲培优法	20		
乙培优法		10	
合计			

附：下面的临界值表仅供参考.

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$)

- 【答案】(1) $a = 0.040$; 中位数为 82.5
- (2) 分布列见解析; 期望为 $\frac{9}{5}$
- (3) 填表见解析; 有 90% 的把握认为优质花苗与培育方法有关系.

【解析】

【分析】(1)根据直方图的性质，即可求出 a 以及中位数；

(2)求出每棵优质花苗的概率，并按照二项分布写出 3 棵花苗的分布列，按公式求出数学期望；

(3)根据所给的数据，填写列联表，再进行卡方计算即可.

【小问 1 详解】

由直方图的性质可知： $0.005\times10+0.010\times10+0.025\times10+10a+0.020\times10=1$ ，
 $a=0.040$ ，

令中位数为 x ，则有 $0.020\times10+0.040\times(90-x)=0.5,x=82.5$ ，

故综合评分的中位数为 82.5；

【小问 2 详解】

依题意，优质花苗的频率为 $(0.040+0.020)\times10=0.6$ ，即概率为 0.6，

设所抽取的花苗中优质花苗的棵数为 X ，则 $X\sim B\left(3,\frac{3}{5}\right)$ ，

$$P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125},P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125} ,$$

$$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{54}{125},P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125} ,$$

其分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

$$E(X)=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5} ;$$

【小问 3 详解】

根据第一问，优质花苗的频率为 0.6，样本中优质花苗的数量为 60，

得如下列联表：

	优质花苗	非优质花苗	合计
甲培优法	20	30	50
乙培优法	40	10	50
合计	60	40	100

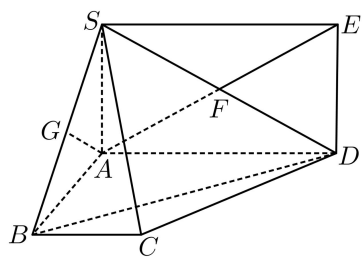
$$K^2=\frac{100\times(20\times10-30\times40)^2}{60\times40\times50\times50}=16.667>6.635 ,$$

有 90%得到把握任务优质花苗与培育方法有关；

综上, $a=0.040$, 中位数为 82.5, 数学期望为 $\frac{9}{5}$, 有 90% 的把握任务优质花苗与培育方法有关.

19. 如图, 已知 SA 垂直于梯形 $ABCD$ 所在的平面, 矩形 $SADE$ 的对角线交于点 F , G 为 SB 的中点,

$$\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}, \quad SA = AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1.$$



(1) 求平面 SCD 与平面 ESD 形成的钝二面角的余弦值;

(2) 在线段 EG 上是否存在一点 H , 使得 BH 与平面 SCD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$? 若存在, 求出 GH 的长; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$;

(2) 存在, $GH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 建立空间直角坐标系求得相关点的坐标, 求平面 SCD 的一个法向量, 根据向量的夹角坐标公式求答案;

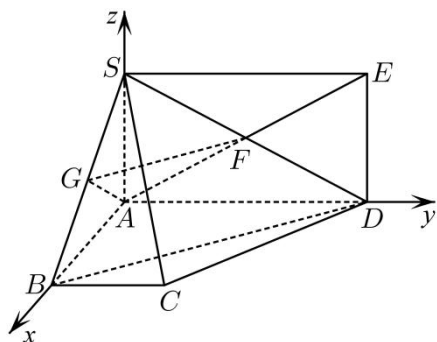
(2) 假设存在点 H , 设 $\overrightarrow{GH} = \lambda \overrightarrow{GE} = \left(-\frac{1}{2}\lambda, 2\lambda, \frac{1}{2}\lambda\right)$, 表示出 \overrightarrow{BH} 的坐标, 根据 BH 与平面 SCD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 利用向量的夹角坐标公式求参数, 进而求 GH 的长.

【小问 1 详解】

因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $SA \perp AB, SA \perp AD$.

又 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, 所以 $AB \perp AD$.

以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,2,0), S(0,0,1), E(0,2,1), G\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{CD}=(-1,1,0), \overrightarrow{SC}=(1,1,-1)$.

设平面 SCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$.

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{CD} = -x + y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{SC} = x + y - z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x=1, \text{ 则 } \vec{m}=(1,1,2),$$

所以平面 SCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,1,2)$.

又平面 ESD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\vec{m}| \times |\overrightarrow{AB}|} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

由图形可知, 二面角 $C-SD-E$ 为钝角, 所以二面角 $C-SD-E$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

【小问 2 详解】

存在, 理由如下:

$$\text{若存在 } H, \text{ 设 } \overrightarrow{GH} = \lambda \overrightarrow{GE} = \left(-\frac{1}{2}\lambda, 2\lambda, \frac{1}{2}\lambda\right), \text{ 则 } \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BG} + \lambda \overrightarrow{GE} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, 2\lambda, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right),$$

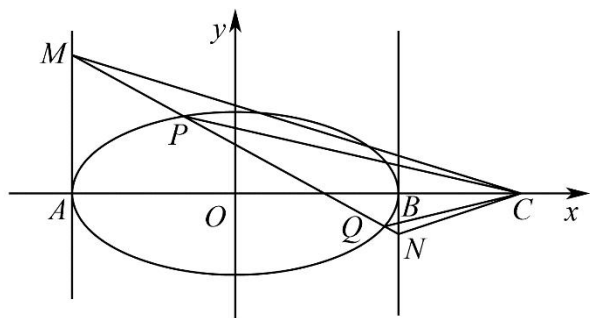
由 (1) 知, 面 SCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,1,2)$,

$$\text{则 } \sin \frac{\pi}{6} = \left| \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{BH} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{BH}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{BH}|} = \frac{\left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda + 2\lambda + 1 + \lambda \right|}{\sqrt{6} \times \sqrt{4\lambda^2 + \frac{1}{2}(1+\lambda)^2}} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } (\lambda-1)^2 = 0,$$

$$\text{所以 } \lambda=1, \text{ 则 } \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GE} = \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{故存在满足题意的 } H, \text{ 此时 } GH = |\overrightarrow{GE}| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

20. 如图所示, 已知 A, B 两点的坐标分别为 $(-2,0), (2,0)$, 直线 AP, BP 的交点为 P , 且它们的斜率之积 $-\frac{1}{4}$.



(1) 求点 P 的轨迹 E 的方程;

(2) 设点 C 为 x 轴上 (不同于 A, B) 一定点, 若过点 P 的动直线与 E 的交点为 Q , 直线 PQ 与 直线 $x=-2$ 和 直线 $x=2$ 分别交于 M, N 两点, 当 $\angle ACM = \angle ACN$ 时, 请比较 $\angle ACP$ 与 $\angle ACQ$ 大小并说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \neq \pm 2)$

(2) $\angle ACP = \angle ACQ$, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 设点 P 的坐标为 (x, y) , 根据 $k_{AP} \cdot k_{BP} = -\frac{1}{4}$, 化简即可得到轨迹方程.

(2) 设直线 MN 的方程为 $y = kx + m$, 表示出点 M, N 的坐标, 由 $\angle ACM = \angle ACN$, 可得 $k_{CM} + k_{CN} = 0$, 再联立直线与椭圆方程, 结合韦达定理, 即可得到结果.

【小问 1 详解】

设点 P 的坐标为 (x, y) ,

$$\text{由题设得 } k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{4} (x \neq \pm 2),$$

$$\text{故所求的点 } P \text{ 的轨迹 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \neq \pm 2).$$

【小问 2 详解】

设 $C(t, 0)$, 由题设知, 直线 MN 的斜率 k 存在,

不妨设直线 MN 的方程为 $y = kx + m$, 将 $x = -2$ 代入 $y = kx + m$, 可得 $y_M = m - 2k$, 则 $M(-2, m - 2k)$, 同理 $N(2, m + 2k)$.

$$\text{由 } \angle ACM = \angle ACN, \text{ 可得 } k_{CM} + k_{CN} = 0, \text{ 所以 } \frac{m-2k}{-2-t} + \frac{m+2k}{2-t} = 0, \text{ 即 } 4k + mt = 0,$$

$$\text{且 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0,$$

$$\text{则 } \Delta > 0 \text{ 且 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{4k^2 + 1},$$

可得

$$k_{CP} + k_{CQ} = \frac{y_1}{x_1 - t} + \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1(x_2 - t) + y_2(x_1 - t)}{(x_1 - t)(x_2 - t)} = \frac{(kx_1 + m)(x_2 - t) + (kx_2 + m)(x_1 - t)}{(x_1 - t)(x_2 - t)} =$$

$$\frac{2kx_1 x_2 + (m - kt)(x_1 + x_2) - 2mt}{(x_1 - t)(x_2 - t)}$$

$$= \frac{\frac{8k(m^2 - 1)}{4k^2 + 1} - \frac{8(m - kt)km}{4k^2 + 1} - 2mt}{(x_1 - t)(x_2 - t)} = \frac{8k(m^2 - 1) - 8(m - kt)km - 2mt(4k^2 + 1)}{(x_1 - t)(x_2 - t)(4k^2 + 1)} = \frac{-8k - 2mt}{(x_1 - t)(x_2 - t)(4k^2 + 1)}$$

$$\text{又因为 } 4k + mt = 0, \text{ 所以 } k_{CP} + k_{CQ} = 0$$

所以当 $\angle ACM = \angle ACN$ 时 $\angle ACP = \angle ACQ$.

21. 已知函数 $f(x) = xe^x - ax + 1, x \in (-1, +\infty), (a > 0), g(x) = bx - \frac{\ln x}{x}$.

(1) 当 $b = 1$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的最小值, 求 a 的值;

(2) 若 $g(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 x_2 > e$.

【答案】(1) $a = 1$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 分别求出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小值, 列方程即可求出结果;

(1) 问题转化为 $2bt = \ln t$ 有两个零点, 证明 $t_1 t_2 > e^2$, 进而只需要证明只需要证明 $\ln t_1 + \ln t_2 > 2$, 也即是

$\ln \frac{t_1}{t_2} > \frac{2\left(\frac{t_1}{t_2} - 1\right)}{\frac{t_1}{t_2} + 1}$, 从而令 $m = \frac{t_1}{t_2} > 1$, 构造函数 $s(m) = \ln m - \frac{2(m-1)}{m+1} (m > 1)$ 求出最值即可证出结论.

【小问 1 详解】

由 $b = 1$.

所以 $g(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

所以 $g'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$.

令 $h(x) = x^2 + \ln x - 1$, 则 $h(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且 $h(1) = 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $g_{\min}(1) = 1$.

又 $f(x) = xe^x - ax + 1$.

所以 $f'(x) = (x+1)e^x - a$. 令 $m(x) = (x+1)e^x - a$, 则 $m'(x) = (x+2)e^x > 0$

所以 $f'(x)$ 为 $(-1, +\infty)$ 上的增函数.

又 $f'(-1) = -a < 0$.

令 $(x+1)e^x - a = 0$, 因为 $n(x) = (x+1)e^x$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $n(-1) = (-1+1)e^{-1} = 0$, 而 $a > 0$, 因此函数

$n(x) = (x+1)e^x$ 与直线 $y = a$ 有唯一交点,

故方程 $(x+1)e^x - a = 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上有唯一解,

所以存在唯一 $x_0 \in (-1, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

即 $(x_0+1)e^{x_0} - a = 0$, 故 $a = (x_0+1)e^{x_0}$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f_{\min}(x) = f(x_0) = x_0 e^{x_0} - ax_0 + 1 = -x_0^2 e^{x_0} + 1 = 1$.

所以 $x_0 = 0$.

故而 $a = 1$.

【小问2详解】

由题意 $g(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 .

$$\text{所以 } \begin{cases} bx_1 = \frac{\ln x_1}{x_1} \\ bx_2 = \frac{\ln x_2}{x_2} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2bx_1^2 = \ln x_1^2 \\ 2bx_2^2 = \ln x_2^2 \end{cases}.$$

所以等价于: $2bt = \ln t$ 有两个零点, 证明 $t_1 t_2 > e^2$.

不妨令 $t_1 > t_2 > 0$.

$$\text{由 } \begin{cases} 2bt_1 = \ln t_1 \\ 2bt_2 = \ln t_2 \end{cases} \Rightarrow 2b = \frac{\ln t_1 - \ln t_2}{t_1 - t_2}.$$

要证 $t_1 t_2 > e^2$, 只需要证明 $\ln t_1 + \ln t_2 > 2$.

即只需证明: $\ln t_1 + \ln t_2 = 2b(t_1 + t_2) = (t_1 + t_2) \frac{\ln t_1 - \ln t_2}{t_1 - t_2} > 2$.

$$\text{只需证明: } \ln t_1 - \ln t_2 > \frac{2(t_1 - t_2)}{t_1 + t_2}, \text{ 即 } \ln \frac{t_1}{t_2} > \frac{2\left(\frac{t_1}{t_2} - 1\right)}{\frac{t_1}{t_2} + 1}.$$

$$\text{令 } m = \frac{t_1}{t_2} > 1.$$

$$\text{只需证明: } \ln m > \frac{2(m-1)}{m+1} (m > 1).$$

$$\text{令 } s(m) = \ln m - \frac{2(m-1)}{m+1} (m > 1).$$

$$\text{则 } s'(m) = \frac{(m-1)^2}{m(m+1)^2}, \text{ 即 } s(m) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上为增函数.}$$

$$\text{又 } s(1) = 0.$$

$$\text{所以 } s(m) > s(1) = 0.$$

综上所述, 原不等式成立.

【点睛】导函数中常用的两种常用的转化方法: 一是利用导数研究含参函数的单调性, 常化为不等式恒成立问题. 注意分类讨论与数形结合思想的应用; 二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理.

$$22. \text{ 在平面直角坐标系 } xOy \text{ 中, 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = t + 2\sqrt{2} \\ y = -t + 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 以坐标原点为极点, } x \text{ 轴的正半}$$

轴为极轴建立极坐标系，曲线 F 的极坐标方程为 $\rho = 1$.

(1) 求曲线 F 的直角坐标方程和直线 l 的极坐标方程；

(2) 射线 $\theta = \frac{2\pi}{3} (\rho > 0)$, $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho > 0)$ 和曲线 F 分别交于点 A , B , 与直线 l 分别交于 D , C 两点, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) $x^2 + y^2 = 1$; $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 4$

(2) $\frac{63\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, 可得直线的极坐标方程, 根据 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{y}{x} = \tan \theta \end{cases}$, 可得曲线的直角坐标方程;

(2) 法一: 将射线转化为直角坐标方程, 联立求各个交点的坐标, 根据图形组合, 可得答案;

法二: 直接在极坐标下, 求出各个交点的极坐标, 然后根据图形组合, 可得答案.

【小问 1 详解】

曲线 F 转换为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 1$.

直线 l 的直角坐标方程为 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$, 根据 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$,

整理得 $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = 4\sqrt{2}$, 即 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 4$.

【小问 2 详解】

法一: 射线 $\theta = \frac{2\pi}{3} (\rho > 0)$, $\frac{\pi}{3} (\rho > 0)$ 和曲线 F 分别交于点 A , B ,

与直线 l 分别交于 D , C 两点, 如图所示:

所以直线 OC 的直角坐标方程为 $y = \sqrt{3}x$,

直线 OD 的直线方程为 $y = -\sqrt{3}x$,

所以 $\begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x + y - 4\sqrt{2} = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = -2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \\ y = 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3}) \end{cases}$,

设直线 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ 与 y 轴交于点 E ,

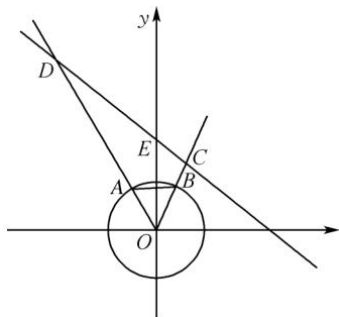
将 $x = 0$ 代入 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$, 得 $y = 4\sqrt{2}$, 即 $|OE| = 4\sqrt{2}$.

所以 $S_{\triangle DOE} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) = 8 + 8\sqrt{3}$.

同理: $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x + y - 4\sqrt{2} = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \\ y = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6} \end{cases}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle COE} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) = 8\sqrt{3} - 8,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\text{四边形}ABCD} &= S_{\triangle DOE} + S_{\triangle COE} - S_{\triangle AOB} = 8 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 8 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{63\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$



$$\text{法二: 由 } \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} (\rho > 0) \\ \rho(\cos\theta + \sin\theta) = 4\sqrt{2} \end{cases}, \text{ 得 } \rho = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1),$$

$$\text{由 } \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} (\rho > 0) \\ \rho(\cos\theta + \sin\theta) = 4\sqrt{2} \end{cases}, \text{ 得 } \rho = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1),$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} |OD| |OC| \sin \angle COD = 16\sqrt{3}, \quad S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}ABCD} = 16\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{63\sqrt{3}}{4}.$$

23. 已知函数 $f(x) = |x+m| + |x-3|$.

(1) 若 $m=1$, 求 $f(x)-5 \leq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq |a^2-6| + |x+m| - |x+1|$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $\left\{x \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$

(2) $[-\sqrt{10}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{10}]$

【解析】

【分析】 (1) 分 $x \leq -1$, $-1 < x < 3$ 和 $x \geq 3$ 三种情况求解即可,

(2) 问题转化为 $|x+1| + |x-3| \geq |a^2-6|$, 令 $g(x) = |x+1| + |x-3|$, 然后利用绝对值三角不等式求出 $g(x)$ 的最小值,

使 $g(x)_{\min} \geq |a^2-6|$, 从而可求出实数 a 的取值范围.

【小问1详解】

由题知 $f(x)-5 \leq 0$, 即 $f(x) \leq 5$. 当 $m=1$ 时, $f(x) = |x+1| + |x-3|$.

当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = -2x+2 \leq 5$, 解得 $x \geq -\frac{3}{2}$, $\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq -1$;

当 $-1 < x < 3$ 时, $f(x) = 4 \leq 5$, 恒成立, $\therefore -1 < x < 3$;

当 $x \geq 3$ 时, $f(x) = 2x - 2 \leq 5$, 解得 $x \leq \frac{7}{2}$, $\therefore 3 \leq x \leq \frac{7}{2}$,

$\therefore f(x) - 5 \leq 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$.

【小问 2 详解】

由 $f(x) \geq |a^2 - 6| + |x + m| - |x + 1|$, 即 $|x + 1| + |x - 3| \geq |a^2 - 6|$.

令 $g(x) = |x + 1| + |x - 3|$,

$\because g(x) = |x + 1| + |x - 3| \geq |(x + 1) - (x - 3)| = 4$, 当且仅当 $(x + 1)(x - 3) \leq 0$ 时等号成立,

$\therefore |a^2 - 6| \leq 4$, $\therefore -4 \leq a^2 - 6 \leq 4$,

$\therefore \therefore 2 \leq a^2 \leq 10$,

解得 $-\sqrt{10} \leq a \leq -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{10}$,

\therefore 实数 a 的取值范围为 $[-\sqrt{10}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{10}]$.